

ИЗОТОПИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА И КИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

*В. П. Незнамов**

Российский федеральный ядерный центр — ВНИИ экспериментальной физики,
Саров, Россия

ВВЕДЕНИЕ	33
ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА	35
ИЗОТОПИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА И КИРАЛЬНО- СИММЕТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАССИВНЫХ ФЕРМИОННЫХ ПОЛЕЙ	37
Кирально-симметричные уравнения для массивных фермионов в дираковском представлении	38
Изотопическое представление Фолди–Ваутхайзена для массивных фермионов	39
Киральная инвариантность в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена	47
Физическое содержание кирально-симметричных уравнений и их гамильтонианов в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена	48
УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ. СОХРАНЕНИЕ ВЕКТОРНОГО И АКСИАЛЬНОГО ТОКОВ МАССИВНЫХ ФЕРМИОНОВ В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА	49
ВОЗМОЖНОСТЬ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ ЧЕТНОСТИ В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА	51

*E-mail: neznamov@vniief.ru

КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА КАК ПРИМЕР КИРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ С МАССИВНЫМИ ФЕРМИОНАМИ В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА	51
Правила Фейнмана в IFW-представлении	51
Постановка расчетов процессов КЭД в FW-представлении	53
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	57
Приложение 1	
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАМИЛЬТониАНА H_{IFW}^I В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА	58
Приложение 2	
РАСЧЕТЫ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕ- НИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА	60
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	68

ИЗОТОПИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА И КИРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ

*В. П. Незнамов**

Российский федеральный ядерный центр — ВНИИ экспериментальной физики,
Саров, Россия

Вводится изотопическое представление Фолди–Ваутхайзена, в котором получены уравнения для массивных взаимодействующих фермионных полей. В случае, когда гамильтониан взаимодействия коммутирует с матрицей γ^5 , эти уравнения обладают киральной инвариантностью независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов. В изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена сохраняются векторный и аксиальный токи независимо от массы фермионов. В дираковском представлении аксиальный ток сохраняется лишь в случае безмассовых фермионов. В изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена основное состояние фермионов (вакуум) оказывается вырожденным, и в связи с этим существует возможность спонтанного нарушения четности (P -симметрии). В качестве примера рассмотрено построение кирально-симметричной квантовой электродинамики в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена. В низжайших порядках теории возмущений рассчитан ряд физических процессов. Конечные результаты расчетов совпадают с результатами стандартной теории квантовой электродинамики.

The paper introduces the isotopic Foldy–Wouthuysen representation. This representation was used to derive equations for massive interacting fermion fields. When the interaction Hamiltonian commutes with the matrix γ^5 , these equations possess chiral invariance irrespective of whether fermions have mass or are massless. The isotopic Foldy–Wouthuysen representation preserves the vector and axial currents irrespective of the fermion mass value. In the Dirac representation, the axial current is preserved only for massless fermions. In the isotopic Foldy–Wouthuysen representation, the ground state of fermions (vacuum) turns out to be degenerate, and therefore there is the possibility of spontaneously breaking parity (P symmetry). This study considers the example of constructing a chirally symmetric quantum electrodynamics framework in the isotopic Foldy–Wouthuysen representation. A number of physical processes are calculated in the lowest orders of the perturbation theory. Final results of the calculations agree with the results of the standard quantum electrodynamics.

PACS: 12.10.Dm

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, в уравнении Дирака массовый член смешивает правые и левые компоненты дираковского биспинора и нарушает киральную симметрию, которая сохраняется лишь для безмассовых фермионов.

*E-mail: neznamov@vniief.ru

В данной работе показано, что для гамильтонианов взаимодействий фермионов с бозонными полями, коммутирующих с матрицей γ^5 , можно построить эквивалентные уравнению Дирака кирально-симметричные интегродифференциальное уравнение и уравнение второго порядка. Эти уравнения можно записать отдельно для левых и правых фермионов, независимо от наличия или отсутствия у них массы.

Линейную форму кирально-симметричных уравнений для взаимодействующих фермионных полей относительно оператора $p_0 = i(\partial/\partial t)$ можно получить, используя преобразование Фолди–Ваутхайзена [1] в специально введенном изотопическом пространстве, в котором предварительно записывается уравнение Дирака. В этом случае киральная симметрия также сохраняется независимо от значения массы фермионов.

В дираковском представлении сохраняется векторный ток, а аксиальный ток сохраняется лишь для безмассовых фермионов.

Во введенном изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена векторный и аксиальный токи сохраняются независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов.

Из трех эквивалентных друг другу уравнений Дирака, записанных по-разному в изотопическом пространстве, можно, применяя одно и то же изотопическое преобразование Фолди–Ваутхайзена, получить три кирально-симметричных уравнения Фолди–Ваутхайзена. По физическому содержанию из-за особенностей преобразования Фолди–Ваутхайзена, сужающего пространство возможных состояний дираковской частицы, эти уравнения отличаются друг от друга. Одно уравнение описывает правые и левые фермионы, а также правые и левые антифермионы. Два других уравнения описывают либо правые фермионы и левые антифермионы, либо левые фермионы и правые антифермионы.

Отсюда следует, что в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена основное (вакуумное) состояние фермионов оказывается вырожденным. Наряду с кирально-симметричным «морем» фермионов с отрицательной энергией существуют кирально-симметричные вакуумы с нарушенной P -симметрией, а именно: существует вакуум с «морем» правых фермионов и вакуум с «морем» левых фермионов. В связи с этим для фермионов возникают предпосылки спонтанного нарушения P -симметрии.

Вышеперечисленные вопросы освещены в разд. 2–4 данной работы. В разд. 1 рассмотрены основные свойства представления Фолди–Ваутхайзена. В разд. 5 в качестве примера предложено построение кирально-симметричной квантовой электродинамики в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена.

В приложении 1 приводится алгоритм получения фермионного гамильтониана с взаимодействием в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена.

В приложении 2 приведены расчеты некоторых процессов квантовой электродинамики в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена. Конечные результаты расчетов совпадают с соответствующими результатами стандартной квантовой электродинамики.

1. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА

Как известно, преобразование Фолди–Ваутхайзена (FW) осуществляется унитарным оператором U_{FW} [1].

При этом волновая функция (дираковский оператор поля) и гамильтониан уравнения Дирака преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_0\psi &= H_D\psi, & \psi_{\text{FW}} &= U_{\text{FW}}\psi, \\ H_{\text{FW}} &= U_{\text{FW}}H_DU_{\text{FW}}^\dagger - iU_{\text{FW}}\frac{\partial U_{\text{FW}}^\dagger}{\partial t}, & p_0\psi_{\text{FW}} &= H_{\text{FW}}\psi_{\text{FW}}. \end{aligned} \quad (1)$$

В выражениях (1) и ниже используется система единиц $\hbar = c = 1$; метрика пространства Минковского берется в виде $g^{\mu\nu} = \text{diag}[1, -1, -1, -1]$; $p^\mu = i(\partial/\partial x_\mu)$; $\psi(x)$, $\psi_{\text{FW}}(x)$ — четырехкомпонентные волновые функции (операторы поля) в представлении Дирака и Фолди–Ваутхайзена.

В работе матрицы Дирака в гамильтонианах H_D , H_{FW} используются как в представлении Дирака–Паули, так и в киральном представлении, широко употребляемом в Стандартной модели.

В представлении Дирака–Паули $\beta = \gamma_0 = \rho_3$, $\alpha^i = \beta\gamma^i = \rho_1\sigma^i$, $\gamma^i = i\rho_2\sigma^i$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \rho_1$, $\Sigma^i = E_{4\times 4}\sigma^i$, $E_{N\times N}$ — единичная матрица $N \times N$; σ^i — 2×2 матрицы Паули; $\rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & E_{2\times 2} \\ E_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix}$; $\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iE_{2\times 2} \\ iE_{2\times 2} & 0 \end{pmatrix}$;

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} E_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -E_{2\times 2} \end{pmatrix}.$$

В киральном представлении $\beta = \gamma_0 = \rho_1$, $\alpha^i = \beta\gamma^i = \rho_3\sigma^i$, $\gamma^i = \beta\alpha^i = -i\rho_2\sigma^i$, $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \rho_3$, $\Sigma^i = E_{4\times 4}\sigma^i$.

Для свободного движения с матрицами α^i , β в представлении Дирака–Паули

$$\begin{aligned} (H_0)_D &= \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m, & (H_0)_{\text{FW}} &= (U_0)_{\text{FW}}(H_0)_D(U_0)_{\text{FW}}^\dagger = \beta E, \\ (U_0)_{\text{FW}} &= R(1 + L) = \sqrt{\frac{E + m}{2E}} \left(1 + \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{E + m} \right), \\ E &= \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, & R &= \sqrt{\frac{E + m}{2E}}, & L &= \frac{\beta\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}}{E + m}. \end{aligned} \quad (2)$$

После FW-преобразования уравнение Дирака

$$p_0\psi(x) = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m)\psi(x) \quad (3)$$

преобразуется в уравнение Фолди–Ваутхайзена

$$p_0\psi_{\text{FW}}(x) = (H_0)_{\text{FW}}\psi_{\text{FW}}(x) = \beta E\psi_{\text{FW}}(x). \quad (4)$$

В уравнении Фолди–Ваутхайзена видна явная несимметрия пространственных координат и времени, хотя само по себе оно лоренц-инвариантно.

Для кирального представления матриц Дирака выражения для оператора преобразования $U_{\text{FW}}^{\text{chir}}$ и гамильтониана $H_{\text{FW}}^{\text{chir}}$ получаются из выражений $U_{\text{FW}}, H_{\text{FW}}$ с матрицами $\alpha^i, \beta, \gamma^5$ в представлении Дирака–Паули с заменой $m \leftrightarrow \Sigma\mathbf{p}, \beta \leftrightarrow \gamma^5$ [2].

В частности, для свободного движения уравнение Фолди–Ваутхайзена в киральном представлении имеет вид

$$p_0\psi_{\text{FW}}(x) = (H_0^{\text{chir}})_{\text{FW}}\psi_{\text{FW}}(x) = \gamma^5 E\psi_{\text{FW}}(x). \quad (5)$$

Решениями свободных уравнений (4), (5) являются плоские волны с положительной и отрицательной энергией

$$\psi_{\text{FW}}^{(+)}(x, s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} U_s e^{-ipx}, \quad \psi_{\text{FW}}^{(-)}(x, s) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} V_s e^{ipx}, \quad (6)$$

$$U_s = \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix}, \quad p_0 \equiv E.$$

В выражениях (6) x, p — четырехвекторы; χ_s — двухкомпонентные нормированные спиновые функции Паули.

При наличии общего бозонного поля замкнутого преобразования Фолди–Ваутхайзена не существует.

Для стационарных внешних полей общая форма точного FW-преобразования была найдена Эриксоном [3].

Другой прямой способ получения преобразования Фолди–Ваутхайзена в случае взаимодействия фермионов с произвольными (в том числе зависящими от времени) бозонными полями получен в работе автора [4] (см. также обзор [5]).

Матрица преобразования и релятивистский гамильтониан получены в виде ряда по степеням константы связи

$$U_{\text{FW}} = (U_0)_{\text{FW}}(1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots), \quad (7)$$

$$H_{\text{FW}} = \beta E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots$$

В равенствах (7) $(U_0)_{\text{FW}}$ — матрица FW-преобразования для свободных дираковских частиц; $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$; $\delta_1, K_1 \sim q$; $\delta_2, K_2 \sim q^2$; $\delta_3, K_3 \sim q^3$; q — константа связи.

Кроме прямых методов перехода к представлению Фолди–Ваутхайзена существует много пошаговых способов получения FW-уравнений и их гамильтонианов. В частности, один из таких методов был использован в классической работе Фолди–Ваутхайзена [1] для получения гамильтониана дираковской частицы в присутствии внешнего электромагнитного поля в виде ряда по степеням $1/m$.

Пошаговые методы, как правило, верны для первых двух итераций и полезны лишь в случае слабых бозонных полей и их пространственно-временных производных [6].

