ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2012. Т. 43. ВЫП. 1

О ФИЗИКЕ НА ПЛАНКОВСКИХ РАССТОЯНИЯХ. СТРУНЫ И СИММЕТРИИ

Л. В. Прохоров

НИИ физики им. В. А. Фока, Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2012. Т. 43. ВЫП. 1

О ФИЗИКЕ НА ПЛАНКОВСКИХ РАССТОЯНИЯХ. СТРУНЫ И СИММЕТРИИ

Л. В. Прохоров

НИИ физики им. В. А. Фока, Санкт-Петербургский государственный университет,
Санкт-Петербург, Россия

В работе исследуется проблема появления симметрий в ранее предложенной модели Вселенной (3-мерная сеть, построенная из струн и помещенная в термостат). Вводится число, позволяющее оценить сравнительную вероятность изменения распределения Гиббса (или его неравновесного аналога) под действием случайных сил. Формулируется принцип максимальной устойчивости (ПМУ), согласно которому в природе реализуются наиболее устойчивые распределения. Обсуждается природа калибровочной симметрии и суперсимметрии. Согласно ПМУ выделенными оказываются группы внутренних симметрий $SU(5)$ и $SU(3)$. Показано, что в рамках предлагаемой модели естественным образом появляется обобщенная модель Калуцы–Клейна–Манделя–Фока, объединяющая гравитацию и поля Янга–Миллса. Приведен состоящий из тридцати пунктов список следствий из данной модели, составляющих основу современной физики (классическая гамильтонова механика, квантовая механика, калибровочные симметрии, внутренние симметрии и т. д.).

The emergence of symmetries in the earlier proposed model of the Universe (3D network of strings in a thermal bath) is studied. The number is introduced estimating the relative probability of changing of the Gibbs distribution (or its nonstable analogue) under the action of stochastic forces. The principle of maximal stability (PMS) stating that only the most stable distributions are realized in the Universe is formulated. The nature of gauge symmetries and supersymmetries is discussed. According to PMS the groups $SU(5)$ and $SU(3)$ are advantageous. It is shown that in this model the Kaluza–Klein–Mandel–Fock unification of gravity and the Yang–Mills fields appears in the natural way. The list of thirty consequences of the model is given. They form the basis of modern physics (classical Hamiltonian mechanics, quantum mechanics, gauge symmetries, internal symmetries and so on).

PACS: 04.60.-m; 11.25.-w

1. ВВЕДЕНИЕ

Предложенная в [1, 2] модель Вселенной как 3-мерной сети, построенной из бозе-струн и помещенной в термостат, дает ответы на многие важнейшие вопросы. Так, объясняются причина появления вероятностей в микромире, причина появления амплитуд вероятности, природа постоянной Планка h, причина появления пространства Фока, причина однородности реликтового излучения (проблема горизонта в космологии), природа космологической постоянной и т. д. Более того, при этом естественным образом появляется классическая гамильтонова механика. Под «термостатом» подразумевается источник случайных сил. Вопрос о природе термостата, разумеется, выходит за рамки современной физики, поскольку речь идет о планковских расстояниях. Но именно термостат ведет к появлению вероятностей в микрофизике. Оказывается, что эволюция малых отклонений от равновесного распределения Гиббса для гармонического осциллятора описывается амплитудами вероятности, а постоянная Планка h есть соответствующая нормировочная постоянная. Все это однозначно приводит к появлению пространства Фока $[1, 2]$. Однородность микроволнового излучения (проблема горизонта) есть следствие гипотезы об однородности термостата. Космологическая постоянная появляется вследствие отклонения распределения Гиббса от равновесного, $\Lambda = \alpha^2/2$ (в соответствующих единицах), где $1/\alpha = t_r$ — время релаксации неравновесного распределения, т. е. если бы $\Lambda = 0$, то не было бы и амплитуд вероятности.

В данной работе ставится задача выявления наиболее устойчивых, наиболее вероятных структур в термостате. Исходные положения таковы: 1) справедлива стандартная теория вероятностей (задается аксиомами А. Н. Колмогорова [3]); 2) структура помещена в термостат (источник случайных сил); 3) «материальные точки» — объекты воздействия случайных сил. Вопрос о природе этих «материальных точек» также выходит за рамки современной физики. При этом не предполагается существование каких-либо законов механики (например, законов Ньютона). Рассматривается лишь итог многократного воздействия случайной силы — случайных изменений переменных в распределении Гиббса. Очевидно, максимально устойчивым будет наиболее вероятное распределение, т. е. состояние с минимальной вероятностью его деформации термостатом. Это относится как к равновесным, так и к неравновесным распределениям.

В работе показано, что простейшим устойчивым равновесным распределением является таковое для гармонического осциллятора. Утверждение базируется на соответствующей теореме теории вероятностей (центральная предельная теорема). Вводится число, характеризующее степень устойчивости распределения Гиббса («степень симметричности» группы преобразований, относительно которых распределение инвариантно, «индекс стабильности»):

$$r = \frac{l}{N}, \tag{1.1}$$

где l — ранг группы, а N — ее размерность. Чем больше l, тем больше инвариантов группы, не меняющихся при изменении ее параметров, тем больше стабильность распределения, а чем меньше N — тем меньше параметров, от которых оно зависит, поэтому наиболее предпочтительными с точки зрения распределения Гиббса оказываются группы с максимальными r. Формулируется «принцип максимальной устойчивости» (ПМУ) распределения. Его суть:

с наибольшей вероятностью реализуются наиболее устойчивые структуры, т. е. структуры с минимальной вероятностью изменения их распределений. Для равновесных распределений минимальна вероятность их превращения в неравновесные, а для неравновесных распределений данный принцип минимизирует вероятность их изменения. Оказывается, что, например, согласно ПМУ струна Намбу–Гото является более устойчивым образованием, нежели совокупность невзаимодействующих частиц. Появление струн влечет появление важнейших понятий: псевдоевклидово пространство, антикоммутирующие переменные (фермионы), идея о суперсимметрии, калибровочные симметрии. Далее изучается вопрос о предпочтительности той или иной группы симметрии с точки зрения ПМУ. Выясняется, что согласно этому принципу преимущество имеют группы $SU(n)$. Но именно они (или унитарно эквивалентные им) и актуальны в физике элементарных частиц.

Как ни удивительно, в предлагаемом подходе удается выяснить причину появления группы так называемого Великого объединения $SU(5)$ и хромодинамической группы $SU(3)$ [4]. Векторная переменная струны Намбу–Гото принадлежит псевдоевклидову пространству $(25+1)$ $[5,6]$. Ввиду отсутствия в ее лагранжиане продольных скоростей (см. (3.5)) число физических переменных равно $24 = 5^2 - 1$, но это и есть размерность группы $SU(5)$. Другая группа инвариантности — группа симметрии евклидова пространства такой же размерности, группа $SO(24)$, менее предпочтительна с точки зрения ПМУ. Оказывается, однако, что в квантовой теории струне «выгоднее» закручиваться в спираль [2]. Данное обстоятельство имеет два важнейших следствия: 1) вместо одномерной струны появляется 3-мерная структура, существующая в 3-мерном пространстве; 2) появляется идея суперсимметрии; теоретически наиболее устойчивой структурой оказывается суперструна Рамона–Неве–Шварца. Это ведет к нарушению группы $SU(5)$ и появлению группы $SU(3)$. Векторные возбуждения суперструны принадлежат псевдоевклидову пространству $(9+1)$. Число ее бозонных физических степеней свободы равно $8 = 3^2 - 1$, т. е. размерности группы $SU(3)$. Последняя, согласно ПМУ, более предпочтительна, нежели группа симметрии евклидова пространства такой же размерности $SO(8)$.

Наконец, решается также вопрос о преимуществах того или иного представления группы $SU(n)$. Минимально деформируемым оказывается таковое, канонические переменные которого реализуют ее фундаментальное представление. Этот вывод небезынтересен в связи с другой обсуждаемой особенностью модели — явной выделенностью комплексных переменных. Как известно, объектами фундаментального представления данной группы как раз и являются комплексные функции.

Главная проблема данного подхода — моделирование 3-мерной сети. Прежде всего встает достаточно трудный вопрос о геометрии ячеек с точки зрения ПМУ. Он легко решается для 2-мерной сети, где ячейкой служит правильный шестиугольник (пчелиные соты, «вид сверху»). В случае 3-мерной сети решение неизвестно, но для формулирования основной идеи модели достаточно рассмотреть кубическую решетку с ребрами из струн. Необычность модели в том, что из одной точки (угол куба) выходит шесть струн, хотя обычно в теории рассматривают только случай трех струн. Тем не менее и здесь удается сформулировать основную идею подхода. Ребра ячейки образуют замкнутые струны (в идеале суперструны). Возбуждения последних содержат все известные поля. В локальном пределе (размеры куба стремятся к нулю) ячейка превращается в точку, и возбуждения струн превращаются в обычные локальные поля в псевдоевклидовом пространстве. Если ограничиться симметричным тензорным возбуждением ранга 2 (метрический тензор), то получится обобщенная модель Калуцы–Клейна–Манделя–Фока (ККМФ), объединяющая гравитационное поле и векторное поле с нетривиальной группой симметрии (скалярные поля обычно не упоминаются).

В разд. 2 формулируется *принцип максимальной устойчивости*. Показано, что простейшим равновесным распределением является таковое для гармонического осциллятора. Утверждение следует из упоминавшейся теоремы теории вероятностей (центральная предельная теорема) и критерия (1.1). Как известно, струны и все наблюдаемые поля есть совокупности гармонических осцилляторов. Обсуждается также роль дискретных симметрий и комплексных канонических переменных.

В разд. 3 излагаются дискретные теории струн и бран. Оказывается, что согласно ПМУ более предпочтительной, более стабильной по сравнению с неупорядоченным набором осцилляторов простейшей структурой, построенной из упомянутых точечных объектов, является «бозе-струна», точнее, дискретная структура, превращающаяся в непрерывном пределе в струну Намбу–Гото. Рассмотрена дискретная модель p-браны, и показано, что в квантовой теории браны менее предпочтительны по сравнению со струнами. Важность выделенности струн связана с тем, что они порождают понятие *калибровочной инвариантности* — важнейший атрибут современной физики.

