

ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ В КОНТЕКСТЕ ИЗУЧЕНИЯ СОУДАРЕНИЙ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ

*Г. М. Зиновьев*¹, *С. В. Молодцов*^{2,3}

¹ Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев

² Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

³ Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва

Почти идеальная жидкость, обнаруженная в экспериментах по столкновениям ультррелятивистских тяжелых ионов, исследуется с использованием кварковых ансамблей с четырехфермионным взаимодействием в качестве основополагающего теоретического приближения. При этом проводится сравнительный анализ возникающих моделей квантовых жидкостей и отмечается, что характерным их свойством является наличие фазового перехода газ–жидкость. Обсуждается проблема неустойчивости капель кварковой жидкости с малым числом кварков, связанная с возможным формированием кирального солитона. Исследуется смешанная фаза вакуума и барионной материи как возможный сценарий ее стабильности. Рассматриваются некоторые аспекты цветовой сверхпроводимости. Изучается широко обсуждаемое в последнее время нетривиальное термодинамическое состояние — фермионный конденсат. На примере модельной задачи анализируется неожиданная возможность связи затравочной и эффективной констант взаимодействия. Отмечено, что простая вычитательная процедура может приводить к конечному результату без типичной логарифмической сингулярности для наблюдаемой константы связи как функции передаваемой энергии.

A (nearly) perfect liquid discovered in the experiments with ultrarelativistic heavy ion collisions is investigated by studying the quark ensembles with four-fermion interaction as a fundamental theoretical approach. The comparative analysis of several quantum liquid models is performed and it results in the conclusion that the presence of gas–liquid phase transition is their characteristic feature. The problem of instability of the quark droplets with small quark number is discussed to be rooted in the chiral soliton formation, and an existence of mixed phase of the vacuum and baryon matter is argued as possible scenario of its stability. Some aspects of the color superconductivity are considered. Besides, nontrivial thermodynamical state — fermion condensate recently proposed is studied. An analysis of unexpected possibility to relate the bare and effective coupling constants is performed in the framework of simple model. It is pointed out that the simple subtraction procedure leads to finite result without typical logarithmic singularity for observable coupling constant as a function of transmitting energy.

PACS: 11.10.-z; 11.15.Tk

ВВЕДЕНИЕ

Огромное количество данных по столкновениям релятивистских тяжелых ионов, полученных в последние годы (уже до начала работы ЛНС) в

различных экспериментах, и прежде всего на RHIC, были прекрасно поняты и описаны в рамках представлений, основанных на уравнениях релятивистской гидродинамики [1]. В частности, почти идеальная гидродинамика, правда, по необходимости дополненная разнообразными моделями адронного каскада для правильного учета адронной стадии столкновения [2], успешно предсказала появление радиальных и эллиптических потоков, их зависимость от массы, центральности, энергии пучка и поперечного импульса (хотя и ограниченного по величине), при этом твердо обозначив, что расширяющаяся жидкость обладает достаточно специальными транспортными свойствами. Она действительно близка к идеальной, поскольку отношение η/s , ее коэффициента сдвиговой вязкости η к плотности энтропии s , оказалось малой величиной. Сразу же следует заметить, что использование таких гидродинамических представлений восходит еще к началу пятидесятих годов прошлого столетия, когда Л. Д. Ландау развил модель множественного рождения частиц в соударениях адронов и ядер, основываясь на гидродинамическом описании эволюции ядерной материи, возникающей после ее сжатия в начальный момент столкновения [3]. Концептуально революционная идея не была в то время особенно успешной в приложениях благодаря тому, что ядерная материя в тогдешнем ее понимании оказалась не очень «подходящей» жидкостью, поскольку средняя длина пробега нуклонов в образовавшейся системе оказывалась вполне сравнимой с ее размерами.

Новая генерация экспериментов, выполненных при существенно более высоких энергиях на LHC, совершенно замечательным образом подтвердила предсказания предыдущих гидродинамических представлений, сделав некоторые из них, например, наблюдения более высоких гармоник потоков, индуцированных флуктуациями начальной геометрии, или же эффекта смягчения струй, инициированных тяжелыми и легкими кварками, не только надежными экспериментальными результатами [4], но и наблюдениями, имеющими огромный эвристический смысл. Физика столкновений ультрарелятивистских тяжелых ионов, по крайней мере на начальной стадии, связана с необходимостью описания на языке квантовой хромодинамики (КХД) сильновзаимодействующей системы, находящейся в состоянии, далеком от равновесия. Данные же трех коллабораций LHC, будучи успешно описанными гидродинамикой, предполагают очень быструю термализацию, т. е. достаточную степень локального равновесия или, скорее, изотропизации, поскольку уравнения гидродинамики не содержат температуры, рожденной материи с явными коллективными свойствами, теоретическое объяснение которой на микроскопическом языке еще далеко от ясности. В последние годы появилось несколько сценариев того, какой могла бы быть динамика перехода системы из состояния начального момента столкновения в состояние, когда она становится (почти) равновесной [5], однако в данной работе эта проблема не обсуждается. Мы концентрируемся здесь на обсуждении другой стороны этой проблемы — ма-

лости отношения η/s , что соответствует наличию сильного взаимодействия в образовавшейся системе, другими словами, малой длине свободного пробега ее составляющих, и пытаемся понять природу такого взаимодействия в системе, динамика которой определяется константой связи, скорее всего не являющейся слишком большой (при энергиях LHC бегущая константа связи в КХД $\alpha_s \sim 0,3-0,4$), избегая при этом популярных в настоящее время аргументов об AdS/CFT-дуальности (голографической КХД) [6].

Подобные многочастичные (фермионные) системы в последние годы активно изучаются, в особенности после их успешной экспериментальной реализации в форме ультрахолодного газа фермионных атомов [7]. Такой (унитарный) ферми-газ представляет собой разреженную систему с короткорadiusным взаимодействием, в которой s -волновое рассеяние между фермионами насыщает унитарный предел для поперечного сечения. Такая система, естественно, характеризуется отсутствием какой-либо внутренней шкалы (конформностью) и не зависит от деталей взаимодействия. С другой стороны, взаимодействие в такой системе требует непертурбативного описания, поскольку в задаче отсутствует и какой-либо малый параметр. Идеальная жидкость, наблюдаемая в экспериментах с тяжелыми ионами, как раз и является еще одним замечательным примером существования такой сильно коррелированной фермионной системы. Предположение о существовании нижнего предела отношения η/s у таких фермионных систем, сформулированное в [8], вызвало еще больший интерес к их изучению после того, как было показано, что η/s для систем, рождающихся в столкновениях тяжелых ионов, и для ультрахолодных атомных газов оказываются очень малыми и близкими по величине. Интересно, что такое же значение этого отношения предсказывается и для низкоэнергетических электронов в монослоях графена [9]. Ясность в понимании природы этих явлений, однако, отсутствует, и это видно из поведения, например, объемной вязкости, которая в случае кварк-глюонных систем оказывается ненулевой и может быть при определенных условиях (вблизи фазовых переходов) заметным источником диссипации, тогда как для унитарных ферми-газов она исчезает просто как следствие масштабной инвариантности.

Четырехфермионные (КХД-подобные) полевые теории остаются пока наиболее надежным источником количественной информации при изучении транспортных свойств сильно коррелированных систем и их термодинамики, в частности, кирального фазового перехода между массивными адронами и почти безмассовыми кварками. Именно термодинамика обеспечивает нас некими общими рамками, позволяющими понять, как свойства макроскопической материи и, в частности, ее коллективное поведение возникают из законов, управляющих микроскопической динамикой. Результаты этой работы позволяют с достаточной, как нам представляется, степенью аргументированности предполагать, что картина, опирающаяся на сложное коллективное поведение кварков (антикварков, глюонов), которое выражается в наличии

даже в нормальных условиях вакуумных конденсатов, может задаваться в определенном смысле нетривиальными термодинамическими свойствами вакуума, обуславливающими в конечном итоге наблюдаемые свойства сильно-взаимодействующей материи. На наш взгляд, эта возможность не была в достаточной степени широко обсуждена и тем более эксплуатирована уже на начальной стадии исследований кварк-глюонной материи в силу чисто случайных обстоятельств. (Как показали недавние дискуссии одного из нас (ГМЗ) с Э. Шуряком во время «Quark Matter 2012», подобные мысли им вполне разделяются, и они, по-видимому, посетили его даже несколько ранее, см., например, [10].)

1. МОДЕЛЬ ЧЕТЫРЕХФЕРМИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В этом разделе мы сформулируем кварковую модель с четырехфермионным взаимодействием, генерированным, как считается, сильными вакуумными стохастическими глюонными полями, с плотностью гамильтониана

$$\mathcal{H} = -\bar{q}(i\gamma\nabla + m)q - j_\mu^a \int d\mathbf{y} \langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle j_\nu^b, \quad (1)$$

$j_\mu^a = \bar{q}t^a\gamma_\mu q$ — кварковый ток с соответствующими операторами кварковых полей q , \bar{q} , рассматриваемыми в пространственной точке \mathbf{x} (переменные со штрихом относятся к точке \mathbf{y}),

$$q_{\alpha i}(\mathbf{x}) = \int d\tilde{\mathbf{p}} \frac{1}{(2p_0)^{1/2}} \times \\ \times [a(\mathbf{p}, s, c) u_{\alpha i}(\mathbf{p}, s, c) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + b^+(\mathbf{p}, s, c) v_{\alpha i}(\mathbf{p}, s, c) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}], \quad (2)$$

$d\tilde{\mathbf{p}} = d\mathbf{p}/(2\pi)^3$, $p_0^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$; i — цветовой индекс; α — индекс спинора в координатном пространстве; a^+ , a и b^+ , b — операторы рождения и уничтожения кварков и антикварков; $a|0\rangle = 0$, $b|0\rangle = 0$, $|0\rangle$ — вакуум свободного гамильтониана; m — токовая масса кварка. Всюду подразумевается суммирование по индексам s и c , причем индекс s описывает две спиновые поляризации кварка, а индекс c должен играть аналогичную роль в отношении цвета, $t^a = \lambda^a/2$ — генераторы цветовой калибровочной группы $SU(N_c)$, а γ_μ , входящие в определение тока, соответствуют матрицам Дирака, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Выражение $\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle$ обозначает коррелятор глюонного поля вида

$$\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle = \delta^{ab} \tilde{G} \frac{2}{N_c^2 - 1} [I(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta_{\mu\nu} - J_{\mu\nu}(\mathbf{x} - \mathbf{y})], \quad (3)$$

где второе слагаемое натянуто на вектор относительного расстояния. Поле со штрихом обозначает глюонное поле в точке \mathbf{y} . Для простоты в дальнейшем

будем пренебрегать вкладом второго слагаемого в (3). Основное состояние системы разыскивается в виде боголюбовской пробной функции, образованной кварк-антикварковыми парами с противоположными импульсами и с квантовыми числами вакуума (тем самым вводится некоторая выделенная система отсчета, и фиксируется киральная фаза конденсата):

$$|\sigma\rangle = \mathcal{T}|0\rangle, \quad \mathcal{T} = \prod_{p,s} \exp\{\varphi_{\mathbf{p}} [a^+(\mathbf{p}, s) b^+(-\mathbf{p}, s) + a(\mathbf{p}, s) b(-\mathbf{p}, s)]\}. \quad (4)$$

Для упрощения обозначений в этой формуле и в дальнейшем будем упоминать только один индекс, подразумевая при этом спиновую и цветовую поляризацию. Параметр $\varphi_{\mathbf{p}}$, описывающий силу спаривания, находится из условия минимума средней энергии

$$E = \langle \sigma | H | \sigma \rangle. \quad (5)$$

При помощи одевающего преобразования определяем операторы рождения и уничтожения квазичастиц как $A = \mathcal{T} a \mathcal{T}^{-1}$, $B^+ = \mathcal{T} b^+ \mathcal{T}^{-1}$, для фермионов $\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{T}^\dagger$. В результате поля кварков представляются как

$$\begin{aligned} q(\mathbf{x}) &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2p_0)^{1/2}} \times \\ &\quad \times [A(\mathbf{p}, s) U(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} + B^+(\mathbf{p}, s) V(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}], \\ \bar{q}(\mathbf{x}) &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2p_0)^{1/2}} \times \\ &\quad \times [A^+(\mathbf{p}, s) \bar{U}(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} + B(\mathbf{p}, s) \bar{V}(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}], \end{aligned} \quad (6)$$

причем преобразованные спиноры U и V имеют вид

$$\begin{aligned} U(\mathbf{p}, s) &= \cos(\varphi) u(\mathbf{p}, s) - \sin(\varphi) v(-\mathbf{p}, s), \\ V(\mathbf{p}, s) &= \sin(\varphi) u(-\mathbf{p}, s) + \cos(\varphi) v(\mathbf{p}, s), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\bar{U}(\mathbf{p}, s) = U^+(\mathbf{p}, s) \gamma_0$, $\bar{V}(\mathbf{p}, s) = V^+(\mathbf{p}, s) \gamma_0$ — дираковски сопряженные спиноры.

Коррелятор глюонного поля $\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle$ мы выберем в простейшей аппроксимации, синглетной по цвету, с контактным по времени взаимодействием (без запаздывания)

$$\langle A_\mu^a A_\nu^b \rangle = G \delta^{ab} \delta_{\mu\nu} F(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8)$$

Понятно, что мы не включили соответствующую дельта-функцию по времени в эту формулу. Эта простейшая корреляционная функция является лишь фрагментом соответствующей упорядоченной экспоненты, и помимо четырехфермионного взаимодействия возникает также сопутствующий бесконечный набор мультифермионных вершин, но для наших дальнейших целей

будет вполне достаточным ограничиться этой простейшей формой. Упомянутые нами эффективные взаимодействия появляются естественным образом при упрощенном описании системы, если применить соответствующую процедуру усреднения, предполагая, что вакуумные глюонные поля меняются (стохастически) достаточно быстро, например, в виде инстантонной жидкости, см. [11]. Но эти детали «вывода» эффективного гамильтониана, исходя из первых принципов квантовой хромодинамики (КХД), будут для нас, как будет продемонстрировано в дальнейшем, несущественными. Выбор корреляционной функции в простейшей форме с мгновенным взаимодействием не создает проблем при переходе от пространства Минковского к евклидову пространству, а формфактор $F(x)$ можно тогда интерпретировать как некий потенциал взаимодействия точечных частиц. Сама по себе корреляционная функция выглядит формально как калибровочно-неинвариантный объект. Понятно, однако, что речь идет о приближенном вычислении соответствующего производящего функционала для некоторых специфических условий с ограниченной областью применимости, которое не предполагает взятие функциональных производных произвольного вида. Тем не менее имеется эффективный способ существенно скомпенсировать этот недостаток, если перебрать, в определенном смысле (который будет пояснен ниже), все подобные «потенциалы». Например, этот набор будет достаточно широким, если окажется возможным сопоставить два противоположных по физическому смыслу предела, начиная от формфактора с дельтообразной функцией в координатном пространстве (модель Намбу-Йона-Лазинио (НИЛ) [12], корреляционная длина в этом случае, с учетом регуляризации, конечна) до дельтообразной функции в импульсном пространстве (в этом же случае корреляционная длина, понятно, стремится к бесконечности), аналог такой модели хорошо известен в физике конденсированного состояния как модель Келдыша (ККБ) [13] (см. также применение и развитие модели в [14]). Стоит отметить, что для наших целей понадобится ее только одно, но исключительно важное свойство, связанное с тем, что благодаря виду формфактора все возникающие в задаче интегрирования по импульсам факторизуются, и задача становится фактически одномерной (актуальны только интегрирования по энергии). В модели ККБ рассматривается поведение фермиона в стохастическом случайном поле с бесконечной корреляционной длиной (модель НИЛ соответствует «белому шуму» с нулевой корреляционной длиной). В этом случае удается «просуммировать» весь расходящийся ряд и, как следствие, продемонстрировать, что фермионы, вообще говоря, не лежат на массовой поверхности.

Другие же модели с произвольным формфактором с этой точки зрения, в том числе и модель НИЛ, можно представлять тогда как суперпозицию элементарных блоков, полученных на основе модели ККБ. Упомянутые нами выше в определенном смысле крайние распределения можно рассматривать как предел соответствующих гауссовских корреляторов в координатном и

импульсном пространствах, которые, конечно же, представляются более реалистичными. Настройку масштаба констант взаимодействия G , которые окажутся интересными для приложений, можно осуществить путем привязки к мезонным наблюдаемым.

Заключая этот раздел, мы считаем необходимым прокомментировать случай линейного потенциала, или же добавления в НИЛ петель Полякова [15], с которым связываются надежды обнаружить необычные свойства в поведении кварков, в надежде прояснить природу конфайнмента. Сегодня нам кажется, однако, что столь сингулярный «потенциал» для наших целей является даже несколько излишним в том смысле, что уже в модели ККБ, которая как бы «лежит на полпути» от модели НИЛ к модели с линейным потенциалом, обнаруживаются интересующие нас свойства (см. ниже). Кроме того, квази-частицы в модели с линейным потенциалом при устранении интегрируемой инфракрасной сингулярности принципиально ничем не отличаются от квази-частиц даже, например, в модели НИЛ, см., однако, [16]. В итоге получаются те же массивные объекты, у которых нет аномалий в спектре энергии.

Кроме того, анализ показывает, что имеющиеся в задаче в общем случае мультифермионные вклады можно приемлемым образом редуцировать до четырехфермионного взаимодействия, вставляя соответствующие вакуумные средние, т. е. даже гамильтониан вида (1), по-видимому, «ухватывает» весьма существенные черты взаимодействия кварков. Хотя полезно вспомнить и результаты работ [17], которые показали нетривиальность многофермионных вкладов в изучении топологии фазовой диаграммы КХД.

2. ТЕРМОДИНАМИКА АНСАМБЛЯ КВАЗИЧАСТИЦ КВАРКОВ

В качестве некоторой общетеоретической модели последующего рассмотрения мы обратимся здесь к нашей работе [18], в которой изучалась задача заполнения сферы Ферми квазичастицами кварков путем построения такого состояния, вида слеттеровского детерминанта,

$$|N\rangle = \prod_{|\mathbf{p}| < P_F; S} A^+(\mathbf{p}; S) |\sigma\rangle, \quad (9)$$

чтобы средняя энергия по нему (т. е. по $|N\rangle$) была минимальной. Поляризации в нем пробегают все допустимые значения, а импульсы кварков достигают граничного импульса Ферми P_F .

Термодинамические свойства ансамбля кварков, как известно, определяются при решении следующей задачи. Требуется найти такой статистический оператор

$$\xi = \frac{e^{-\beta \hat{H}_{\text{app}}}}{Z_0}, \quad Z_0 = \text{Tr} \{e^{-\beta \hat{H}_{\text{app}}}\}, \quad (10)$$

чтобы при фиксированном среднем заряде

$$\bar{Q}_0 = \text{Tr} \{ \xi Q_0 \} = V\gamma \int d\tilde{\mathbf{p}} (n - \bar{n}) \quad (11)$$

($Q_0 = \bar{q}\gamma^0 q$) и заданной средней энтропии

$$\begin{aligned} \bar{S} = -\text{Tr} \{ \xi S \} = -V\gamma \int d\tilde{\mathbf{p}} [n \ln n + (1 - n) \ln(1 - n) + \\ + \bar{n} \ln \bar{n} + (1 - \bar{n}) \ln(1 - \bar{n})] \quad (12) \end{aligned}$$

($S = -\ln \xi$) средняя энергия ансамбля кварков

$$E = \text{Tr} \{ \xi H \}$$

($H = \int dx \mathcal{H}$) была минимальной. Иными словами, нас интересует минимум следующего функционала:

$$\Omega = E - \mu \bar{Q}_0 - T \bar{S}, \quad (13)$$

где μ и T обозначают множители Лагранжа для химического потенциала кваркового/барионного заряда (который обычно в феноменологических рассуждениях полагается в три раза больше барионного) и температуры ($\beta = T^{-1}$) соответственно. V — объем, в котором заключена система, $\gamma = 2N_c$ (в случае кварков нескольких ароматов $\gamma = 2N_c N_f$, где N_f — число ароматов), $n = \text{Tr} \{ \xi A^+ A \}$ и $\bar{n} = \text{Tr} \{ \xi B^+ B \}$ — компоненты соответствующей матрицы плотности.

Мы ограничимся приближением Боголюбова–Хартри–Фока, в котором статистический оператор построен на основе аппроксимирующего эффективного гамильтониана H_{app} квадратичного по операторам рождения и уничтожения квазичастиц, действующего в соответствующем фоковском пространстве с вакуумным состоянием $|\sigma\rangle$. Приходящаяся на один кварк удельная средняя энергия $w = E/(V\gamma)$ приводится в этом случае к следующему виду [18]:

$$\begin{aligned} w = \int d\tilde{\mathbf{p}} p_0 - \int d\tilde{\mathbf{p}} (1 - n - \bar{n}) p_0 \cos \theta - \\ - \frac{1}{2} \int d\tilde{\mathbf{p}} (1 - n - \bar{n}) \sin(\theta - \theta_m) M(\mathbf{p}), \quad (14) \end{aligned}$$

где $M(\mathbf{p})$ — индуцированная масса кварка

$$M(\mathbf{p}) = 2G \int d\tilde{\mathbf{q}} (1 - n' - \bar{n}') \sin(\theta' - \theta'_m) F(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad (15)$$

$\theta = 2\varphi_{\mathbf{p}}$, $p_0 = (\mathbf{p}^2 + m^2)^{1/2}$, переменные со штрихом здесь и ниже отвечают интегрированию по импульсу \mathbf{q} , в частности, $\theta' = 2\varphi_{\mathbf{q}}$. Вспомогательный угол θ_m определяется из соотношения $\sin \theta_m = m/p_0$. Первое слагаемое в формуле (14) введено в целях такой нормировки, чтобы при выключенном взаимодействии энергия вакуумного состояния равнялась нулю. Эта константа несущественна для дальнейшего и может быть опущена, однако стоит помнить, что она будет фигурировать в виде регуляризатора в появляющихся далее сингулярных выражениях.