В [5, 7] представление Фолди–Ваутхайзена использовалось для построения Стандартной модели и, в частности, квантовой электродинамики. Для учета взаимодействия реальных электрон-позитронных пар произведена модификация FW-представления и рассчитаны конкретные процессы квантовой теории поля.

Сформулируем основные особенности преобразования и представления Фолди–Ваутхайзена.

1. В представлении Фолди–Ваутхайзена гамильтониан H_{FW} является блок-диагональным относительно верхних и нижних компонент волновой функции (оператора поля).

2. Обязательным условием перехода к FW-представлению для свободного движения и движения фермионов в статических внешних бозонных полях является условие равенства нулю либо верхних, либо нижних компонент ψ_{FW} (условие редукции дираковской волновой функции) [6].

3. Из-за вида базисных волновых функций (операторов поля) в FW-представлении с нулевыми либо верхними, либо нижними компонентами преобразование Фолди–Ваутхайзена при переходе от представления Дирака сужает пространство возможных состояний дираковской частицы. Необходимы специальные меры (модификация FW-преобразования) для возвращения в дираковское пространство состояний.

2. ИЗОТОПИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА И КИРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАССИВНЫХ ФЕРМИОННЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим плотность гамильтониана дираковской частицы массой m , взаимодействующей с произвольным абелевым векторным бозонным полем $B^\mu(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D &= \psi^\dagger (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m + q\alpha_\mu B^\mu) \psi = \\ &= \psi^\dagger (P_L + P_R)(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \beta m + q\alpha_\mu B^\mu)(P_L + P_R)\psi = \\ &= \psi_L^\dagger (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + q\alpha_\mu B^\mu)\psi_L + \psi_R^\dagger (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + q\alpha_\mu B^\mu)\psi_R + \psi_L^\dagger \beta m \psi_R + \psi_R^\dagger \beta m \psi_L. \end{aligned} \quad (8)$$

В равенствах (8) q — константа взаимодействия; $\alpha^\mu = \begin{cases} 1, & \mu = 0, \\ \alpha^i, & \mu = i = 1, 2, 3, \end{cases}$
 $P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}$, $P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}$ — левый и правый проекционные операторы;
 $\psi_L = P_L \psi$, $\psi_R = P_R \psi$ — левая и правая компоненты оператора дираковского поля ψ .

Абелев случай для поля $B^\mu(x)$ рассматривается для простоты. При рассмотрении общего случая дираковской частицы, взаимодействующей с неабелевым бозонным полем, выводы и результаты, полученные в настоящей работе, не изменяются.

Плотность гамильтониана \mathcal{H}_D позволяет получить уравнения для ψ_L и ψ_R :

$$\begin{aligned} p_0 \psi_L &= (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + q \alpha_\mu B^\mu) \psi_L + \beta m \psi_R, \\ p_0 \psi_R &= (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + q \alpha_\mu B^\mu) \psi_R + \beta m \psi_L. \end{aligned} \quad (9)$$

Видно, что и плотность гамильтониана \mathcal{H}_D (8), и уравнения (9) имеют форму, при которой наличие массы у фермионов приводит к смешиванию правых и левых компонент оператора поля ψ , и поэтому киральная симметрия сохраняется лишь для безмассовых фермионов.

2.1. Кирально-симметричные уравнения для массивных фермионов в дираковском представлении. Теперь зададимся вопросом: можно ли записать кирально-симметричные уравнения движения и их гамильтонианы для массивных фермионов?

Из уравнений (9) следует, что

$$\begin{aligned} \psi_L &= (p_0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} - q \alpha_\mu B^\mu)^{-1} \beta m \psi_R, \\ \psi_R &= (p_0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} - q \alpha_\mu B^\mu)^{-1} \beta m \psi_L. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя (10) в правые части уравнений (9), пропорциональные βm , получаем интегродифференциальные уравнения для ψ_R и ψ_L :

$$\begin{aligned} [(p_0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} - q(B^0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{B})) - \beta m (p_0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} - q(B^0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{B}))^{-1} \beta m] \psi_L &= 0, \\ [(p_0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} - q(B^0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{B})) - \beta m (p_0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} - q(B^0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{B}))^{-1} \beta m] \psi_R &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Видно, что уравнения для ψ_R и ψ_L имеют одинаковый вид и в отличие от (9) наличие массы m не приводит к смешиванию правых и левых компонент ψ .

Уравнения (11) можно записать в виде

$$[(p_0 - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} - q \alpha_\mu B^\mu) - (p_0 + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} - q \bar{\alpha}_\mu B^\mu)^{-1} m^2] \psi_{L,R} = 0. \quad (12)$$

В выражении (12) обозначение $\psi_{L,R}$ указывает на одинаковый вид уравнений

$$\text{для } \psi_L \text{ и } \psi_R; \bar{\alpha}_\mu = \begin{cases} 1 \\ -\alpha^i \end{cases}.$$

Если умножить уравнения (12) слева на множитель $p_0 + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q\bar{\alpha}_\mu B^\mu$, то получим уравнения второго порядка по p^μ :

$$[(p_0 + \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q\bar{\alpha}_\mu B^\mu)(p_0 - \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} - q\alpha_\mu B^\mu) - m^2] \psi_{L,R} = 0. \quad (13)$$

Для случая квантовой электродинамики ($q = e$, $B^\mu = A^\mu$) уравнения (13) имеют вид

$$[(p_0 - eA_0)^2 - (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - m^2 + e\Sigma\mathbf{H} + ie\boldsymbol{\alpha}\mathbf{E}] \psi_{L,R} = 0. \quad (14)$$

В уравнениях (14) $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$ — магнитное поле; $\mathbf{E} = -(\partial\mathbf{A}/\partial t) - \nabla A_0$ — электрическое поле.

Уравнения (14) совпадают с уравнением второго порядка, полученным Дираком в 1920-е гг. для биспинора ψ [8]. Однако в отличие от [8] (см. также [9]) уравнения (14) записаны для левых и правых компонент биспинора ψ и не содержат «лишних» решений. Оператор γ_5 коммутирует с уравнениями (13), (14). Следовательно, $\gamma_5\psi = \delta\psi$ ($\delta^2 = 1$; $\delta = \pm 1$). Случай $\delta = -1$ соответствует решениям (13), (14) для ψ_L , а $\delta = +1$ — решениям (13), (14) для ψ_R .

Таким образом, выражения (12), (13) показывают, что для изначально массивных фермионов, взаимодействующих с бозонными полями, уравнения движения могут быть записаны в кирально-симметричном виде.

2.2. Изотопическое представление Фолди–Ваутхайзена для массивных фермионов. Уравнения (12), (13) являются нелинейными относительно оператора $p_0 = i(\partial/\partial t)$. Линейную форму кирально-симметричных уравнений фермионных полей относительно p_0 можно получить, используя преобразование Фолди–Ваутхайзена [1] в специально введенном изотопическом пространстве.

Введем восьмикомпонентный оператор поля $\Phi_1 = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$ и изотопические матрицы $\tau_3 = \begin{pmatrix} E_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & -E_{4 \times 4} \end{pmatrix}$, $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & E_{4 \times 4} \\ E_{4 \times 4} & 0 \end{pmatrix}$, действующие на четыре верхних и четыре нижних компоненты оператора Φ_1 . Теперь уравнения (9) можно записать в виде

$$p_0\Phi_1 = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \tau_1\beta m + q\alpha_\mu B^\mu)\Phi_1. \quad (15)$$

Поскольку τ_1 коммутирует с правой частью (15), то поле $\Phi_2 = \tau_1\Phi_1 = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ также является решением уравнения (15):

$$p_0\Phi_2 = (\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p} + \tau_1\beta m + q\alpha_\mu B^\mu)\Phi_2. \quad (16)$$

Наконец, введем шестнадцатикомпонентный спинор

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \\ \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (17)$$

и обобщение изотопических матриц τ_1, τ_3

$$E_{16 \times 16} \cdot \tau_1 = \Sigma_1^I, \quad E_{16 \times 16} \cdot \tau_3 = \Sigma_3^I, \quad \rho_1^I \cdot \tau_1 = \alpha_1^I, \quad (18)$$

$$\rho_1^I = \begin{pmatrix} 0 & E_{8 \times 8} \\ E_{8 \times 8} & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_3^I = \begin{pmatrix} E_{8 \times 8} & 0 \\ 0 & -E_{8 \times 8} \end{pmatrix}, \quad \rho_2^I = i\rho_3^I \rho_1^I.$$

В выражениях (18) индекс «I» указывает, что введенные матрицы, так же как и матрицы τ_1, τ_3 , действуют в изотопическом пространстве, не затрагивая внутренней структуры полей ψ_R, ψ_L .

Уравнение Дирака для $\Phi(x)$ с учетом (18) можно записать в следующем виде:

$$p_0 \Phi(x) = \left(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \Sigma_1^I \beta m + \frac{1}{2} (E_{16 \times 16} + \alpha_1^I) q \alpha_\mu B^\mu \right) \Phi(x). \quad (19)$$

С учетом спинорной структуры $\Phi(x)$ (см. (17)) в уравнении (19) содержатся уравнения (9) в удвоенном количестве.

Уравнения (15), (16), (19) в дираковском представлении по своим физическим следствиям эквивалентны друг другу, но, как будет показано ниже, каждое из них имеет свои особенности в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена (IFW).

Рассмотрим далее уравнения (15), (16) без бозонных полей B^μ (свободное движение):

$$p_0 \Phi_{1,2} = (\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_1 \beta m) \Phi_{1,2}. \quad (20)$$

Запись $\Phi_{1,2}$ показывает одинаковость уравнений (20) для полей Φ_1, Φ_2 .

Найдем преобразование Фолди–Ваутхайзена в изотопическом пространстве для уравнений (20), используя преобразование Эриксона [3]:

$$(U_0)_{\text{IFW}} = U_{\text{Er}} = \frac{1}{2} (1 + \tau_3 \lambda) \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_3 \lambda + \lambda \tau_3}{4} \right)^{-1/2}. \quad (21)$$

В выражении (21) $\lambda = \frac{\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_1 \beta m}{E}$; $E = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$. Поскольку $(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_1 \beta m)^2 = E^2$, то $\lambda^2 = 1$.

Выражение (21) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} (U_0)_{\text{IFW}} = U_{\text{Er}} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_3 \tau_1 \beta m}{E} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}}{2E} \right)^{-1/2} = \\ &= \sqrt{\frac{E + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}}{2E}} \left(1 + \frac{1}{E + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}} \tau_3 \tau_1 \beta m \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Преобразование (22) унитарно ($(U_0)_{\text{IFW}}(U_0)_{\text{IFW}}^\dagger = 1$) и

$$(H_0)_{\text{IFW}} = (U_0)_{\text{IFW}}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \tau_1 \beta m)(U_0)_{\text{IFW}}^\dagger = \tau_3 E. \quad (23)$$

Таким образом, в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена уравнения (20) имеют вид

$$p_0(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} = \tau_3 E(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}. \quad (24)$$

Поскольку $(U_0)_{\text{IFW}}\tau_1(U_0)_{\text{IFW}}^\dagger = \tau_3\beta$, аналогом соотношения $\Phi_2 = \tau_1\Phi_1$ в IFW-представлении является соотношение

$$(\Phi_2)_{\text{IFW}} = \tau_3\beta(\Phi_1)_{\text{IFW}}. \quad (25)$$

При переходе к изотопическому представлению Фолди–Ваутхайзена кроме выполнения условия блок-диагональности гамильтониана в уравнениях (24) обязательным является также условие равенства нулю верхних или нижних компонент Φ_1 , Φ_2 (условие редукции полей Φ_1 , Φ_2) [6].