Будучи помещенной в термостат, струна описывается квантовой механикой [1, 2] (термостат генерирует малые отклонения осцилляторов от равновесного состояния, эволюция которых описывается амплитудами вероятности). Согласно же квантовой механике искривленная струна статистически более предпочтительна, ибо тогда в гамильтониане появляются отрицательные слагаемые (появление квантового потенциала [2] в искривленном пространстве). Это радикально меняет структуру струны: струна закручивается в спираль, появляются фермионы — антикоммутирующие спинорные степени свободы со спином $\hbar/2$, в идеале возможно появление *суперсимметрии* (разд. 4).

Итак, в идеальном случае наименее деформируемым и наиболее вероятным будет распределение Гиббса, задаваемое суперсимметричным гамильтонианом (нулевая энергия основного состояния). В данной модели, однако, как и в реальности, суперсимметрия отсутствует, ибо струна дискретна и радиус спирали должен быть много больше расстояния между образующими ее осцилляторами. Далее, в соответствии с ПМУ наиболее стабильными и вероятными распределениями должны быть «наиболее симметричные» из них, поскольку если распределение не зависит от каких-либо степеней свободы (является инвариантным), то уменьшается вероятность его изменения. Это объясняет появление *внутренних симметрий*. В разд. 5 группы и их представления классифицируются с точки зрения ПМУ. В табл. 1 приведены данные о классических группах (ранги и размерности групп), позволяющие вычислить их индексы стабильности (1.1). Наиболее устойчивыми оказываются группы $SU(n)$. В табл. 2 с точки зрения ПМУ рассматриваются простейшие представления групп $SU(n)$.

В разд. 6 Вселенная моделируется находящейся в термостате 3-мерной сетью, построенной из струн. В крупномасштабном пределе (т. е. при стремлении к нулю размера ячеек) получается обобщенная *теория Калуцы–Клейна–Манделя–Фока* с неабелевыми векторными полями.

В заключении подводятся итоги работы. Подчеркивается роль принципа максимальной устойчивости.

В приложения вынесены некоторые вспомогательные вопросы, в частности, демонстрируется естественность появления в данном подходе «представления Фока».

2. ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

2.1. Теория вероятностей и принцип максимальной устойчивости. Покажем, что распределение Гиббса для гармонического осциллятора вытекает из:

1) центральной предельной теоремы теории вероятностей,

2) принципа максимальной устойчивости распределения.

Первое условие есть хорошо известный математический факт. Если одномерная система подвержена воздействию случайных сил и характеризуется некоторым распределением вероятности, то, определяя предел среднего значения координаты x в результате n-кратного воздействия силы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}=\bar{x} \tag{2.1}$$

и предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x_1+\ldots+x_n-n\bar{x})^2}{n}=\sigma^2, \tag{2.2}$$

для $x = (x_1 + \ldots + x_n - n\bar{x})/\sigma\sqrt{n}$ при $n \to \infty$ получаем нормальное распределение с плотностью вероятности [3, с. 285]

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}. \tag{2.3}$$

Данное утверждение обобщается на евклидовы пространства произвольной конечной размерности.

Но распределение (2.3) не будет оптимальным в том смысле, что любая вариация x превращает его в неравновесное. Однако если взять 2-мерное распределение Гаусса

$$w(p,q) = \frac{1}{2\pi}\exp\left(-\frac{p^2+q^2}{2}\right), \tag{2.4}$$

то изменения p, q, сохраняющие сумму $p^2 + q^2$, оставляют его неизменным. Подобные вариации и удовлетворяют классическим уравнениям Гамильтона для гармонического осциллятора [2]. Таким образом, хотя число варьируемых параметров удвоилось, по-прежнему изменение лишь одного параметра выводит систему из состояния равновесности. Следовательно, с точки зрения устойчивости распределения второе более предпочтительно. В этом и состоит принцип максимальной устойчивости распределения. Будем характеризовать степень устойчивости распределения параметром

$$r_N = \frac{I}{N}, \tag{2.5}$$

где I — число «инвариантных параметров», т. е. параметров, от которых не зависит распределение, а N — размерность пространства. Тогда для распределения (2.3) $r_1 = 0$, а для (2.4) $r_2 = 1/2$ и $r_2 > r_1$. Распределение (2.4) более устойчиво.

Итак, показатель экспоненты в (2.4) пропорционален гамильтониану гармонического осциллятора (в соответствующих единицах), т. е. гармонический осциллятор оказывается выделенным, он более предпочтителен с точки зрения принципа максимальной устойчивости распределения. Теперь вспомним, что все поля и струны суть совокупности взаимодействующих гармонических осцилляторов. Данный факт можно рассматривать как свидетельство эффективности принципа максимальной устойчивости. Наиболее «живучими» оказываются распределения с наибольшими r_N.

2.2. Дискретные симметрии и комплексные переменные. *Дискретные симметрии.* Возникает вопрос: какова роль дискретных симметрий в проблеме устойчивости распределений? В случае одномерного «распределения Гиббса» $G_1 \sim \mathrm{e}^{-q^2/2}$, как отмечалось, любая малая вариация координаты $q \to q + \delta q$ изменяет его, порождая неустойчивое распределение. Исключением является отражение $q \to -q$. Данная дискретная симметрия не меняет распределения Гиббса, но и не влияет на его устойчивость (согласно ПМУ). В двумерном случае совокупность дискретных симметрий богаче. Пусть вектор задается столбцом $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ и $\hat{R}_1 \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix}$, $\hat{R}_2 \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$, $\hat{R}_1\hat{R}_2 = -\hat{I}$, $\hat{R}_1^2 = \hat{R}_2^2 = \hat{I}$, где $\hat{I}x = x$, $x = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.

Очевидно, операторы $\hat{R}_1, \hat{R}_2$ зависимы, ибо $\hat{R}_2 = -\hat{R}_1$. Итак, полная группа симметрии двумерного распределения Гиббса $G_2 \sim \mathrm{e}^{-(p^2+q^2)/2}$ есть группа $SO(2)$ плюс операция отражения, генерируемая оператором $\hat{R}_1$. Выясним, каковы последствия учета этой дискретной симметрии.

Прежде всего очевидно, что операторы $\hat{R}_1, \hat{R}_2$ меняют гамильтоновы уравнения движения $\dot{q} = p$, $\dot{p} = -q$. Далее, под воздействием этих операторов меняется 2-форма $dq \wedge dp$, задающая ориентацию фазового пространства и стрелу времени [7]. Наконец, данные преобразования, вообще говоря, не инфинитезимальны. Итак, хотя распределение Гиббса G_2 и не меняется при отражениях $\hat{R}_1, \hat{R}_2$, уравнения Гамильтона изменяются, меняется направление стрелы времени, т. е. радикально меняется физическая картина. Следовательно, дискретные симметрии нельзя относить к разряду таковых, повышающих устойчивость распределения Гиббса. Они меняют картину мира.

Комплексные переменные. В квантовой механике используются комплексные переменные, поэтому обсудим особенности комплексных переменных $z = (q + ip)/\sqrt{2}$ и $\bar{z} = z^*$, через которые выражается показатель экспоненты G_2: $\bar{z}z = (p^2 + q^2)/2$.

Координаты комплексной плоскости z обладают рядом необычных свойств. Прежде всего z есть точка комплексной плоскости, т. е. она характеризуется двумерным вектором. С другой стороны, $\bar{z}$, z можно рассматривать как пару канонических переменных, полученных из пары q, p с помощью неканонического преобразования. Действительно, скобка Пуассона задается равенством

$$\{f, g\} = \frac{\partial(f, g)}{\partial(q, p)} \equiv \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}, \quad \{q, p\} = 1.$$

Тогда

$$\{\bar{z}, z\} = \frac{\partial(\bar{z}, z)}{\partial(q, p)} = \frac{1}{2}(i + i) = i\{q, p\},$$

т. е. преобразование $(q, p) \to (\bar{z}, z)$ изменяет скобку Пуассона и не является каноническим [8]. Но гамильтонову механику можно формулировать и в терминах (q, p), и в терминах $(\bar{z}, z)$. Особенность новых канонических переменных $(\bar{z}, z)$ заключается в следующем. С одной стороны, казалось бы,

$\bar{z}$ и z — независимые переменные, ибо

$$\frac{d\bar{z}}{dz} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial q}\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^{-1} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial p}\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^{-1} = \frac{1}{1} + \frac{-i}{i} = 0.$$

С другой — переменная $\bar{z}$ однозначно определяется по z, именно, отражением $p \to -p$: $\bar{z} = z|_{p\to -p}$, т. е. можно считать, что $\bar{z}$ есть функция z. Но и с точки зрения дифференциальных форм они выступают как независимые переменные:

$$d\bar{z} \wedge dz = \frac{1}{2} d(q - ip) \wedge d(q + ip) = i dq \wedge dp.$$

Подчеркнем, что данное свойство комплексных переменных уникально. Допустим, что мы слегка изменили правило построения $\bar{z}$ по z: $\bar{z} \to \bar{z}_\alpha = (q - i\alpha p)/\sqrt{2}$, $\alpha \neq 1$. Тогда $d\bar{z}_\alpha/dz = 1 - \alpha \neq 0$, т. е. $\bar{z}_\alpha$ также есть функция z, хотя и вполне определенная (линейная). Но по-прежнему $d\bar{z}_\alpha \wedge dz = (i/2)(1+\alpha) dq \wedge dp \neq 0$.