На рис. 1 для сравнения приведены наиболее устойчивые экстремали функционала (14) для модели НИЛ (сплошная линия) и модели ККБ (штриховая линия), полученные для нормальных условий ($T = 0$, $\mu = 0$). Непосредственно для дельтообразного потенциала в координатном пространстве (модель НИЛ) выражение (14) расходится, и для получения разумных результатов вводится обрезаящий верхний предел интегрирования по импульсу Λ , который наряду с константой взаимодействия G и токовой массой кварка m является настроечным параметром модели. Ниже мы употребляем один из стандартных наборов модели НИЛ [19]: $\Lambda = 631$ МэВ, $G\Lambda^2/(2\pi^2) \approx 1,3$, $m = 5,5$ МэВ. Параметры же модели ККБ

выбраны такими, чтобы при одинаковых токовых массах динамические массы кварков в обеих моделях, НИЛ и ККБ, совпадали при нулевом импульсе кварка. Импульс p_ϑ отвечает максимальному притяжению кварка и антикварка. Обратная величина этого параметра определяет характерный размер квазичастицы. Для рассмотренных моделей он оказывается порядка $p_\vartheta \sim (mM_q)^{1/2}$, где M_q — характерная динамическая масса кварка, т. е. сравним с размером голдстоуновской частицы, в частности, π -мезона. Примечательно, что размер квазичастицы, как это демонстрирует рис. 1, не зависит существенным образом от вида формфактора, иными словами, от масштаба, а определяется в основном константой взаимодействия.

Преобразуем теперь выражение для удельной энергии кварка (14) к виду, характерному для стандартного приближения среднего поля. Тригонометрический фактор представим в виде некоторой динамической массы кварка M_q :

$$\sin(\theta - \theta_m) = \frac{M_q}{P_0}, \quad P_0 = (\mathbf{p}^2 + M_q^2(\mathbf{p}))^{1/2}. \quad (16)$$

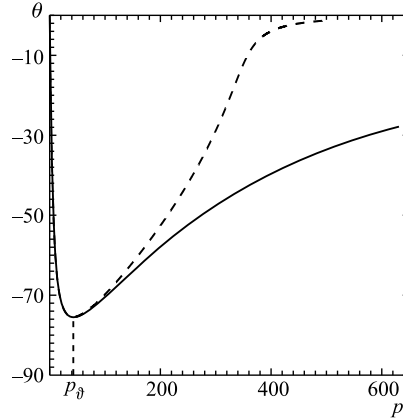


Рис. 1. Наиболее устойчивые равновесные углы θ (в градусах) как функции импульса p (в МэВ). Сплошная линия описывает модель НИЛ, штриховая линия соответствует модели ККБ

Теперь определим связь индуцированной массы кварка с его динамической массой. Оптимальные параметры, которые дают минимум функционала (14), определяются из решения системы уравнений ($dw/d\theta = 0$, $dw/dn = 0$, $dw/d\bar{n} = 0$)

$$\begin{aligned} p_0 \sin \theta - M \cos (\theta - \theta_m) &= 0, \\ p_0 \cos \theta - \mu + M \sin (\theta - \theta_m) - T \ln \left(\frac{1}{n} - 1 \right) &= 0, \\ p_0 \cos \theta + \mu + M \sin (\theta - \theta_m) - T \ln \left(\frac{1}{\bar{n}} - 1 \right) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Из первого уравнения системы определяем синус угла спаривания

$$\sin \theta = \frac{pM}{p_0 P_0}.$$

Используя тождество

$$(p_0^2 + Mm)^2 + M^2 p^2 = [p^2 + (M + m)^2] p_0^2, \quad (18)$$

для косинуса угла спаривания можно получить

$$\cos \theta = \pm \frac{p_0^2 + mM}{p_0 P_0}.$$

Для определенности выберем знак плюс. (В этом случае, как показывает анализ модели НИЛ, например, наиболее устойчивой ветвью решений уравнения для динамической массы кварка является ветвь с положительной массой кварка.) Подставим найденные выражения для синуса и косинуса угла спаривания в формулу для тригонометрического фактора:

$$\sin (\theta - \theta_m) = \sin \theta \frac{p}{p_0} + \cos \theta \frac{m}{p_0}.$$

Проводя алгебраические преобразования левой и правой частей уравнения, можно получить, что

$$M_q(\mathbf{p}) = M(\mathbf{p}) + m. \quad (19)$$

В результате выражение (14) преобразуется к виду (см. также [18])

$$\begin{aligned} w = \int d\tilde{\mathbf{p}} p_0 - \int d\tilde{\mathbf{p}} (1 - n - \bar{n}) P_0 + \\ + \frac{1}{4G} \int d\tilde{\mathbf{p}} d\tilde{\mathbf{q}} F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \tilde{M}(\mathbf{p}) \tilde{M}(\mathbf{q}), \end{aligned} \quad (20)$$

где $\widetilde{M}(\mathbf{p})$ — плотность индуцированной массы кварка; $P_0 = [\mathbf{p}^2 + M_q^2(\mathbf{p})]^{1/2}$ — энергия квазичастицы кварка с динамической массой, определяемой как

$$M_q(\mathbf{p}) = m + M(\mathbf{p}) = m + \int d\widetilde{\mathbf{q}} F(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \widetilde{M}(\mathbf{q}). \quad (21)$$

В дальнейшем, когда это не ведет к заблуждениям, мы будем опускать аргументы соответствующих функций для массы и энергии квазичастиц. Варьируя функционал (20) по плотности индуцированной массы квазичастицы \widetilde{M} (в такой форме удобно брать вариационные производные), получаем уравнение на динамическую массу кварка в виде

$$M_q(\mathbf{p}) = m + 2G \int d\widetilde{\mathbf{q}} (1 - n' - \bar{n}') \frac{M'_q}{P'_0} F(\mathbf{p} + \mathbf{q}), \quad (22)$$

который в точности соответствует приближению среднего поля. Если же принять в качестве базовой переменной динамическую массу кварка M_q , то из выражения (21) видно, что сформулировать пригодное для практики обратное преобразование от M_q к \widetilde{M} совсем непросто. В частности, в нормальных условиях ($T = 0, \mu = 0$) динамическая масса кварка в модели НИЛ равна $M_q \sim 340$ МэВ. Динамическая масса кварка в модели ККБ определяется уравнением

$$M(\mathbf{p}) = 2G \frac{M_q(\mathbf{p})}{P_0}. \quad (23)$$

На практике оказывается удобнее пользоваться обратной функцией $p(M_q)$. В частности, в киральном пределе $M_q = (4G^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}$ при $|\mathbf{p}| < 2G$, $M_q = 0$ при $|\mathbf{p}| > 2G$. Тогда состояния кварка с импульсами $|\mathbf{p}| < 2G$ вырождены по энергии $P_0 = 2G$. На рис. 2 показаны три ветви решений уравнения (23) для динамической массы кварка. Точками показаны мнимые части решений, которые образуются в месте слияния двух вещественных корней.

Заметим также, что квазичастицы с постоянной энергией присутствуют в некоторых вариантах точно решаемой теоретико-полевой модели

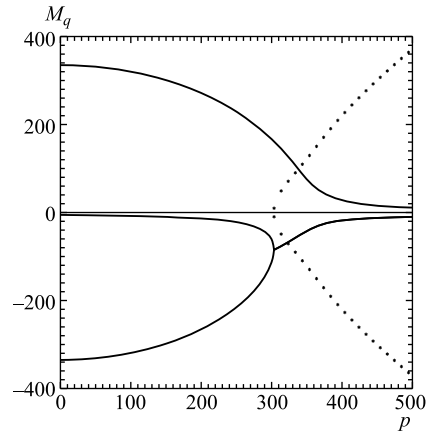


Рис. 2. Три ветви решений для динамической массы кварка в МэВ для модели ККБ как функция импульса (МэВ). Точками показаны мнимые части решений

Ли [20]. Отметим, кроме того, что эта модель может оказаться полезной при описании неравновесных процессов в кварк-глюонной среде, поскольку в ней нет необходимости вводить искусственный масштаб обрезания, как это имеет место в модели НИЛ, например. В то же время рис. 1 демонстрирует, что квазичастицы кварков в модели НИЛ и в модели ККБ одинаковы в области малых импульсов, и можно было бы ожидать, что одинаковыми в существенном окажутся и процессы формирования квазичастиц кварков. В приложении А подробно рассматриваются некоторые альтернативы нарушения киральной инвариантности для рассматриваемой модели с четырехфермионным взаимодействием, включая цветовую сверхпроводимость.

3. СРЕДНЯЯ ЭНЕРГИЯ КАК ФУНКЦИОНАЛ ТЕОРИИ КВАНТОВЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Цель, которую мы преследовали при переходе от выражения удельной энергии (14) к виду (20), состояла в получении такой формы, в которой без труда можно было бы узнать функционал энергии теории ферми-жидкости Ландау [21]. Некоторые положения этой теории оказываются интересно и полезно применить для сопоставления результатов моделей НИЛ и ККБ. Мы обсудим также фазовый переход первого рода, который, по-видимому, характерен для взаимодействующих фермионов (релятивистской ферми-жидкости).

Так, второе слагаемое в (20) описывает вклады квазичастиц кварков и антикварков с заполнениями n и \bar{n} соответственно. Единица в выражении $1 - n' - \bar{n}'$ отвечает вакуумным флуктуациям кварков и антикварков (по отдельности каждая их мода дает $1/2$). Последнее слагаемое в (20) обусловлено взаимодействием квазичастиц. Наличие вклада античастиц и релятивистская форма динамики являются теми чертами, которые отличают изучаемые нами кварковые ансамбли от ферми-жидкостей, рассматриваемых в физике конденсированного состояния. Первая вариация функционала (20) по плотности частиц (античастиц) приводит, как и должно быть, к энергии квазичастицы

$$\frac{\delta w}{\delta n} = P_0. \quad (24)$$

Рассмотрим сначала случай нулевой температуры и остановимся на некоторых аспектах заполнения сферы Ферми кварками. Будем полагать, что распределение кварков (антикварков) по импульсам определяется предельным значением, $\beta \rightarrow 0$, стандартных выражений

$$n = [e^{\beta(P_0 - \mu)} + 1]^{-1}, \quad \bar{n} = [e^{\beta(P_0 + \mu)} + 1]^{-1}, \quad (25)$$

т. е. фермиевской ступенькой: $n = 1$, при $P_0 \leq \mu$, $n = 0$, при $P_0 > \mu$. Для антикварков, понятно, $\bar{n} = 0$. Ниже, на примере модели ККБ, будет

также подробно изучен случай аномального заполнения сферы Ферми — так называемый фермионный конденсат (см. приложение Б). Плотность кварков определяется через импульс Ферми как

$$\rho = \frac{\gamma P_F^3}{6\pi^2}, \quad \rho = \frac{Q_0}{V}, \quad (26)$$

причем химический потенциал кварка совпадает с энергией квазичастицы на поверхности Ферми, как это следует из соотношения (24):

$$\mu = [P_F^2 + M_q^2(P_F)]^{1/2}. \quad (27)$$

На рис. 3 показана групповая скорость квазичастиц на поверхности Ферми $v_F = \partial P_0 / \partial \mathbf{p}|_{|\mathbf{p}|=P_F}$ как функция барионной (кварковой) плотности (по определению барионная плотность в три раза меньше плотности кварков $\rho_B = \rho/3$). Сплошная линия описывает модель НИЛ, штриховая линия соответствует модели ККБ. Для сравнения точками также показан вариант для модели ККБ, когда настройка параметров осуществляется таким образом, чтобы совпадали массы π -мезонов в модели НИЛ и модели ККБ (аналогичные обозначения применяются ниже на рис. 4–8). Стремление групповой скорости в области нормальных ядерных плотностей к единице отвечает восстановлению киральной симметрии, когда индуцированная масса кварка стремится к нулю. Для модели ККБ в киральном пределе групповая скорость обращается в нуль для кварков с импульсами $|\mathbf{p}| < 2G$. Отрицательные групповые скорости в модели НИЛ отвечают зоне неустойчивости, см. ниже. Точки, в которых групповая скорость обращается в нуль, обуславливают пики в плотности состояний на поверхности Ферми N_F ,

$$N_F = \gamma \int d\tilde{\mathbf{p}} \delta(P_0 - \mu) = \frac{\gamma}{2\pi^2} P_F P_F^0 (1 + F_0)^{-1}, \quad (28)$$

$$F_0 = \frac{M_q}{P_F} \frac{dM_q}{dP_F},$$

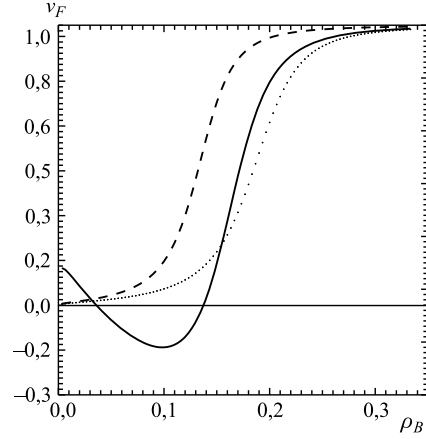


Рис. 3. Групповая скорость квазичастиц v_F на поверхности Ферми. Сплошная линия описывает модель НИЛ, штриховая линия соответствует модели ККБ, точками обозначены данные для модели ККБ с настройкой на массу π -мезона (аналогично на рис. 4–8)

где $P_F^0 = P_0|_{|p|=P_F}$, $N_F = d\rho/d\mu$. Подробнее об определении параметра F_0 см. ниже. В идеальном газе член взаимодействия в функционале (14) исчезает, а следовательно, производная динамической массы кварка по импульсу Ферми обращается в нуль: $dM_q/dP_F = 0$. Положим по определению плотность состояний идеального газа равной $\tilde{N}_F = \gamma/(2\pi^2)P_F P_F^0$, тогда соотношению (28) можно придать вид

$$N_F = \tilde{N}_F(1 + F_0)^{-1}.$$

Другой важной характеристикой является модуль сжатия

$$K = 9\rho \frac{d\mu}{d\rho} = 3 \frac{P_F^2}{\mu} (1 + F_0). \quad (29)$$

На рис. 4 представлены данные для модели НИЛ и модели ККБ. Они вполне отвечают характерным значениям, получаемым для ядерной среды. Можно также заключить, что, в принципе, модели допускают широкий диапазон уравнений состояния, включая в том числе и достаточно жесткие. Отрицательные значения модуля сжатия недопустимы и отвечают области неустойчивости.

Скорость первого звука, которая определяется из соотношения

$$C_1^2 = \frac{K}{9\mu} = \frac{v_F^2}{3} (1 + F_0), \quad (30)$$

показана на рис. 5. При барионных плотностях, несколько превышающих плотность нормальной ядерной материи, скорость звука стремится к своему

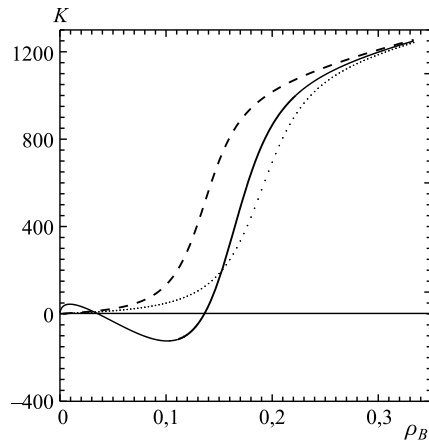


Рис. 4. Модуль сжатия K в МэВ

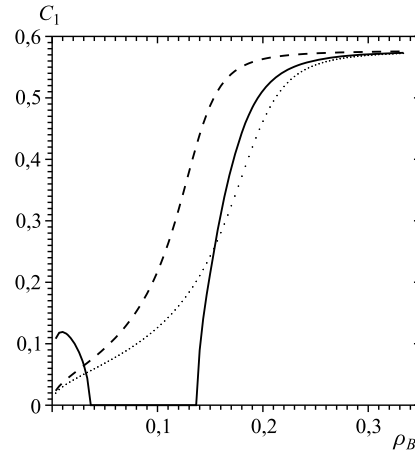


Рис. 5. Скорость первого звука C_1

асимптотическому значению $C_1 = 1/\sqrt{3}$, что является естественным проявлением восстановления киральной инвариантности. Если аналогично определению \tilde{N}_F ввести скорость звука идеального ферми-газа $\tilde{C}_1^2 = v_F^2/3$, то выражению (30) можно придать форму, физический смысл которой означает равенство потоков проходящих через сферу Ферми квазичастиц (воображаемого) идеального ферми-газа и взаимодействующей ферми-жидкости (т. е., по существу, имеет место релятивистский аналог теоремы Латтинжера [22]):

$$N_F C_1^2 = \tilde{N}_F \tilde{C}_1^2. \quad (31)$$

Коэффициент теплопроводности при постоянном объеме при малых температурах дается выражением

$$C_V = \frac{1}{3} \pi^2 N_F T. \quad (32)$$

На рис. 6 представлен наклон кривой (коэффициент $\frac{1}{3}\pi^2 N_F$ в формуле (32), $N_F = d\rho/d\mu$) как функция барионной/кварковой плотности, который демонстрирует, насколько информативным могло бы оказаться измерение наклона кривой теплопроводности.

Еще одна важная характеристика ферми-жидкости определяется с помощью второй вариационной производной, которая в случае функционала (20) имеет только скалярную составляющую

$$f_0 = \frac{\delta^2 w}{\delta n^2} = \frac{M_q}{P_0} \frac{\delta M_q}{\delta n}. \quad (33)$$

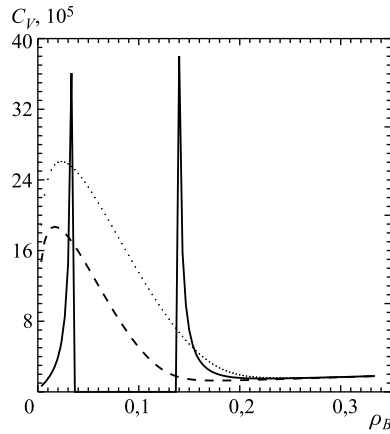


Рис. 6. Коэффициент наклона при малых температурах $\frac{1}{3}\pi^2 N_F$ в формуле теплопроводности при постоянном объеме $C_V = \frac{1}{3}\pi^2 N_F T$

Для ферми-жидкости при нулевой температуре, в частности, имеем

$$f_0 = \frac{2\pi^2}{\gamma P_F P_F^0} \frac{M_q}{P_F} \frac{dM_q}{dP_F}.$$

В модели НИЛ, например,

$$\frac{M_q}{P_F} \frac{dM_q}{dP_F} = -\frac{P_F}{P_F^0} \frac{1}{I + \pi^2 m / (GM_q^3)}, \quad I = \ln \frac{\Lambda + P_\Lambda^0}{P_F + P_F^0} - \frac{\Lambda}{P_\Lambda^0} + \frac{P_F}{P_F^0},$$

где $P_\Lambda^0 = P_0|_{|\mathbf{p}|=\Lambda}$. В модели ККБ

$$\frac{M_q}{P_F} \frac{dM_q}{dP_F} = -\frac{MM_q^2}{M_q^3 + mP_F^2}.$$

В частности, в киральном пределе, когда $m = 0$, имеем $(M_q/P_F)(dM_q/dP_F) = -1$. Коллективные моды колебаний ферми-жидкости, так называемый нулевой звук (бесстолкновительный режим), определяются при помощи параметра

$$F_0 = \tilde{N}_F f_0 = \frac{M_q}{P_F} \frac{dM_q}{dP_F},$$

который приведен на рис. 7. В частности, в модели ККБ

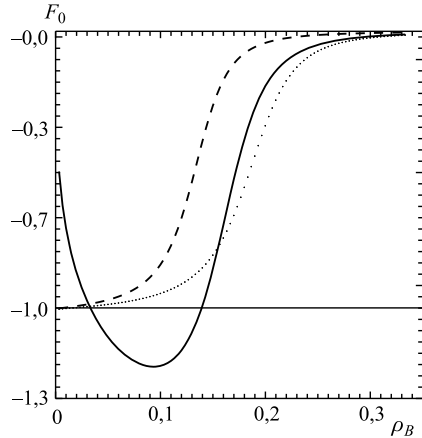


Рис. 7. Фактор F_0 теории ферми-жидкости Ландау

$$F_0 = -\frac{MM_q^2}{MM_q^2 + (P_F^0)^2 m} \geq -1.$$

Колебания нулевого звука, как известно, определяются решениями дисперсионного уравнения с частотным параметром s (по поводу этого обозначения см. ниже раздел, посвященный поляризованному оператору) вида

$$F_0 = \frac{s}{2} \log \frac{s+1}{s-1} - 1. \quad (34)$$

При наличии отталкивания в системе, когда коэффициент положителен, $F_0 > 0$, решения дисперсионного уравнения $s = \lambda + i\eta$ описывают незатухающие колебания ($\eta = 0$). В случае слабого притяжения, при $-1 < F_0 < 0$, возможны затухающие колебания нулевого звука с чисто мнимой частотой ($\lambda = 0$), которая определяется решениями уравнения

$$F_0 + 1 = \eta \operatorname{arctg}(1/\eta).$$

В случае сильного притяжения, при $F_0 < -1$, решения расположены на втором листе комплексной плоскости s и описывают затухающие колебания, которые находятся из решения уравнения

$$F_0 + 1 = \eta [-\pi + \text{arctg}(1/\eta)].$$

Следует, однако, напомнить, что эти состояния ферми-жидкости неустойчивы, что будет еще обсуждено ниже. Применять непосредственно приведенное выше рассмотрение нулевого звука к изучаемому нами случаю взаимодействующих кварков и антикварков вряд ли возможно, поскольку мы полностью игнорировали здесь вклад вакуумных флуктуаций антикварков, которые вместе с кварками и формируют киральный конденсат. С другой стороны, колебания нулевого звука, как известно, можно интерпретировать как связанное состояние частицы и дырки в окрестности сферы Ферми. Поэтому описание возбуждений ферми-жидкости для нашего случая следует проводить с учетом взаимного влияния связанных состояний кварка и антикварка, а также кварка и дырки ферми-сферы (которая по квантовым числам может рассматриваться как античастица). Это рассмотрение будет также проведено при вычислении соответствующего поляризационного оператора.