Проверим, выполняется ли для нашего случая это условие. С учетом соотношений (9), (10) нормированные решения уравнений (20) для волновых функций Φ_1 , Φ_2 можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= e^{-iEt} \sqrt{\frac{E + \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{p}}{2E}} \begin{pmatrix} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ \frac{1}{E - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}} \beta m \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ \Phi_1^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= e^{iEt} \sqrt{\frac{E + \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{p}}{2E}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{E + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}} \beta m \psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ \Phi_2^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= e^{-iEt} \sqrt{\frac{E - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{p}}{2E}} \begin{pmatrix} \psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) \\ \frac{1}{E - \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}} \beta m \psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ \Phi_2^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= e^{iEt} \sqrt{\frac{E - \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{p}}{2E}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{E + \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}} \beta m \psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (26)$$

В (26) $\Phi_1^{(+)}, \Phi_2^{(+)}; \Phi_1^{(-)}, \Phi_2^{(-)}$ — решения уравнений (20) с положительной и отрицательной энергией соответственно.

При использовании матриц α^i, β в представлении Дирака–Паули правые и левые компоненты волновых функций для решений с положительной и отрицательной энергией равны

$$\begin{aligned}\psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_D^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m}\right) \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m}\right) \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ \psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi_D^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m}\right) \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m}\right) \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ \psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_D^{(+)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m}\right) \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ -\left(1 - \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m}\right) \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\ \psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi_D^{(-)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m}\right) \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \left(1 + \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{E+m}\right) \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{27}$$

В выражениях (27) $\varphi^{(+)}(\mathbf{x}), \chi^{(-)}(\mathbf{x})$ — нормированные двухкомпонентные решения уравнения Дирака с положительной и отрицательной энергией. В (26), (27) E и \mathbf{p} — операторы энергии и импульса дираковской частицы.

В соответствии с (27)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}\psi_R^{(+)}(\mathbf{x}), & \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) &= \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}\psi_R^{(-)}(\mathbf{x}), \\ \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) &= -\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}\psi_L^{(+)}(\mathbf{x}), & \boldsymbol{\alpha}\mathbf{p}\psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) &= -\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{p}\psi_L^{(-)}(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{28}$$

Из выражений (27) следуют условия нормировки

$$\begin{aligned}\psi_R^{(+)\dagger}(\mathbf{x})\psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) &= \varphi^{(+)\dagger}(\mathbf{x})\frac{E + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{2E}\varphi^{(+)}(\mathbf{x}), \\ \psi_R^{(-)\dagger}(\mathbf{x})\psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) &= \chi^{(-)\dagger}(\mathbf{x})\frac{E - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{2E}\chi^{(-)}(\mathbf{x}), \\ \psi_L^{(+)\dagger}(\mathbf{x})\psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) &= \varphi^{(+)\dagger}(\mathbf{x})\frac{E - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{2E}\varphi^{(+)}(\mathbf{x}), \\ \psi_L^{(-)\dagger}(\mathbf{x})\psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) &= \chi^{(-)\dagger}(\mathbf{x})\frac{E + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{2E}\chi^{(-)}(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{29}$$

Действуя на Φ_1 , Φ_2 (см. (26)) матрицей преобразования $(U_0)_{\text{IFW}}$ (22), получаем

$$\begin{aligned}
 \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= (U_0)_{\text{IFW}}\Phi_1^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \\
 &= e^{-iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E + \Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iEt} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \Phi_{1\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= (U_0)_{\text{IFW}}\Phi_1^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \\
 &= e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2E}{E + \Sigma\mathbf{p}}} \psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = e^{iEt} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\chi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \\
 \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= (U_0)_{\text{IFW}}\Phi_2^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \\
 &= e^{-iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E - \Sigma\mathbf{p}}} \psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iEt} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ -\varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \Phi_{2\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= (U_0)_{\text{IFW}}\Phi_2^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \\
 &= e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{2E}{E - \Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = e^{iEt} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Из соотношений (30) видно, что условие редукции выполняется и, действительно, матрица $(U_0)_{\text{IFW}}$ является преобразованием Фолди-Ваутхайзена для полей Φ_1 , Φ_2 во введенном нами изотопическом пространстве.

Для матриц Дирака в киральном представлении, следуя (27)–(30), можно получить следующий вид базисных функций в IFW-представлении:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= e^{-iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E + \Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 \Phi_{1\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= e^{iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E + \Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \chi^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{2\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) &= e^{-iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E + \Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Phi_{2\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) &= e^{iEt} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2E}{E + \Sigma\mathbf{p}}} \psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} = e^{-iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\chi^{(-)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (31)$$

Естественно, в киральном представлении по-прежнему выполняется соотношение (25) для взаимосвязи функций $\Phi_{1\text{IFW}}(x)$ и $\Phi_{2\text{IFW}}(x)$.

Базисные функции (30), (31) являются также решениями свободного уравнения (19), преобразованного в IFW-представление. Действительно, с учетом определений (17), (18) для свободного движения уравнение (19) имеет вид

$$p_0 \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix} = (\alpha\mathbf{p} + E_{16 \times 16} \tau_3 \beta m) \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Применяя матрицу преобразования (22) к верхним и нижним компонентам уравнения (32), получаем

$$p_0 \begin{pmatrix} \Phi_{1\text{IFW}}(x) \\ \Phi_{2\text{IFW}}(x) \end{pmatrix} = E_{16 \times 16} \tau_3 E \begin{pmatrix} \Phi_{1\text{IFW}}(x) \\ \Phi_{2\text{IFW}}(x) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Базисные функции (30), (31) ортонормированны и полны. Условия полноты совместно включают в себя функции $\Phi_{1\text{IFW}}^{(\pm)}$ и $\Phi_{2\text{IFW}}^{(\pm)}$:

$$\sum_{\pm s} \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_{\alpha} \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)\dagger}(\mathbf{x}', t)_{\beta} = \left[\frac{1}{2}(1 + \tau_3) \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \right]_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (34)$$

$$\sum_{\pm s} \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_{\alpha} \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)\dagger}(\mathbf{x}', t)_{\beta} = \left[\frac{1}{2}(1 + \tau_3) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \right]_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (35)$$

$$\sum_{\pm s} \Phi_{1\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_{\alpha} \Phi_{1\text{IFW}}^{(-)\dagger}(\mathbf{x}', t)_{\beta} = \left[\frac{1}{2}(1 - \tau_3) \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) \right]_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (36)$$

$$\sum_{\pm s} \Phi_{2\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_{\alpha} \Phi_{2\text{IFW}}^{(-)\dagger}(\mathbf{x}', t)_{\beta} = \left[\frac{1}{2}(1 - \tau_3) \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) \right]_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (37)$$

$$\begin{aligned}& \sum_{\pm s} (\Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_{\alpha} \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)\dagger}(\mathbf{x}', t)_{\beta} + \Phi_{1\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_{\alpha} \Phi_{1\text{IFW}}^{(-)\dagger}(\mathbf{x}', t)_{\beta} + \\ & + \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_{\alpha} \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)\dagger}(\mathbf{x}', t)_{\beta} + \Phi_{2\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_{\alpha} \Phi_{2\text{IFW}}^{(-)\dagger}(\mathbf{x}', t)_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').\end{aligned}\quad (38)$$

Отметим также следующие полезные соотношения: выражения $\sum_{\pm s} \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)\dagger}(\mathbf{x}', t)_\beta$ и $\sum_{\pm s} \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)\dagger}(\mathbf{x}', t)_\beta$ отличаются соответственно от (34) и (35) наличием матрицы β после квадратной скобки; выражения $\sum_{\pm s} \Phi_{1\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{2\text{IFW}}^{(-)\dagger}(\mathbf{x}', t)_\beta$ и $\sum_{\pm s} \Phi_{2\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t)_\alpha \Phi_{1\text{IFW}}^{(-)\dagger}(\mathbf{x}', t)_\beta$ отличаются соответственно от (36) и (37) наличием матрицы $(-\beta)$ после квадратной скобки.

При наличии бозонных полей $B^\mu(x)$, взаимодействующих с фермионными полями $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, изотопическое преобразование Фолди–Ваутхайзена и вид гамильтонианов уравнений (15), (16), (19) в IFW-представлении можно получить в виде ряда по степеням константы связи, используя алгоритм, описанный в [4, 5].

В результате в обозначениях [4, 5] получаем

$$(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} = U_{\text{IFW}} \Phi_{1,2}, \quad U_{\text{IFW}} = (1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots)(U_0)_{\text{IFW}}; \quad (39)$$

$$(\Phi)_{\text{IFW}} = U_{\text{IFW}}^\Phi \Phi, \quad U_{\text{IFW}}^\Phi = (1 + \delta_1^\Phi + \delta_2^\Phi + \delta_3^\Phi + \dots)(U_0^\Phi)_{\text{IFW}}. \quad (40)$$

Действуя одним и тем же преобразованием (39) на каждое из уравнений (15), (16), получаем следующие уравнения и плотности гамильтонианов в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена:

$$p_0 \Phi_{\text{IFW}} = (\tau_3 E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots)(\Phi_1)_{\text{IFW}}, \quad (41)$$

$$\mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{I}} = (\Phi_1)_{\text{IFW}}^\dagger (\tau_3 E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots)(\Phi_1)_{\text{IFW}}, \quad (42)$$

$$p_0 (\Phi_2)_{\text{IFW}} = (\tau_3 E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots)(\Phi_2)_{\text{IFW}}, \quad (43)$$

$$\mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{II}} = (\Phi_2)_{\text{IFW}}^\dagger (\tau_3 E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots)(\Phi_2)_{\text{IFW}}. \quad (44)$$

Аналогично, действуя преобразованием (40) на уравнение (19), получаем

$$p_0 \Phi_{\text{IFW}} = (E_{16 \times 16} \tau_3 E + K_1^\Phi + K_2^\Phi + K_3^\Phi + \dots) \Phi_{\text{IFW}}, \quad (45)$$

$$\mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{III}} = (\Phi)_{\text{IFW}}^\dagger (E_{16 \times 16} \tau_3 E + K_1^\Phi + K_2^\Phi + K_3^\Phi + \dots) (\Phi)_{\text{IFW}}. \quad (46)$$

Для иллюстрации явные выражения в импульсном представлении для восьмимерных операторов K_1 , K_2 , K_3 в (41)–(44) приведены в приложении 1. Шестнадцатимерные операторы K_n^Φ в (45), (46) являются обобщением выражений K_n с заменой

$$\tau_1 \rightarrow E_{16 \times 16} \tau_1, \quad \tau_3 \rightarrow E_{16 \times 16} \tau_3, \quad q \rightarrow q^\Phi = \frac{1}{2}(E_{16 \times 16} + \alpha_1^{\text{I}})q. \quad (47)$$

Выражения для операторов C , N , C^Φ , N^Φ , составляющих согласно [4, 5] основу при записи гамильтониана взаимодействия в FW-представлении, для

изотопического представления Фолди–Ваутхайзена записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
C &= [(U_0)_{\text{IFW}} q \alpha_\mu B_\mu (U_0)_{\text{IFW}}^\dagger]^{\text{even}} = \\
&= R(qB^0 - LqB^0L)R - R(q\alpha\mathbf{B} - Lq\alpha\mathbf{B}L)R, \\
N &= [(U_0)_{\text{IFW}} q \alpha_\mu B_\mu (U_0)_{\text{IFW}}^\dagger]^{\text{odd}} = \\
&= R(LqB^0 - qB^0L)R - R(Lq\alpha\mathbf{B} - q\alpha\mathbf{B}L)R, \\
R &= \sqrt{\frac{E + \tau_3 \alpha \mathbf{p}}{2E}}, \quad L = \frac{1}{E + \tau_3 \alpha \mathbf{p}} \tau_3 \tau_1 \beta m.
\end{aligned} \tag{48}$$

Выражения для шестнадцатимерных операторов C^Φ , N^Φ в (45), (46) получаются из выражений (48) с заменой (47):

$$\begin{aligned}
C^\Phi &= R^\Phi(q^\Phi B^0 - L^\Phi q^\Phi B^0 L^\Phi)R^\Phi - R^\Phi(q^\Phi \alpha \mathbf{B} - L^\Phi q^\Phi \alpha \mathbf{B} L^\Phi)R^\Phi, \\
N^\Phi &= R^\Phi(L^\Phi q^\Phi B^0 - q^\Phi B^0 L^\Phi)R^\Phi - R^\Phi(L^\Phi q^\Phi \alpha \mathbf{B} - q^\Phi \alpha \mathbf{B} L^\Phi)R^\Phi, \tag{49} \\
R^\Phi &= \sqrt{\frac{E + E_{16 \times 16} \tau_3 \alpha \mathbf{p}}{2E}}, \quad L^\Phi = \frac{1}{E + E_{16 \times 16} \tau_3 \alpha \mathbf{p}} E_{16 \times 16} \tau_3 E_{16 \times 16} \tau_1 \beta m.
\end{aligned}$$

В выражениях (48) индексы even, odd обозначают четную и нечетную часть операторов соответственно, не связывающую и связывающую верхние и нижние изотопические компоненты $(\Phi_1)_{\text{IFW}}$ и $(\Phi_2)_{\text{IFW}}$.