Взглянем на проблему с несколько другой точки зрения. Найдем наиболее адекватные переменные для описания симметрии $SO(2)$ распределения G_2. Оператор поворота в плоскости (q, p) есть $\exp(i\sigma_2\varphi)$, где $i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, σ_2 — матрица Паули. Естественно поставить вопрос о переменных, генератором инвариантных преобразований которых была бы диагональная матрица. У таких переменных менялась бы только фаза. Легко убедиться, что собственными векторами матрицы $i\sigma_2$ являются 2-векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$ с собственными значениями $\pm i$. Обозначим $\psi_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}/\sqrt{2}$, $\psi_\pm^T \psi_\pm^* = 1$, где $\psi_\pm^T = (1, \pm i)/\sqrt{2}$. Тогда $\psi_+^T \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = z$, $\psi_-^T \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \bar{z}$. Так как $\psi_\pm$ есть единичные векторы, то вся информация о переменных q, p заключена в комплексных переменных $z, \bar{z}$. Представляется, что именно комплексные переменные и являются наиболее адекватными для описания симметрии $SO(2)$. Напомним, что гамильтоновы уравнения движения не инвариантны относительно операции $\hat{R}_1$, поэтому дискретные преобразования не играют роли в вопросе об устойчивости того или иного распределения.

Изложенное позволяет дать ответ на поднятый выше вопрос о парадоксе относительно того, что $\bar{z}$ есть функция z. Представим $z = x_1e_1 + x_2e_2$, $\bar{z} = x_1e_1 - x_2e_2$, где e_1, e_2 — единичные орты, $e_1^2 = -e_2^2 = 1$. Орты e_1, e_2 можно отождествить соответственно с единичной 2×2 матрицей и матрицей $i\sigma_2$. Определяя оператор $\nabla = e_1\partial/\partial x_1 - e_2\partial/\partial x_2$, имеем: $\partial\bar{z}/\partial x_1 \neq 0$, $\partial\bar{z}/\partial x_2 \neq 0$, но $\nabla\bar{z} = e_1^2\partial x_1/\partial x_1 + e_2^2\partial x_2/\partial x_2 = 1 - 1 = \partial\bar{z}/\partial z = 0$, тогда как $\nabla z =$

$\partial z/\partial z = 2$. Следовательно, операция $\partial\bar{z}/\partial z = \nabla\bar{z}$ в действительности есть операция вычисления дивергенции. Итак, $\bar{z} = \bar{z}(z)$, но производная $\partial\bar{z}/\partial z$ не может служить критерием независимости $\bar{z}$ от z.

Имеют ли преимущества комплексные переменные с точки зрения устойчивости распределения Гиббса? Представляется, что имеют. Во-первых, вместо двух переменных оказывается достаточным ограничиться одной. Тем самым уменьшается вероятность изменения распределения. Уравнение для второй переменной получается из уравнения для первой с помощью операции комплексного сопряжения. Полное описание дается теперь решениями одного уравнения. Во-вторых, как мы увидим (разд. 5), с точки зрения устойчивости распределения Гиббса предпочтение имеют фундаментальные представления групп $SU(n)$, изначально комплексные. К тому же гамильтонова механика содержит объект, квадрат которого равен отрицательной величине, — это симплектическая форма (аналог мнимой единицы). В стандартной формулировке механики $\hat{\omega}^2 = -\hat{I}$, $(\hat{\omega})_{ij} = \omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

3. КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ

А имеет ли какое-либо преимущество перед другими структурами струна? Оказывается, имеет. Как известно, у струны Намбу–Гото возбуждаются только поперечные степени свободы — скорости, продольные струне, не входят в лагранжиан (см. (3.5)).

Следовательно, системообразующим элементам «выгоднее» формировать цепочки, так как тогда уменьшается вероятность появления неравновесного распределения. Поскольку бозе-струны существуют в 26-мерном пространстве [5, 6], исключается целая степень свободы поля. У p-бран, $p > 1$, нефизическими являются p степеней свободы, ибо в их лагранжиан входят только скорости, ортогональные p-бране, поэтому они, как классические объекты, имеют преимущество перед струнами. Надо, однако, иметь в виду, что все эти объекты описываются в рамках квантовой механики (термостат). Струна может искривляться. Тогда при описании распространения возбуждений по искривленной струне следует принимать во внимание появление отрицательного вклада в энергию (квантовый потенциал). Следовательно, в соответствии с распределением Гиббса искривленные конфигурации струн, например, спирали, более предпочтительны. Кроме того, в идеальном случае спираль определенной конфигурации моделирует суперструну [2]. У p-бран, $p > 1$, нет подобных суперсимметричных конфигураций. Рассмотрим все эти вопросы подробнее.

3.1. Струна. Лагранжиан струны Намбу–Гото получается при переходе к непрерывному пределу в линейной совокупности релятивистских частиц, описываемых лагранжианом

$$L = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}, \tag{3.1}$$

с учетом дополнительного условия: допускаются лишь смещения, нормальные к струне, т. е. к линии размещения частиц [5]. Другими словами, в сумме лагранжианов (3.1) нужно сделать замену

$$\mathbf{v} \to \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - \mathbf{k}\frac{(\mathbf{v},\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2}, \quad \mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \sigma}, \tag{3.2}$$

где σ параметризует точки струны. В самом деле, действие для линейного множества релятивистских частиц одинаковой массы

$$\tilde{S}_1 = -m\sum_n \int dt\sqrt{1-\mathbf{v}_n^2} = -\frac{m}{\Delta l}\sum_n \Delta l \int dt\sqrt{1-\mathbf{v}_n^2}, \tag{3.3}$$

где n — номер частицы ($n = \ldots -1, 0, 1, \ldots$), Δl — расстояние между частицами, $\mathbf{v}_n(t) = d\mathbf{r}_n(t)/dt$, в непрерывном пределе при $\Delta l \to 0$, $m \to 0$, $n \to \infty$, $\Delta l n \to \sigma$, $m/\Delta l \to \gamma$, записывается в виде

$$\tilde{S}_1 \to -\gamma \int dl\, dt\sqrt{1-\mathbf{v}^2}, \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{r}(\sigma, t)}{\partial t}. \tag{3.4}$$

Переходя в (3.4) к поперечным скоростям (3.2), имеем

$$S_1 = -\gamma \int dt\, d\sigma |\mathbf{k}| \sqrt{1-\mathbf{v}_\perp^2} \quad (\Delta l = |\Delta \mathbf{r}|). \tag{3.5}$$

Вводя теперь D-вектор $X^\mu(\tau,\sigma)$: $(t(\tau,\sigma), \mathbf{r}(t(\tau,\sigma),\sigma)) \equiv (X^0, \mathbf{X})$, $\mu = 0, 1, \ldots, D-1$, τ — временной инвариантный параметр, $t(\tau,\sigma)$ — локальное время (зависит от σ), $\dot{t} = \partial t(\tau,\sigma)/\partial\tau$, обнаруживаем, что действие S_1 равно

$$\begin{gathered} S_1 = -\gamma \int d\tau\, d\sigma\, \dot{t}|\mathbf{k}|\sqrt{1-\mathbf{v}_\perp^2} = -\gamma \int d^2u \sqrt{\dot{t}^2[\mathbf{k}^2(1-\mathbf{v}^2) + (\mathbf{v},\mathbf{k})^2]}, \\ u^0 = \tau, \quad u^1 = \sigma. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Обозначая

$$\dot{X} = \frac{\partial X}{\partial \tau} : \left(\dot{t}, \frac{\partial \mathbf{r}(\sigma,t)}{\partial t}\dot{t}\right), \quad X' = \frac{\partial X}{\partial \sigma} : (t', \mathbf{k} + \mathbf{v}t')$$

и учитывая, что $\dot{X}^2 = \dot{t}^2(1-\mathbf{v}^2)$, $\dot{X}X' = \dot{t}(t'(1-\mathbf{v}^2) - (\mathbf{v},\mathbf{k}))$, $X'^2 = t'^2(1-\mathbf{v}^2) - 2(\mathbf{v},\mathbf{k})t' - \mathbf{k}^2$, убеждаемся, что квадрат подынтегрального выражения в (3.6) равен $-g$, где g — определитель в лагранжевой плотности Намбу–Гото $\mathcal{L}_{\mathrm{NG}} = -\gamma|g|^{1/2}$:

$$-g = -\begin{vmatrix} \dot{X}\dot{X} & \dot{X}X' \\ X'\dot{X} & X'X' \end{vmatrix} = \dot{t}^2\left[\mathbf{k}^2(1-\mathbf{v}^2) + (\mathbf{v},\mathbf{k})^2\right].$$

Итак, струна Намбу–Гото получается при переходе к непрерывному пределу в линейном множестве релятивистских частиц. При этом условие нормальности колебаний ($\mathbf{v} \to \mathbf{v}_\perp$) эквивалентно введению осцилляторного взаимодействия между частицами; в калибровке $\dot{X}X' = 0$, $\dot{X}^2 + X'^2 = 0$ [5, 6] уравнение движения для X дается уравнением Даламбера

$$\Box X^\mu \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma^2} - \frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\right) X^\mu = 0, \tag{3.7}$$

т. е. естественным образом появляется 2-мерное псевдоевклидово пространство $u(\tau, \sigma)$.

3.2. Браны. Оказывается, что процедура дискретизации струн (представления их совокупностью релятивистских частиц [5]), описанная в п. 3.1, применима и к p-бранам, $p > 1$ [9]. Именно, если в p-мерном евклидовом пространстве, погруженном в D-мерное псевдоевклидово пространство, взять кубическую решетку и поместить в ее узлы релятивистские частицы, допустив только нормальные к p-мерному пространству движения частиц, то лагранжиан такой системы, определяемый как сумма лагранжианов свободных частиц, в непрерывном пределе превращается в лагранжиан p-браны. Выпишем основные формулы доказательства.