Обратимся теперь к химическому потенциалу квазичастиц, который представлен на рис. 8. Из данных для модели НИЛ видно, что имеется область заполненных состояний, почти вырожденных по химическому потенциалу, с вакуумным химическим потенциалом квазичастицы, который отвечает, естественно, нулевому импульсу Ферми. Аналогично в модели ККБ химический потенциал заполненных состояний отличается от химического потенциала в вакууме на небольшую величину, пропорциональную токовой массе кварка:

$$\frac{d\mu}{d\rho} = \frac{\mu}{\rho} \frac{v_F^2}{3} \left(1 + \frac{M_q}{P_F} \frac{dM_q}{dP_F} \right) \sim m. \quad (35)$$

В киральном пределе все состояния с импульсом $|\mathbf{p}| < 2G$ вырождены по химическому потенциалу. $M_q = (4G^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}$, $P_0 = 2G$, в том случае, когда $P_F < |\mathbf{p}| < 2G$, $M_q = 0$, $P_0 = |\mathbf{p}|$, если $|\mathbf{p}| < P_F$, если $|\mathbf{p}| > 2G$. Такое поведение химического потенциала обусловлено быстрым падением

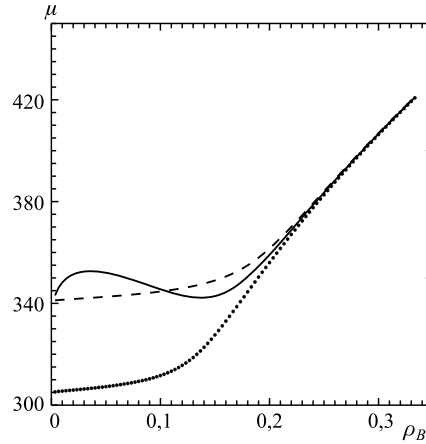


Рис. 8. Химический потенциал в МэВ

динамической массы кварка при увеличении импульса Ферми, см. также (27). Из выражения (20) следует, что сфера Ферми заполняется как бы изнутри. Кварки с импульсами меньше импульса Ферми $|\mathbf{p}| < P_F$ не участвуют в формировании конденсата. Как следствие, динамическая масса кварка с ростом импульса Ферми может только уменьшаться. В модели НИЛ динамическая масса кварка не зависит от импульса кварка в силу предполагаемой аппроксимации. В более реалистической постановке, как показывает анализ модели ККБ, эта зависимость должна быть принята во внимание.

Оказывается, что и давление некоторых вырожденных по химическому потенциалу заполненных состояний почти совпадает с давлением вакуума (давлением разреженного ферми-газа) ($T = 0$):

$$P = -\frac{dE}{dV} = -\mathcal{E} + \mu\rho,$$

где $\mathcal{E} = E/V$ — удельная энергия. Ниже мы проанализируем соответствующие данные подробнее, в том числе и при ненулевой температуре. В модели ККБ энергия (а следовательно, и давление) ансамбля является разрывным функционалом токовой массы кварка, см. [11]. Подынтегральные члены в выражении (20) в этом случае оцениваются как

$$p_0 - P_0 + \frac{1}{4G} M^2 \sim -\frac{Gm^2}{p^2},$$

и тогда для удельной энергии ансамбля получается линейно расходящийся интеграл

$$w \sim -\int \frac{dp p^2}{2\pi^2} \frac{Gm^2}{p^2},$$

несмотря на то, что дельтообразный формфактор в импульсном пространстве является самым сильным регуляризатором (см. также приложение Г). Парадоксально, но любое малое значение токовой массы m приводит к минус бесконечной энергии ансамбля, в то время как в киральном пределе выражение $w|_{m=0}$ хорошо определено. Аналогичная расходимость тем более имеет место и в случае дельтообразного формфактора в координатном пространстве. Просто в модели НИЛ этот факт маскируется введением обрезającego импульса Λ . В силу отмеченной сингулярности давления ансамбля в модели ККБ имеет смысл рассматривать относительное давление ансамбля кварков в сравнении с (формально бесконечным) вакуумным значением. Производная давления по плотности ансамбля имеет вид $dP/d\rho = \rho d\mu/d\rho$. Отсюда, привлекая оценку (35), можно заключить, что в киральном пределе в модели ККБ наблюдается также вырождение заполненных состояний с импульсами $|\mathbf{p}| < 2G$ и по давлению ($\mathcal{E} = 2G\rho$, $\mu = 2G$). Вне кирального предела отклонения пропорциональны токовой массе кварка.

Теперь определим некоторые термодинамические свойства системы и рассмотрим сначала подробнее давление кваркового ансамбля

$$P = -\frac{dE}{dV}.$$

По определению, производную по объему следует брать при постоянной средней энтропии, $d\bar{S}/dV = 0$. Пользуясь этим условием, можно извлечь, например, производную химического потенциала по объему, $d\mu/dV$. Однако при таком способе действий обнаруживается опасность, что средний заряд \bar{Q}_0 может изменяться. Имеется только одна возможность удовлетворить оба условия — ввести два независимых химических потенциала: для кварков и для антикварков. Будем использовать для химического потенциала кварков введенное нами ранее обозначение μ . Химический потенциал антикварков возьмем с противоположным знаком и обозначим $\bar{\mu}$. Тогда для плотности кварков и антикварков имеем

$$n = \frac{1}{e^{\beta(P_0 - \mu)} + 1}, \quad \bar{n} = \frac{1}{e^{\beta(P_0 + \bar{\mu})} + 1}.$$

В общем случае таким способом можно описывать и некоторые неравновесные состояния кваркового ансамбля (формально, с потерей ковариантности, так же как и в случае электродинамики для электрон-позитронного газа). Но нас в этой работе будет интересовать только частный случай, когда $\bar{\mu} = \mu$. Частную производную удельной энергии по объему dw/dV можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dV} = \int \tilde{d}\mathbf{p} \left(\frac{dn}{d\mu} \frac{d\mu}{dV} + \frac{d\bar{n}}{d\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{dV} \right) & \left[p_0 \cos \theta - 2G \times \right. \\ & \left. \times \sin(\theta - \theta_m) \int \tilde{d}\mathbf{q} \sin(\theta' - \theta'_m) (n' + \bar{n}' - 1) F \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь определением индуцированной массы кварка (15) и выражая тригонометрические факторы через динамическую массу кварка, для давления ансамбля можно получить

$$P = -\frac{E}{V} - V2N_c \int \tilde{d}\mathbf{p} \left(\frac{dn}{d\mu} \frac{d\mu}{dV} + \frac{d\bar{n}}{d\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{dV} \right) P_0. \quad (36)$$

Условие сохранения среднего заряда

$$\frac{d\bar{Q}_0}{dV} = \frac{\bar{Q}_0}{V} + V2N_c \int \tilde{d}\mathbf{p} \left(\frac{dn}{d\mu} \frac{d\mu}{dV} - \frac{d\bar{n}}{d\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{dV} \right) = 0 \quad (37)$$

дает первое уравнение, которое связывает производные $d\mu/dV$, $d\bar{\mu}/dV$. Здесь подразумевается регуляризованное выражение для среднего заряда кварков и антикварков за вычетом соответствующего вакуумного вклада. Поступая

аналогичным образом с условием неизменности средней энтропии, $d\bar{S}/dV = 0$, можно получить второе уравнение системы для разыскиваемых производных химических потенциалов

$$\int \tilde{d}\mathbf{p} \frac{dn}{d\mu} \ln \frac{n}{1-n} \frac{d\mu}{dV} - \int \tilde{d}\mathbf{p} \frac{d\bar{n}}{d\bar{\mu}} \ln \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}} \frac{d\bar{\mu}}{dV} = \frac{\bar{S}}{2N_c V^2}. \quad (38)$$

Подставляя сюда выражения $T \ln \frac{n}{1-n} = \mu - P_0$, $T \ln \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}} = -\bar{\mu} - P_0$ и приводя подобные, при условии $\bar{\mu} = \mu$ при помощи уравнения (37) можно получить

$$\int \tilde{d}\mathbf{p} \left(\frac{dn}{d\mu} \frac{d\mu}{dV} + \frac{d\bar{n}}{d\bar{\mu}} \frac{d\bar{\mu}}{dV} \right) P_0 = -\frac{\bar{S}T}{2N_c V^2} - \frac{\bar{Q}_0 \mu}{2N_c V^2}.$$

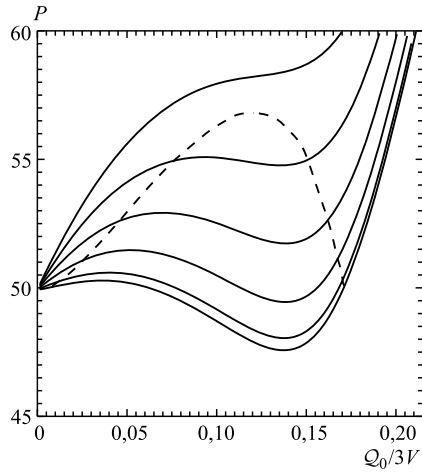


Рис. 9. Давление ансамбля P , МэВ/ Фм^3 , как функция плотности заряда $Q_0/3V$ при температурах $T = 0$ МэВ, ..., с шагом $T = 10$ МэВ. Нижняя кривая отвечает нулевой температуре. Штриховой кривой показана граница фазового перехода газ–жидкость, см. текст

тур. Нижняя кривая получена при нулевой температуре. Следующие вверх кривые отвечают температурам $T = 10$ МэВ, ..., $T = 50$ МэВ (верхняя кривая), с шагом $T = 10$ МэВ. Напомним также, что в случае модели НИЛ в [11] была получена оценка давления вакуума 40–50 МэВ/ Фм^3 , вполне отвечающая значениям, извлекаемым из модели мешка. Было также продемонстрировано наличие области неустойчивости в некотором интервале импульсов Ферми, обусловленной аномальным поведением давления, $dP/dn < 0$, см. также [23].

Окончательно для давления имеем

$$P = -\frac{E}{V} + \frac{\bar{S}T}{V} + \frac{\bar{Q}_0 \mu}{V}. \quad (39)$$

При этом термодинамический потенциал Ω , как и должно быть, удовлетворяет термодинамическому тождеству

$$\Omega = -PV = E - \mu \bar{Q}_0 - T \bar{S}. \quad (40)$$

При малых температурах вклад антикварков мал, и термодинамическое описание можно приближенно строить с использованием только одного химического потенциала μ . Если же вклад антикварков становится существенным, то следует усложнить термодинамическое описание с учетом влияния химического потенциала $\bar{\mu}$, с дополнительным условием $\bar{\mu} = \mu$. На рис. 9 показано давление ансамбля P , МэВ/ Фм^3 , как функция плотности заряда $Q_0/3V$ для различных темпера-

На рис. 10 показаны фрагменты изотерм рис. 9, но уже в других координатах, в виде химического потенциала как функции давления ансамбля. Верхняя кривая получена при нулевой температуре, далее вниз изображены изотермы с шагом 10 МэВ. Самая нижняя кривая получена при температуре 50 МэВ. Из рисунка ясно видно наличие на изотермах состояний, находящихся в условиях термодинамического равновесия, для которых одинаковы и давление, и химический потенциал (см. характерный ван-дер-ваальсовский треугольник с перекрещивающимися кривыми). Полученные равновесные точки перенесены на рис. 9 и показаны в виде штриховой кривой. Точки пересечения штриховой кривой с изотермой определяют границу фазового перехода газ–жидкость. Соответствующая прямая, $P = \text{const}$, отсекает неравновесный и неустойчивый фрагменты изотермы и описывает смешанную фазу. Для используемых настроек критическая температура оказывается равной $T_c \sim 46$ МэВ с критической плотностью заряда $\bar{Q}_0 \sim 0,12$ заряд/Фм³. На рис. 11 показаны изобары. Непосредственно рядом с каждой кривой указано давление в МэВ/Фм³. Вакуумное давление соответствует ~ 50 МэВ/Фм³. Можно построить и продолжение изобар в области малых плотностей заряда, в этом, однако, нет принципиальной необходимости. Рисунок наглядно демонстрирует наличие разреженной фазы (газа) и плотной фазы (жидкости) в окрестности вакуумной изобары.

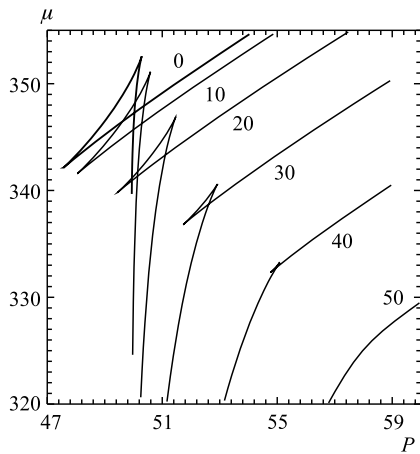


Рис. 10. Фрагменты изотерм рис. 9, см. текст. Химический потенциал μ , МэВ, как функция давления P , МэВ/Фм³. Верхняя кривая — нулевая изотерма. Далее вниз с шагом 10 МэВ до изотермы 50 МэВ (нижняя кривая)

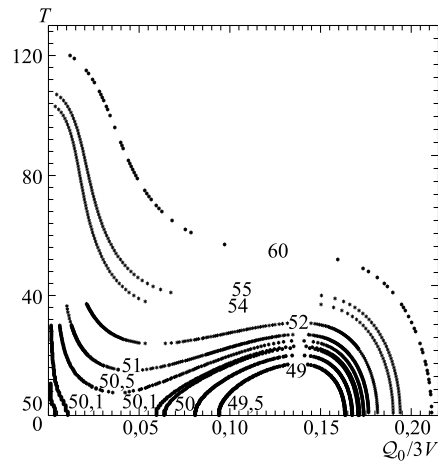


Рис. 11. Изобары модели НИЛ. Рядом с каждой кривой указано давление в МэВ/Фм³. Вакуумное давление соответствует примерно 50 МэВ/Фм³

На рис. 12 представлена динамическая масса кварка M_q , МэВ, как функция химического потенциала μ , МэВ, для температур $T = 0$ МэВ, ..., $T = 100$ МэВ, с шагом $T = 10$ МэВ. Самая правая кривая отвечает нулевой температуре. При малых температурах, ниже 50 МэВ, динамическая масса кварка является многозначной функцией химического потенциала. На графике справа показана динамическая масса кварка как функция температуры при малой плотности заряда $\mathcal{Q}_0 \sim 0$. В контексте модели НИЛ эта картина легкоузнаваема. Именно она и подразумевается в сценарии восстановления киральной инвариантности в условиях экстремальных температур выше 100 МэВ при условии сильной разреженности кваркового ансамбля.

Мы уже отмечали (см. также [11]), что можно определить импульс p_θ , который отвечает наибольшему притяжению кварка и антикварка, $d \sin \theta / dp = 0$. Для модели НИЛ, в частности, этот параметр оказывается равным

$$p_\theta = (M_q m)^{1/2}. \quad (41)$$

Его обратная величина определяет характерный эффективный размер квазичастицы $r_\theta = p_\theta^{-1}$. Из поведения динамической массы кварка как функции температуры при малых плотностях заряда, см. правый график рис. 12, можно заключить, что с ростом температуры размер квазичастицы увеличивается.

В [18] было показано, что если определять химический потенциал кварков как энергию, которая необходима для добавления (удаления) одной квазичастицы, $\mu = dE/dN$, то в вакууме химический потенциал совпадает с динамической массой кварка, см. также (24), (27). Поэтому разумным пред-

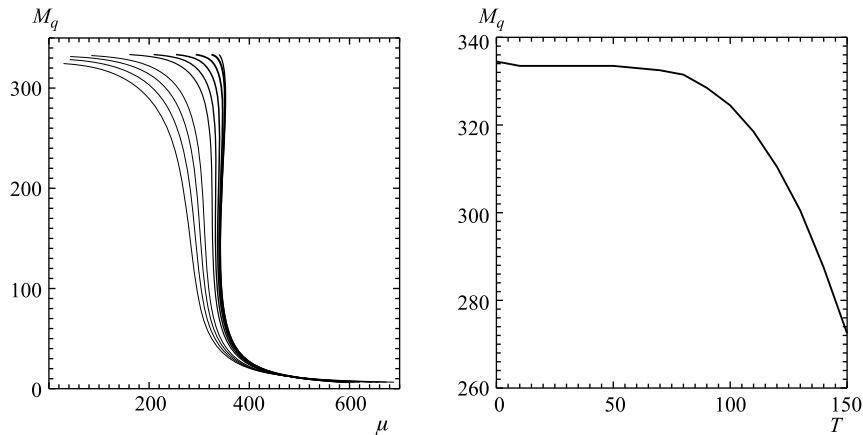


Рис. 12. Динамическая масса кварка M_q , МэВ, в модели НИЛ как функция химического потенциала μ , МэВ, для температур $T = 0$ МэВ, ..., $T = 100$ МэВ, с шагом $T = 10$ МэВ. Самая правая кривая отвечает нулевой температуре. На графике справа приведена динамическая масса кварка M_q , МэВ, как функция температуры при малой плотности заряда \mathcal{Q}_0

ставляется рассматривать фазовую диаграмму КХД, стартуя с этого значения химического потенциала, хотя формально его можно полагать и меньшим динамической массы кварка, так, как это и делалось в пионерской работе [24], например, см. также приложение Б, где этот вопрос подробно анализируется на примере модели ККБ. В частности, полагая химический потенциал равным нулю, в точности воспроизводим стандартную картину [19, 24].

Полученные результаты позволили выдвинуть гипотезу, что фазовый переход (частичного) восстановления киральной инвариантности уже может быть реализован в природе в виде существования смешанной фазы физического вакуума и барионной материи. Косвенное подтверждение этой гипотезы можно видеть в вырожденности возбужденных состояний некоторых барионов, см., например, [25]. Понятно, однако, что представленные данные, в частности, температуру и плотность критической точки следует воспринимать как оценку. Извлекаемая из эксперимента величина критической температуры перехода жидкость–газ для ядерной материи оценивается порядка 20 МэВ. Кроме того, газовая компонента здесь (при $T = 0$) обладает отличной от нуля плотностью порядка 0,01 нормальной ядерной плотности, тогда как наблюдаемое значение должно соответствовать физическому вакууму, т. е. нулевой барионной плотности. Хотя следует заметить, что подобная неопределенность присуща и другим обсуждаемым в литературе предсказаниям фазового перехода восстановления киральной инвариантности где-то в районе двух–шести плотностей нормальной ядерной материи.

4. ПОЛЯРИЗАЦИОННЫЙ ОПЕРАТОР

Возвращаясь к обсуждению нулевого звука и возбуждений кирального конденсата, стоит также отметить, что эти знания непосредственно необходимы и для более последовательного анализа переходного слоя газа и жидкости. Для этого нам потребуется поляризационный оператор вида

$$\Pi^\Gamma(p, q) = \int \frac{dk}{(2\pi)^4} i\pi^\Gamma(k + p, k - q), \quad (42)$$

где $\pi^\Gamma(k + p, k - q) = \text{Tr} \{S(k + p)\Gamma S(k - q)\Gamma\}$ — соответствующая плотность поляризационного оператора в каналах $\Gamma = 1, i\gamma_5, \gamma_\mu, \gamma_5\gamma_\mu$, с функцией Грина кварка с динамической массой M_q

$$S(k) = \frac{1}{\hat{k} + \hat{\mu} - M_q(\mathbf{k})}, \quad (43)$$

$\hat{\mu} = \mu\gamma^0$, p, q — входящие и выходящие внешние импульсы квазичастиц кварков. Для наших целей будет достаточно рассмотреть квазичастицы в системе центра инерции с импульсами $\mathbf{p} = \mathbf{q} = \mathbf{Q}/2$.