Заметим, что при решении практических задач в квантовой теории поля с использованием теории возмущений фермионные поля разлагаются по решениям уравнений Дирака для свободного движения или для движения в статических внешних полях. В нашем случае в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена мы также можем разложить соответствующие фермионные поля по базису решений (30), (31) или по схожему в изотопическом пространстве базису решений изотопических уравнений Фолди–Ваутхайзена в статических внешних полях и выразить через них гамильтонианы (42), (44), (46).

По определению, восьмимерные операторы K_n в гамильтонианах (42), (44) являются четными относительно верхних и нижних изотопических компонент и по этой причине содержат четное число нечетных операторов N . Шестнадцатимерные операторы K^Φ содержат четные и нечетные части из-за вида q^Φ в (47). По своей структуре операторы K_n^Φ подобны операторам K_n , и поэтому они содержат также четное число операторов N^Φ . Нечетные части операторов K^Φ позволяют осуществлять связь между полями $\Phi_{1\text{FW}}$, $\Phi_{2\text{FW}}$ и с учетом их структуры осуществлять взаимодействие лишь между левыми частицами и левыми античастицами, а также лишь между правыми частицами и правыми античастицами.

Таким образом, проведенное рассмотрение показывает, что в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена в случае рассмотренного взаимодействия уравнения фермионных полей (41), (43), (45) и их гамильтонианы фактически записаны в кирально-симметричном виде независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов.

2.3. Киральная инвариантность в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена. В изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена для свободного движения гамильтониан (23) и уравнения (24) инвариантны относительно кирального преобразования

$$(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5} (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}. \quad (50)$$

Данная инвариантность не зависит от наличия или отсутствия массы у фермионов.

Заметим, что если использовать в показателях экспонент в выражении (50) оператор

$$(\gamma^5)_{\text{IFW}} = (U_0)_{\text{IFW}} \gamma^5 (U_0)_{\text{IFW}}^\dagger = \gamma^5 \left(\frac{\tau_3 \alpha \mathbf{p}}{E} - \frac{\tau_3 \tau_1 \beta m}{E} \right), \quad (51)$$

то при ненулевой массе фермиона гамильтониан (23) и уравнения (24) не инвариантны относительно преобразования в IFW-представлении

$$(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} \rightarrow e^{i\alpha(\gamma^5)_{\text{IFW}}} (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} \quad (52)$$

подобно аналогичному преобразованию с оператором γ^5 в дираковском представлении для массивных фермионов

$$(\Phi_{1,2}) \rightarrow e^{i\alpha(\gamma^5)} (\Phi_{1,2}). \quad (53)$$

Оператор $(\gamma^5)_{\text{IFW}}$ связан со спиральностью фермионов в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена.

Поскольку базисные функции свободного движения (30), (31) в IFW-представлении сохранили вид правых и левых компонент операторов поля, используемых в дираковском представлении ($\psi_{R,L} = 1/2(1 \pm \gamma^5)\psi$), выбор кирального преобразования (50) вполне оправдан.

Для случая выбранного нами в дираковском представлении взаимодействия $q\alpha_\mu B^\mu(x)$ с матрицами α_μ , коммутирующими с γ^5 , киральная симметрия уравнений и гамильтонианов (41)–(46) также сохраняется. Действительно, в выражениях (41)–(46) единственными из операторов, не коммутирующих с γ^5 , являются операторы L , L^Φ (см. (48), (49)). Однако в выражениях для C и C^Φ (см. (48), (49)) операторы L , L^Φ содержатся в четном виде. Также в четном виде выражения N и N^Φ содержатся в операторах K_n и K_n^Φ соответственно. Следовательно, оператор γ^5 коммутирует с гамильтонианами уравнений (41), (43), (45).

и правых фермионов и левых и правых антифермионов; частицы и античастицы взаимодействуют между собой реальным (сплошная стрелка на рис. 1) и виртуальным (штриховая стрелка на рис. 1) образом. Физическая картина рис. 1 соответствует миру, который непосредственно окружает нас.

Перейдем к рассмотрению гамильтонианов $\mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{I}}$ (42) и $\mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{II}}$ (44), соответствующих уравнениям (41) и (43). Символическая картина приведена на рис. 2, 3.

$$\begin{array}{ccc}
 E > 0 & \mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{I}} & E < 0 \\
 T_3 = +\frac{1}{2} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & T_3 = -\frac{1}{2} \\
 \Phi_{\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} A\psi_R^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \\ | \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \end{array} & \Phi_{\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ A_1\psi_L^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 2

$$\begin{array}{ccc}
 E > 0 & \mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{II}} & E < 0 \\
 T_3 = +\frac{1}{2} & \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} & T_3 = -\frac{1}{2} \\
 \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} A_1\psi_L^{(+)}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \\ | \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \end{array} & \Phi_{2\text{IFW}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = e^{iEt} \begin{pmatrix} 0 \\ A\psi_R^{(-)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Рис. 3

Из рис. 2, 3 следует, что гамильтонианы $\mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{I}}$, $\mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{II}}$ обеспечивают существование либо правых фермионов и левых антифермионов ($\mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{I}}$), либо левых фермионов и правых антифермионов ($\mathcal{H}_{\text{IFW}}^{\text{II}}$). В обоих случаях отсутствуют взаимодействия реальных частиц и античастиц.

Плотности гамильтонианов (42), (44), (46) и уравнения фермионных полей (41), (43), (45) по аналогии с [4, 5] позволяют сформулировать правила Фейнмана для расчета методами теории возмущений конкретных физических процессов квантовой теории взаимодействующих полей.

3. УРАВНЕНИЕ НЕПРЕРЫВНОСТИ. СОХРАНЕНИЕ ВЕКТОРНОГО И АКСИАЛЬНОГО ТОКОВ МАССИВНЫХ ФЕРМИОНОВ В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ-ВАУТХАЙЗЕНА

Уравнение непрерывности для свободного движения можно получить, используя уравнения (24), (33) и эрмитово сопряженные им.

Ниже рассмотрение будет проведено для уравнений (24) с восьмикомпонентными спинорами $(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}$. Рассмотрение для уравнений (33) с шестна-

двятикомпонентными спинорами Φ_{IFW} приводит к аналогичным результатам и выводам:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}}{\partial t} &= \tau_3 E(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}, \\ -i \frac{\partial(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger}{\partial t} &= (E(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger) \tau_3, \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} ((\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}) &= \\ = -i ((\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger \tau_3 E(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} - (E(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger) \tau_3 (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}) &= -\text{div } \mathbf{j}, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} j^i &= \frac{1}{2m} ((\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger p^i \tau_3 (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} - (p^i (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger) \tau_3 (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}) - \\ &\quad - \frac{1}{8m^3} \mathbf{p}^2 ((\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger p^i \tau_3 (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} - (p^i (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger) \tau_3 (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}) + \\ &\quad + \frac{1}{16m^5} \mathbf{p}^2 ((\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger p^i \mathbf{p}^2 \tau_3 (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} - (p^i \mathbf{p}^2 (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger) \tau_3 (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}) - \dots \end{aligned} \quad (59)$$

Выражение (59) для тока j^i получено разложением оператора $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ в правой части (58) по степеням \mathbf{p}^2/m^2 . Первое слагаемое в (59) по виду соответствует току уравнения Шредингера.

В выражениях (58), (59) операторы являются диагональными относительно верхних и нижних изотопических компонент $(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}$ и, следовательно, учитывая вид базисных функций (30), ток j^i и уравнение непрерывности можно записать в кирально-симметричном виде.

Аналогично (58), (59) можно получить уравнения сохранения аксиального тока с матрицей γ^5 между восьмикомпонентными спинорами $(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger$, $(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} ((\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger \gamma^5 (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}) &= -i ((\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger \gamma^5 \tau_3 E(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} - \\ &\quad - (E(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}^\dagger) \gamma^5 \tau_3 (\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}) = -\text{div } \mathbf{j}_A. \end{aligned} \quad (60)$$

Аксиальный ток в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена сохраняется независимо от наличия или отсутствия массы у фермионов.

Напомним, что в дираковском представлении аксиальный ток сохраняется лишь для безмассовых фермионов:

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 2im\psi^\dagger \beta \gamma^5 \psi, \quad j^{\mu 5}(x) = \psi^\dagger(x) \alpha^\mu \gamma^5 \psi(x). \quad (61)$$

4. ВОЗМОЖНОСТЬ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ ЧЕТНОСТИ В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА

В предыдущем разделе было показано, что уравнения (41), (43), (45) и их гамильтонианы инвариантны относительно преобразований киральной симметрии (50).

Плотность гамильтониана (46) без взаимодействия фактически записывается отдельно для левых и правых частиц, а также для левых и правых античастиц.

Гамильтониан (42) без взаимодействия содержит только правые фермионы и только левые антифермионы (см. рис. 2).

Гамильтониан (44) без взаимодействия содержит только левые фермионы и только правые антифермионы (рис. 3).

Вакуум или основное состояние свободного гамильтониана (46) содержит дираковское море отрицательных энергетических состояний левых и правых антифермионов.

Вакуум гамильтониана (42) представляет собой дираковское море левых антифермионов, а вакуум гамильтониана (44) — дираковское море правых антифермионов.

Поскольку уравнения (41), (43), (45) получены унитарными IFW-преобразованиями из эквивалентных друг другу уравнений (15), (16), (19), наличие существования вырожденного вакуума и предпосылок для спонтанного нарушения P -симметрии.

Обсуждение возможной связи спонтанного нарушения четности в IFW-представлении с составом элементарных частиц «темной материи» производится в следующей работе.

5. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА КАК ПРИМЕР КИРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ТЕОРИИ С МАССИВНЫМИ ФЕРМИОНАМИ В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ–ВАУТХАЙЗЕНА

Для построения квантовой электродинамики в IFW-представлении используем уравнение шестнадцатикомпонентного поля $\Phi_{\text{IFW}}(x)$ (45) и плотность гамильтониана (46).

5.1. Правила Фейнмана в IFW-представлении. Фейнмановский пропагатор уравнения Дирака в изотопическом представлении Фолди–

Ваугхайзена равен

$$\begin{aligned}
S_{\text{IFW}}^{\Phi}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ip(x-y)}}{p_0 - E_{16 \times 16} \tau_3 E} = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip(x-y)} \frac{p_0 + E_{16 \times 16} \tau_3 E}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \\
&= -i\theta(x_0 - y_0) \int d\mathbf{p} \sum_s \Phi_{\text{IFW}}^{(+)}(x, s) (\Phi_{\text{IFW}}^{(+)}(y, s))^{\dagger} + \\
&\quad + i\theta(y_0 - x_0) \int d\mathbf{p} \sum_s \Phi_{\text{IFW}}^{(-)}(x, s) (\Phi_{\text{IFW}}^{(-)}(y, s))^{\dagger}. \quad (62)
\end{aligned}$$

В (62) подразумевается фейнмановское правило обхода полюсов; функции $\Phi_{\text{IFW}}^{(+)}(x, s)$, $\Phi_{\text{IFW}}^{(-)}(x, s)$ определяются формулами (33), (30).