Координаты частицы в узле $\mathbf{n}$ браны, $\mathbf{n}(n_1, \ldots, n_p)$, $n_i = \ldots -1, 0, 1, \ldots$, $i = 1, \ldots, p$, задаются $(D-1)$-мерным вектором $\mathbf{r}_\mathbf{n}(t)$. Действие системы частиц равно сумме

$$\tilde{S}_p = -m \int dt \sum_{n_1,\ldots,n_p} \sqrt{1 - \mathbf{v}_\mathbf{n}^2}, \quad \mathbf{v}_\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{r}_\mathbf{n}(t)}{dt}. \tag{3.8}$$

Обобщение соответствующих формул п. 3.1 не столь сложно. Определим $\Delta l_i = |\mathbf{r}_{n_1,\ldots,n_i,\ldots,n_p} - \mathbf{r}_{n_1,\ldots,n_i-1,\ldots,n_p}|$, перейдем к непрерывному пределу

$$\Delta l_i n_i \to u_i, \ \frac{m}{\Delta l_1 \cdots \Delta l_p} \to \gamma, \quad \Delta l_i \to 0, \quad m \to 0, \quad n_i \to \infty$$

и введем инвариантный параметр τ. Тогда $t_\mathbf{n} \to t(\tau, \mathbf{u})$ и $\mathbf{r}_\mathbf{n}(t) \to \mathbf{r}(t(\tau, \mathbf{u}), \mathbf{u})$ образуют D-вектор $X^\mu(\tau, \mathbf{u})$ с компонентами

$$X^\mu(\tau, \mathbf{u}) := (t(\tau, \mathbf{u}), \mathbf{r}(t(\tau, \mathbf{u}), \mathbf{u})) \equiv (X^0(t(\tau, \mathbf{u})), \mathbf{X}(t(\tau, \mathbf{u}), \mathbf{u})).$$

Допустим для простоты, что вектор $\mathbf{u}$ задан в ортогональном базисе. Переходя к нормальным скоростям $\mathbf{v}(t, \mathbf{u}) \to \mathbf{v}_\perp(t, \mathbf{u}) = \mathbf{v} - \sum\limits_i (\mathbf{v}, \mathbf{k}_i)\mathbf{k}_i/\mathbf{k}_i^2$, $(\mathbf{k}_i, \mathbf{v}_\perp) = 0$, где $\mathbf{k}_i = \partial\mathbf{r}/\partial u_i$, $(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_j) = \delta_{ij}$, $\mathbf{v}_\perp^2 = \mathbf{v}^2 - \sum\limits_i (\mathbf{v}, \mathbf{k}_i)^2/\mathbf{k}_i^2$, приходим к следующему выражению для действия:

$$\tilde{S}_p = -\frac{m}{\Delta l_1 \cdots \Delta l_p} \sum_{n_1,\ldots,n_p} \Delta l_1 \cdots \Delta l_p \int dt \sqrt{1-\mathbf{v}_{\mathbf{n}}^2} \to$$
$$\to -\gamma \int d^{p+1} u \dot{t} |\mathbf{k}_1| \cdots |\mathbf{k}_p| \sqrt{1-\mathbf{v}^2+\mathbf{\Sigma}_i (\mathbf{v},\mathbf{k}_i)^2/\mathbf{k}_i^2} \quad (3.9)$$

(здесь $u^0 \equiv \tau$). Из определения $X^\mu(\tau,\mathbf{u})$ следует: $\dot{X} = \partial X/\partial\tau = (\dot{t}, \mathbf{v}\dot{t})$, $X_{,i} = \partial X/\partial u_i = (t_{,i}, \mathbf{v}t_{,i} + \mathbf{k}_i)$. Скалярные произведения этих векторов равны

$$\dot{X}^2 = \dot{t}^2(1-\mathbf{v}^2), \quad X_{,i}X_{,j} = t_{,i}t_{,j}(1-\mathbf{v}^2) - (\mathbf{v},\mathbf{k}_i)t_{,j} - (\mathbf{v},\mathbf{k}_j)t_{,i} - (\mathbf{k}_i,\mathbf{k}_j),$$
$$\dot{X}X_{,i} = \dot{t}t_{,i}(1-\mathbf{v}^2) - \dot{t}(\mathbf{v},\mathbf{k}_i).$$

После некоторых вычислений убеждаемся, что стандартное действие p-браны

$$S_p = -\gamma \int d^{p+1}u \sqrt{|\det X_{,i}X_{,j}|}, \quad X_{,i}X_{,j} = X^\mu_{,i}X^\nu_{,j}\eta_{\mu\nu} \quad (3.10)$$

идентично действию (3.9).

Приведенное доказательство легко обобщается на случай неортогонального базиса, когда $(\mathbf{k}_i,\mathbf{k}_j) \neq 0$ при $i \neq j$, ибо с помощью стандартной процедуры можно перейти к ортогональному базису

$$\mathbf{k}_i \to \mathbf{k}'_i = \mathbf{k}_i - \sum_{j<i} (\mathbf{k}_i\mathbf{k}'_j)\mathbf{k}'_j/\mathbf{k}'^2_j, \quad i = 2,\ldots,p, \quad \mathbf{k}'_1 = \mathbf{k}_1.$$

Отметим: здесь не предполагается, что браны построены из струн.

3.3. Калибровочная инвариантность. Струны и браны дают хороший пример, иллюстрирующий роль принципа максимальной устойчивости распределения. Струна есть D-мерное поле в пространстве-времени $(1+1)$. Допустимы различные теории. Если формулировать теорию явно релятивистски-инвариантным образом (т. е. считать $(t,\mathbf{r})$ вектором в D-мерном псевдоевклидовом пространстве), но не переходить к нормальным скоростям $\mathbf{v}_\perp$, как в (3.2), (3.9), то получится теория с абелевой калибровочной группой (X^0 — нефизическая переменная) и нулевым гамильтонианом (связь, см. предисловие в [10] и работу [11]). Струна Намбу–Гото [5] инвариантна относительно двумерной калибровочной группы (общая ковариантность на псевдоевклидовой поверхности $(1+1)$), поэтому переход $\mathbf{v} \to \mathbf{v}_\perp$ исключает целую степень свободы *поля*. Следовательно, с точки зрения ПМУ именно эта струна имеет предпочтение.

Но тогда, казалось бы, p-брана, $p > 1$, обладает еще большим преимуществом, ибо из динамики поля исключаются целых p степеней свободы. Дело в том, что струне энергетически выгодно свертываться в спираль — эволюция неравновесных распределений в фазовом пространстве описывается амплитудами вероятности [1, 2], а появляющийся при этом квантовый потенциал отрицателен. Возбужденная спираль моделирует фермионы и суперсимметрию (см. разд. 4). Суперсимметричные теории обладают тем преимуществом, что энергия их основного состояния равна нулю, т. е. они максимально устойчивы. Отрицательный потенциал появляется только при квантовом описании движения частицы в плоскости. Этого нет для p-браны, $p > 1$. Действительно, поскольку для релятивистской частицы $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2 \to -\Delta + m^2$, где Δ — оператор Лапласа в n-мерном евклидовом пространстве, то в соответствующих сферических координатах $r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$ он имеет вид

$$-\Delta = -\partial_r^2 - \frac{n-1}{r}\partial_r - \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega = -\frac{1}{r^{(n-1)/2}}\partial_r^2 r^{(n-1)/2} + \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2} - \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega,$$

где Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа [8,12]. Отсюда ясно, что квантовый потенциал

$$V_q = \frac{(n-1)(n-3)}{4r^2}$$

отрицателен только для двумерного пространства, $n = 2$. Во всех остальных случаях он или положителен, или равен нулю. Следовательно, согласно распределению Гиббса, p-браны ($p > 1$) менее предпочтительны по сравнению со струнами.

Может показаться, что обращение к релятивистским частицам (лагранжиан (3.1)) есть отступление от основной идеи подхода — гармонического осциллятора в термостате (подмена одного объекта другим). В действительности струна (брана) есть линейный (p-мерный) набор гармонических осцилляторов [5], а мотив перехода к калибровочно-инвариантному действию (3.10) такой же, что и в случае одной релятивистской частицы [10, 11]: желание сформулировать задачу «максимально инвариантным» образом, не меняя ее физического содержания.

Таким образом, согласно ПМУ преимущество перед другими струнами имеет струна Намбу–Гото, а это означает появление в теории калибровочно-инвариантных систем, т. е. свойства *калибровочной инвариантности*.

4. СУПЕРСИММЕТРИЯ

В квантовой механике при движении частицы по плоской кривой (например, по окружности) появляются состояния с отрицательной энергией [13, 14]. Если гамильтониан нерелятивистской свободной частицы равен $\hat{H} = -\Delta_2/2$, то в полярных координатах он есть

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\hat{P}_r^2 + \frac{1}{r^2}\hat{P}_\phi^2 - \frac{1}{4r^2}\right), \tag{4.1}$$

где $\hat{P}_r = -i\frac{1}{\sqrt{r}}(\partial/\partial r)\sqrt{r}$, $\hat{P}_\phi = -i\partial/\partial\phi$ (в единицах $m = \hbar = 1$). При движении по окружности радиуса R физические векторы состояний должны подчиняться условию $\hat{P}_r\psi_{\rm ph} = 0$, гарантирующему отсутствие радиального движения [14]. Отсюда получаем

$$\hat{H}_R = \frac{1}{2}\left(\hat{P}_\phi^2 - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{R^2}. \tag{4.2}$$

Итак, при движении по окружности в гамильтониане (4.2) появляется отрицательное слагаемое $-1/(8R^2)$. Это и есть «квантовый потенциал» $\tilde{V}_q$ в нерелятивистской теории. Аналогичный факт, как мы видели в п. 3.2, имеет место и для оператора квадрата энергии релятивистской частицы.

Если рассматривается несколько частиц, то отрицательный вклад в энергию может быть значительным, а если число взаимодействующих частиц бесконечно, то образуется целый «подвал» состояний с отрицательными энергиями. В нашем случае при предварительном рассмотрении преимущественной структурой оказалась бозе-струна. Но из вышеизложенного следует, что для возбужденной струны с точки зрения распределения Гиббса предпочтение следует отдать искривленной струне — энергия распространяющихся по ней возбуждений оказывается меньше. Далее можно поступить двояко. Проще всего ограничиться замечанием: с точки зрения квантового распределения Гиббса наиболее предпочтительна система с нулевой наименьшей энергией. Такие системы известны — это системы с бозонными и фермионными степенями свободы, обладающие свойством суперсимметрии. Их главная особенность — нулевая энергия основного состояния. Поэтому дело сводится к построению из тех или иных соображений модели, в основе которой лежит бозе-струна и которая в идеале обладает свойством суперсимметрии, — т. е. модели суперструны. Более поучительно, однако, изучить бозе-струны с точки зрения их энергетического спектра.