Остановимся на анализе псевдоскалярного и скалярного каналов, для которых можно получить

$$\begin{aligned}
 \Pi^{\pi,\sigma} &= N_c \int d\tilde{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) \left[\frac{a + b\varepsilon}{\varepsilon^2 - (E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})^2} + \frac{c}{\varepsilon - E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}} \right], \\
 a &= (E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})[2 - n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{q}}] \left[\frac{\mathbf{Q}^2/4 - \mathbf{k}^2 \mp M_{\mathbf{p}}M_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}} - 1 \right], \\
 b &= [n_{\mathbf{q}} - n_{\mathbf{p}}] \left[\frac{\mathbf{Q}^2/4 - \mathbf{k}^2 \mp M_{\mathbf{p}}M_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}} - 1 \right], \\
 c &= [n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{q}}] \left[\frac{\mathbf{Q}^2/4 - \mathbf{k}^2 \mp M_{\mathbf{p}}M_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}}E_{\mathbf{q}}} + 1 \right],
 \end{aligned} \tag{44}$$

где $\varepsilon = p_0 - q_0$ — передаваемая энергия; $M_{\mathbf{p}} = M_q(\mathbf{k} + \mathbf{Q}/2)$, $E_{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}^2 + M_q^2(\mathbf{p}))^{1/2}$, где для выбранной нами кинематики $\mathbf{p} = \mathbf{k} + \mathbf{Q}/2$; $n_{\mathbf{p}}$ — число заполнения для квазичастицы с импульсом $\mathbf{k} + \mathbf{Q}/2$, в частности, для нулевой температуры имеем ступеньку Ферми: $n_{\mathbf{p}} = n(E_{\mathbf{p}} - \mu)$, аналогичные обозначения применяются и для квазичастицы с импульсом $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{Q}/2$. $F(\mathbf{k})$, напомним, — формфактор. Первое слагаемое в (44) отвечает вкладу кварка и антикварка. Второе — описывает вклад кварка и дырки. Легко видеть, что в случае модели ККБ, $F(\mathbf{k}) = \delta(\mathbf{k})$, для определения связанных состояний получаются кубические дисперсионные уравнения: $1 - 2G\Pi^{\pi,\sigma}(\varepsilon, \mathbf{Q}) = 0$. На рис. 13, а для примера показаны вычисленные энергии в МэВ π -мезона (штриховая линия) и σ -мезона (сплошная линия) как функция импульса $Q/2$ МэВ при нулевой температуре для газа небольшой барионной плотности, отвечающей импульсу Ферми $P_F \sim 130$ МэВ. Область вырождения на рис. 13 при небольших импульсах кварка обусловлена тем, что, как обсуждалось выше, сфера Ферми заполняется изнутри, и кварки с импульсами меньше P_F не участвуют в формировании динамической массы кварка. В модели НИЛ подобное поведение не наблюдается в силу принятой аппроксимации, поскольку масса кварка не зависит от импульса. На рис. 13, б приведены энергии (МэВ) π -мезона (штриховая линия) и σ -мезона (сплошная линия) как функции барионной плотности ($T = 0$). Точками показана ветвь, отвечающая связанному состоянию кварка и дырки, которая оказывается вырожденной для π - и σ -мезонов. Именно эти ветви и соответствуют третьему дополнительному корню дисперсионного уравнения, о котором упоминалось выше, хотя обычно фигурируют только два корня, см. обсуждение модели НИЛ. В этом примере импульс кварка берется, для определенности, на 50 МэВ больше импульса Ферми, а импульс дырки — на 50 МэВ меньше.

Поляризационный же оператор в модели НИЛ, как это следует из выражения (44), получается при интегрировании по бегущему импульсу кварка \mathbf{k} и представляется в виде суперпозиции ветвей модели ККБ, о чем мы уже

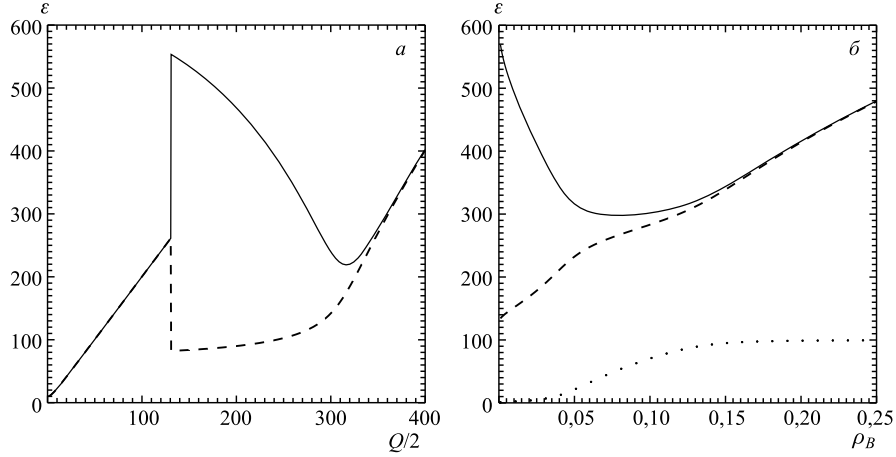


Рис. 13. *а*) Энергии (МэВ) π -мезона (штриховая линия) и σ -мезона (сплошная линия) как функция импульса $Q/2$ МэВ ($T = 0$) для газа небольшой барионной плотности, такой, что $P_F \sim 130$ МэВ. $Q_q = -Q_h = 50$ МэВ. *б*) Энергии (МэВ) π -мезона (штриховая линия) и σ -мезона (сплошная линия) как функция барионной плотности ($T = 0$). Точками показана ветвь, отвечающая связанному состоянию кварка и дырки

упоминали в начале работы. Для выбранной нами кинематики наиболее существенными оказываются вклады, приходящие от слагаемых, обозначенных как a и c в формуле (44). Интегрируя по углу (удобнее выразить ответ, перейдя в несимметричную точку интегрирования, поправки оказываются пренебрежимо малыми, как показывает анализ очень громоздких формул, полученных при интегрировании в симметричной точке), можно получить ($T = 0$):

$$\begin{aligned} \Pi^{\pi,\sigma} &= A^{\pi,\sigma} + B^{\pi,\sigma}, \\ A^{\pi,\sigma} &= \int_{P_F}^{\Lambda} \frac{dk k}{2\pi^2 Q} \left[(E_+ - E_-) \left(1 + \frac{E_+ + E_-}{2E_k} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{Q^2 - \varepsilon^2 + 2(M_q^2 \mp M_q^2)}{2E_k} \ln \left(\frac{\varepsilon + E_k + E_+}{\varepsilon + E_k + E_-} \frac{\varepsilon - E_k - E_+}{\varepsilon - E_k - E_-} \right) \right], \\ B^{\pi,\sigma} &= \int_0^{P_F} \frac{dk k}{2\pi^2 Q} \left[(E_+ - E_-) \left(1 - \frac{E_+ + E_-}{2E_k} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q^2 - \varepsilon^2 + 2(M_q^2 \mp M_q^2)}{2E_k} \ln \left(\frac{\varepsilon - E_k + E_+}{\varepsilon - E_k + E_-} \frac{\varepsilon + E_k - E_+}{\varepsilon + E_k - E_-} \right) \right], \end{aligned}$$

где $E_{\pm} = [(k \pm Q)^2 + M_q^2]^{1/2}$, $E_k = [k^2 + M_q^2]^{1/2}$. При малом импульсе Q компонента B^{σ} трансформируется, как известно, в выражение (34) с пара-

метром $s = E_F \varepsilon / (k_F Q)$. Первая компонента $A^{\pi, \sigma}$ обусловлена вкладом связанной кварк-антикварковой пары, второе слагаемое $B^{\pi, \sigma}$ возникает за счет спаривания расположенных в окрестности сферы Ферми кварка и дырки. Следует отметить, что для рассматриваемого нами кваркового ансамбля свойства среды в основном определяются слагаемым $A^{\pi, \sigma}$, которое ответственно за кварк-антикварковый конденсат, в отличие от того, что имеется в физике конденсированного состояния, где доминирующим, как известно, выступает вклад $B^{\pi, \sigma}$. Поэтому следует критично относиться к результатам, которые получены всецело на основе аналогии с физикой конденсированного состояния. В частности, в этой работе мы в качестве примера подробно проанализировали ситуацию с описанием нулевого звука. Без учета влияния антикварков нулевой звук представлял бы собой затухающие (причем сильно) колебания, описываемые единственным скалярным параметром F_0 . Более внимательный анализ показывает, что в случае модели ККБ, например, наряду со спаренным состоянием кварка и антикварка обнаруживается дополнительная устойчивая ветвь возбуждений кварка и дырки в сфере Ферми.

В случае модели НИЛ, вычисляя интегралы численно, можно наблюдать стандартную картину сближения масс π - и σ -мезонов при росте барионной плотности, которая связана с восстановлением киральной симметрии. Влияние связанной пары кварка и дырки в сфере Ферми оказывается небольшим. Так, для плотностей порядка плотности нормальной ядерной материи закон дисперсии изменяется на несколько десятков МэВ при импульсах кварка и дырки, различающихся более чем на 200 МэВ, но по-прежнему, как и в модели ККБ, отсутствуют затухающие колебания.

Одним из недостатков рассмотренных нами моделей принято считать отсутствие конфайнмента кварков, который понимается как недопустимость одночастичных состояний с нормальным (вещественным) законом дисперсии. Мы видим, что если рассуждать формально, то одна квазичастица действительно может свободно распространяться. Но добавление хотя бы еще одной квазичастицы может существенным образом изменить картину за счет связанного канала. Например, в модели ККБ связанные состояния в скалярном, псевдоскалярном, векторном и аксиал-векторном каналах возникают при любых импульсах квазичастиц (подробности можно найти в [26], см. также приложение В). В частности, энергия связанного состояния, которая получена на основе дисперсионного уравнения $1 - 2G \Pi = 0$, в π - и σ -каналах имеет вид

$$\varepsilon_{\pi, \sigma}^2 = (E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}})^2 - 2G \frac{E_{\mathbf{p}} + E_{\mathbf{q}}}{E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}}} (E_{\mathbf{p}} E_{\mathbf{q}} \pm M_{\mathbf{p}} M_{\mathbf{q}} - \mathbf{p} \mathbf{q})$$

(верхний знак отвечает псевдоскалярному каналу).

Первое слагаемое в этом выражении является энергией движения свободных частиц. Второй член строго положителен при любых импульсах \mathbf{p} и \mathbf{q}

и играет роль энергии связи в каналах π и σ (только в случае $\mathbf{q} = \mathbf{p}$ энергия связи обращается в нуль для скалярного канала). Аналогично можно показать, что кварк и антикварк всегда связаны в векторном и аксиал-векторном каналах, т. е. матрица рассеяния всегда сингулярна, за исключением тензорного канала, где она тривиальна в силу исходно принятого гамильтониана взаимодействия в виде произведения двух цветовых токов. Аналогичные связанные состояния имеются и в дикварковом канале. Как следствие, связанными оказываются состояния с любым числом квазичастиц кварков в оговоренных нами каналах. Подобное же поведение мы отмечаем и в модели НИЛ, где связанные состояния имеются для кварков с импульсами несколько ниже импульса обрезания, т. е. в этом диапазоне матрица рассеяния так же сингулярна, как и в модели ККБ. Создается впечатление, что связанные состояния обусловлены, скорее, корреляциями фермионов, нежели силовым воздействием поля, что привычно из опыта квантовой электродинамики. Именно для того, чтобы понять, что может происходить за импульсом обрезания, приходится обращаться к изучению соответствующих нелокальных моделей.

В приложении Г рассмотрены некоторые аспекты связи затравочных и «наблюдаемых» констант связи, а также другие возможные типы связанных состояний, которые могут оказаться существенными для развиваемой картины в целом.

5. ПОВЕРХНОСТЬ РАЗДЕЛА ГАЗА И ЖИДКОСТИ

Высказанное нами в третьем разделе предположение о смешанной фазе вакуума и барионной материи могло бы получить весомое подтверждение, если бы удалось описать пограничный слой перехода кваркового ансамбля из одного агрегатного состояния в другое. Как было продемонстрировано, удобным параметром для описания однородной фазы является при заданной температуре средний заряд (плотность) ансамбля. По нему можно однозначно восстановить все другие характеристики, например, киральный конденсат, динамическую массу кварка и т. д. Проанализируем частный случай поверхностного слоя при нулевой температуре.

Будем предполагать, что параметры кваркового ансамбля в фазе газа такие же, как и при нулевом заряде, $\rho_g = 0$, т. е. как в вакууме (незначительными отличиями в давлении, химическом потенциале, кварковом конденсате пренебрегаем). Динамическая масса кварка при этом максимальна, и для выбранных нами настроечных параметров модели НИЛ она составляет $M = 335$ МэВ. Из ван-дер-ваальсовой диаграммы можно извлечь, что находящаяся в равновесии с газом вторая фаза (жидкости) характеризуется плотностью $\rho_l = 3 \times 0,185$ заряд/Фм³ (по соображениям, которые будут высказаны ниже, мы скорректируем ее до значения $\rho_l = 3 \times 0,157$ заряд/Фм³). Напомним,

что выделенный здесь фактор 3 связывает плотность кварковой и барионной материй. Масса кварка в этой фазе составляет примерно $M \approx 70$ МэВ. В этом параграфе мы сосредоточимся на описании поверхности двух соприкасающихся полубесконечных слоев, т. е. будем предполагать плоскую симметрию соответствующей одномерной задачи.

Хорошо известно, что адекватное описание неоднородных состояний может быть построено на основе приближения среднего поля [27], конкретно для нашего случая — в виде соответствующего эффективного кварк-мезонного лагранжиана [28] (по типу функционала Гинзбурга–Ландау)

$$\mathcal{L} = -\bar{q}(\hat{\partial} + M)q - \frac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)^2 - U(\sigma) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{m_v^2}{2}V_\mu V_\mu - g_\sigma \bar{q}q\sigma + ig_v \bar{q}\gamma_\mu q V_\mu, \quad (45)$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu, \quad U(\sigma) = \frac{m_\sigma^2}{2} \sigma^2 + \frac{b}{3} \sigma^3 + \frac{c}{4} \sigma^4,$$

σ — скалярное поле; V_μ — поле векторных мезонов; m_σ , m_v — массы скалярного и векторного мезонов; g_σ , g_v — константы кварк-мезонного взаимодействия. Потенциал $U(\sigma)$ содержит нелинейные члены взаимодействия σ -поля вплоть до четвертого порядка. Для простоты мы не включили вклады псевдоскалярных и аксиал-векторных мезонов.

Мезонная составляющая лагранжиана должна, вообще говоря, определяться самосогласованным образом через соответствующие кварковые петли. Мы ограничимся здесь хорошо зарекомендовавшим себя [28] однопетлевым приближением (45), хотя в последнее время достигнут значительный прогресс в изучении неоднородных конденсатов, связанный с использованием мощного аппарата точного интегрирования [29]. Нам представляется практичнее вначале просто подогнать параметры эффективного лагранжиана, руководствуясь имеющейся экспериментальной информацией, или, как в нашем случае, отдав предпочтение прозрачной физической картине. Легко видеть, что в приводимом нами однопетлевым приближении (45) мы по существу получаем модель Валечки [30], но уже в применении к кваркам. Обозначений этой модели мы и будем придерживаться в данном параграфе.

Выражение (45) можно следующим образом интерпретировать в интересующем нас контексте. В определенной степени каждую из фаз можно трактовать по отношению к другой как возбужденное состояние, которое помимо плотности (заряда) описывается некоторым дополнительным набором параметров — мезонными полями, характеризующими степень отклонения от равновесия. Для фазы газа равновесной является большая (максимальная) величина кирального конденсата (при низком барионном заряде Q_0), а

фаза жидкости есть возбужденное состояние. Для фазы жидкости, наоборот, фаза газа представляется как отклонение от состояния равновесия (с большим барионным зарядом, со слабым конденсатом). Вопрос заключается в том, можно ли приемлемым образом настроить параметры эффективного лагранжиана (45) и получить решение, в котором кварковое поле интерполировало бы от квазичастиц в газе (вакууме) к квазичастицам заполненного состояния. Плотность ансамбля заполненных состояний должна при этом в асимптотике выходить на равновесное значение ρ_l , а в газе (вакууме) обращаться в нуль.

Масштаб в задаче задается одной из масс, перечисленных в лагранжиане (45). В нашем случае будем ориентироваться на динамическую массу кварка в вакууме M (токовая масса кварка в этом параграфе самостоятельно фигурировать не будет, поэтому вместо обозначения динамической массы M_q , которое применялось нами выше, здесь будем для простоты записи формул употреблять упрощенное обозначение). Кроме этого в задаче имеются еще четыре независимых параметра, которые для удобства сопоставления в дальнейшем с результатами, полученными для ядерной среды, выберем в форме, характерной для (ядерной) модели Валечки:

$$C_s = g_\sigma \frac{M}{m_\sigma}, \quad C_v = g_v \frac{M}{m_v}, \quad \bar{b} = \frac{b}{g_\sigma^3 M}, \quad \bar{c} = \frac{c}{g_\sigma^4}.$$

Параметризации потенциала σ -поля $U(\sigma)$: $b_\sigma = 1,5 m_\sigma^2 (g_\sigma/M)$, $c_\sigma = 0,5 m_\sigma^2 (g_\sigma/M)^2$, отвечает случай σ -модели. Выбор $b = 0$, $c = 0$ приводит, собственно, к модели Валечки. В применении к ядерной среде параметры b и c , как известно, носят модельный характер, существенно отличающийся от параметров σ -модели, и выбираются путем наилучшего соответствия условию насыщения. В случае кваркового лагранжиана (45), напротив, интуитивно можно ожидать какого-то подобия σ -модели, и поэтому мы введем два безразмерных параметра η , ζ : $b = \eta b_\sigma$, $c = \zeta^2 c_\sigma$, характеризующих возможные отклонения эффективного потенциала. Потенциал скалярного поля представляется при этом в следующем виде:

$$U(\sigma) = \frac{m_\sigma^2}{8} \frac{g_\sigma^2}{M^2} \left(4 \frac{M^2}{g_\sigma^2} + 4 \frac{M}{g_\sigma} \eta \sigma + \zeta^2 \sigma^2 \right) \sigma^2.$$

Мезонные и кварковые поля определяются из решения следующей системы стационарных уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma - m_\sigma^2 \sigma &= b \sigma^2 + c \sigma^3 + g_\sigma \rho_s, \\ \Delta V - m_v^2 V &= -g_v \rho, \\ (\hat{\nabla} + M)q &= (E - g_v V)q, \end{aligned} \quad (46)$$

где $M^* = M + g_\sigma \sigma$ — текущее значение динамической массы кварка; E — его энергия; $V = -iV_0$. Описывающая состояние кваркового ансамбля матрица

плотности при $T = 0$ выражается в виде

$$\xi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}^{P_F} q_{\mathbf{p}}(x) \bar{q}_{\mathbf{p}}(x),$$

где \mathbf{p} — импульс квазичастицы, а импульс Ферми P_F определяется через химический потенциал ансамбля. Стоящие в правых частях уравнений (45) плотности ρ_s, ρ по определению равны

$$\rho_s(x) = \text{Tr} \{ \xi(x), 1 \}, \quad \rho(x) = \text{Tr} \{ \xi(x), \gamma_0 \}.$$

В настоящей работе при описании кварков мы ограничимся приближением Томаса–Ферми, в котором интересующие нас плотности выражаются через некоторый локальный импульс Ферми $P_F(x)$:

$$\begin{aligned} \rho &= \gamma \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}^{P_F} = \frac{\gamma}{6\pi^2} P_F^3, \\ \rho_s &= \gamma \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}^{P_F} \frac{M^*}{E} = \frac{\gamma}{4\pi^2} M^{*2} P_F^2 \left\{ (1 + \lambda^2)^{1/2} - \frac{\lambda^2}{2} \ln \left[\frac{(1 + \lambda^2)^{1/2} + 1}{(1 + \lambda^2)^{1/2} - 1} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

где γ — гамма-фактор кварка, в рассматриваемом случае кварков одного аромата $\gamma = 2N_c$; N_c — число цветов; $E = (\mathbf{p}^2 + M^{*2})^{1/2}$, $\lambda = M^*/P_F$. По условию, химический потенциал ансамбля постоянен, поэтому локальное значение импульса Ферми определяется через текущее значение динамической массы кварка и векторного поля

$$\mu = M = g_v V + (P_F^2 + M^{*2})^{1/2}. \quad (48)$$

Теперь настроим параметры лагранжиана (45). Для асимптотически больших расстояний (в однородной фазе) градиентами скалярного и векторного полей можно пренебречь, и уравнение для скалярного поля системы (46) приводит к первому уравнению, связывающему параметры $C_s, C_v, \bar{b}, \bar{c}$

$$\frac{M^2(M^* - M)}{C_s^2} + \bar{b}M(M^* - M)^2 + \bar{c}(M^* - M)^3 = -\rho_s. \quad (49)$$

Векторное поле на асимптотике выражается через плотность ансамбля $V = C_v^2 \rho / (g_v M^2)$. Из соотношения для химического потенциала (48) получаем второе уравнение

$$M = \frac{C_v^2 \rho}{M^2} + (P_F^2 + M^{*2})^{1/2}. \quad (50)$$

Зная плотность жидкости, из соотношения (47) находим импульс Ферми ($P_F = 346$ МэВ) и, применяя тождества (49), (50), получаем для частного случая $b = 0$, $c = 0$: $C_s^2 = 25,3$, $C_v^2 = -0,471$, т. е. для векторной компоненты имеем небольшую, на фоне коэффициента C_s , но отрицательную величину для C_v^2 , что неприемлемо. Разумным представляется в этом случае вовсе пренебречь вкладом векторного поля и слегка уменьшить динамическую массу кварка M до значения, когда выполняется тождество (50) с положительным C_v^2 или даже с нулевым, например. В фазе газа динамическая масса кварка также может быть скорректирована в сторону увеличения от вакуумного значения. Понятно, что в рассматриваемом случае, с жидкостью плотности $\rho_l = 3 \times 0,185$ заряд/Фм³, динамическая масса кварка должна совпадать или превышать $M = 346$ МэВ в фазе газа. Но в этой работе мы поступим иначе и скорректируем плотность жидкости (как упоминалось в начале параграфа) в сторону уменьшения, до величины $\rho_l = 3 \times 0,157$ заряд/Фм³, вполне приемлемой для плотности нормальной ядерной материи. Оговорим на всякий случай, что этот вариант может быть получен путем иного выбора настроечных параметров модели НИЛ. В этом случае при $M^* = 70$ МэВ и $b = 0$, $c = 0$ получаем $C_s^2 = 28,4$, $C_v^2 = 0,015$, т. е. имеем небольшую, но уже положительную величину коэффициента для векторного поля. Оговорим, что нашей целью здесь является получение оценки эффектов поверхностного натяжения, поэтому мы не стремимся к строгой настройке параметров. Для сравнения приведем коэффициенты модели Валечки: $C_s^2 = 266,9$, $C_v^2 = 145,7$ ($b = 0$, $c = 0$). В литературе представлены также наборы параметров с характерными $C_s^2 = 64$, $C_v^2 \approx 0$ [31], с заметной нелинейностью σ -поля, связанной с коэффициентами b и c . Также обсуждались варианты (формально неустойчивые) с отрицательным c (b). Отметим также, что отношение масс в нашем случае $M/m_\sigma \leq 1$, для модели Валечки $M_n/m_\sigma \geq 1$.