Интегральные уравнения для $\Phi_{\text{IFW}}(x)$ в соответствии с (45), (62) имеют вид

$$\begin{aligned}
\Phi_{\text{IFW}}(x) &= \\
&= (\Phi_0(x))_{\text{IFW}} + \int d^4y S_{\text{IFW}}^{\Phi}(x-y) [(K_1^{\Phi} + K_2^{\Phi} + K_3^{\Phi} + \dots) \Phi_{\text{IFW}}(y)]. \quad (63)
\end{aligned}$$

В выражении (63) $(\Phi_0(x))_{\text{IFW}}$ — решения свободных уравнений Дирака в IFW-представлении (см. (33), (30)).

Выражения (62), (63) позволяют сформулировать правила Фейнмана для записи элементов матрицы рассеяния S_{fi} и расчетов процессов квантовой электродинамики (КЭД) [10]. В отличие от дираковского представления в IFW-представлении существует бесконечное множество типов вершин взаимодействия с фотоном в зависимости от порядка теории возмущений: вершине взаимодействия с одним фотоном соответствуют факторы $-iK_{1\mu}^{\Phi}$, вершине взаимодействия с двумя фотонами — факторы $-iK_{2\mu\nu}^{\Phi}$ и т.д. Для удобства величинами $K_{1\mu}^{\Phi}$, $K_{2\mu}^{\Phi} \dots$ обозначены соответствующие части членов гамильтониана взаимодействия K_1^{Φ} , $K_2^{\Phi} \dots$ без электромагнитных потенциалов A^{μ} , $A^{\mu} A^{\nu}$, \dots

Каждой внешней фермионной линии соответствует одна из функций (33). Как обычно, решения с положительной энергией соответствуют частицам, решения с отрицательной энергией — античастицам. Остальные правила Фейнмана остаются такими же, как в спинорной электродинамике в дираковском представлении.

5.2. Постановка расчетов процессов КЭД в FW-представлении. С формулированными правилами Фейнмана рассмотрены некоторые процессы КЭД в первом и во втором порядках теории возмущений. Вычислены сечения кулоновского рассеяния электронов, мёллеровского рассеяния, комптон-эффекта, аннигиляции электрон-позитронной пары; собственная энергия электрона, поляризация вакуума, аномальный магнитный момент электрона, лэмбовский сдвиг атомарных энергетических уровней. Ниже приведены диаграммы Фейнмана рассмотренных процессов. Краткие детали расчетов содержатся в приложении 2.

Конечные результаты расчетов процессов КЭД, диаграммы которых приведены на рис. 4–8, совпадают с аналогичными величинами, вычисленными в представлении Дирака. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле (рис. 9) при проведении перенормировки массы и заряда дают правильное значение аномального магнитного электрона и лэмбовского сдвига энергетических уровней. В приложении 2 представлены также результаты расчетов аннигиляции электрон-позитронной пары, совпадающие с аналогичными результатами, вычисленными в стандартной КЭД.

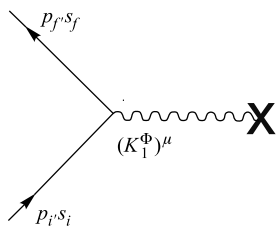


Рис. 4. Рассеяние электронов в кулоновском поле

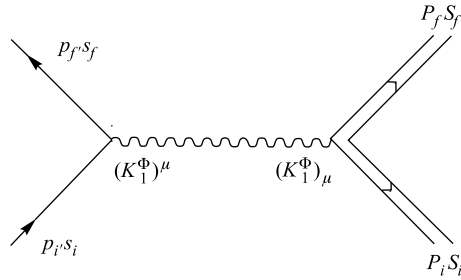


Рис. 5. Рассеяние электрона на дираковском протоне (рассеяние Мёллера)

Важной особенностью теории в случае, когда импульсы внешних фермионных линий лежат на массовой поверхности ($p^2 = m^2$), является компенсация вклада диаграмм с фермионными пропагаторами с вкладом соответствующих членов в диаграммах с вершинами высшего порядка разложения по e . Так, на рис. 6 вклад диаграмм a и b компенсируется с соответствующими частями вклада диаграмм b и z ; вклад диаграммы a на рис. 7 сокращается с вкладом соответствующей части диаграммы b ; на рис. 9 вклад диаграмм a – b сокращается с вкладом соответствующей части диаграммы z , аналогичная компенсация происходит соответственно для диаграмм d , e , $ж$ и z ; $и$, $к$, $л$ и $м$. При этом в рассматриваемом случае реальных внешних фермионов вершинные операторы K_n^Φ из-за закона сохранения энергии-импульса значительно упрощаются (см. [4, 5] и, например, приложение 1 (П1.6)–(П1.12)).

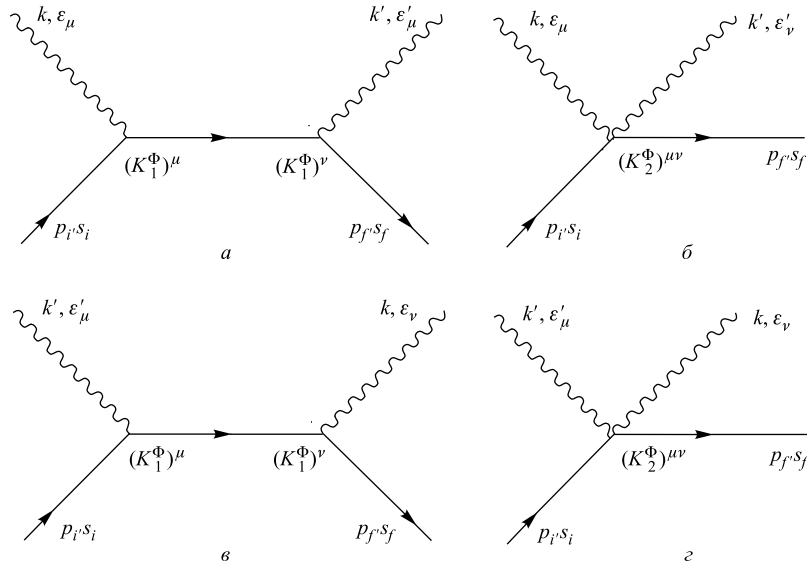


Рис. 6. Комptonовское рассеяние электронов

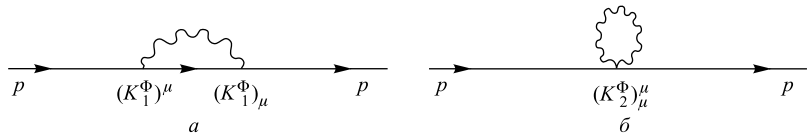


Рис. 7. Собственная энергия электрона

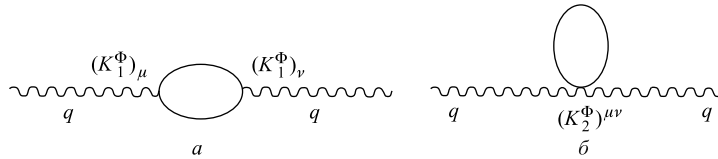


Рис. 8. Поляризация вакуума

Аналогичная компенсация происходит в диаграммах *a* и *б* рис. 8 и в диаграммах *н* и *о* рис. 9 из-за диагонального матричного суммирования и одинаковых значений импульсных переменных в начале и конце итогового подынтегрального выражения (см. приложение 2, пп. П2.5, П2.6).

Учитывая вышесказанное, можно осуществить такое разложение матрицы рассеяния по степеням e , в котором элементы матрицы S_{fi} не будут содержать членов с электрон-позитронными пропагаторами. При этом в импульсном представлении (см. приложение 1) матричные элементы вершинных опе-

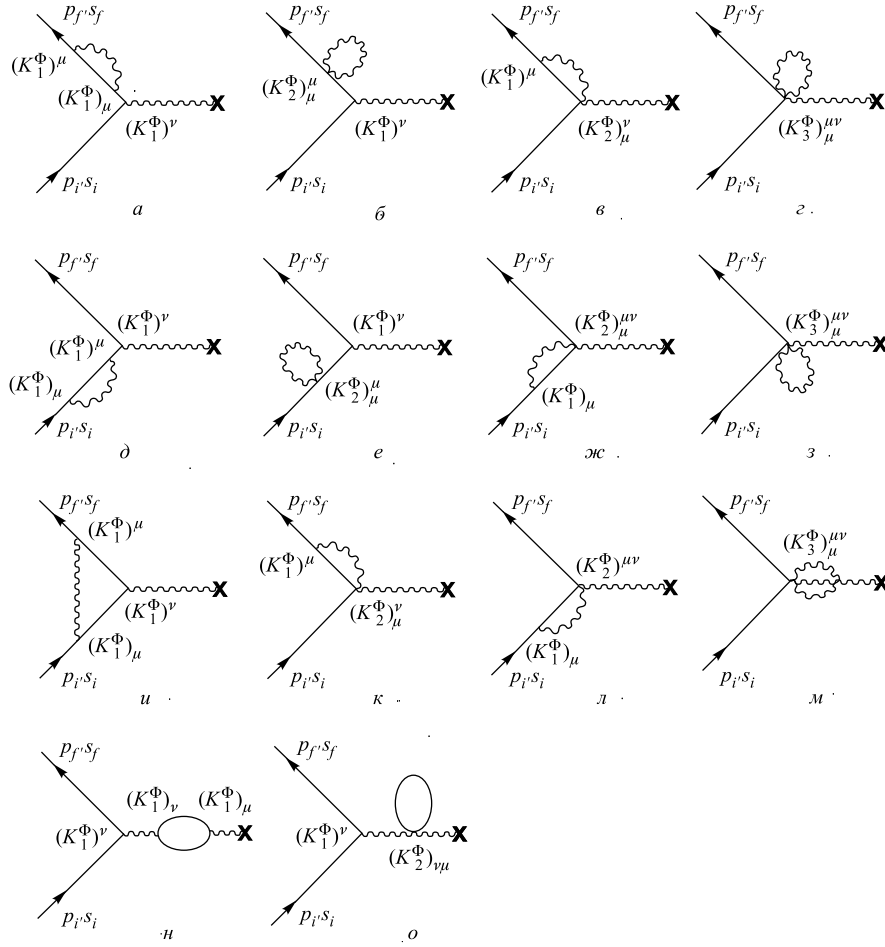


Рис. 9. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле

раторов видоизменяются следующим образом:

$$\langle \mathbf{p}' | K_1^\Phi | \mathbf{p}'' \rangle \rightarrow \langle \mathbf{p}' | C^\Phi | \mathbf{p}'' \rangle, \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | K_2^\Phi | \mathbf{p}'' \rangle &\rightarrow \sum_{\nu_1, \nu_2 = \pm 1} \int d\mathbf{p}''' \frac{1}{R' + R''} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{E_{16 \times 16} \tau_3 E'' - E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - \nu_2 k_2^0} \langle \mathbf{p}' | R C^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^\Phi | \mathbf{p}'' \rangle + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{E_{16 \times 16} \tau_3 E' - E_{16 \times 16} \tau_3 E''' + \nu_1 k_1^0} \langle \mathbf{p}' | C^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^\Phi R | \mathbf{p}'' \rangle + \\
& + \frac{1}{E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - \nu_2 k_2^0} \langle \mathbf{p}' | RN^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^\Phi | \mathbf{p}'' \rangle + \\
& + \frac{1}{E_{16 \times 16} \tau_3 E' + E_{16 \times 16} \tau_3 E''' + \nu_1 k_1^0} \langle \mathbf{p}' | N^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^\Phi R | \mathbf{p}'' \rangle \Big\}, \quad (65)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p}' | K_3^\Phi | \mathbf{p}'' \rangle & \rightarrow \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3 = \pm 1} \int d\mathbf{p}''' d\mathbf{p}'''' \frac{1}{R' + R''} \times \\
& \times \left[\frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - E_{16 \times 16} \tau_3 E' - \nu_1 k_1^0 - \nu_2 k_2^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - E_{16 \times 16} \tau_3 E' - \nu_1 k_1^0)} \times \right. \\
& \quad \times \langle \mathbf{p}' | C^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^\Phi | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | C^\Phi R | \mathbf{p}'' \rangle + \\
& + \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + \nu_2 k_2^0 + \nu_3 k_3^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + \nu_3 k_3^0)} \times \\
& \quad \times \langle \mathbf{p}' | RC^\Phi | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | C^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^\Phi | \mathbf{p}'' \rangle - \\
& - \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E'''' + E_{16 \times 16} \tau_3 E' + \nu_1 k_1^0 + \nu_2 k_2^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E'''' - E_{16 \times 16} \tau_3 E' - \nu_1 k_1^0)} \times \\
& \quad \times \langle \mathbf{p}' | C^\Phi | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | N^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^\Phi R | \mathbf{p}'' \rangle - \\
& - \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - \nu_2 k_2^0 - \nu_3 k_3^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E'''' - E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + \nu_3 k_3^0)} \times \\
& \quad \times \langle \mathbf{p}' | RN^\Phi | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | N^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^\Phi | \mathbf{p}'' \rangle + \\
& + \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E'''' + E_{16 \times 16} \tau_3 E' + \nu_1 k_1^0 + \nu_2 k_2^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E'''' + E_{16 \times 16} \tau_3 E' + \nu_1 k_1^0)} \times \\
& \quad \times \langle \mathbf{p}' | N^\Phi | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | C^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^\Phi R | \mathbf{p}'' \rangle + \\
& + \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - \nu_2 k_2^0 - \nu_3 k_3^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E'''' + E_{16 \times 16} \tau_3 E'' - \nu_3 k_3^0)} \times \\
& \quad \times \langle \mathbf{p}' | RN^\Phi | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | C^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^\Phi | \mathbf{p}'' \rangle - \\
& - \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E'''' - E_{16 \times 16} \tau_3 E' - \nu_1 k_1^0 - \nu_2 k_2^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E'''' + E_{16 \times 16} \tau_3 E' + \nu_1 k_1^0)} \times \\
& \quad \times \langle \mathbf{p}' | N^\Phi | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | N^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | C^\Phi R | \mathbf{p}'' \rangle - \\
& - \frac{1}{(E_{16 \times 16} \tau_3 E''' - E_{16 \times 16} \tau_3 E'' + \nu_2 k_2^0 + \nu_3 k_3^0)(E_{16 \times 16} \tau_3 E'''' + E_{16 \times 16} \tau_3 E'' - \nu_3 k_3^0)} \times \\
& \quad \times \langle \mathbf{p}' | RC^\Phi | \mathbf{p}'''' \rangle \langle \mathbf{p}'''' | N^\Phi | \mathbf{p}''' \rangle \langle \mathbf{p}''' | N^\Phi | \mathbf{p}'' \rangle \Big]. \quad (66)
\end{aligned}$$

В (64)–(66) операторы C^Φ и N^Φ определяются формулами (49).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Наличие массового члена в линейном по p^0 уравнении Дирака (9) не позволяет записать его в кирально-симметричном виде.

Одним из результатов настоящей работы является демонстрация возможности написания кирально-симметричных уравнений (отдельно для левых и отдельно для правых фермионов) для массивных фермионных полей. В дираковском представлении — это интегродифференциальные уравнения (11) и уравнения второго порядка по четырехимпульсу p^μ (13).

Для того чтобы получить линейные по p^0 кирально-симметричные уравнения для массивных фермионов, взаимодействующих с векторными бозонными полями, в работе определены изотопическое представление и изотопическое преобразование Фолди–Ваутхайзена.

Введено специальное изотопическое пространство с изотопическими матрицами τ_i . В дираковском представлении во введенном изотопическом пространстве получены эквивалентные по физическим следствиям уравнения Дирака (15), (16), (19) для восьмикомпонентных полей Φ_1 , Φ_2 и шестнадцати-компонентного поля Φ . После применения к каждому уравнению одного и того же изотопического преобразования Фолди–Ваутхайзена получены искомыми кирально-симметричные уравнения (41), (43), (45) для массивных фермионов.

В IFW-представлении полученные уравнения и гамильтонианы (41)–(46) инвариантны относительно кирального преобразования $(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}} \rightarrow e^{i\alpha\gamma^5}(\Phi_{1,2})_{\text{IFW}}$.

Данная инвариантность не зависит от наличия или отсутствия массы у фермионов.

В изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена для массивных фермионов сохраняются векторный и аксиальный токи. В дираковском представлении аксиальный ток сохраняется лишь для безмассовых фермионов.

Физическое содержание уравнений (41), (43), (45) отличается друг от друга из-за особенности преобразования Фолди–Ваутхайзена (в том числе и IFW-преобразования), сужающего пространство возможных состояний дираковской частицы.

Уравнение (45) и гамильтониан (46) описывают правые и левые фермионы, а также правые и левые антифермионы.

Уравнение (41) и гамильтониан (42) описывают правые фермионы и левые антифермионы, а уравнение (43) с гамильтонианом (44) описывают левые фермионы и правые антифермионы.

Отсюда следует вырожденность вакуума в изотопическом представлении Фолди–Ваутхайзена и возможность спонтанного нарушения P -симметрии.

Из-за унитарности изотопического преобразования Фолди–Ваутхайзена результаты расчетов некоторых физических процессов, проведенных в нижай-

ших порядках теории возмущений в рамках кирально-симметричной квантовой электродинамики в IFW-представлении, совпадают с соответствующими результатами стандартной КЭД.

Приложение 1
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАМИЛЬТониАНА H_{IFW}^I
В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ-ВАУТХАЙЗЕНА

В обозначениях [4, 5] для IFW-представления

$$H_{\text{IFW}}^I = U_{\text{IFW}} H_D U_{\text{IFW}}^\dagger - i U_{\text{IFW}} \frac{\partial}{\partial t} (U_{\text{IFW}}^\dagger) = \tau_3 E + K_1 + K_2 + K_3 + \dots, \quad (\text{П1.1})$$

$$U_{\text{IFW}} = (1 + \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots)(U_0)_{\text{IFW}}.$$

В равенствах (П1.1) $K_1, \delta_1 \sim q$; $K_2, \delta_2 \sim q^2$; $K_3, \delta_3 \sim q^3$; q — константа связи;

$$(U_0)_{\text{IFW}} = R(1 + L), \quad R = \sqrt{\frac{E + \tau_3 \alpha \mathbf{p}}{2E}}, \quad L = \frac{1}{E + \tau_3 \alpha \mathbf{p}} \tau_3 \tau_1 \beta m.$$

$(U_0)_{\text{IFW}}$ — оператор IFW-преобразования при отсутствии взаимодействия
($(U_0)_{\text{IFW}}(\alpha \mathbf{p} + \tau_1 \beta m)(U_0)_{\text{IFW}}^\dagger = \tau_3 E$).

Из условия унитарности $U_{\text{IFW}}^\dagger U_{\text{IFW}} = 1$ следует

$$\begin{aligned} \delta_1^\dagger &= -\delta_1, \\ \delta_2^\dagger &= -\delta_2 + \delta_1 \delta_1, \\ \delta_3^\dagger &= -\delta_3 + \delta_2 \delta_1 + \delta_1 \delta_2 - \delta_1 \delta_1 \delta_1, \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{П1.2})$$

С учетом (П1.2)

$$\begin{aligned} K_1 &= \delta_1 \tau_3 E - \tau_3 E \delta_1 + i \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + C + N, \\ K_2 &= \delta_2 \tau_3 E - \tau_3 E \delta_2 + i \frac{\partial \delta_2}{\partial t} - K_1 \delta_1 + \delta_1 (C + N), \\ K_3 &= \delta_3 \tau_3 E - \tau_3 E \delta_3 + i \frac{\partial \delta_3}{\partial t} - K_1 \delta_2 - K_2 \delta_1 + \delta_2 (C + N), \\ &\dots \end{aligned} \quad (\text{П1.3})$$

В [4, 5] установлена следующая связь между четными (с индексом e) и нечетными (с индексом 0) операторами δ_i , не связывающими и связывающими

верхние и нижние изотопические компоненты волновой функции соответственно:

$$\begin{aligned}
 \delta_1^e R + R\delta_1^e &= RL\delta_1^0 - \delta_1^0 LR, \\
 \delta_2^e R + R\delta_2^e &= RL\delta_2^0 - \delta_2^0 LR - RL(\delta_1\delta_1)^0 + R(\delta_1\delta_1)^e, \\
 \delta_3^e R + R\delta_3^e &= RL\delta_3^0 - \delta_3^0 LR - RL(\delta_2\delta_1 + \delta_1\delta_2 - \delta_1\delta_1\delta_1)^0 + \\
 &\quad + R(\delta_2\delta_1 + \delta_1\delta_2 - \delta_1\delta_1\delta_1)^e, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{П1.4}$$

Поскольку по определению K_1, K_2, K_3, \dots — четные операторы, необходимо в (П1.3) приравнять нулю нечетные члены

$$\begin{aligned}
 \delta_1^0 \tau_3 E - \beta E \delta_1^0 + i \frac{\partial \delta_1^0}{\partial t} + N &= 0, \\
 \delta_2^0 \tau_3 E - \tau_3 E \delta_2^0 + i \frac{\partial \delta_2^0}{\partial t} - K_1 \delta_1^0 + \delta_1^0 C + \delta_1^e N &= 0, \\
 \delta_3^0 \tau_3 E - \tau_3 E \delta_3^0 + i \frac{\partial \delta_3^0}{\partial t} - K_1 \delta_2^0 - K_2 \delta_1^0 + \delta_2^0 C + \delta_2^e N &= 0, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{П1.5}$$

После этого члены разложения гамильтониана K_1, K_2, K_3, \dots определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \delta_1^e \tau_3 E - \tau_3 E \delta_1^e + i \frac{\partial \delta_1^e}{\partial t} + C, \\
 K_2 &= \delta_2^e \tau_3 E - \tau_3 E \delta_2^e + i \frac{\partial \delta_2^e}{\partial t} - K_1 \delta_1^e + \delta_1^e C + \delta_1^0 N, \\
 K_3 &= \delta_3^e \tau_3 E - \tau_3 E \delta_3^e + i \frac{\partial \delta_3^e}{\partial t} - K_1 \delta_2^e - K_2 \delta_1^e + \delta_2^e C + \delta_2^0 N, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned} \tag{П1.6}$$

Операторные равенства (П1.6) вместе с (П1.4), (П1.5) позволяют определить гамильтониан H_{IFW} в виде ряда по степеням константы связи q .