Суперсимметрия порождает много вопросов. С одной стороны, она в высшей степени желательна, ибо смягчает проблему ультрафиолетовых расходимостей. С другой стороны, в суперсимметричной теории массы всех частиц (бозонов и фермионов) должны быть одинаковы. Но этого нет в природе. Нет этого и в предлагаемой модели. Рассмотрим вопрос о суперсимметрии с точки зрения распределения Гиббса для осцилляторов.

4.1. Распределение Гиббса для фермионов. Поскольку уравнения Гамильтона для бозонов вытекают из распределения Гиббса [2], естественно поставить вопрос о распределении Гиббса для фермионов. В классической физике вопрос не возникает, поскольку фермионы появляются в квантовой теории. Но в данном подходе в основе лежит распределение Гиббса, поэтому и возникает упомянутый вопрос об этом распределении для антикоммутирующих динамических переменных.

В простейшем случае двух канонических переменных θ_1, θ_2 ($\theta_i^+ = \theta_i$, $[\theta_i, \theta_j]_+ = 0$) введем переменные $\theta^\pm = (\theta_1 \pm \theta_2)/\sqrt{2}$ и ограничимся гамильтонианом для ферми-осциллятора $H(\theta) = \omega\theta^+\theta^-$. Тогда распределение Гиббса есть

$$G(\theta) = Z^{-1} \exp\left(-\frac{\omega\theta^+\theta^-}{kT}\right) \equiv \hbar \exp\left(-\frac{\theta^+\theta^-}{\hbar}\right). \tag{4.3}$$

При стандартном определении правил интегрирования [15–17] $\int d\theta = 0$, $\int d\theta\, \theta = 1$ и учитывая равенство $\exp(-\theta^+\theta^-/\hbar) = 1 - \theta^+\theta^-/\hbar$, убеждаемся, что распределение (4.3) по грассмановым переменным нормировано на единицу:

$$\hbar \int d\theta^+ d\theta^- \exp\left(-\frac{\theta^+\theta^-}{\hbar}\right) = 1. \tag{4.4}$$

Здесь замечательны несколько обстоятельств. 1) Требуется распространить теорию вероятностей на грассмановы переменные. 2) Распределение, как и в случае коммутирующих переменных, дается экспонентой от билинейной функции. 3) Вкупе с распределением для бозонного осциллятора получается теория с суперсимметричным гамильтонианом

$$G(\bar{z}, z, \theta^+, \theta^-) = \exp\left(-\frac{\bar{z}z + \theta^+\theta^-}{\hbar}\right) \tag{4.5}$$

(показатель экспоненты инвариантен относительно замен $\bar{z} \rightleftharpoons \theta^+$, $z \rightleftharpoons \theta^-$). 4) Нормировочный множитель в (4.5) оказывается равным единице. Этот последний факт означает, что в суперсимметричных теориях не только массы бозонов и фермионов должны быть равны. Следует ожидать, что в них должны отсутствовать и аксиальные аномалии, ибо произведение нормировочных множителей $\hbar^{-1}$ и $\hbar$ равно единице. Но, согласно [18], именно мера интегрирования по фермионным переменным нарушает γ_5-инвариантность.

Подобные суперсимметричные объекты также могут образовывать одномерные структуры, обладающие точной суперсимметрией, — суперструны. Тогда встает вопрос о природе исходных «первочастиц» — являются ли они обычными осцилляторами или объектами, описываемыми суперсимметричным гамильтонианом, фигурирующим в экспоненте распределения (4.5). Поскольку в последнем случае 3-мерная сеть обладала бы точной суперсимметрией, каковая в природе не наблюдается, надо полагать, что в основе всего сущего лежит обычный осциллятор с распределением (2.4), следующим из предельной теоремы теории вероятностей, а фермионная степень свободы моделируется нетривиальной структурой. Проанализируем более подробно модель суперструны, предложенную в [2].

4.2. Моделирование фермионов. Спираль. *Типы периодических процессов.* Можно говорить о двух типах периодических процессов с фиксированной частотой:

1) движение по окружности в двумерном конфигурационном пространстве;

2) движение по окружности в двумерном фазовом пространстве (гармонический осциллятор).

В современной физике это совершенно разные процессы, но при изучении распространения возбуждений по спирали приходится иметь дело с обоими типами осцилляций. Более того, в предлагаемом подходе (п. 2.1) между ними нет принципиальной разницы. Весьма бегло этот вопрос обсуждался в [2]. Рассмотрим его более подробно.

Если возбуждения одномерной цепочки в непрерывном пределе описываются уравнением Даламбера

$$(\partial_t^2 - \partial_z^2)F(t,z) = 0, \tag{4.6}$$

то его общее решение имеет вид $F(t,z) = f_1(t+z) + f_2(t-z)$, где $f_{1,2}$ — произвольные дважды дифференцируемые функции. Введем переменные $z_\pm = t \pm z$. Группа симметрии уравнения (4.6) есть однопараметрическая группа $SO(1,1)$. Все ее неприводимые представления одномерны. Нетрудно убедиться, что при лоренцевых преобразованиях псевдоевклидовой плоскости — «поворотах на угол ϑ» — векторы $z_\pm$ преобразуются по правилу $z'_\pm = \exp(\mp\vartheta)z_\pm$. Можно двигаться в двух направлениях.

Во-первых, изучить представления группы $SO(1,1)$. Нетрудно видеть, что $u_\pm(\kappa) = z_\pm^\kappa$, где κ — вещественное число, реализуют все неприводимые представления этой группы, ибо $z_+^\kappa z_-^\kappa = (t^2 - z^2)^\kappa = \mathrm{inv}$. Среди них можно выделить «тензорные» ($\kappa = n \in N$) и «спинорное» ($\kappa = 1/2$). Первые используются при разложении функций $f_{1,2}$ в ряды Тейлора. Последнее пока ничем не выделено, хотя полезно обратить внимание на следующее обстоятельство. Переходя от неприводимых спиноров $u_\pm = z_\pm^{1/2}$ к приводимым $u_1 = (u_- + u_+)/2$, $u_2 = (u_- - u_+)/2$ и определяя операторы: $\sigma^- u_+ = u_-$, $\sigma^+ u_- = u_+$, $\sigma^+ u_+ = \sigma^- u_- = 0$, имеем

$$(\sigma^\pm)^2 = 0, \quad \sigma^+\sigma^- + \sigma^-\sigma^+ = 1. \tag{4.7}$$

Операторы $\sigma^\pm$ определяются матрицами 2×2. Вводя двухкомпонентный спинор $u = (u_1, u_2)$, зададим «матрицы Дирака» $\gamma_1 = \sigma^- - \sigma^+ = -i\sigma_2$, $\gamma_0 = (\sigma^- + \sigma^+)\gamma_1 = \sigma_1\gamma_1 = \sigma_3$, где $\sigma_{1,2,3}$ — матрицы Паули. Как обычно,

$\bar{u} = u^*\gamma_0$, т. е. $\bar{u} = u\gamma_0$. Тогда $\bar{u}\gamma_1 u \equiv u\gamma_0\gamma_1 u = -2u_1u_2 = -(u_-^2 - u_+^2)/2 = z$, $\bar{u}\gamma_0 u = u_1^2 + u_2^2 = (u_-^2 + u_+^2)/2 = t$, т. е. $\bar{u}\gamma_a u$, $a = 0, 1$, есть вектор. Более того, спинор u удовлетворяет двумерному уравнению Дирака

$$\gamma_a\partial_a u = \begin{pmatrix} \partial_t & \partial_z \\ -\partial_z & -\partial_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \partial_t & \partial_z \\ -\partial_z & -\partial_t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_- + u_+ \\ u_- - u_+ \end{pmatrix} = 0. \tag{4.8}$$

Последнее получается варьированием действия

$$S = \int dt\, dz\, \bar{u} i\gamma_a\partial_a u. \tag{4.9}$$

Отметим, что аналогичное «уравнение Дирака» получалось бы и для «спиноров» $u_\pm(\kappa) = z_\pm^\kappa$, $\kappa \neq 1/2$, $1 > \kappa > 0$, если определить $\bar{u}(\kappa) = u(1-\kappa)\gamma_0$, и $u_1(\kappa) = (u_-(\kappa) + u_+(\kappa))/2, u_2(\kappa) = (u_-(\kappa) - u_+(\kappa))/2$.

Поскольку уравнению (4.8) удовлетворяет любая функция $u(\kappa) = (u_1(\kappa), u_2(\kappa))$, $0 < \kappa < 1$, встает вопрос: почему в природе реализуется случай $\kappa = 1/2$? Тот факт, что $\det(\sigma x') = \det(\sigma x) = \det(\sigma_0 t - \sigma_i x_i) = t^2 - \mathbf{r}^2$, где $\sigma_0 = \hat{I}$, $\hat{I}$ — единичная 2×2 матрица, $\sigma_i\,(i = 1, 2, 3)$ — матрицы Паули, свидетельствует лишь о том, что здесь выбор $\kappa = 1/2$ сделан априорно, безотносительно к реалиям проблемы. Обратим, однако, внимание на то, что только при $\kappa = 1/2$ имеет место основной постулат квантовой механики — выражение плотности вероятности через амплитуды. Следовательно, данное правило должно вытекать из основных постулатов квантовой механики или из таковых, ведущих к ней. Но согласно [1, 2] именно такому правилу и должны подчиняться амплитуды вероятности. Теория групп также отдает предпочтение величине $\kappa = 1/2$.