Константу связи скалярного поля зафиксируем стандартным для модели НИЛ соотношением, связывающим массу кварка и константу пионного распада: $g_\sigma = M/f_\pi$ ($g_\sigma = 3,35$), где для определенности положим $f_\pi = 100$ МэВ, однако ничто не мешает выбрать константу связи также в качестве независимого параметра. В результате принятых соглашений масса σ -мезона определяется как $m_\sigma = g_\sigma M/C_s$. Можно действовать и в обратную сторону, фиксируя массу σ -мезона и константу связи g_σ , но, как будет продемонстрировано ниже, и предложенная фиксация приводит к вполне разумному диапазону масс σ -мезона.

В силу малости константы C_v векторное поле будет играть несколько второстепенную роль. Положим массу векторного мезона равной $m_v \approx 740$ МэВ (немного ниже массы ω -мезона), а константу связи векторного поля будем определять через соотношение, аналогичное случаю скалярного поля: $m_v = g_v M/C_v$. Константа связи при этом получается неоправданно малой

по сравнению со значением, характерным для модели НИЛ: $g_v = \sqrt{6}g_\sigma$. Но при тех значениях константы C_v , которые представляют интерес, затруднительно соблюсти разумный баланс, и, для определенности, мы в этой работе сделали выбор в пользу массивного векторного поля. К тому же, напомним, эти параметры понадобятся нам только для оценки величины векторного поля.

Основной интересующей нас характеристикой является коэффициент поверхностного натяжения [31]

$$u_s = 4\pi r_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\mathcal{E}(x) - \frac{\mathcal{E}_l}{\rho_l} \rho(x) \right]. \quad (51)$$

Параметр r_0 появится в следующем параграфе при рассмотрении капли кварковой жидкости. Пока лишь скажем, что для рассматриваемых параметров его значение в кварковой материи при $N_f = 1$ составляет $r_0 = 0,79$ Фм. С учетом фактора $3^{1/3}$, связывающего число барионов и кварков, эта величина ($\tilde{r}_0 = 3^{1/3}0,79 \approx 1,14$ Фм) вполне отвечает значению, характерному для ядерной среды (для модели Валечки): $\tilde{r}_0 = 1,1-1,3$ Фм.

Для рассматриваемого приближения Томаса–Ферми

$$\mathcal{E}(x) = \gamma \int_{P_F(x)} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} [\mathbf{p}^2 + M^*(x)]^{1/2} + \frac{1}{2} g_v \rho(x) V(x) - \frac{1}{2} g_\sigma \rho_s(x) \sigma(x).$$

Приведем для ориентировки некоторые характерные значения параметров для некоторых типичных b и c с $\rho_l = 3 \times 0,157$ заряд/Фм³. В фазе жидкости $M^* = 70$ МэВ ($P_F = 327$ МэВ), $e_l = 310,5$ МэВ, где $e(x) = \mathcal{E}(x)/\rho(x)$ — это удельная плотность энергии, а e_l обозначает удельную плотность энергии в фазе жидкости. Для этого состояния выполнено как соотношение (49), так и (50). Помимо этого состояния таким же свойством обладает еще одно состояние, но уже со стороны больших масс $M^* = 306$ МэВ ($P_F = 135$ МэВ) (аналогичную вырожденность мы отмечали в первом параграфе). Для него $e = 338 \sim e_g$ МэВ, где e_g — удельная плотность энергии в фазе газа. Удельная энергия здесь несколько выше, чем у первого состояния. Стоит также отметить некоторое промежуточное (по импульсу Ферми) состояние, отвечающее точке насыщения, с массой $M^* = 95$ МэВ ($P_F = 291$ МэВ), $e = 306$ МэВ, для которого удельная плотность энергии имеет наименьшее значение. Давление кваркового ансамбля при этом равно нулю. В это состояние система может попасть только при наличии заметного векторного поля. Мы также встречались с проявлением этого состояния в первом параграфе, когда обсуждали точку минимума химического потенциала ($T = 0$) с плотностью, характерной

для нормальной ядерной материи. Для этого состояния, однако, не выполнено тождество (50).

В принципе, два оставшихся параметра η , ζ можно зафиксировать путем перебора вариантов, для которых получается решение системы уравнений (46) со стабильным кинком скалярного поля, который бы описывал переход кварков газовой фазы в фазу жидкости. Но можно задаться вопросом, нельзя ли хотя бы приближенно указать ту область на плоскости η , ζ , где целесообразно искать интересующие нас решения. Оказывается, если при прохождении (по импульсу Ферми) всего диапазона возможных состояний от газа к жидкости (без учета градиентов полей) обнаруживается выигрыш удельной энергии $\mathcal{E} - \mathcal{E}_l \rho / \rho_l \leq 0$, то для этих параметров модельного лагранжиана целесообразно начать поиск интересующих нас решений. На практике работает даже более простое эвристическое правило. При сканировании параметров лагранжиана η , ζ следует сравнить плотность энергии состояния с $P_F \sim 1$ МэВ и плотность энергии соответствующего состояния для жидкости e_l . На рис. 14 изображена граница этой области в виде штриховой кривой. На этом рисунке указана координата c , определяемая соотношением $\zeta = c \eta$, которая параметризует степень искажения лагранжиана σ -поля (не следует путать с коэффициентом c мезонного лагранжиана (45)). Полученная кривая имеет продолжение и выше представленной величины $\eta = 2,5$, но такие значения параметра η представляются уже нереалистичными, и поэтому не показаны на рисунке.

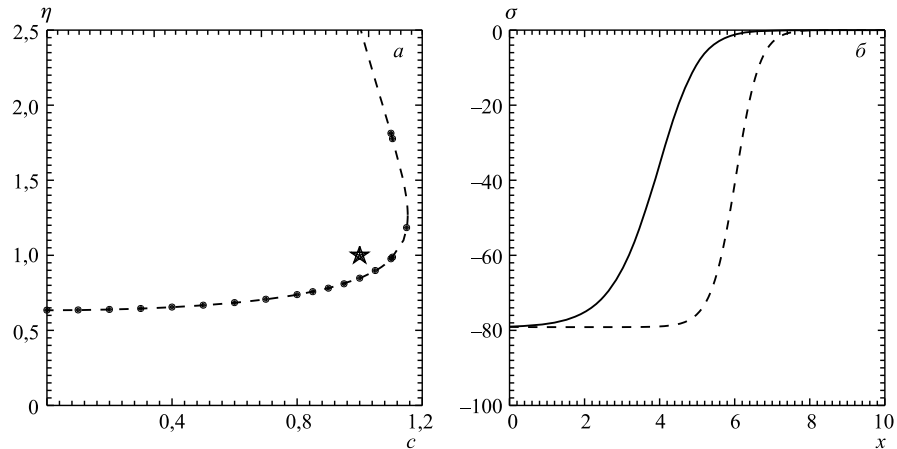


Рис. 14. а) Область, где имеется выигрыш в удельной энергии на плоскости η , c ($\zeta = c \eta$), см. текст. Точками представлены некоторые стабильные кинки. б) Стабильные кинк-решения с $c = 1,1$, для $\eta \approx 0,977$ — сплошная линия ($m_\sigma \approx 468$ МэВ), $\eta \approx 1,813$ — штриховая линия ($m_\sigma \approx 690$ МэВ), x измеряется в Фм, σ — в МэВ

Мы получаем решение системы уравнений (46) численно, методом стрельбы, с использованием схемы Рунге–Кутты, с начальными условиями $\sigma(L) \approx 0$, $\sigma'(L) \approx 0$, которые задаются на достаточно большом расстоянии $L \gg t$, где t — характерная толщина переходного слоя (порядка 2 Фм). Этого простого алгоритма оказывается вполне достаточно, если не принимать во внимание вклад векторного поля, которое можно учесть как малую поправку

$$V(x) = \frac{1}{2m_v} \int_{-L}^L dz e^{-m_v|x-z|} g_v \rho(z),$$

определяя заряд (плотность) ρ непосредственно через скалярное поле. Были получены также решения полной системы уравнений (46) с учетом вклада векторного поля, которые в целом подтвердили справедливость предложенной оценки.

Простым перебором вариантов найдено, что интересующие нас решения расположены почти на границе упомянутой области, где целесообразно проводить поиск интересующих нас решений. Некоторые из них изображены на рис. 14 в виде точек. На рис. 14, б показаны стабильные кинки σ -поля с параметром $c = 1,1$ для двух имеющихся в этом случае решений с $\eta \approx 0,977$ — сплошная линия ($m_\sigma \approx 468$ МэВ), и $\eta \approx 1,813$ — штриховая линия ($m_\sigma \approx 690$ МэВ). Для определенности мы считаем, что газ (вакуум) находится справа. При этом полученному асимптотическому значению σ -поля слева ($\sigma \approx 80$ МэВ) отвечает $M^* = 70$ МэВ. Толщина переходного слоя составляет $t \approx 2$ Фм для решения с $\eta \approx 0,977$, для второго решения — $t \approx 1$ Фм.

Характеризуя весь спектр обнаруженных решений, можно отметить, что встречаются и другие, более жесткие (киральные) кинки, которые отвечают переходу в состояние, в котором динамическая масса кварка изменяет знак на противоположный исходному $M \rightarrow -M$. В частности, отчетливо проявляется кинк с каноническими параметрами: $\eta = 1$, $c = 1$. Это решение отмечено звездой на рис. 14 и отвечает энергии порядка $2m_\pi$. Наиболее заметно представлен обширный класс решений, имеющих метастабильный характер, в котором после некоторой эволюции система достаточно быстро возвращается к стартовым условиям, причем, как правило, σ -поле не развивается настолько, чтобы достичь асимптотического значения, соответствующего динамической массе кварка в жидкости, $M^* = 70$ МэВ. Изменения решения, вызываемые векторным полем, незначительны, поскольку для рассматриваемого варианта, с небольшим C_v , в максимуме оно не превосходит 2 МэВ.

На рис. 15 показан коэффициент поверхностного натяжения u_s (в МэВ) для кривой стабильных кинков с параметром $\eta \leq 1,2$ как функция параметра c (напомним, $\zeta = c \eta$). Масса σ -мезона при $c \approx 0$ составляет $m_\sigma \approx 420$ МэВ,

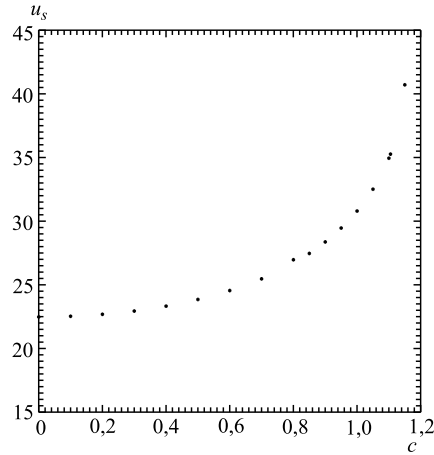


Рис. 15. Коэффициент поверхностного натяжения u_s (в МэВ) для кривой стабильных кинков ($c \eta \leq 1,2$) как функция параметра c ($\zeta = c \eta$)

и плавно растет до значения $m_\sigma \approx 500$ МэВ, при $c \approx 1,16$ — максимальном значении коэффициента c , при котором удается зафиксировать стабильное решение. В частности, $m_\sigma \approx 450$ МэВ при $c = 1$. Для двух представленных на рис. 14 кинк-решений с $c = 1,1$, $\eta \approx 0,977$ и $\eta \approx 1,813$ (эта точка не включена в рис. 15) коэффициент натяжения равен $u_s \approx 35$ МэВ и $u_s \approx 65$ МэВ соответственно. Максимальная величина коэффициента натяжения для ядерной материи не превышает $u_s = 50$ МэВ. Приемлемым и воспроизводимым в рамках ядерной модели Валечки считается значение $u_s \approx 19$ МэВ [31]. Причина несколько завышенного коэффициента поверхностного натяжения в случае кварков видится в различии дефицита массы. В случае ядерной материи он не превосходит $M_n^* \approx 0,5M_n$, более реалистичные значения группируются где-то в районе $M_n^* \approx 0,7M_n$. В случае кваркового ансамбля дефицит массы составляет уже $M^* \approx 0,3M$. Был определен также соответствующий коэффициент сжатия кварковой материи K , который оказался существенно выше ядерного. Достаточно прозрачна аналогия полученных нами в этом параграфе результатов с солитонной моделью мешка [32]. Приведенные нами термодинамические соображения позволили сформулировать адекватные граничные условия для мешка в физическом вакууме и существенно сузить произвол солитонного лагранжиана. Без знания этих граничных условий затруднительно выделить из ряда других солитонных решений те, которые описывают границу раздела двух сред. В частности, это касается также решений, полученных в рамках методов точного интегрирования [29].

6. КАПЛИ КВАРКОВОЙ ЖИДКОСТИ

Настоящий раздел посвящен описанию некоторых свойств капель кварковой жидкости, находящихся в равновесии с вакуумом. Под каплей понимается сферически-симметричное решение системы уравнений (46), $\sigma(r)$, $V(r)$, с естественными граничными условиями в начале координат: $\sigma'(0) = 0$, $V'(0) = 0$, где переменные со штрихом обозначают первые производные по r с быстрым убыванием полей на пространственной бесконечности: $\sigma \rightarrow 0$, $V \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$.

В силу понятных причин непосредственное сопоставление капель кварковой жидкости с экспериментом невозможно, в отличие от того, что имеется в аналогичных моделях для ядерной среды, где настройка параметров модели осуществляется путем полноценного фитирования экспериментальных данных. Целесообразным в нашей ситуации представляется выделить такие параметры, которые бы наиболее правдоподобно претендовали на роль физических наблюдаемых. В качестве примера укажем барионное число, которое с пересчетным фактором 3 есть полное число кварков в ансамбле, хотя мы и не знаем в деталях, как осуществляется эта редукция. Кроме этого разумно выделить плотность ансамбля кварков $\rho(r)$, а также средний размер капли R_0 и толщину поверхностного слоя t .

Выше мы отмечали, что в силу малости на фоне C_s коэффициента C_v вкладом векторного поля можно, в принципе, пренебречь. Хотя такое приближение едва ли уместно в случае ансамбля конечных размеров, но мы будем придерживаться именно его, и положим тождественно $g_v = 0$, $V = 0$. Это кардинально упрощает численный счет и отчасти оправдано тем, что у нас пока нет надежного, идущего из эксперимента указания о масштабе вклада векторного поля, и, как мы отметили выше, его пока невозможно извлечь путем прямого фитирования данных.

На рис. 16 представлен ряд решений системы уравнений (46) для случая $N_f = 1$. На рис. 16, *a* приведены решения для σ -поля (МэВ) ($g_\sigma \sigma$), на рис. 16, *b* даны соответствующие распределения плотности ансамбля ρ (заряд/Фм³). Параметры C_s , b , c определяются тем же алгоритмом, что и в предыдущем параграфе, путем наложения двух условий (49), (50). При этом на пространственной бесконечности фиксируется химический потенциал кварков $M = 335$ МэВ ($\sigma \rightarrow 0$), а заполненные состояния (жидкости) характеризуются параметрами $M^* = 70$ МэВ, $\rho_0 = \rho_l = 3 \times 0,157$ заряд/Фм³. Затем находятся интересующие нас решения при фиксированных коэффициентах η и ζ . При этом функции $\sigma(r)$ и $\rho(r)$ в нуле не привязаны жестко к значениям, характерным для заполненного состояния, и определяются в ходе решения граничной задачи системы уравнений (46). В частности, решения на рис. 16 получены для бегущего коэффициента η при $\zeta = \eta$. Более физическим параметром вместо η представляется число кварков в капле N_q , которое

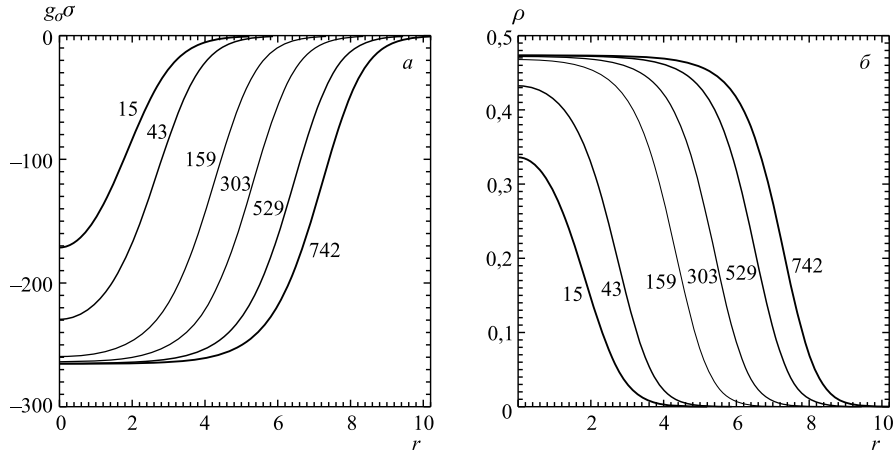


Рис. 16. *а*) σ -поле (МэВ) ($g_\sigma \sigma$) как функция расстояния r (Фм) для ряда решений системы уравнений (46), характеризуемых полным числом кварков N_q , которое указано слева от кривой. *б*) Распределение плотности кварков ρ (заряд/Фм³) для соответствующих решений, приведенных на рис. *а*

и приводится слева от каждой кривой. Кроме указанных параметров η и ζ можно также варьировать \tilde{M} , ρ_0 , f_π .

Характеризуя весь спектр полученных при таком сканировании решений, в целом можно видеть повторяющуюся в некотором масштабе картину кинков-капель, которые удобно параметризовать числом кварков в капле N_q и плотностью ρ_0 (понятно, что указанные характеристики определяются в конце вычислений). Признаком, по которому можно выделить эти решения, связан с удельной энергией капли, и мы обсудим его несколько ниже.

В табл. 1 приведены данные фитирования плотности-решения $\rho(r)$ распределением Ферми

$$\rho_F(r) = \frac{\tilde{\rho}_0}{1 + e^{(R_0 - r)/b}}, \quad (52)$$

где $\tilde{\rho}_0$ — плотность в центре; R_0 — средний размер капли. Через параметр b определяется толщина поверхностного слоя $t = 4 \ln(3)b$. Коэффициент r_0 входит в определение поверхностного натяжения (51), $R_0 = r_0 N_q^{1/3}$. Приведены также характерные значения массы σ -мезона и коэффициент η , при котором получены все эти величины.

Из представленного рисунка и из данных таблицы можно заключить, что распределения плотности ансамбля при $N_q \geq 50$ вполне соответствуют данным, характерным для ядерной среды. Похожи толщины поверхностного

Таблица 1. Фитирование решений распределением Ферми ($N_f = 1$)

N_q	$\tilde{\rho}_0$, заряд/Фм ³	R_0 , Фм	b , Фм ⁻¹	t , Фм	r_0 , Фм	m_σ , МэВ	η
15	0,34	1,84	0,509	2,24	0,74	351	0,65
43	0,43	2,19	0,5196	2,28	0,75	384	0,73
159	0,46	4,19	0,52	2,29	0,77	409	0,78
303	0,47	5,23	0,52	2,29	0,78	417	0,795
529	0,47	6,37	0,517	2,27	0,79	423	0,805
742	0,47	7,15	0,516	2,27	0,79	426	0,81

слоя, одинакова связь среднего размера и числа частиц, которая дается коэффициентом r_0 (\tilde{r}_0 , с учетом фактора $3^{1/3}$). Также совпадают плотности, если принять во внимание фактор 3, связывающий плотности барионного и кваркового ансамблей. Разумными представляются значения массы σ -мезона.