В импульсном представлении с разложением векторных бозонных полей в интеграл Фурье с обозначениями [4, 5] получаем

$$\begin{aligned}
 B_\mu(\mathbf{x}, t) &= \sum_{v=\pm 1} \int B_{\mu k}^{(v)} e^{ivk_0 t} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}, \\
 B_{\mu k}^{(v)} &= \begin{cases} B_{\mu k}, & v = 1, \\ \bar{B}_{\mu(-k)}, & v = -1, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{П1.7}$$

$$\langle \mathbf{p}' | e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} | \mathbf{p}'' \rangle = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}'' - \mathbf{k}), \quad (\text{П1.8})$$

$$\langle \mathbf{p}' | B_\mu | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{v=\pm 1} \int B_{\mu(\mathbf{p}''-\mathbf{p}')}^{(v)} e^{ivk_0 t}, \quad (\text{П1.9})$$

$$\langle \mathbf{p}' | B_\mu B_\alpha | \mathbf{p}'' \rangle = \sum_{v,v'=\pm 1} \int d\mathbf{p}''' B_{\mu(\mathbf{p}'''-\mathbf{p}')}^{(v)} B_{\alpha(\mathbf{p}''-\mathbf{p}''')}^{(v')} e^{i(vk_0+v'k_0)t}, \quad (\text{П1.10})$$

.....
С учетом (П1.7)–(П1.10) из равенств (П1.5) получаем

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | \delta_1^0 | \mathbf{p}'' \rangle &= \sum_{v=\pm 1} \frac{1}{\tau_3 E' + \tau_3 E'' + vk_0} \langle \mathbf{p}' | N | \mathbf{p}'' \rangle, \\ \langle \mathbf{p}' | \delta_2^0 | \mathbf{p}'' \rangle &= \sum_{v,v'=\pm 1} \frac{1}{\tau_3 E' + \tau_3 E'' + vk_0 + v'k'_0} \langle \mathbf{p}' | -K_1 \delta_1^0 + \delta_1^0 C + \delta_1^e N | \mathbf{p}'' \rangle, \end{aligned} \quad (\text{П1.11})$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | \delta_3^0 | \mathbf{p}'' \rangle &= \sum_{v,v',v''=\pm 1} \frac{1}{\tau_3 E' + \tau_3 E'' + vk_0 + v'k'_0 + v''k''_0} \times \\ &\quad \times \langle \mathbf{p}' | -K_1 \delta_2^0 - K_2 \delta_1^0 + \delta_2^0 C + \delta_2^e N | \mathbf{p}'' \rangle. \end{aligned}$$

С помощью (П1.11) и равенств (П1.4), (П1.6) можно получить искомые члены разложения K_n в импульсном представлении. Например,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | K_1 | \mathbf{p}'' \rangle &= \sum_{v=\pm 1} \frac{\tau_3 E'' - \tau_3 E' - vk_0}{R' + R''} \left(-\frac{1}{\tau_3 E' + \tau_3 E'' - vk_0} \langle \mathbf{p}' | R L N | \mathbf{p}'' \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\tau_3 E' + \tau_3 E'' + vk_0} \langle \mathbf{p}' | N L R | \mathbf{p}'' \rangle \right) + \langle \mathbf{p}' | C | \mathbf{p}'' \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П1.12})$$

Приложение 2 РАСЧЕТЫ НЕКОТОРЫХ ПРОЦЕССОВ КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В ИЗОТОПИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФОЛДИ-ВАУТХАЙЗЕНА

П2.1. Рассеяние электронов в кулоновском поле $A_0(x) = -\frac{Ze}{4\pi|\mathbf{x}|}$.

$$\begin{aligned} S_{fi} &= -i \int d^4x \Phi_{\text{IFW}}^{(+)\dagger}(x, p_f, s_f) (K_1^\Phi)^0 \cdot A_0 \Phi_{\text{IFW}}^{(+)}(x, p_i, s_i) = \\ &= -\frac{i\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2} \Phi_{\text{IFW}}^{+\dagger}(p_f, s_f) \langle \mathbf{p}_f | (C^\Phi)^0 A_0 | \mathbf{p}_i \rangle \Phi_{\text{IFW}}^{+}(p_f, s_f) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= i \frac{Ze^2}{2\mathbf{q}^2} \frac{\delta(E_f - E_i)}{(2\pi)^2} \left[\Phi_{1\text{IFW}}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \sqrt{\frac{E_f + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f}{2E_f}} \times \right. \\
 &\quad \times \left. \left(1 + \frac{m^2}{(E_f + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f)(E_i + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_i)} \right) \right] \sqrt{\frac{E_i + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_i}{2E_i}} \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(p_i, s_i) + \\
 &\quad + \left[\Phi_{2\text{IFW}}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \sqrt{\frac{E_f + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f}{2E_f}} \left(1 + \frac{m^2}{(E_f + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f)(E_i + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_i)} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \sqrt{\frac{E_i + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_i}{2E_i}} \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)}(p_i, s_i) \right],
 \end{aligned}$$

$\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$; $q^\Phi \rightarrow (e/2)E_{16 \times 16}$.

Запись $(K_1^\Phi)^0 \cdot A_0$, выполненная для удобства, фактически означает: $(K_1^\Phi)^0 \cdot A_0 \equiv K_1^\Phi$ при $\mathbf{A}(x) = 0$, т.е. $A_0(x)$ становится на места, определяемые выражением для K_1 в приложении 1. Это же относится и к записи $(C^\Phi)^0 \cdot A_0$. Переход от $(K_1^\Phi)^0 \cdot A_0$ к $(C^\Phi)^0 \cdot A_0$ осуществлен в соответствии с (64).

Далее обычными методами с помощью матричного элемента S_{fi} можно получить дифференциальное сечение рассеяния Мотта, переходящее в нерелятивистском случае в резерфордское.

П2.2. Рассеяние электрона на дираковском протоне (рассеяние Мёллера).

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= -i \int d^4x d^4y \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)\dagger}(x, p_f, s_f) (K_1^\Phi)^\alpha \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(x, p_i, s_i) D_F(x - y) \times \\
 &\quad \times \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)\dagger}(y, P_f, S_f) (-K_1^\Phi)_\alpha \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(y, P_i, S_i) = \\
 &= -\frac{i\delta^4(P_f - P_i + p_f - p_i)}{4(p_f - p_i)^2} 2\pi \left[\Phi_{1\text{IFW}}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \langle \mathbf{p}_f | (C^\Phi)^\alpha | \mathbf{p}_i \rangle \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(p_i, s_i) + \right. \\
 &\quad + \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \langle \mathbf{p}_f | (C^\Phi)^\alpha | \mathbf{p}_i \rangle \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)}(p_i, s_i) \left. \right] \times \\
 &\quad \times \left[\Phi_{1\text{IFW}}^{(+)\dagger}(P_f, S_f) \langle \mathbf{P}_f | C_\alpha^\Phi | \mathbf{P}_i \rangle \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(P_i, S_i) + \right. \\
 &\quad \left. + \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)\dagger}(P_f, S_f) \langle \mathbf{P}_f | C_\alpha^\Phi | \mathbf{P}_i \rangle \Phi_{2\text{IFW}}^{(+)}(P_i, S_i) \right],
 \end{aligned}$$

$D_F(x - y)$ — стандартный фотонный пропагатор; $q^\Phi \rightarrow (e/2)E_{16 \times 16}$.

Матричный элемент S_{fi} позволяет определить мёллеровское сечение рассеяния электрона.

П2.3. Комптоновское рассеяние электронов.

$$\begin{aligned}
S_{fi} = & -i\Phi_{\text{IFW}}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \times \\
& \times \left\{ \int \frac{d^4z d^4y d^4p_1}{(2\pi)^7 \sqrt{2k'_0 2k_0}} \left(e^{ip_f y} K_{1\mu}^\Phi \varepsilon'^\mu e^{ik'y} \frac{e^{-ip_1 y}}{p_1^0 - E_{16 \times 16} \tau_3 E(\mathbf{p}_1)} e^{ip_1 z} \times \right. \right. \\
& \times K_{1\nu}^\Phi \varepsilon^\nu e^{-ikz} e^{-ip_i z} + e^{ip_f y} K_{1\mu}^\Phi \varepsilon^\mu e^{-iky} \frac{e^{-ip_1 y}}{p_1^0 - E_{16 \times 16} \tau_3 E(\mathbf{p}_1)} \times \\
& \times e^{ip_1 z} K_{1\nu}^\Phi \varepsilon'^\nu e^{ik'z} e^{-ip_i z} \left. \right) + \int d^4y \frac{1}{(2\pi)^3 \sqrt{2k'_0 2k_0}} \times \\
& \times \left(e^{ip_f y} K_{2\mu\nu}^\Phi \varepsilon'^\mu e^{ik'y} \varepsilon^\nu e^{-iky} e^{-ip_i y} + \right. \\
& \left. + e^{ip_f y} K_{2\mu\nu}^\Phi \varepsilon^\mu e^{-iky} \varepsilon'^\nu e^{-ip_i y} \right) \left. \right\} \Phi_{\text{IFW}}^{(+)}(p_i, s_i).
\end{aligned}$$

В первый интеграл объединены вклады диаграмм рис. 6, *a* и *в*, во второй — вклады диаграмм рис. 6, *б* и *г*.

Запись $K_{1\mu}^\Phi \varepsilon^\mu e^{-iky}$, $K_{2\mu\nu}^\Phi \varepsilon^\mu e^{-iky} \varepsilon'^\nu e^{ik'y}$ и т.д. понимается в том же смысле, как это указано выше в П2.1.

Как уже отмечалось в п. 5.2, вклад в матричный элемент S_{fi} дают лишь слагаемые в выражении (65) для K_2^Φ . С учетом вышесказанного

$$\begin{aligned}
S_{fi} = & \frac{-i(2\pi)^4 \delta^4(p_i + k - p_f - k')}{(2\pi)^3 \sqrt{2k_0 2k'_0}} \left[\Phi_{\text{1IFW}}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) A \Phi_{\text{IFW}}^{(+)}(p_i, s_i) + \right. \\
& \left. + \Phi_{\text{2IFW}}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) A \Phi_{\text{2IFW}}^{(+)}(p_i, s_i) \right],
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A = & \left[C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + k_0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \varepsilon^\mu + \right. \\
& + N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + k_0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \varepsilon^\mu + \\
& + C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}') \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k'_0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}')} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu + \\
& \left. + N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}') \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k'_0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}')} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[C_\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + k_0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}; \tau_1; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu + \right. \\
 & + N_\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + k_0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}; \tau_1; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu + \\
 & + C_\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}') \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k'_0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}')} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'; \tau_1; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu + \\
 & \left. + N_\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}') \varepsilon'^\mu \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k'_0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}')} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}'; \tau_1; \mathbf{p}_i) \varepsilon'^\mu \right],
 \end{aligned}$$

$$C^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e R_f \left(1 - \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1, & \mu = 0, \\ -\frac{1}{2} e R_f \left(\alpha^k - \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \alpha^k \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1, & \mu = k, k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$N^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e R_f \left(\frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m - \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1, & \mu = 0, \\ -\frac{1}{2} e R_f \left(\frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \alpha^k - \alpha^k \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1, & \mu = k, k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$C^\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e R_f \left(\tau_1 - \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \tau_1 \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1, & \mu = 0, \\ -\frac{1}{2} e R_f \left(\tau_1 \alpha^k - \frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \tau_1 \alpha^k \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1, & \mu = k, k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$N^\mu(\mathbf{p}_f; \tau_1; \mathbf{p}_i + \mathbf{k}) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} e R_f \left(\frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \tau_1 - \tau_1 \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1, & \mu = 0, \\ -\frac{1}{2} e R_f \left(\frac{1}{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f} \tau_3 \tau_1 \beta m \alpha^k \tau_1 - \tau_1 \alpha^k \times \right. \\ \quad \left. \times \frac{1}{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})} \tau_3 \tau_1 \beta m \right) R_1, & \mu = k, k = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$R_f \equiv R_{p_f} = \sqrt{\frac{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f}{2E(\mathbf{p}_f)}},$$

$$R_1 \equiv R_{p_i+k} = \sqrt{\frac{E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k}) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})}{2E(\mathbf{p}_i + \mathbf{k})}} \quad \text{и т. д.}$$

Вычисления показывают, что в выражении для A сумма слагаемых в первой квадратной скобке совпадает с аналогичной суммой во второй квадратной скобке.

Если выбрать специальную калибровку, в которой начальный и конечный фотоны поперечно поляризованы в лабораторной системе отсчета ($\mathbf{p}_i = 0$; $\varepsilon^0 = \varepsilon'^0 = 0$; $\boldsymbol{\varepsilon} k = \boldsymbol{\varepsilon}' k' = 0$), то выражение для A упрощается:

$$A = \frac{e^2}{2} \sqrt{\frac{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f}{4E(\mathbf{p}_f)}} \left[-\frac{E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f - m}{2m^2} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}' \boldsymbol{\alpha} \mathbf{k} \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}}{k_0} + \frac{\boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\alpha} \mathbf{k}' \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\varepsilon}'}{k'_0} \right) + \frac{E(\mathbf{p}_f) - \tau_3 \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p}_f + m}{m^2} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}' \right].$$

Далее обычными методами можно получить формулу Клейна–Нишины–Тамма для дифференциального сечения комптоновского рассеяния.