Во-вторых, изучить динамику эффективных степеней свободы спирали. Спираль — достаточно сложная структура [19, 20]. У нее, в отличие от струны, гораздо больше существенно различных типов степеней свободы. Например, движение возбуждения струны по спирали с ненулевым угловым моментом, колебания центров тяжести витков струны, изменение радиусов витков спирали. Все они важны, особенно «скалярные» — в связи с проблемой природы поля Хиггса. Квантовая теория спиралей пока не построена.

5. ВНУТРЕННИЕ СИММЕТРИИ

Итак, с точки зрения распределения Гиббса с большей вероятностью реализуются одномерные структуры — струны. Поскольку эволюция малых отклонений от равновесного распределения описывается квантовой механикой [1, 2, 7], струна должна быть квантованной. Как известно, квантованная струна Намбу–Гото существует в 26-мерном пространстве-времени [5, 6]. Согласно п. 3.1 две ее степени свободы нефизические, т. е. остается векторное поле в 24-мерном евклидовом пространстве.

Далее, квантованная струна Намбу–Гото свертывается в спираль [1, 2]. Последняя моделирует суперструну, нарушая одновременно 26-мерную симметрию. Суперструна существует в 10-мерном пространстве-времени [5, 6]. Как и в случае струны Намбу–Гото, две из 10 ее степеней свободы — нефизические. Теперь уже остается векторное поле в 8-мерном евклидовом пространстве. Выясним, каковы наиболее вероятные (наиболее устойчивые) возбуждения струн [4].

Группы. Объектами воздействия случайных сил являются элементы структуры, реализующие 24-мерные представления одной из групп: $SU(5)$ (присоединенное представление) или $SO(24)$ (векторное представление). Вопрос: какая из этих групп более устойчива? Согласно критерию (1.1) для группы $SU(5)$ $r_{SU(5)} = l/N = 1/6$ ($l = 4$, $N = 24$), а для группы $SO(24)$ $r_{SO(24)} = 1/23$ ($l = 12$, $N = 276$) (табл. 1). Поскольку $1/6 > 1/23$, более устойчивыми будут распределения, инвариантные относительно группы $SU(5)$.

Но симметрия $SU(5)$ не является точной. Спираль существует в 3-мерном пространстве, т. е. это пространство выделено, что означает нарушение симметрии 24-мерного пространства. В крупномасштабном пределе спираль моделирует суперструну. Последняя существует в 10-мерном пространстве-времени $(9+1)$. Учитывая, что две ее спин-векторные степени свободы нефизические, приходим к групповому пространству размерности 8. Из двух групп

Таблица 1. **Степени симметричности классических групп**

Группа	n	Степень инвариантных полиномов r_i	Размерность групп N	$r = l/N$
$SU(n)$	$l+1$	$i+1,\ i \leqslant l$	$n^2 - 1 = l(l+2)$	$\dfrac{1}{l+2}$
$SO(n)$	$2l+1$	$2i,\ i \leqslant l$	$\dfrac{n(n-1)}{2} = l(2l+1)$	$\dfrac{1}{2l+1}$
$Sp(n)$	$2l$	$2i,\ i \leqslant l$	$\dfrac{n(n+1)}{2} = l(2l+1)$	$\dfrac{1}{2l+1}$
$SO(n)$	$2l$	$2i\ \ (i < l),\ l$	$\dfrac{n(n-1)}{2} = l(2l-1)$	$\dfrac{1}{2l-1}$
G_2		$2, 6$	14	$2/14 = 1/7$
F_4		$2, 6, 8, 12$	52	$4/52 = 1/13$
E_6		$2, 5, 6, 8, 9, 12$	78	$6/78 = 1/13$
E_7		$2, 6, 8, 10, 12, 14, 18$	133	$7/133 = 1/19$
E_8		$2, 8, 12, 14, 18, 20, 24, 30$	248	$8/248 = 1/31$

$SU(3)$ и $SO(8)$, имеющих представления данной размерности, более устойчивой оказывается первая, ибо, согласно критерию (1.1), $r_{SU(3)} = 2/8 = 1/4$ ($l = 2, N = 8$), тогда как $r_{SO(8)} = 4/28 = 1/7$ ($l = 4, N = 28$) (см. табл. 1). Поскольку $1/4 > 1/7$, появление возбуждений, реализующих представления группы $SU(3)$, является более предпочтительным. Замечательно, что в модели естественным образом появляются группы $SU(5)$ и $SU(3)$, причем вторая получается в результате нарушения групповой симметрии первой [4]. Отметим попутно: $r_{SU(3)} > r_{SU(5)}$, что тоже заслуживает внимания. Оказывается, что группа $SU(3)$ имеет преимущество по сравнению с группой $SU(5)$ еще и согласно критерию (1.1).

Представления. Теперь встает вопрос: имеются ли более предпочтительные представления у данной группы? Очевидно, N следует отождествить с размерностью представления, т. е. с полным числом параметров, подверженных воздействию случайных сил. Сравним параметры r для фундаментального ($N = 5$) и присоединенного ($N = 24$) представлений (табл. 2). В первом случае $r = l/N = 4/5$, во втором $r = 4/24 = 1/6$. Поскольку $4/5 > 1/6$, фундаментальное представление группы $SU(5)$ более предпочтительно. Аналогичный результат получается и для группы $SU(3)$: $l = 2$, $N = 3$, $r = 2/3$ для фундаментального представления и $r = 2/8 = 1/4$ для присоединенного, $2/3 > 1/4$. Представления бóльших размерностей еще менее предпочтительны, ибо ранг группы не меняется, а размерность представления увеличивается.

Таблица 2. **Величины r для простейших представлений групп $SU(n)$**

Представление	Размерность	$r = l/N$, $l = n - 1$
Фундаментальное	n	$\dfrac{n-1}{n}$ $(N = n)$
Присоединенное	$n^2 - 1$	$\dfrac{n-1}{n^2-1} = \dfrac{1}{n+1}$ $(N = n^2 - 1)$

Остается еще один вопрос. Фундаментальные представления групп $SU(n)$ комплексны, следовательно, необходимо рассматривать воздействия случайных сил на комплексные переменные. Означает ли это, что можно ввести понятие комплексных сил? Ответ таков: поскольку гамильтонову механику можно формулировать в комплексных переменных, а гамильтониан $H(\bar{z}, z)$ задан, то в рамках стандартного формализма можно ввести понятие комплексной силы. Факт, что комплексные переменные оказываются предпочтительными и с точки зрения представлений групп, служит еще одним аргументом в пользу выделенности (большей предпочтительности) этих переменных, лежащих в основе квантовой механики.

Правда, тогда необходимо объяснить, почему в классической физике используются вещественные переменные. Ответ прост. Классическая физика — физика макротел, т. е. объектов с очень большим числом степеней свободы. В ней описываются движения центров масс возбуждений полей, при этом квантовыми эффектами (например, расплыванием пакетов) пренебрегают. Но движение происходит в 3-мерном пространстве, т. е. оно описывается вещественными величинами.

Отметим, что желание сформулировать физику только в терминах вещественных переменных чисто субъективно и имеет исторические корни. Классическая физика допускает именно такую формулировку. Но природа не обязана следовать человеческим предрассудкам — ее законы могут подчиняться другим принципам, например, принципу максимальной устойчивости.

Итак, в предлагаемой модели находит естественное объяснение появление групп $SU(5)$ и $SU(3)$.

6. ПРОГРАММА КАЛУЦЫ–КЛЕЙНА–МАНДЕЛЯ–ФОКА И ОБЪЕДИНЕНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Прежде чем переходить к изучению модели, приведем необходимые для дальнейшего сведения о вынесенной в название раздела теории ККМФ [21–24]. Действие D-мерной гравитации дается интегралом

$$S = \int d^D x \sqrt{|g_D|} R_D, \tag{6.1}$$

где R_D — скалярная кривизна D-мерного пространства, а $g_D = \det g_{\mu\nu}$. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ берется в виде

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{ij} + g_{ab} A_i^a A_j^b & A_i^a g_{ab} \\ A_j^b g_{ba} & g_{ab} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{g}_{ij} & A_{ib} \\ A_{aj} & g_{ab} \end{pmatrix}, \tag{6.2}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{ij} & -A_j^b g^{ij} \\ -A_i^a g^{ij} & g^{ab} + g^{ij} A_i^a A_j^b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} g^{ij} & -A^{ib} \\ -A^{aj} & \tilde{g}^{ab} \end{pmatrix}; \tag{6.3}$$

здесь $\mu, \nu = 0, 1, \ldots, D-1$; $i, j = 0, 1, \ldots, p$; $a, b = p+1, \ldots, D-1$. Выбранное представление для $g_{\mu\nu}$ обеспечивает простейшую форму $g^{\mu\nu}$. Если потребовать, чтобы метрический тензор $g_{\mu\nu}$ не зависел от координат x^a пространства размерности $D-p-1$, дополнительного к физическому, а метрический тензор g_{ab} не зависел еще и от координат x^i физического пространства

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^a} = 0, \quad \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{6.4}$$

то действие (6.1) записывается в виде [25]

$$S = V^{D-p-1} \int d^{p+1} x \sqrt{|g|} \left(R - \frac{1}{4} F^2 + \ldots \right), \tag{6.5}$$

где V^{D-p-1} — объем (бесконечный) дополнительного к физическому пространства, $g = \det g_{ij}$, R — скалярная кривизна $(p+1)$-мерного физического пространства-времени, $F^2 = g_{ab}F^a_{ki}F^b_{lj}g^{kl}g^{ij}$, $\hat{F}_{kj} = [\hat{D}_k, \hat{D}_j]$, $\hat{D}_k$ — оператор ковариантного дифференцирования в теории Янга–Миллса. Если второе условие (6.4) не выполняется, то в теории появляются скалярные поля.

Итак, гравитационное действие (6.1) в D-мерном пространстве содержит как минимум теорию тяготения и теорию калибровочного векторного поля A^a_i в пространстве размерности $p+1 < D$. Покажем теперь, что в предлагаемой модели тензорное возбуждение замкнутых струн ячейки $X_\mu X_\nu$ связано (в крупномасштабном пределе) с метрическим тензором образованного сетью пространства.