Аналогичные данные были получены для случая $N_f = 2$ ($\gamma = 2N_f N_c = 12$) при условии равенства динамических масс компонент флейворного мультиплета. Решения для σ -поля и распределение плотности в целом повторяют рис. 16, и поэтому мы приведем сразу же данные фитирования результатов распределением Ферми в табл. 2.

Таблица 2. Фитирование решений распределением Ферми ($N_f = 2$)

N_q	$\tilde{\rho}_0$, заряд/Фм ³	R_0 , Фм	b , Фм ⁻¹	t , Фм	r_0 , Фм	m_σ , МэВ	η
18	0,81	1,56	0,37	1,63	0,57	524	0,7
46	0,9	2,14	0,37	1,63	0,6	557	0,75
169	0,93	3,43	0,36	1,6	0,62	586	0,79
278	0,94	4,08	0,36	1,6	0,62	594	0,8
525	0,94	5,04	0,36	1,6	0,62	603	0,81
776	0,94	5,76	0,36	1,6	0,63	607	0,815

Для выбранных нами настроечных параметров характерная плотность ансамбля примерно в два раза превышает плотность ядерной среды (с учетом фактора 3). Характерные значения масс σ -мезона выше, чем в случае $N_f = 1$, и, как следствие, толщины поверхностного слоя примерно в 1,4 меньше. Несколько заниженным оказывается и коэффициент, связывающий средний размер и число барионов (кварков) $\tilde{r}_0 \sim 0,8$. Путем уменьшения массы σ -мезона можно скорректировать толщину поверхностного слоя, а также параметр \tilde{r}_0 в сторону увеличения, но плотность ансамбля при этом все равно останется завышенной.

На рис. 17 представлена удельная энергия связи ансамбля, которая определяется по формуле, аналогичной формуле для коэффициента поверхностного натяжения (51), где интегрирование проводится по занимаемому каплей объему. При этом удельная энергия сопоставляется (нормируется) на

энергию, присущую ансамблю на пространственной бесконечности, т. е. в вакууме. На рисунке представлены несколько кривых, причем расположенные в верхней части рисунка кривые относятся к случаю $N_f = 1$. Сплошная кривая получена при сканировании по параметру η и отвечает данным, представленным в табл. 1. Штриховая кривая получена для фиксированного $\eta = 0,4$, но сканирование проводится по параметру M . Видно, что если представить данные для удельной энергии как функцию числа кварков N_q , то интересующие нас решения сосредоточены в окрестности кривой, где обеспечивается максимальная энергия связи $|e_b|$. Аналогичное сканирование решений можно провести и по параметру центральной плотности $\rho_0 \sim 2\rho_l$. Соответствующие данные приведены в виде точек с некоторыми M и ρ_0 . Важно отметить, что при сканировании по каждой из переменных наблюдается некоторый режим насыщения,

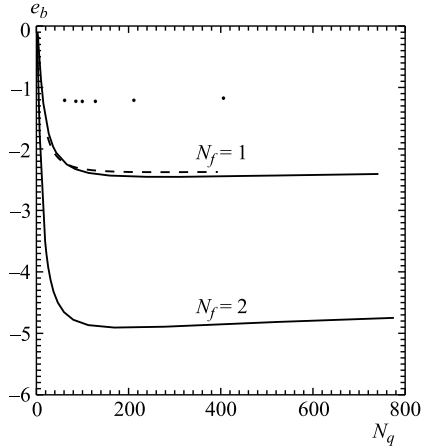


Рис. 17. Удельная энергия связи для $N_f = 1$ и $N_f = 2$ в МэВ как функция числа кварков N_q

связанный с тем, что, когда число кварков в капле составляет $N_q \sim 200-250$, наблюдается минимум удельной энергии связи e_b . Аналогичная кривая приведена для случая $N_f = 2$. Приведенные зависимости удельной энергии связи как функции числа кварков качественно вполне удовлетворяют экспериментальным данным, а с учетом фактора 3 (энергия, необходимая для удаления одного бариона) имеется даже определенное количественное согласие. Интересно также отметить наличие решений системы уравнений (46), для которых удельная энергия оказывается положительной. Например, в случае $N_f = 2$ такие метастабильные решения имеются при достаточно большом η с параметром центральной плотности $\rho_0 \sim \rho_l = 0,157$ заряд/ $\Phi\text{м}^3$.

Итак, если бы кварковые капли существовали в природе, то по своим свойствам они напоминали бы ядра. Так, капли, содержащие свыше примерно 45 кварков, характеризуются той же плотностью, что и ядро, той же толщиной поверхностного слоя и тем же размером (при $N_f = 1$, для $N_f = 2$ плотность примерно в два раза выше нормальной ядерной). Интересно отметить, что наилучшее согласие данных с ядром получается, если число ароматов положить равным единице: $N_f = 1$. Не исключено, что это описание ядер действительно адекватно, если возможна его трактовка как некоторого среднего по кварковому мультиплету. Понятен физический смысл лагран-

жиана (45) и найденных решений. Они описывают баланс прихода и ухода токовых кварков из одной фазы в другую, а также обратный процесс. В то же время квазичастицы, скажем, жидкости удерживаются самосогласованным потенциалом скалярного поля. Соответственно, квазичастицы вакуума не проникают в жидкость. Похожим образом молекулы воды свободно испаряются с поверхности капли, но действует и обратный процесс их конденсации. В итоге капля в смешанной фазе может оставаться стабильной благодаря вечному динамическому равновесию. Аналогично в физике конденсированного состояния мы понимаем, что квазичастицы электронов, формирующих связанное сверхпроводящее состояние, на элементарном уровне представляют собой точечные частицы с массой примерно 0,5 МэВ, несущие единичный заряд. До тех пор, пока не разрушено сверхпроводящее состояние, конденсат динамически стабилен. Понятно, что в таком сценарии конфайнмент кварков следует трактовать несколько иначе, чем это предписывается линейным удерживающим потенциалом. У модели НИЛ имеется еще одно интересное возможное толкование. Характерное число формирующей квазичастицы токовых кварков примерно одинаково для вакуума и для заполненных состояний. Оно определяется в основном импульсом обрезания Λ . Число это непосредственно не измеримо. Однако в этом динамическом смысле вакуум так же плотен, как и барионная материя, а наше восприятие только барионного заряда как плотности материи может оказаться всего лишь некоторой иллюзией, связанной с измеримостью величины заряда только одной из фаз.

Для описания капель с небольшим числом кварков следует выйти за рамки приближения Томаса–Ферми. Одним из сигналов необходимости этого служит неадекватное поведение плотности капли. С уменьшением числа кварков расчетная плотность падает, тогда как наблюдения показывают, что в ядерной материи плотность существенно увеличивается. Плотность ядер гелия, например, в два с половиной раза выше плотности нормальной ядерной материи. Плотность протона (нейтрона) более чем в десять раз превышает* плотность нормальной ядерной материи. Мы уже отмечали, что интересующие нас решения типа кинка сосредоточены в окрестности кирального солитона. Для заполненного состояния уменьшается энергетический барьер, который отделяет развернутую на 180° киральную фазу (для нее динамическая масса кварка формально отрицательна). Происходит это за счет частичного восстановления киральной симметрии. Оказывается, в случае малого числа кварков можно получить усиление поверхностного натяжения, если

*Задним числом приходится удивляться, что восстановление киральной инвариантности в этом случае надеялись наблюдать в экспериментах по столкновению тяжелых ионов, где в самых реалистических сценариях гидродинамические расчеты оценивают максимальную плотность среды не выше 4–6 нормальных ядерных плотностей.

как бы соединить два кинка в один киральный солитон (совершив попутно киральный поворот). Поверхностное натяжение при этом может более чем удвоиться, т. е. оказаться больше 100 МэВ. Одно из наиболее продвинутых вычислений с малым числом кварков, которое выходит за рамки приближения Томаса–Ферми (с дополнительным вкладом псевдоскалярного и аксиал-векторного полей), было проделано в работе [33]. Показано, что ценой σ -мезона с большой массой порядка 900 МэВ можно добиться приемлемого описания нуклона и δ -изобары. Возможно, что дополнительный учет дикваркового спаривания может дать и другое описание, уже с умеренной массой σ -мезона, но и использованное значение вполне вписывается в складывающуюся на сегодня ситуацию с σ -мезоном. (Большое затравочное значение массы σ -мезона около 900 МэВ за счет «киральной тени» фона может превратиться в обсуждаемые экспериментальные ~ 430 МэВ, подробнее см. [34].) Полученные в цитированной работе [33] солитонные решения как раз и можно интерпретировать как слияние двух кинков, в каждом из которых как бы происходит восстановление киральной симметрии (скалярное поле обращается в нуль на расстоянии примерно 0,5 Фм от центра капли). Одна ветвь описывает решение с положительной динамической массой кварка, другая — отвечает состоянию с отрицательной массой. Следует также отметить, что для капли в трехмерной геометрии вклад псевдоскалярного поля возникает с необходимостью как фаза кирального поворота при переходе от положительной массы кварка к отрицательной массе. По-видимому, в силу этой киральной неустойчивости выгоднее образовывать кластеры капель вместо равномерного распределения квазичастиц кварков по всему объему капли (ядра). Такая трактовка фазовой диаграммы сильновзаимодействующей материи, кажется, могла бы лечь в основу сценария объяснения стабильности барионной материи.

В заключение этого раздела еще раз отметим, что полученные результаты дают нам основание высказать гипотезу, что фазовый переход (частичного) восстановления киральной инвариантности уже может быть реализован в природе в виде некоторой смешанной фазы (газа и жидкости) физического вакуума и барионной (кварковой) материи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе мы дали описание квантовых жидкостей (ферми-жидкости Ландау), построенных на основе кварковых моделей с четырехфермионным взаимодействием. Это рассмотрение базируется на обнаруженной в работах [18] тождественности результатов, которые получаются на основе одевающего преобразования Боголюбова и приближения среднего поля. Мы продемонстрировали, что средняя энергия ансамбля выступает в качестве функционала энергии теории Ландау. Было показано, что в широком диапазоне

интересных для приложений потенциалов ожидается существенно одинаковое поведение квантовых жидкостей, и были получены коридоры оценок некоторых их свойств. Сравнение существенно различных по смыслу моделей НИЛ и модели ККБ демонстрирует, что фактически свойства квантовых жидкостей не зависят от вида формфактора (от естественной длины взаимодействия), а определяются в основном величиной константы взаимодействия. Было показано, что общим характерным свойством ансамблей является наличие вырожденных с вакуумом по химическому потенциалу и по давлению заполненных состояний. На этой основе были рассмотрены неоднородные состояния, которые позволили описать переходный слой и оценить поверхностное натяжение, а также изучить некоторые свойства капель кварковой жидкости. Отмечается, что в случае малого числа кварков в капле, по-видимому, проявляется неустойчивость, связанная с понижением энергетического барьера, отделяющего киральные фазы. Эта неустойчивость выражается в слиянии двух кинков в один киральный солитон. Обсуждалась идея динамического равновесия смешанной фазы барионной материи и вакуума как возможный сценарий объяснения стабильности барионной материи.

Ряд вопросов рассмотрен на примере модели ККБ и вынесен в приложения. В частности, в приложении А рассматриваются некоторые аспекты цветовой сверхпроводимости. Показано, что формирование дикваркового вклада происходит задолго до достижения критической области химических потенциалов, где обнаруживается качественная перестройка решений уравнений самосогласованности и доминирующим оказывается дикварковый конденсат. Интересно также отметить, что по физическому смыслу дикварковая конденсация представляет собой такой же динамический процесс, что и нарушение (восстановление) киральной симметрии, который отличается лишь каналом взаимодействия, причем конденсация непрерывным образом зависит от химического потенциала.

В приложении Б изучается предложенное недавно новое термодинамическое состояние — фермионный конденсат. Рассмотренные нами на примере модели ККБ состояния можно интерпретировать как нетривиальные продолжения стандартного заполнения сферы Ферми на случай, когда химический потенциал кварка оказывается меньше динамической массы кварка. Рассмотрены некоторые вопросы термодинамического описания кваркового ансамбля с фермионным конденсатом. Продемонстрировано, что на S, N плоскости (S — плотность энтропии ансамбля, N — его плотность заряда) состояния ансамбля с фермионным конденсатом при абсолютном нуле температуры могут занимать полуплоскость, ограниченную максимально достижимой плотностью энтропии $S < S_c$, что является еще одной иллюстрацией нарушения теоремы Нернста, которое теоретически предсказывалось для случая конденсированных сред. Показано, что при малой плотности энтропии $S \ll S_c$ плотность энергии ансамбля меняется скачком при прохождении некоторой пороговой

плотности ансамбля. Рассмотрены некоторые аспекты фермионной конденсации при конечных температурах. Отмечено, что помимо состояний, которые являются непрерывным (по температуре) продолжением решений, полученных при абсолютном нуле, возможны необычные состояния с отрицательной энергией кварка, что формально отвечает связанным состояниям. Эти решения систем термодинамических уравнений отличаются от стандартных большой плотностью ансамбля, которая обусловлена существенным вкладом антикварков.

В приложении В обсуждается ряд вопросов, относящихся к описанию связанных состояний модели ККБ. Продемонстрировано, что в скалярном, псевдоскалярном, векторном и аксиал-векторном каналах связанные состояния появляются для любых импульсов кварка и антикварка. Тем самым матрица рассеяния всегда сингулярна, за исключением тензорного канала, где она тривиальна. Аналогичное положение имеет место и для дикваркового взаимодействия. Рассмотрено влияние мезонных полей на закон дисперсии квазичастиц кварков. Показано, что учет связанного состояния в дикварковом канале может существенным образом изменить закон дисперсии. В целом можно сказать, что полученные результаты кажутся достаточно убедительными, чтобы надеяться, что развитая модель могла бы служить разумной моделью адронных резонансов.

В приложении Г проводится анализ связи между затравочной и эффективной константами взаимодействия. Отмечено, что применение простой вычислительной процедуры приводит к конечному результату для наблюдаемой константы связи как функции передаваемой энергии. Как следствие, удается обнаружить как нули наблюдаемого заряда, в окрестности которых применима теория возмущений, так и полюсы, отвечающие связанным состояниям. Продемонстрировано, что в рассматриваемой теоретико-полевой модели ККБ возможно проследить превращение резонанса в связанное состояние как функцию токовой массы кварка.

Работа выполнена при финансовой поддержке проекта Отделения физики и астрономии НАН Украины.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Здесь мы детально проанализируем приближение среднего поля для модели ККБ. Представим плотность лагранжиана в виде

$$\mathcal{L} = \bar{q} (i\gamma_\mu \partial_\mu + \hat{\mu} - m) q + G j_\mu^a j_\mu^{t a}, \quad (53)$$

который отличается от выражения (1) дополнительным слагаемым с химическим потенциалом кварков $\hat{\mu} = \mu\gamma_0$, удобным для работы с функцией Грина.

Безусловно, в нем следует подразумевать интегрирование по координате y , а также соответствующий формфактор, которые мы опустили для сокращения записи. Понятно, что они легко восстанавливаются по аналогии, например, с выражениями (14), (20). Напомним, что переменные со штрихом относятся к точке y . Используя известные выражения для генераторов цветовой группы $SU(3)$ [35]

$$\lambda_j^i \lambda_l^k = 2 \delta_l^i \delta_j^k - \frac{2}{3} \delta_j^i \delta_l^k$$

и тождество

$$\varepsilon^{\rho ik} \varepsilon_{\rho jl} = \delta_j^i \delta_l^k - \delta_l^i \delta_j^k$$

(где ε — полностью антисимметричный по индексам единичный тензор), преобразуем его, выделяя дикварковый канал [36]

$$\lambda_j^i \lambda_l^k = \left(\alpha - \frac{1}{6} \right) \delta_j^i \delta_l^k + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \delta_l^i \delta_j^k - \alpha \varepsilon_{\rho ik} \varepsilon_{\rho jl}, \quad (54)$$

где α — произвольное число. Воспользуемся далее для первого слагаемого в (54) тождеством Фирца для цветových матриц группы $SU(3)$:

$$\delta_j^i \delta_l^k = \frac{1}{3} \delta_l^i \delta_j^k + \frac{1}{2} \lambda_l^i \lambda_j^k,$$

и трансформируем член взаимодействия к виду

$$\lambda_j^i \lambda_l^k = \frac{8}{3} \left(\frac{2}{3} - \alpha \right) \delta_l^i \delta_j^k + 2 \left(\alpha - \frac{1}{6} \right) \lambda_l^i \lambda_j^k - 4\alpha \varepsilon^{\rho ik} \varepsilon_{\rho jl}. \quad (55)$$

Первое слагаемое отвечает синглетному каналу, второе слагаемое должно быть использовано при работе в октетном канале, третье соответствует дикварковому каналу. Для определенности, чтобы можно было также оценить влияние октетного канала, мы положим параметр $\alpha = 1/4$, и тогда

$$\lambda_j^i \lambda_l^k = \frac{10}{9} \delta_l^i \delta_j^k + \frac{1}{6} \lambda_l^i \lambda_j^k - \varepsilon^{\rho ik} \varepsilon_{\rho jl}. \quad (56)$$

Аналогичным образом для γ -матриц имеем

$$\gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\gamma\delta}^\mu = F^A \gamma_{\alpha\delta}^A \gamma_{\gamma\beta}^A, \quad \gamma_{\alpha\beta}^\mu \gamma_{\delta\gamma}^{\mu T} = -F^A \gamma_{\alpha\delta}^A C_{s\gamma} \cdot C_{\delta r} \gamma_{r\beta}^A,$$

где γ^A относится к каналам 1, $i\gamma_5$, γ^μ , $\gamma^\mu \gamma^5$, $F^A = 1, 1, 1/2, 1/2$ соответственно, $C = \gamma^2 \gamma^0$ — матрица зарядового сопряжения; γ^T обозначает транспонированную матрицу. В итоге член взаимодействия может быть приведен к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{int}} = GF^A \left(\frac{5}{18} \bar{q} \gamma^A q' \cdot \bar{q}' \gamma^A q + \frac{1}{6} \bar{q} \gamma^A \frac{\lambda}{2} q' \cdot \bar{q}' \gamma^A \frac{\lambda}{2} q + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \bar{q} \varepsilon^\rho \gamma^A C \bar{q}'^T \cdot q'^T \varepsilon^\rho \gamma^A C q \right). \end{aligned}$$

В этом выражении выделены бикварковые блоки со свернутыми цветовыми и спиновыми индексами; ε^ρ обозначает единичный антисимметричный тензор с опущенными цветовыми индексами, которые действуют на поля кварков. Определим далее удобные для записи дикваркового канала переменные:

$$q_c = C\bar{q}^T, \quad \bar{q}_c = q^T C. \quad (57)$$

При этом справедливы тождества

$$\begin{aligned} \bar{q}q &= \bar{q}_c q_c, \quad \bar{q}\gamma^\mu q = -\bar{q}_c \gamma^\mu q_c, \\ \bar{q}\gamma^\mu \partial_\mu q &= -\bar{q}_c \gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu q_c = \bar{q}_c \gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu q_c. \end{aligned} \quad (58)$$

Введем дублеты кварковых полей $\bar{Q} = (\bar{q}, \bar{q}_c)$, $Q = \begin{pmatrix} q \\ q_c \end{pmatrix}$, и, пользуясь соотношениями (58), плотность лагранжиана (53) перепишем в новых переменных симметричным образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \bar{Q} [(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\sigma_0 + \hat{\mu}\sigma_3] Q + \\ &+ GF^A \left(\frac{5}{72} \bar{Q}\gamma^A \sigma_0 Q' \cdot \bar{Q}'\gamma^A \sigma_0 Q + \frac{1}{24} \bar{Q}\gamma^A \frac{\lambda}{2} \sigma_0 Q' \cdot \bar{Q}'\gamma^A \frac{\lambda}{2} \sigma_0 Q + \right. \\ &\left. + \frac{1}{16} \bar{Q}\varepsilon^\rho \gamma^A C \sigma_1 \bar{Q}'^T \cdot Q'^T \varepsilon^\rho \gamma^A C \sigma_1 Q \right), \end{aligned} \quad (59)$$

где матрицы σ действуют в пространстве переменных \bar{Q} , Q , а σ_0 — единичная матрица; σ_i — матрицы Паули. Приближение среднего поля предполагает выделение нетривиальных вакуумных средних и формулировку соответствующих условий самосогласованности. Рассмотрим несколько частных примеров сначала для нормальных условий ($T = 0$, $\mu = 0$), не прибегая, как это обычно делается, к приближениям, связанным с выделением доминирующего взаимодействия, и постараемся учесть вклад всех каналов точно. В полном объеме, как будет видно из дальнейшего, проделать все вычисления достаточно затруднительно, но путем перебора каналов можно будет охватить почти всю совокупность возможностей.

ПА1. Среднее в скалярном канале. Сначала для последовательности воспроизведем уже известный результат для динамической массы кварка. Если нетривиальное среднее генерируется в скалярном канале

$$\mathcal{L}_{\text{int}} \simeq 2G \frac{5}{18} \bar{q}q' \langle \text{Tr } \bar{q}'q \rangle = -\frac{5}{18} G \bar{q}q' \text{Tr } \{iS\}, \quad (60)$$

то, используя функцию Грина S , где $S^{-1} = \hat{p} - M_q$, для модели ККБ получаем

$$M = \frac{5}{9} G \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\hat{p} - M_q} \right\} = \frac{10}{3} G \frac{M_q}{E_p}, \quad (61)$$

где, как и прежде, $M_q = m + M$, $E_p = (\mathbf{p}^2 + M_q^2)^{1/2}$. Здесь взятие следа подразумевает также интегрирование по $dp_0 i/(2\pi)$. Полученное выражение совпадает с формулой (23). Для простоты записи опущены цветные множители $5/3$ в константе связи G в (23) и в ряде других выражений.