П2.4. Собственная энергия электрона.

$$\begin{aligned}
 -i\Sigma^2(p) = & \\
 = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} & \left[C^\mu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}) - k_0 - \tau_3 E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \mathbf{p}) + \right. \\
 & + C^\mu(\mathbf{p}; \tau_1; \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{\frac{1}{2}(1 + \tau_3)}{\tau_3 E(\mathbf{p}) - k_0 - \tau_3 E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \tau_1; \mathbf{p}) + \\
 & + N^\mu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}) - k_0 + \tau_3 E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \mathbf{p}) + \\
 & \left. + N^\mu(\mathbf{p}; \tau_1; \mathbf{p} - \mathbf{k}) \frac{\frac{1}{2}(1 - \tau_3)}{-\tau_3 E(\mathbf{p}) - k_0 + \tau_3 E(\mathbf{p} - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p} - \mathbf{k}; \tau_1; \mathbf{p}) \right].
 \end{aligned}$$

Для случая $p^2 = m^2$ и, принимая во внимание, что оператор $-i\Sigma^2(p)$ находится в обкладках волновых функций $\Phi_{\text{IFW}}^{(+)\dagger}$ и $\Phi_{\text{IFW}}^{(+)}$, т. е. в соответствии с (33) и (46) фактически в обкладках функций для правых ($\Phi_{\text{1IFW}}^{(+)\dagger}$ и $\Phi_{\text{1IFW}}^{(+)}$) и левых ($\Phi_{\text{2IFW}}^{(+)\dagger}$ и $\Phi_{\text{2IFW}}^{(+)}$) электронов, получаем $-i\Sigma^2(p) = -\frac{2e^2}{E(\mathbf{p})} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \times \frac{pk + m^2}{[(p - k)^2 - m^2]}$, что совпадает с учетом нормировки спиноров во внешних электронных линиях с выражением для массового оператора в дираковском представлении.

П2.5. Поляризация вакуума. Диаграммам рис. 8 соответствует в итоге следующее выражение для поляризационного оператора:

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\mu\nu}(q) = & \\
 = -\frac{1}{2} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} & \left\{ \text{Sp} \frac{1}{E(\mathbf{p}) - q^0 + E(\mathbf{p} - \mathbf{q})} N^\mu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{q}) \frac{1 - \tau_3}{2} N^\nu(\mathbf{p} - \mathbf{q}; \mathbf{p}) + \right. \\
 & + \text{Sp} \frac{1}{E(\mathbf{p}) + q^0 + E(\mathbf{p} - \mathbf{q})} N^\mu(\mathbf{p} - \mathbf{q}; \mathbf{p}) \frac{1 - \tau_3}{2} N^\nu(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{q}) + \\
 & + \text{Sp} \frac{1}{E(\mathbf{p}) - q^0 + E(\mathbf{p} - \mathbf{q})} C^\mu(\mathbf{p}; \tau_1; \mathbf{p} - \mathbf{q}) \frac{1 - \tau_3}{2} C^\nu(\mathbf{p} - \mathbf{q}; \tau_1; \mathbf{p}) + \\
 & \left. + \text{Sp} \frac{1}{E(\mathbf{p}) + q^0 + E(\mathbf{p} - \mathbf{q})} C^\mu(\mathbf{p} - \mathbf{q}; \tau_1; \mathbf{p}) \frac{1 - \tau_3}{2} C^\nu(\mathbf{p}; \tau_1; \mathbf{p} - \mathbf{q}) \right\}.
 \end{aligned}$$

После вычисления шпуров выражение для $\Pi^{\mu\nu}$ совпадает с гайтлеровским тензором индукции $-L^{\mu\nu}$ [11], который в свою очередь совпадает с поляризационным оператором стандартной КЭД.

П2.6. Радиационные поправки к рассеянию электронов во внешнем поле. При вычислении радиационных поправок по диаграммам рис. 9, как и в предыдущих случаях, матричные элементы S_{fi} , соответствующие диаграммам с электрон-позитронными пропагаторами, сокращаются с частями матричных элементов, соответствующих беспропагаторным диаграммам рис. 9, *з*, *з*, *м*. В итоге с учетом предельного процесса Гайтлера для сингулярных знаменателей [11] матричный элемент для искомым радиационных поправок имеет вид

$$S_{fi} = S_{1fi} + S_{2fi},$$

$$S_{1fi} = S_{1fi}^{(1)} + S_{1fi}^{(2)} + S_{1fi}^{(3)} + S_{1fi}^{(4)} + S_{1fi}^{(5)},$$

$$S_{2fi} = S_{2fi}^{(1)} + S_{2fi}^{(2)} + S_{2fi}^{(3)} + S_{2fi}^{(4)} + S_{2fi}^{(5)},$$

$$\begin{aligned} S_{1fi}^{(1)} = & \frac{1}{(2\pi)^3} \Phi_{\text{IFW}}^{(+)\dagger}(p_f, s_f) \left\{ \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \int \frac{d\varepsilon \delta(\varepsilon)}{\mathbf{p}_f^2 \varepsilon (2 + \varepsilon)} \times \right. \\ & \times \left[C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}) \frac{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 E(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon))}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k})} \times \right. \\ & \times C^\mu(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f(1 + \varepsilon)) + N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}) \times \\ & \left. \times \frac{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) + \tau_3 E(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon))}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k})} N^\mu(\mathbf{p}_f(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f(1 + \varepsilon)) \right] \times \\ & \times C^\nu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_\nu(q) + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \int \frac{d\varepsilon \delta(\varepsilon)}{\mathbf{p}_i^2 \varepsilon (2 + \varepsilon)} \left[C_\mu(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon); \mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}) \times \right. \\ & \times \frac{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + \tau_3 E(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon))}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k})} C^\mu(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \\ & + N_\mu(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon); \mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}) \frac{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) + \tau_3 E(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon))}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k})} \times \\ & \left. \times N^\mu(\mathbf{p}_i(1 + \varepsilon) - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \right] C^\nu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_\nu(q) - \\ & - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4 k^2} \frac{1}{2\tau_3 E(\mathbf{p}_f)} \left[\frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times N_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) C^\mu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f) + \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} \times \\
 & \quad \times C_\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) N^\mu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_f) \Big] N^\nu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_\nu(q) - \\
 & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \frac{1}{2\tau_3 E(\mathbf{p}_i)} N^\nu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i) A_\nu(q) \left[\frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} \times \right. \\
 & \quad \times N_\mu(\mathbf{p}_i; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) C^\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} \times \\
 & \quad \times C_\mu(\mathbf{p}_i; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) N^\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \Big] - \\
 & - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4 k^2} \left[C^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} \times \right. \\
 & \quad \times C^\nu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_\nu(q) \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \\
 & + N^\nu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} C^\nu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_\nu(q) \times \\
 & \quad \times \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \\
 & + N^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_f - \mathbf{k}) \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} N^\nu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_\nu(q) \times \\
 & \quad \times \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} C_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) + \\
 & + C^\mu(\mathbf{p}_f; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_f) - k^0 - \tau_3 E(\mathbf{p}_f - \mathbf{k})} N^\nu(\mathbf{p}_f - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i - \mathbf{k}) A_\nu(q) \times \\
 & \quad \times \left. \frac{1}{\tau_3 E(\mathbf{p}_i) - k^0 + \tau_3 E(\mathbf{p}_i - \mathbf{k})} N_\mu(\mathbf{p}_i - \mathbf{k}; \mathbf{p}_i) \right] \Big\} \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(p_i, s_i).
 \end{aligned}$$

Как показывают вычисления, выражения $S_{1fi}^{(2)}$, $S_{1fi}^{(3)}$, $S_{1fi}^{(4)}$ равны $S_{1fi}^{(1)}$ и отличаются по написанию наличием в каждом слагаемом $S_{1fi}^{(1)}$ двух операторов $\dots C \dots C \dots$, либо $\dots C \dots N \dots$, либо $\dots N \dots C \dots$, либо $\dots N \dots N \dots$ с матрицей τ_1 в каждом из них.

Выражение $S_{1fi}^{(5)}$ равно

$$S_{1fi}^{(5)} = -\frac{1}{(2\pi)^3} \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(p_f, s_f) C_\mu(\mathbf{p}_f, \mathbf{p}_i) \frac{\Pi^{\mu\nu}(q)}{q^2} A_\nu(q) \Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}(p_i, s_i).$$

Выражение S_{2fi} равно S_{1fi} и отличается по написанию волновыми функциями: вместо функций $\Phi_{1\text{IFW}}^{(+)}$ для правых электронов используются функции $\Phi_{2\text{IFW}}^{(+)}$ для левых электронов.

После перенормировки массы и заряда электрона итоговый матричный элемент S_{fi} позволяет вычислить аномальный магнитный момент электрона и лэмбовский сдвиг энергетических атомных уровней. Конечные результаты вычислений совпадают с аналогичными величинами в дираковском представлении.

П2.7. Аннигиляция электрон-позитронной пары. Процессу аннигиляции электрон-позитронной пары во втором порядке теории возмущений соответствуют диаграммы рис. 6 для комптоновского рассеяния электронов с заменой $\varepsilon, k \rightarrow \varepsilon_1, -k_1, \varepsilon', k' \rightarrow \varepsilon_2, k_2, p_i, s_i \rightarrow p_-, s_-, p_f, s_f \rightarrow -p_+, s_+$.

С учетом этой замены матричный элемент процесса S_{\pm} равен

$$S_{\pm} = \frac{-i(2\pi)^4 \delta^4(p_- + p_+ - k_1 - k_2)}{(2\pi)^3 \sqrt{2k_1^0 2k_2^0}} (\Phi_{2\text{IFW}}^{(-)\dagger}(-p_+, s_+) A_1 \Phi_{1\text{IFW}}^{(-)}(p_-, s_-) \times \\ \times \Phi_{1\text{IFW}}^{(-)\dagger}(-p_+, s_+) A_1 \Phi_{2\text{IFW}}^{(-)}(p_-, s_-)).$$

Оператор A_1 по своей структуре с учетом указанной выше замены совпадает с оператором A в выражении S_{fi} для комптоновского рассеяния электронов за исключением расположения матриц τ_1 в операторах C^μ, N^μ .

В выражении S_{fi} первые четыре слагаемых не содержат матрицу τ_1 , остальные четыре слагаемых содержат τ_1 в каждом операторе C^μ, N^μ .

В нашем случае в выражении S_{\pm} для обеспечения связи правого электрона и правого позитрона либо левого электрона и левого позитрона в каждом из восьми слагаемых содержатся лишь по одной матрице τ_1 , расположенной в операторах C^μ, N^μ во всех возможных сочетаниях.

Итоговое выражение для S_{\pm} позволяет получить дифференциальное сечение аннигиляции электрон-позитронной пары, которое совпадает с сечением этого процесса, вычисленным в представлении Дирака.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Foldy L. L., Wouthuysen S. A.* // Phys. Rev. 1950. V. 78. P. 29.
2. *Незнамов В. П.* // Вопр. атомной науки и техники. Сер. «Теоретическая и прикладная физика». 2010. Вып. 1–2. С. 3; arXiv:0605215 [hep-th].
3. *Eriksen E.* // Phys. Rev. 1958. V. 111. P. 1011.
4. *Незнамов В. П.* // Вопр. атомной науки и техники. Сер. «Теоретическая и прикладная физика». 1988. Вып. 2. С. 21.

5. Незнамов В. П. // ЭЧАЯ. 2006. Т. 37, вып. 1. С. 152 (Part. Nucl. 2006. V. 37, No. 1. P. 86).
6. Neznamov V. P., Silenko A. J. // J. Math. Phys. 2009. V. 50. P. 122302.
7. Незнамов В. П. arXiv:0412047 [hep-th].
8. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. М.: Наука, 1979 (*Dirac P. A. M. The Principles of Quantum Mechanics*. 4th ed. Oxford: Clarendon Press, 1958).
9. Швебер С. С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд-во иностр. лит., 1963 (*Schweber S. S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory*. Elmsford; N. Y.: Row, Peterson and Co Eyantson, Ill., 1961).
10. Бьеркен Д. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т. 1. М.: Наука, 1978 (*Bjorken J. D., Drell S. D. Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw – Hill Book Company, 1964).
11. Гейтлер В. Квантовая теория излучения. М.: Изд-во иностр. лит., 1956 (*Heitler W. The Quantum Theory of Radiation*. 3rd ed. Oxford: Clarendon Press, 1954).