В пространстве M^D введем координаты $x^i (= u^i)$, x^a, $i = 0, 1, \ldots, p$, $a = p+1, \ldots, D-1$, где x^i параметризуют мировую поверхность квазибраны (сети в крупномасштабном пределе), а x^a — координаты дополнительного $(D-p-1)$-мерного копространства. Прежде всего покажем, что в каждой ячейке (p-кубе) всегда можно выделить совокупность частиц, образующих замкнутую струну. В случае мембраны это тривиально — ребра, например, квадрата с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ образуют замкнутую линию (одна из вершин помещена в начало координат, а длина ребра равна единице). Отметим, что возможность выбора для мембраны в качестве ячеек квадратов может служить аргументом в пользу допустимости использования p-мерного куба при $p > 2$. В случае p измерений замкнутую линию образует, например, цепочка векторов

$$(0,\ldots,0) \to (1,\ldots,0) \to (1,1,0,\ldots,0) \to \ldots \to (1,\ldots,1) \to \\ \to (0,1,\ldots,1) \to \ldots \to (0,\ldots,0,1) \to (0,\ldots,0)$$

(каждая стрелка отождествляется с ребром, всего $2p$ ребер). Нас интересует сложное возбуждение струны, характеризуемое произведением $\tilde{g}^{\mu\nu} = X^\mu(\tau,\sigma)X^\nu(\tau,\sigma)$, где σ параметризует точки струны. В теории струн с этим возбуждением связывают гравитон (спин 2, масса ноль). В данном случае этого недостаточно. Во-первых, здесь замкнутые струны не являются свободными. Приходится допустить, что их билинейные возбуждения также можно отождествить с гравитационным полем. Во-вторых, их билинейные возбуждения («гравитоны») могут оказаться массивными. Но это не есть трудность, ибо в данной модели и без того все поля, включая гравитационное, обладают массой [2]. Вопрос о величине подобной возможной добавки к массе остается открытым. В-третьих, необходимо показать, что тензор $\tilde{g}^{\mu\nu}$ действительно можно связать с метрическим тензором в D-мерном пространстве с вложенной в него $(p+1)$-мерной гиперповерхностью (квазибраной). На первый взгляд это невозможно, ибо 1) $\tilde{g}^{\mu\nu}$ имеет размерность квадрата длины L^2, тогда как метрический тензор безразмерен; 2) длина векторов Y^μ, ортогональных в M^D к вектору X^μ ($(XY) = \eta_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu = 0$, $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор D-мерного псевдоевклидова пространства), равна нулю ($\tilde{g}_{\mu\nu}Y^\mu Y^\nu = 0$), что неприемлемо. Обе трудности легко преодолеваются. Если в модели есть универсальный масштаб (например, размер ячейки l), то тензор $\tilde{g}^{\mu\nu}$ обезразмеривается делением его на l^2. Далее, нас интересует теория в пределе, когда размеры ячеек стремятся к нулю. В этом случае ячейка превращается в точку, и метрический тензор в точке должен характеризовать совокупное возбуждение различных замкнутых струн ячейки.

Определим тензор $g^{\mu\nu}$ суммой $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} + \Delta^{\mu\nu}$, где $\Delta^{\mu\nu}$ есть среднее от интегралов по замкнутым струнам:

$$\Delta^{\mu\nu}_{(\mathbf{n})} = \frac{1}{l^2}\frac{1}{L_c}\frac{1}{N_p}\sum_{\mathbf{n}}\oint d\sigma X^\mu(\tau,\sigma)X^\nu(\tau,\sigma); \tag{6.6}$$

здесь $\mathbf{n}(n_1,\ldots,n_p)$ фиксирует, скажем, центр ячейки (p-куба), а L_c — средняя длина контура интегрирования; сумма берется по всем N_p независимым замкнутым контурам в ячейке. Рассматриваются малые возбуждения структуры. В непрерывном пределе $n_j l_j \to x^j$ (l_j — расстояние между центрами кубов вдоль оси j), $n_j \to \infty$, $l_j \to 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$, получаем тензор $g^{\mu\nu}(x)$, $x(x^0, x^1, \ldots, x^p)$, обратный которому допускает отождествление с метрическим тензором D-мерного пространства; одна из координатных гиперповерхностей этого пространства совпадает с мировой гиперповерхностью p-мерной структуры (сети).

Может возникнуть вопрос о появлении в данной теории правильного выражения для взаимодействия гравитационного поля с материей (член κT^{ij} в гравитационных уравнениях, где κ — постоянная гравитационного взаимодействия, а T^{ij} — тензор энергии-импульса). Но уже действие (6.5) дает правильный ответ на этот вопрос, поскольку векторное поле A_i^a и есть поле материи.

Отметим, что тензор $g_{\mu\nu}(x)$ не зависит от координат дополнительного пространства x^a, т. е. автоматически выполняется первое условие (6.4). Это крайне важное обстоятельство, поскольку тем самым решается проблема компактификации в модели ККМФ, ибо возбуждение сети не может ее покинуть. Далее, если потребовать, чтобы тензор g_{ab} в (6.2) не зависел от x^μ, т. е. если исключить скалярные поля, то получаем простейший вариант теории ККМФ для полей Янга–Миллса с действием (6.5). Вопрос о группе симметрии этих полей требует отдельного исследования ввиду сложности исходной структуры.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные положения предлагаемой модели таковы. Точечные объекты в пространстве некоторой (неизвестной) размерности подвержены действию случайных сил (термостат). Их равновесные состояния определяются распределением Гиббса. Исходя из него можно ввести неравновесные распределения. В случае гармонического осциллятора эволюция последних со временем описывается квантовой механикой (амплитудами вероятности [1, 2]). При этом автоматически появляются, например, постоянная Планка h и пространство Фока [2]. Распределения можно характеризовать параметром (1.1) r (индексом стабильности распределения), позволяющим оценить вероятность их изменения под действием случайных сил. Оказывается, что согласно предлагаемому критерию распределение Гиббса для осциллятора (двумерное распределение Гаусса) более устойчиво, чем соответствующее одномерное распределение. Далее, согласно предлагаемому критерию осцилляторам «выгодно» образовать одномерную структуру — бозе-струну Намбу–Гото. Это важнейший и принципиальнейший факт всего подхода ввиду следующих обстоятельств.

Струна есть совокупность осцилляторов, эволюция со временем ее малых отклонений от равновесного распределения описывается квантовой механикой, а ее предпочтительность определяется ПМУ: распределение тем более устойчиво, чем более оно симметрично, т. е. чем меньше число параметров, от которых зависит гамильтониан (как мы видели, в струне Намбу–Гото исключается целая полевая степень свободы, п. 3.3). При этом появляется ряд новых важнейших понятий, характеризующих модель: понятие материи — возбуждения струны можно трактовать как «частицы», «релятивистская инвариантность» — возбуждения струны подчиняются уравнению Даламбера, понятие «физическое пространство» (одномерное) — это струна, по которой распространяются возбуждения. Наконец, появляется понятие «калибровочная симметрия» (зависимость групповых параметров от координат (точек) струны). По существу, появляются все важнейшие элементы современной физики.

Но это только начало. Как было показано (разд. 5), появляется группа $SU(5)$ (теория Великого объединения). Далее, в квантовой механике изогнутая струна обладает меньшей энергией (квантовый потенциал $V_q = -\hbar^2/4r^2 < 0$). Наименьшая энергия отвечает состоянию с минимальным радиусом кривизны ($r \to 0$). Для дискретной струны такое состояние невозможно, но струна может скрутиться в спираль с некоторым радиусом колец R. Согласно (4.2) энергия перемещающегося по спирали возмущения положительна только при $\hat{P}^2 - \hbar^2/4R^2 > 0$, где $\hat{P} = -i\hbar R^{-1} d/d\phi$ — оператор импульса движения по окружности. Нулевая энергия движения по окружности отвечает импульсу $P = \hbar/2R$. Это импульс первого возбужденного состояния сдвоенного кольца [2], а его угловой момент $\mathbf{J} = [\mathbf{r}, \mathbf{P}]$ равен спину фермиона, $|\mathbf{J}| = \hbar/2$.

Любопытное наблюдение сделано в [26]: во все мировые постоянные, такие как длина Планка $L_P = \sqrt{\hbar G_N/c^3}$ (G_N — гравитационная постоянная), постоянная тонкой структуры $\alpha = e^2/\hbar c$, постоянная Ферми $G_F/(\hbar c)^3$ и т. д., постоянная Планка h и скорость света c входят «четным образом», т. е. мировые постоянные инвариантны относительно одновременного изменения знака последних ($\hbar \to -\hbar$, $c \to -c$). Но постоянная $\hbar$ есть не только единица площади фазовой плоскости. Изменение ее знака меняет ориентацию этой плоскости, т. е. меняет направление стрелы времени [7]. Скорость света c также меняет знак при отражении времени. Следовательно, природа всех основных мировых постоянных такова, что они не связаны с временно́й переменной. Данный факт представляется существенным для модели, в которой пространство отождествляется с некоторой 3-мерной структурой. Тогда все эти мировые постоянные характеризуют только данную структуру, что можно трактовать как еще одно свидетельство в пользу предлагаемой модели.

Более того, в модели находит естественное решение проблема темной материи. Исходная структура — 3-мерная сеть — столь сложна, что известные фундаментальные поля (спинорные, векторные, гравитационное) составляют лишь небольшую часть ее возможных возбуждений.

Подводя итоги, перечислим некоторые следствия моделирования мира 3-мерной сетью в термостате. Выявляются или объясняются следующие факты.

1. Классическая гамильтонова механика (следует из стационарности распределения Гиббса [2, 7]).

2. Микроканоническое распределение (следует из п. 1).

3. Эргодичность механики (следует из пп. 1, 2).

4. Стрела времени (гамильтонова механика, следствие ориентируемости фазового пространства [7]).

5. Амплитуды вероятности (наличие неравновесных распределений Гиббса [2]).