П.А.2. Скалярный и псевдоскалярный каналы. Если нетривиальные вклады возникают в скалярном и псевдоскалярном каналах

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}} &\simeq 2G \frac{5}{18} \bar{q}q' \langle \text{Tr} \bar{q}'q \rangle + 2G \frac{5}{18} G \bar{q}i\gamma^5 q' \langle \text{Tr} \bar{q}'i\gamma^5 q \rangle = \\ &= -\frac{5}{18} G \bar{q}q' \text{Tr} \{iS\} - \frac{5}{18} G \bar{q}i\gamma^5 q' \text{Tr} \{i\gamma^5 iS\},\end{aligned}$$

то функция Грина определяется из соотношения

$$S^{-1} = \hat{p} - M_q - i\gamma^5 C_q.$$

В этом случае условия самосогласованности принимают вид

$$\begin{aligned}M &= \frac{5}{9} G \text{Tr} \left\{ \frac{1}{\hat{p} - M_q - i\gamma^5 C_q} \right\} = \frac{10}{3} G \frac{M_q}{E_p}, \\ C &= \frac{5}{9} G \text{Tr} \left\{ \frac{i\gamma^5}{\hat{p} - M_q - i\gamma^5 C_q} \right\} = \frac{10}{3} G \frac{C_q}{E_p},\end{aligned}\tag{62}$$

где $C_q = c + C$, $E_p = (\mathbf{p}^2 + M_q^2 + C_q^2)^{1/2}$, а c — затравочная («токовая») «масса» в псевдоскалярном канале. При $c \equiv 0$ $C = 0$, поскольку в общем случае невозможно удовлетворить обоим условиям (62) для динамических масс M , C . Подчеркнем, что при $c \equiv 0$, $m \equiv 0$ оказывается невозможно определить фазу динамической массы. Однако если применить процедуру квазисредних Боголюбова в виде $m \rightarrow 0$, $c \equiv 0$, то фаза восстанавливается однозначно. Если затравочную псевдоскалярную массу c положить порядка токовой массы кварка m , то индуцируемая масса C отвечает стандартным значениям порядка индуцированной массы кварка M .

П.А.3. Скаляр и октетный канал. В этом случае генерирующими являются следующие средние:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}} &\simeq 2G \frac{5}{18} \bar{q}q' \langle \text{Tr} \bar{q}'q \rangle + 2G \frac{1}{6} \bar{q} \frac{\lambda}{2} q' \left\langle \text{Tr} \bar{q}' \frac{\lambda}{2} q \right\rangle = \\ &= -\frac{5}{9} G \bar{q}q' \text{Tr} \{iS\} - \frac{1}{12} G \bar{q} \lambda q' \text{Tr} \{\lambda iS\}.\end{aligned}$$

Функцию Грина находим из соотношения

$$S^{-1} = \hat{p} - M_q - \lambda \mathbf{O}_q.$$

В векторе \mathbf{O}_q будем для простоты полагать, что задействованы только компоненты «изотриплета» λ_i , $i = 1, 2, 3$. В этом случае функцию Грина можно представить в виде

$$S = A + \mathbf{B}\boldsymbol{\lambda},$$

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\hat{p} - M_q + O_q} + \frac{1}{\hat{p} + M_q + O_q} \right\},$$

$$\mathbf{B} = -\frac{\mathbf{O}_q}{O_q} \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\hat{p} - M_q + O_q} - \frac{1}{\hat{p} + M_q + O_q} \right\},$$

$O_q = |\mathbf{O}_q|$. Откуда можно получить условия самосогласованности

$$M = \frac{5}{9} G \operatorname{Tr} \frac{1}{2} \{A\},$$

$$O_i = \frac{1}{12} G \operatorname{Tr} \{\lambda_i(\mathbf{B}\boldsymbol{\lambda})\}.$$

Окончательно имеем

$$M = \frac{10}{3} G \frac{1}{2} \left\{ \frac{M^+}{E_{\mathbf{p}}^+} + \frac{M^-}{E_{\mathbf{p}}^-} \right\},$$

$$O = G \frac{1}{2} \left\{ \frac{M^+}{E_{\mathbf{p}}^+} - \frac{M^-}{E_{\mathbf{p}}^-} \right\},$$
(63)

где $M_{\pm} = M_q \pm O_q$, $\mathbf{O}_q = \mathbf{o} + \mathbf{O}$ (O — проекция вектора \mathbf{O} на некоторое выделенное направление), $E_{\mathbf{p}}^{\pm} = (\mathbf{p}^2 + M_{\pm}^2)^{1/2}$. Если «токовое» значение вектора \mathbf{o} равно нулю, то обнаруживается тривиальное решение с нулевым динамическим вектором \mathbf{O} . При этом $M_q^+ = M_q^-$. Незначительная примесь октетного канала, $|\mathbf{o}| \ll m$, приводит к небольшим поправкам для динамической массы кварка.

П.А4. Дикварковая конденсация (цветовая сверхпроводимость) $\mu \neq 0$, $T = 0$. В этом случае функцию Грина получаем из соотношения

$$S^{-1} = (\hat{p} - m)\sigma_0 + \hat{\mu}\sigma_3 - M^A\gamma^A - \mathbf{O}^A\gamma^A\boldsymbol{\lambda}\sigma_0 - \Delta_q^{\rho A}\varepsilon^{\rho A}\sigma_1.$$

Ограничимся частным случаем скалярных кирального и дикваркового конденсатов: $\gamma^A = 1$, $|\mathbf{O}| = 0$. Для нахождения обратной матрицы S применим формулы Фробениуса для блочных матриц

$$S^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} A & B \\ C & D \end{array} \right\|, \quad S = \left\| \begin{array}{cc} K^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{array} \right\|,$$

где $H = D - CA^{-1}B$, $K = A - BD^{-1}C$. Конкретно в рассматриваемом нами случае

$$S^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} \hat{p}_+ - M_q & \Delta_q \\ \Delta_q & \hat{p}_+ - M_q \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} a & \Delta_q \\ \Delta_q & d \end{array} \right\|,$$

где $\hat{p}_\pm = \hat{p} \pm \hat{\mu}$, $a = \hat{p}_+ - M_q$, $d = \hat{p}_- - M_q$, $\Delta_q = \varepsilon^p \Delta_q^p$. Подчеркнем, что аналогично динамической массе кварка дикварковый вклад может, в принципе, содержать затравочное слагаемое Δ_0 , $\Delta_q = \Delta_0 + \Delta$. Можно получить

$$(ad - \Delta_q^2)^{-1} = \frac{1}{Z}(\hat{p}_- \hat{p}_+ + M_q \hat{p}_+ + M_q \hat{p}_- + M_q^2 - \Delta_q^2),$$

$$Z = (p_+^2 - M_q^2)(p_-^2 - M_q^2) - \Delta_q^2(2(p_+ p_-) + 2M_q^2 - \Delta_q^2),$$

здесь $p_\pm^2 = (p_0 \pm \mu)^2 - \mathbf{p}^2$. Для $(da - \Delta_q^2)^{-1}$ следует произвести замены $p_\pm \rightarrow p_\mp$. В результате функцию Грина можно привести к виду

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{Z} \sum_{i=0,\dots,3} S_i \sigma_i, \\ S_0 &= (p_0^2 + \mu^2 - E_{\mathbf{p}}^2)(\hat{p} + M_q) - 2\mu p_0 \hat{\mu} - \Delta_q^2(\hat{p} - M_q), \\ S_1 &= -\Delta_q(p_0^2 - \mu^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + 2M_q^2 - \Delta_q^2 + 2\hat{p} M_q), \\ S_2 &= -i2\Delta_q \hat{\mu} \hat{p}, \\ S_3 &= -2\mu p_0(\hat{p} + M_q) + (p_0^2 + \mu^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_q^2) \hat{\mu}. \end{aligned} \quad (64)$$

В рассматриваемом примере нас интересуют только скалярные вклады в σ_0 - и σ_1 -каналы, для которых введем обозначения

$$\begin{aligned} S &= \tilde{A}\sigma_0 + \tilde{B}^p \varepsilon^p \sigma_1, \\ \tilde{A} &= (p_0^2 + \mu^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_q^2) M_q / Z, \\ \tilde{B}^p &= -\Delta_q^p (p_0^2 - \mu^2 - E_{\mathbf{p}}^2 + 2M_q^2 - \Delta_q^2) / Z. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить замкнутые выражения для M_q и Δ_q^p , следует проинтегрировать функцию Грина по $idp_0/(2\pi)$. Удобнее перейти к евклидовым переменным: $p_0 \rightarrow p_4$, $M_q \rightarrow -iM_q$, $E_{\mathbf{p}} \rightarrow iE_{\mathbf{p}}$, $\Delta_q^p \rightarrow i\Delta_q^p$, $\mu \rightarrow i\mu$.

В результате для евклидовых переменных для интересующих нас интегралов получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{dp_4}{2\pi} \tilde{A} &= \int \frac{dp_4}{2\pi} \frac{-iM_q (p_4^2 - \mu^2 + E_{\mathbf{p}}^2 - \Delta_q^2)}{(p_4^2 + E_{\mathbf{p}}^2 + \mu^2 + \Delta_q^2)^2 - 4(E_{\mathbf{p}}^2 \mu^2 + M_q^2 \Delta_q^2)} = \\ &= \frac{-iM_q}{2} \left[\frac{\alpha}{(C + 2D)^{1/2}} + \frac{\beta}{(C - 2D)^{1/2}} \right], \\ \alpha &= \frac{1}{2} + \frac{\mu^2 + \Delta_q^2}{2D}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{\mu^2 + \Delta_q^2}{2D}, \\ C &= E_{\mathbf{p}}^2 + \mu^2 + \Delta_q^2, \quad D = (E_{\mathbf{p}}^2 \mu^2 + M_q^2 \Delta_q^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

аналогичным образом

$$\begin{aligned} \int \frac{dp_4}{2\pi} \tilde{B}^\rho &= \int \frac{dp_4}{2\pi} \frac{i\Delta_q^\rho (p_4^2 + \mu^2 + E_{\mathbf{p}}^2 - 2M_q^2 + \Delta_q^2)}{(p_4^2 + E_{\mathbf{p}}^2 + \mu^2 + \Delta_q^2)^2 - 4(E_{\mathbf{p}}^2 \mu^2 + M_q^2 \Delta_q^2)} = \\ &= \frac{i\Delta_q^\rho}{2} \left[\frac{\tilde{\alpha}}{(C + 2D)^{1/2}} + \frac{\tilde{\beta}}{(C - 2D)^{1/2}} \right], \\ \tilde{\alpha} &= \frac{1}{2} + \frac{M_q^2}{2D}, \quad \tilde{\beta} = \frac{1}{2} - \frac{M_q^2}{2D}. \end{aligned}$$

В результате условия самосогласованности можно привести к виду

$$\begin{aligned} iM &= -2G \frac{5}{36} \text{Tr} \{ \sigma_0 S \} = \\ &= -2G \frac{5}{36} \times 3 \times 2 \times 4 \frac{-iM_q}{2} \left[\frac{\alpha}{(C + 2D)^{1/2}} + \frac{\beta}{(C - 2D)^{1/2}} \right], \\ i\Delta^\rho &= -2G \frac{1}{8} \text{Tr} \{ \varepsilon^\rho \sigma_1 S \} = \\ &= -2G \frac{1}{8} \times (-2) \times 2 \times 4 \frac{i\Delta_q^\rho}{2} \left[\frac{\tilde{\alpha}}{(C + 2D)^{1/2}} + \frac{\tilde{\beta}}{(C - 2D)^{1/2}} \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

В представленных формулах выделены следы по цветовым (множитель 3, множитель 2 в дикварковом канале) и соответственно множители по дикварковым (2) и спиновым (4) переменным. Δ_q^2 обозначает

$$\Delta_q^2 = \Delta_q^\rho \varepsilon^{\rho ij} \Delta_q^{\rho'} \varepsilon^{\rho' ji} = -2\Delta_q^2.$$

Окончательно выражения (65) приобретают вид

$$\begin{aligned} M &= \frac{10}{3} GM_q \left[\frac{\alpha}{(C + 2D)^{1/2}} + \frac{\beta}{(C - 2D)^{1/2}} \right], \\ \Delta^\rho &= 2G\Delta_q^\rho \left[\frac{\tilde{\alpha}}{(C + 2D)^{1/2}} + \frac{\tilde{\beta}}{(C - 2D)^{1/2}} \right], \\ C &= E_{\mathbf{p}}^2 + \mu^2 - 4\Delta_q^2, \quad D = (E_{\mathbf{p}}^2 \mu^2 - 4M_q^2 \Delta_q^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (66)$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены другие каналы (псевдоскалярный, векторный и т. п.). Интересно сразу же отметить, что благодаря отрицательному знаку, который присутствует в коэффициентах C и D , возможны комплексные решения.

При нулевой затравочной дикварковой компоненте $\Delta_0 = 0$ имеется тривиальное решение для дикваркового конденсата: $\Delta_q = \Delta = 0$. При этом

динамическая масса кварка для тех случаев, когда $E > \mu$, определяется уравнением $M = 10GM_q/(3E_p)$. Если $E < \mu$, то индуцированная масса кварка равна нулю: $M = 0$.

Для того чтобы получить нетривиальные решения для дикваркового канала, было взято пренебрежимо малое на фоне токовой массы кварка $m = 5$ МэВ затравочное значение дикварковой составляющей $\delta = 1 \cdot 10^{-5}$ МэВ. Оказывается, при небольших химических потенциалах, $\mu \ll 2G$, дикварковый конденсат не развивается заметным образом, и мы имеем стандартную картину восстановления киральной симметрии, в которой динамическая масса кварка уменьшается. Кварки, находящиеся ниже импульса Ферми, напомним, не участвуют в формировании динамической массы. При химическом потенциале порядка $\mu \sim 0,7 \cdot 3G$ ($G \sim 100$ МэВ) дикварковый вклад оказывается уже заметным (~ 10 МэВ) при достаточно больших импульсах кварков, причем решение вещественно (см. рис. 18, где представлен положительный дикварковый вклад).

При дальнейшем увеличении химического потенциала в дикварковой составляющей появляется также чисто мнимая ветвь, которая расположена дальше по оси импульсов, за область, где начинает формироваться (действительная) дикварковая составляющая. Решения генерируются двумя вещественными ветвями дисперсионного уравнения ($Z = 0$), $p_4 = (C + 2D)^{1/2}$, $p_4 = (C - 2D)^{1/2}$, см. рис. 18. Первая ветвь отвечает примерно удвоенной энергии квазичастицы. Вторая является аналогом почти безмассового

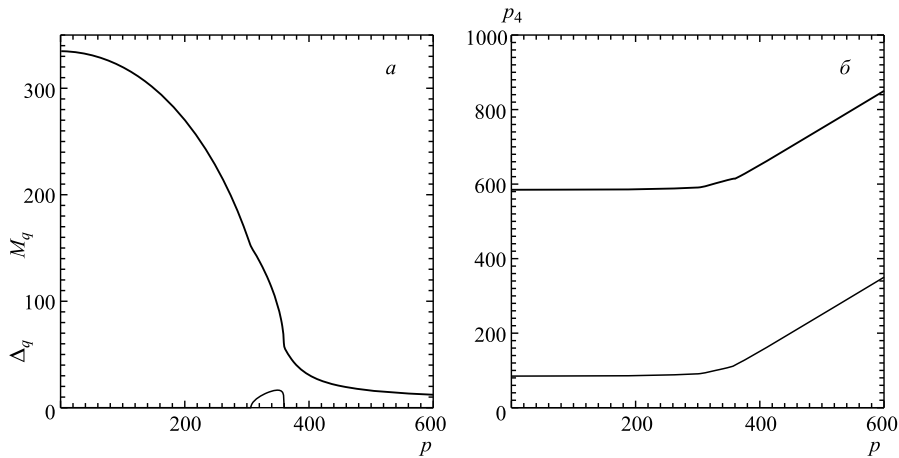


Рис. 18. *a*) Динамическая масса кварка M_q и дикварковый конденсат Δ_q как функция импульса в модели ККБ при химическом потенциале $\mu = 0,7 \cdot 3G \sim 250$ МэВ. *б*) Две ветви решений дисперсионного уравнения ($Z = 0$) на энергию квазичастицы в модели ККБ (p_4 , МэВ) при тех же условиях

(голдстоуновского) возбуждения. При достижении порогового химического потенциала, $\mu \sim 3G \sim 335$ МэВ, характер решения существенно меняется. Доминирующей оказывается мнимая ветвь дикваркового конденсата, которая на рис. 19 присутствует в виде овала, расположенного в отрицательной полуплоскости (мнимая единица опущена), и достигает в максимуме абсолютной величины порядка 60 МэВ. На рис. 19 демонстрируется существенная перестройка спектра энергии (решений дисперсионного уравнения $Z = 0$), который представляется в некотором стратифицированном виде. Это, однако, не носит строго физического характера и связано в основном с тем, что в настоящем исследовании мы рассматриваем не все ветви решений системы (66), как это представлено на рис. 2, например. Для поиска решений применяется метод простых итераций, который, как правило, выделяет наиболее устойчивые ветви. Искажать картину может, как известно, определенный (численный) гистерезис. В этой работе мы хотим ограничиться только приведенным качественным анализом дикварковой конденсации (цветовой сверхпроводимости) в модели ККБ.

Мы видим, что формирование дикваркового вклада происходит задолго до достижения отмеченной критической области химических потенциалов, где проявляется качественная перестройка решений уравнений самосогласованности. Но интересно тем не менее отметить, что по физическому смыслу

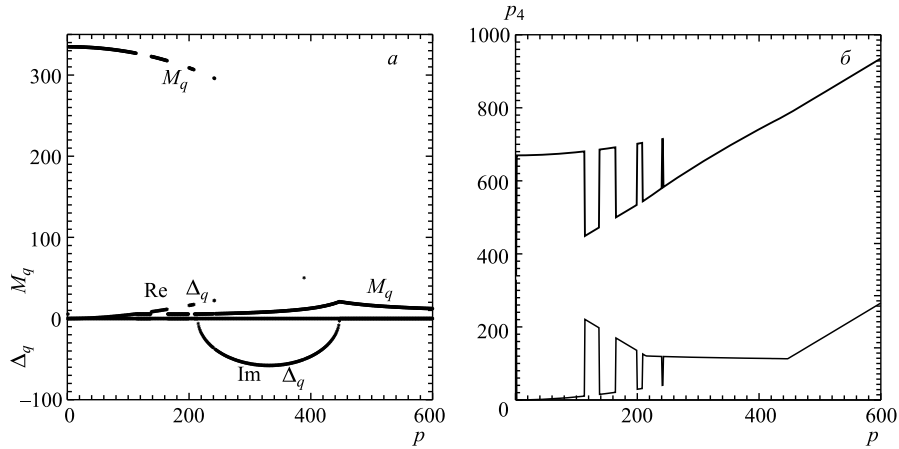


Рис. 19. а) Динамическая масса кварка M_q и дикварковый конденсат Δ_q как функция импульса в модели ККБ при «критическом» химическом потенциале $\mu \sim 3G \sim 335$ МэВ. Половал отрицательных значений отвечает чисто мнимому дикварковому конденсату, см. текст. б) Две ветви решений дисперсионного уравнения ($Z = 0$) на энергию квазичастицы в модели ККБ (p_4 , МэВ) для критического химического потенциала при тех же условиях

это такой же динамический процесс, что и нарушение (восстановление) киральной симметрии (отличающийся лишь каналом взаимодействия), причем от химического потенциала этот процесс зависит непрерывным образом.