6. Постоянная Планка h («объем» 2-мерного фазового пространства, сферы [7]).

7. Уравнение Шредингера (следствие пп. 1, 5).

8. CPT-инвариантность (следствие пп. 5–7 и предположения, что C=*).

9. Пространство Фока (следствие пп. 5–7).

10. Псевдоевклидово пространство (возбуждения струны подчиняются уравнению Даламбера).

11. Космологическая постоянная (следствие п. 5, $\Lambda = 1/2t_r^2$, t_r — время релаксации неравновесного распределения).

12. Правильный знак мнимой добавки в пропагаторе ($i/(k^2-m^2+i\epsilon)$, $\epsilon \sim 1/t_r > 0$, следствие п. 5).

13. Инфляционный период (гигантская флуктуация в термостате).

14. Решение проблемы горизонта (однородность Вселенной — свойство термостата).

15. Отсутствие расходимостей (дискретность струн).

16. Модель черной дыры (возбужденное состояние ячейки сети [2]).

17. Решение проблемы компактификации в подходе Калуцы–Клейна–Манделя–Фока (материя есть возбуждение сети, она не может «покинуть» сеть).

18. Решение проблемы «подвала Дирака» (в модели его электрический заряд равен нулю).

19. Существование струн (диктуется принципом максимальной устойчивости).

20. Появление калибровочных симметрий (свойство струны Намбу–Гото [5, 6]).

21. Появление антикоммутирующих переменных (следствие закручивания струн в спираль [2]).

22. Существование фермионов (спин $\hbar/2$, следствие закручивания струн в спираль [2]).

23. Модель суперсимметрии (оптимальное, но приближенное свойство).

24. Модель суперструны (следствие п. 23).

25. Появление внутренних симметрий (диктуется принципом максимальной устойчивости).

26. Появление групп $SU(5)$ и $SU(3)$ (свойства струн и суперструн).

27. Объединение взаимодействий в рамках подхода Калуцы–Клейна–Манделя–Фока (следствие модели).

28. Существование темной материи (следствие модели).

29. Нарушение киральной симметрии (следствие модели).

30. Модель D-браны (обобщение модели на высшие измерения).

Ясно, что перечисленные следствия развиваемого подхода не могут быть игрой случая и модель заслуживает серьезного внимания.

Приложение 1
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИББСА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Выясним, что происходит с распределением Гиббса при его малых деформациях, т. е. при переходе к квантовому описанию. Для ответа на этот вопрос необходимо хорошо представлять существо модели. В [2] было показано, что канонические переменные r, φ, $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ подчиняются следующим уравнениям движения:

$$\dot{\varphi} = -\omega, \quad \dot{r} = 0. \tag{П1.1}$$

Для волновых функций $Z_n(z) = \tilde{z}^n/\sqrt{n!}$, $\tilde{z} = z/\sqrt{\hbar}$ из уравнения $\dot{Z}_n = -i\omega\tilde{z}\,dZ_n/d\tilde{z}$ следует, что

$$\dot{Z}_n = -in\omega Z_n. \tag{П1.2}$$

Поскольку r не меняется со временем, квантование энергии оказывается следствием условия периодичности классического движения переменной φ,

$Z_n(r,\varphi+2\pi) = Z_n(r,\varphi)$. Распределение по r универсально, а распределение вероятности по φ не зависит от φ. Согласно теореме вириала в основном состоянии (распределение Гиббса) на канонические переменные r,φ должны приходиться равные доли средней энергии $E_0 = \hbar\omega$, т. е. по $\hbar\omega/2$. Движению по окружности с амплитудой вероятности $\mathrm{e}^{in\varphi}$ отвечает энергия $n\hbar\omega$, т. е. в сумме с энергией $\hbar\omega/2$, связанной с переменной r, имеем $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$. Это есть энергия квантованного осциллятора. Отсюда следует, что распределение Гиббса необходимо модифицировать в соответствии с законами квантовой механики. Классический гамильтониан $H(p,q)$ следует заменить на оператор $\hat{H}$, т. е. распределение должно иметь вид

$$\hat{G} = Z^{-1}\,\mathrm{e}^{-\beta\hat{H}}. \tag{П1.3}$$

Отсюда получаются, во-первых, распределение Планка, во-вторых, распределение Гиббса для квантового осциллятора $\mathrm{e}^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)}$ (ср. [27]).

Приложение 2
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОКА

Как известно [1, 2], для неравновесных распределений (квантовая механика) скалярное произведение векторов в гильбертовом пространстве определяется формулой

$$(g,f) \equiv \int d\mu(\bar{z},z)\,\bar{g}(z)\,f(z) = \\ = \int \frac{d\bar{z}\wedge dz}{2\pi i\hbar}\mathrm{e}^{-\bar{z}z/\hbar}\sum_{n,m=0}^{\infty}\bar{g}_n f_m \frac{\bar{\tilde{z}}^n\tilde{z}^m}{\sqrt{n!m!}} = \sum_{n=0}^{\infty}\bar{g}_n f_n, \quad \tilde{z} = \frac{z}{\sqrt{\hbar}}. \tag{П2.1}$$

Отсюда непосредственно следует весьма нетривиальное «представление Фока» [28] для скалярного произведения (g,f).

Перейдем от $\bar{z},z$ к вещественным переменным r,φ, $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ и положим для простоты $\hbar = 1$. Тогда $dz = (dr + ird\varphi)\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ и $-id\bar{z}\wedge dz = 2dr\wedge rd\varphi$. Интегрируя в (2.1) по r, имеем

$$(g,f) = \int_0^{\infty}\frac{2rdr}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\sum_{n,m=0}^{\infty}\bar{g}_n f_m\,\mathrm{e}^{-r^2}\,\frac{r^{n+m}}{\sqrt{n!m!}}\,\mathrm{e}^{i\varphi(m-n)} = \\ = \int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\sum_{n,m=0}^{\infty}\bar{g}_n f_m\left(\frac{n+m}{2}\right)!\frac{\mathrm{e}^{i\varphi(m-n)}}{\sqrt{n!m!}}.$$

Последний интеграл отличен от нуля только при $n = m$, поэтому его можно записать в виде

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \sum_{n,m=0}^{\infty} \bar{g}_n \, \mathrm{e}^{-in\varphi} f_m \, \mathrm{e}^{im\varphi}.$$

Далее, интеграл по φ можно считать интегралом по окружности единичного радиуса в комплексной плоскости. Переходя к интегралу по окружности произвольного радиуса r, имеем

$$(g, f) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{r d\,\mathrm{e}^{i\varphi}}{r\,\mathrm{e}^{i\varphi}} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{g}_n \frac{1}{r^n\,\mathrm{e}^{in\varphi}} \sum_{m=0}^{\infty} f_m r^m \mathrm{e}^{im\varphi} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\eta}{\eta} g(\eta)\, f(\eta), \tag{П2.2}$$

где $\eta = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, $g(\eta) \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} \bar{g}_n \eta^{-n}$. Но это и есть представление Фока для скалярного произведения гильбертовых векторов [28].

Особенностью данного представления, необычной с точки зрения квантовой механики, следует признать замену операции комплексного сопряжения инверсией $\eta \to \eta^{-1}$. Если же сохранить операцию $z \to \bar{z}$, то в формуле (П2.2) придется ограничиться интегрированием только по окружности $|z| = 1$. В этом случае $(\mathrm{e}^{i\varphi})^* = 1/\mathrm{e}^{i\varphi}$.

Автор глубоко благодарен В. А. Франке за ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прохоров Л. В.* // ЯФ. 2004. Т. 67. С. 1322.
2. *Прохоров Л. В.* // ЭЧАЯ. 2007. Т. 38. С. 696.
3. *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
4. *Прохоров Л. В.* // Труды XX Междунар. Балдинского семинара, ОИЯИ, Дубна, 4–9 окт. 2010 г. Дубна, 2011. Т. 1. С. 3.
5. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
6. *Грин М., Шварц Дж., Виттен Э.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990. Т. 1, 2.
7. *Прохоров Л. В.* // ЭЧАЯ. 2008. Т. 39. С. 1565.
8. *Прохоров Л. В., Шабанов С. В.* Гамильтонова механика калибровочных систем. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургск. гос. ун-та, 1997.
9. *Golovnev A. V., Prokhorov L. V.* // Intern. J. Theor. Phys. 2006. V. 45. P. 942.
10. *Прохоров Л. В.* Вопросы теории калибровочных полей. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургск. гос. ун-та, 2007.
11. *Прохоров Л. В.* // Вестн. СПбГУ. Сер. 4. 2009. Вып. 4. С. 176.

12. *Прохоров Л. В.* // ЯФ. 1982. Т. 35. С. 229.

13. *da Costa R. C. T.* // Phys. Rev. A. 1981. V. 23. P. 1982.

14. *Prokhorov L. V.* // Proc. of VI Intern. Conf. Path Integrals, Florence, 1998. London, 1999. P. 249.

15. *Martin J. L.* // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1959. V. 251. P. 536.

16. *Березин Ф. А.* Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.

17. *Гинденштейн Л. Э., Криве И. В.* // УФН. 1985. Т. 146. С. 553.

18. *Fujikawa K.* // Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 2848.

19. *Fletcher N. H.* // Am. J. Phys. 2004. V. 72(5). P. 701.

20. *Wittrick W. H.* // Intern. J. Mech. Sci. 1966. V. 8. P. 25.

21. *Kaluza Th.* // Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Math. Phys. Kl. 1921. S. 966.

22. *Klein O.* // Z. Phys. 1926. Bd. 37. S. 895.

23. *Mandel H.* // Ibid. Bd. 39. S. 136.

24. *Fock V.* // Ibid. Bd. 39. S. 226.

25. *Cho Y. M.* // J. Math. Phys. 1975. V. 16(10). P. 2029.

26. *Левин Б. М.* Начало Вселенной, звездное небо и физический наблюдатель. СПб.: Нестор-История, 2009.

27. *Фейнман Р.* Статистическая механика. М.: Мир, 1978.

28. *Дирак П. А. М.* Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.