В первом параграфе было показано, что термодинамические свойства кваркового ансамбля описываются функционалом ферми-жидкости Ландау (20), причем условия самосогласованности возникают естественным образом, т. е. его варьированием. Можно показать, что аналогичные соотношения имеют место и при учете дикваркового канала. Напомним, что требуется найти минимум функционала энергии системы $\tilde{\mathcal{H}}$ при условии сохранения среднего заряда $Q_0 = \bar{q}\gamma_0 q$. Учитывая тождество $Q^0 = \bar{q}\gamma^0 q = -\bar{q}_c\gamma^0 q_c = -Q_c^0$, интересующий нас функционал $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}} - 1/2 \hat{\mu}(Q^0 - Q_c^0)$ можно представить в приближении среднего поля следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \simeq & \frac{1}{2} \langle \bar{Q} [i\gamma_0 \partial_0 \sigma_0 - \hat{\mu} \sigma_3] Q \rangle + \\ & + GF^A \left(\frac{5}{72} \langle \bar{Q} \gamma^A \sigma_0 Q' \rangle \cdot \langle \bar{Q}' \gamma^A \sigma_0 Q \rangle + \frac{1}{24} \left\langle \bar{Q} \gamma^A \frac{\lambda}{2} \sigma_0 Q' \right\rangle \cdot \left\langle \bar{Q}' \gamma^A \frac{\lambda}{2} \sigma_0 Q \right\rangle + \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} \langle \bar{Q} \varepsilon^{\rho A} \gamma^A C \sigma_1 \bar{Q}^T \rangle \cdot \langle Q'^T \varepsilon^{\rho A} C \sigma_1 Q \rangle \right) \quad (67) \end{aligned}$$

(здесь не показаны соответствующие интегрирование по координате u , а также формфакторы). Слагаемые, отвечающие взаимодействию, можно представить, используя средние по вакууму плотности, как $M^A = \langle \bar{Q} \gamma^A \sigma_0 Q' \rangle$, $O^A = \left\langle \bar{Q} \gamma^A \frac{\lambda}{2} \sigma_0 Q' \right\rangle$, $\Delta^{\rho A} = \langle \bar{Q} \varepsilon^{\rho A} \gamma^A \sigma_1 Q' \rangle$. Варьирование по таким средним приведет к выражениям, аналогичным соотношению (21). Используя функцию Грина системы S , первое слагаемое в (67), которое мы обозначим как \mathcal{H}_0 , можно представить в виде

$$\mathcal{H}_0 = \text{Tr} \{ \gamma^0 (p_0 \sigma_0 + \mu \sigma_3) iS e^{ipx} \} |_{x \rightarrow 0}. \quad (68)$$

(Напомним еще раз, что взятие следа подразумевает интегрирование по четырехмерному импульсу $dp/(2\pi)^4$.) Поскольку вклад определяется только полюсом первого порядка, вариационная производная по интересующим нас средним, например по M^A , может быть приведена к виду

$$\frac{\delta \mathcal{H}_0}{\delta M^A} = \text{Tr} \{ \gamma^A \sigma_0 iS e^{ipx} \} |_{x \rightarrow 0}.$$

Для этого следует дополнить стоящие в скобках члены в выражении (68) слагаемыми, которые дают S^{-1} (остаточный член не дает вклада, будучи полюсом второго порядка). Как следствие, могут быть получены условия самосогласованности, которые мы обсуждали выше.

Наше исследование в этом приложении А ограничивается моделью ККБ, характерной особенностью которой, как это было отмечено выше, является удобное свойство факторизации интегрирований по импульсам кварков. Другие модели могут быть рассмотрены аналогичным образом путем подключения вкладов соответствующих формфакторов. Нелокальные уравнения, которые при этом возникают, выглядят как суперпозиция элементарных блоков, получаемых на основе модели ККБ.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

В работе [37] было отмечено, что помимо распределения Ферми возможны аномальные состояния, получившие название фермионного конденсата. Мы изучим их на примере модели ККБ и остановимся сначала на случае нулевой температуры. Требуется найти минимум функционала (13) при заданных среднем числе частиц (барионном заряде) $\bar{N} = \gamma \int d\tilde{\mathbf{p}} n(\mathbf{p})$ и средней энтропии $\bar{S} = \gamma \int d\tilde{\mathbf{p}} s(\mathbf{p})$. Варьируя динамическую массу кварка M_q и плотность n , получим систему уравнений

$$-(1-n) \frac{M_q}{P_0} + \frac{M}{2G} = 0, \quad (69)$$

$$P_0 - \mu - T \ln(n^{-1} - 1) = 0.$$

Для ферми-конденсата предлагается в качестве опорного рассматривать второе уравнение системы (69) и искать решение в виде

$$T \equiv 0, \quad P_0 = \mu, \quad (70)$$

вырожденное по энергии (аналогичное поведение, как было показано выше, демонстрирует и модель ККБ). Откуда для динамической массы кварка имеем

$$M_q = \pm(\mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}, \quad (71)$$

причем, если интересоваться вещественными решениями, то $|\mathbf{p}| < \mu$. Кроме того, имеется стандартное решение, которое рассматривается как предел при $T \rightarrow 0$ распределения Ферми:

$$n = \frac{1}{e^{\beta(P_0 - \mu)} + 1},$$

напомним, что $P_0 = [\mathbf{p}^2 + M_q^2(\mathbf{p})]^{1/2}$. Динамическая масса кварка определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{M_q}{P_0} &= \frac{M}{2G}, \quad n = 0, \quad |\mathbf{p}| > P_F, \\ M &= 0, \quad n = 1, \quad |\mathbf{p}| < P_F. \end{aligned} \quad (72)$$

По определению плотность конденсата удовлетворяет неравенствам $0 < n < 1$. Из первого уравнения системы (69) находим два возможных распределения плотности

$$n_{\pm} = 1 - \frac{\mu}{2G} \pm \frac{\mu}{2G} \frac{m}{(\mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}}. \quad (73)$$

Интересно отметить пик в плотности n_+ при $|\mathbf{p}| \sim \mu$, но вместе с тем плотность кварков не может превышать 1. Для второго решения n_- справедливо другое ограничение: $n > 0$. Определим область, где применимо решение n_+ . Найдем импульс p_+ , такой, что $n_+ = 1$. Можно получить $p_+ = (\mu^2 - m^2)^{1/2}$. Видим, что импульс p_+ отстоит от точки μ , где плотность n_+ сингулярна, на постоянную величину, которая определяется токовой массой кварка. Найдем область применимости второго решения n_- . Определим импульс p_- , такой, что $n_- = 0$. Можно получить $p_- = [\mu^2 - m^2 \mu^2 / (2G - \mu)^2]^{1/2}$. В отличие от импульса p_+ найденный предельный импульс подвижен по отношению к точке μ . При $\mu \rightarrow 0$ $p_- \rightarrow \mu$. Когда $\mu = G$, импульсы p_+ и p_- совпадают ($p_+ = p_-$). Если $\mu = \mu_- = 2G - m$, то p_- обращается в нуль. При больших $\mu > \mu_-$ вторая ветвь решения, n_- , исчезает. Суммируя, можно заключить, что возможны ситуации, когда на отрезке импульсов имеются два решения для конденсата. За этой областью может располагаться отрезок, где имеется только одно решение, либо n_+ , либо n_- , в зависимости от соотношения между импульсами p_+ , p_- . За этим отрезком может располагаться только решение со стандартным распределением Ферми.

Дальнейший анализ проведем только в киральном пределе. В этом случае обе ветви n_+ и n_- сливаются, и плотность конденсата уже не зависит от импульса кварка

$$n = n_+ = n_- = 1 - \frac{\mu}{2G}.$$

Видно, что конденсатное решение возможно только при $\mu < 2G$. При этом $M_q = M = (\mu^2 - \mathbf{p}^2)^{1/2}$, и вещественное решение существует только на отрезке $0 \leq |\mathbf{p}| \leq \mu$. Помимо конденсатного решения возможно и стандартное:

$$\begin{aligned} M_q = M &= [(2G)^2 - \mathbf{p}^2]^{1/2}, \quad n = 0, \quad |\mathbf{p}| > P_F, \\ M &= 0, \quad n = 1, \quad |\mathbf{p}| \leq P_F. \end{aligned}$$

При наличии фермионного конденсата возможны следующие три варианта соотношения между параметрами μ и P_F (три варианта заполнения ансамбля фермионным конденсатом и сферой Ферми): 1) $P_F < \mu$,

2) $P_F = \mu$, 3) $P_F > \mu$. Рассмотрим сначала частный случай, когда $P_F = \mu$, т.е. пусть вся сфера Ферми заполнена фермионным конденсатом. Средняя плотность энтропии и плотность числа частиц в фермионном конденсате равны:

$$\begin{aligned} S_2 &= -\frac{\gamma}{6\pi^2} \mu^3 \left[\left(1 - \frac{\mu}{2G}\right) \ln \left(1 - \frac{\mu}{2G}\right) + \frac{\mu}{2G} \ln \frac{\mu}{2G} \right], \\ \mathcal{N}_2 &= \frac{\gamma}{6\pi^2} \mu^3 \left(1 - \frac{\mu}{2G}\right). \end{aligned} \quad (74)$$

На рис. 20 показана плотность энтропии (на 1 Фм^3) для состояния с фермионным конденсатом как функция барионной плотности $\mathcal{N} = Q_0/(3V)$, причем для определенности положено $2G = 300 \text{ МэВ}$. Сплошная кривая получена в киральном пределе. Мы привели физические единицы, чтобы можно было ориентироваться в том, о каких эффектах идет речь, хотя бы по порядку величины. Для сравнения на рис. 20 показаны также плотности энтропии, полученные с токовой массой кварка $m = 5 \text{ МэВ}$. Показаны также S_+ (большой штриховый овал) и S_- (малый штриховый овал), которые получены с использованием распределений n_+ и n_- соответственно. Найденные решения можно интерпретировать как нетривиальные продолжения стандартного заполнения сферы Ферми (для которого, по определению, химический потенциал равен или превышает динамическую массу кварка) на случай химических потенциалов, меньших M_q , когда квазичастица еще как бы не сформировалась. Это состояние отличается плотностью ансамбля, заметно меньшей (примерно в четыре раза), чем плотности, характерные для нормального заполнения сферы Ферми. Решения удобно представлять в безразмерных переменных $x = \mu/(2G)$, $y = P_F/(2G)$. Максимальная плотность конденсата достигается при $x_N = 3/4$, $N_c \approx 3,56 \cdot 10^{-3} (2G)^3$, максимальная энтропия получается при $x_S \approx 0,84$, $S_c \approx 2,64 \cdot 10^{-2} (2G)^3$ ($N_f = 1$). В дальнейшем для энтропии, плотности и энергии ансамбля будут употребляться безразмерные величины в соответствующих степенях коэффициента $2G$.

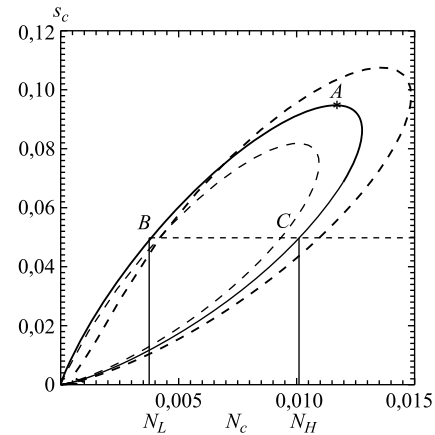


Рис. 20. Плотность энтропии (на 1 Фм^3) как функция плотности кваркового ансамбля (на 1 Фм^3) для состояния фермионного конденсата. Сплошная кривая получена в киральном пределе, на примере которого подробно разбирается вопрос увеличения плотности кваркового ансамбля при фиксированной энтропии

Рассмотрим теперь случай, когда $P_F < \mu$. Найдем полную энтропию конденсата и сферы Ферми (заполненной стандартным образом) как функцию μ и P_F (в безразмерных переменных x, y). Итак, на отрезке импульсов чередуются следующие решения: фермионный конденсат, который занимает область $0 \leq |\mathbf{p}| < P_F$, и кварковый ансамбль при нормальных условиях, расположенный на отрезке $P_F \leq |\mathbf{p}|$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1 &= -\frac{\gamma}{6\pi^2} P_F^3 \left[\left(1 - \frac{\mu}{2G}\right) \ln \left(1 - \frac{\mu}{2G}\right) + \frac{\mu}{2G} \ln \frac{\mu}{2G} \right], \\ \mathcal{N}_1 &= \frac{\gamma}{6\pi^2} P_F^3 \left(1 - \frac{\mu}{2G}\right) + \frac{\gamma}{6\pi^2} (\mu - P_F)^3. \end{aligned} \quad (75)$$

В случае, когда выполняется условие $P_F > \mu$, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_3 &= \mathcal{S}_2, \\ \mathcal{N}_3 &= \mathcal{N}_2 + \frac{\gamma}{6\pi^2} (P_F - \mu)^3. \end{aligned} \quad (76)$$

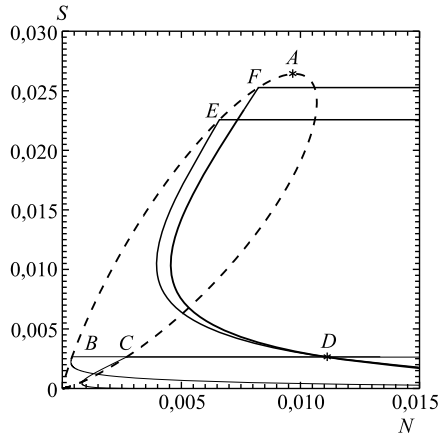


Рис. 21. Плотность энтропии для некоторых решений с заполнением сферы Ферми и фермионным конденсатом (все в безразмерном виде), см. текст

На рис. 21 показана энтропия как функция плотности для ряда решений с заполнением сферы Ферми и фермионным конденсатом для некоторых значений μ и P_F (в безразмерных переменных соответственно x, y), которые мы будем подробно обсуждать ниже в связи с вопросом наиболее выгодного размещения кварков при заданной средней энтропии и плотности ансамбля. Из формулы (76) легко видеть, что при $y > 1$ на рис. 21 должна получаться прямая линия $S = \text{const}$ при увеличении плотности ансамбля. Самый интересный вывод из этого рисунка заключается в том, что в одну и ту же точку на плоскости S, N могут попасть сразу несколько траекторий с различными параметрами x

и y . В качестве примера мы привели одну такую точку, которая обозначена на рис. 21 как D . В обсуждаемом случае пересекаются сразу четыре траектории (подробнее мы обсудим это ниже). Как следствие, получается, что знания химического потенциала и импульса Ферми еще не достаточно для того, чтобы зафиксировать состояние кваркового ансамбля и его термодинамические свойства(!). Перебор трех различных вариантов заполнения сферы

Ферми и фермионной конденсации показывает, что точки термодинамических кривых на плоскости S, N не выходят левее крайней ветви овала, который проходит через точки A и B , см. рис. 20. Кроме того, понятно, что энтропия не может превышать значение S_c , которое соответствует точке A .

Теперь продемонстрируем, как определить термодинамическое состояние ансамбля при наличии фермионного конденсата. Пусть дано число частиц (равносильно плотность ансамбля) \bar{N} , требуется разместить их энергетически наиболее выгодным образом при заданной средней энтропии \bar{S} . Прежде всего следует определить все те траектории, которые могут попасть в выделенную нами точку \bar{S}, \bar{N} на плоскости S, N . Пристально глядя в формулы, можно понять, что траектории, отвечающие первому случаю, когда $P_F < \mu$, смогут попасть в выделенную точку только при условии, что энтропия при нулевом импульсе Ферми превышает заданное значение \bar{S} . Тогда можно спуститься в требуемую точку D , плавно увеличивая импульс Ферми, как это в качестве примера демонстрируют кривые, проходящие через точки E и F на рис. 21. Находим все такие точки. (Из первого уравнения системы (75) находим импульс Ферми P_F , выбирая такой химический потенциал, чтобы энтропия превышала \bar{S} . Подставив его во второе уравнение системы (75), определяем (по кубической параболе) текущее значение плотности. Далее подгоняем такое значение химического потенциала, чтобы плотность совпала с \bar{N} .) Прямые участки траекторий, как это упоминалось выше, отвечают второму и третьему случаям, когда $P_F \geq \mu$. Пусть число попавших в конденсат кварков (которое пока еще не определено) равно N_c . Оставшиеся $\bar{N} - N_c$ кварков заполняют сферу Ферми. Задача заключается в том, чтобы самосогласованно определить импульс Ферми. Энтропия конденсата при этом равняется \bar{S} . Энтропия ферми-сферы, понятно, равняется нулю, так как в этом случае $n = 1$. Напомним также, что полная энтропия ансамбля может изменяться от нуля до максимального значения S_c . На рис. 22 показана энтропия как функция химического потенциала. Видно, что имеются два корня, которые отвечают заданной энтропии в допустимом интервале химических потенциалов. Они обозначены как x_L и x_H . Химический потенциал x_L приводит к состоянию с меньшим числом частиц (меньшей плотностью). Оно обозначено на рис. 20 как N_L . Другая

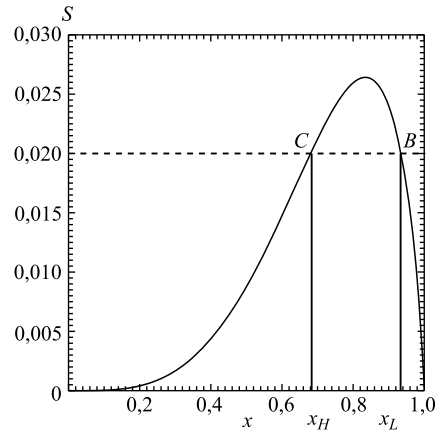


Рис. 22. Заполнение сферы Ферми с учетом вклада конденсата. Энтропия как функция химического потенциала

на рис. 22 показана энтропия как функция химического потенциала. Видно, что имеются два корня, которые отвечают заданной энтропии в допустимом интервале химических потенциалов. Они обозначены как x_L и x_H . Химический потенциал x_L приводит к состоянию с меньшим числом частиц (меньшей плотностью). Оно обозначено на рис. 20 как N_L . Другая

ветвь отвечает состоянию с большим числом частиц (более высокой плотностью) и обозначена как N_H . В том случае, когда число частиц лежит в интервале $N_L < \bar{N} < N_H$, в определении свойств конденсата задействована только ветвь, которая отвечает левой части (сплошного) овала на рис. 20. Если число частиц превышает N_H ($\bar{N} > N_H$), то необходимо учитывать обе ветви решений. Анализ показывает, что число ветвей, которые могут попасть в одну и ту же точку на плоскости S, N , может достигать четырех. Термодинамическое же состояние системы, понятно, определяется траекторией с наименьшей энергией.

Приведем плотность энергии для трех вариантов траекторий, которая может быть получена с помощью функционала (20). В первом случае, $P_F < \mu$, можно получить

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 = & -\frac{\gamma}{6\pi^2} P_F^3 \mu(1-n) + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{P_F} dp p^2 \frac{\mu^2 - p^2}{4G} - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_{P_F}^{\Lambda} dp p^2 P_0 + \\ & + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_{P_F}^{2G} dp p^2 \frac{(2G)^2 - p^2}{4G} = \frac{\gamma}{6\pi^2} (2G)^4 \left[-\frac{4}{5} + \frac{y^3(1-x^2)}{2} - \frac{3}{4}(\tilde{\Lambda}^4 - 1) \right]. \end{aligned}$$

В это выражение включен формальный верхний предел интегрирования Λ ($\tilde{\Lambda} = \Lambda/(2G)$). Он одинаков для всех трех вариантов траекторий и может быть опущен в окончательных формулах, поскольку нас интересует сопоставление относительной энергии этих решений. Первые два слагаемых отвечают вкладу конденсата. Для второго случая, $P_F = \mu$, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 = & -\frac{\gamma}{6\pi^2} \mu^4(1-n) + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{\mu} dp p^2 \frac{\mu^2 - p^2}{4G} - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_{\mu}^{\Lambda} dp p^2 P_0 + \\ & + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_{\mu}^{2G} dp p^2 \frac{(2G)^2 - p^2}{4G} = \frac{\gamma}{6\pi^2} (2G)^4 \left[-\frac{4}{5} + \frac{x^3(1-x^2)}{2} - \frac{3}{4}(\tilde{\Lambda}^4 - 1) \right]. \end{aligned}$$

И наконец, для третьего варианта, когда $P_F > \mu$, можно получить

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3 = & -\frac{\gamma}{6\pi^2} P_F^3 \mu(1-n) + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{\mu} dp p^2 \frac{\mu^2 - p^2}{4G} - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_{\mu}^{P_F} dp p^3 - \\ & - \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_{P_F}^{\Lambda} dp p^2 P_0 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_{P_F}^{2G} dp p^2 \frac{(2G)^2 - p^2}{4G} = \\ = & \frac{\gamma}{6\pi^2} (2G)^4 \left[-\frac{4}{5} x^5 + \frac{y^3 - x^5}{2} + \frac{3}{10} (y^5 - x^5) - \frac{3}{4} (y^4 - x^4) - \frac{3}{4} (\tilde{\Lambda}^4 - 1) \right]. \end{aligned}$$

На рис. 23 показана плотность энергии как функция плотности ансамбля («барионного» заряда) при сканировании по энтропии, начиная со значения $\bar{S} = 2,64 \cdot 10^{-3}$ (в десять раз меньше максимальной плотности энтропии S_c), см. самую нижнюю кривую. Остальные кривые, идущие вверх, получены при увеличении энтропии с шагом $\Delta\bar{S} = 2,64 \cdot 10^{-3}$.

При малой плотности энтропии отчетливо проявляется скачок энергии ансамбля, когда плотность ансамбля проходит некоторое пороговое значение. Непосредственно перед ступенькой термодинамическое состояние ансамбля определяется четырьмя траекториями. Именно этому случаю и отвечает рис. 21, где показаны четыре решения, причем наименьшую энергию обеспечивает траектория, проходящая через точку E . При нескольких больших плотностях состояние ансамбля определяется только двумя траекториями. При этом в рассматриваемом

нами примере наименьшая энергия получается, если заполнение сферы Ферми стартует из точки B . При повышении энтропии скачок заметно сглаживается.

Перейдем к случаю конечной температуры. Мы ограничимся только анализом решений в киральном пределе, когда нет явной зависимости от импульса, что, конечно же, доставляет для анализа значительные удобства. Теперь необходимо подключить вклад антикварков, в результате чего система (69) приобретает вид

$$\begin{aligned} -(1 - n - \bar{n}) \frac{M_q}{P_0} + \frac{M}{2G} &= 0, \\ P_0 - \mu - T \ln(n^{-1} - 1) &= 0, \\ P_0 + \mu - T \ln(\bar{n}^{-1} - 1) &= 0. \end{aligned} \tag{77}$$

В киральном пределе имеем

$$1 - n - \bar{n} = \frac{P_0}{2G}. \tag{78}$$

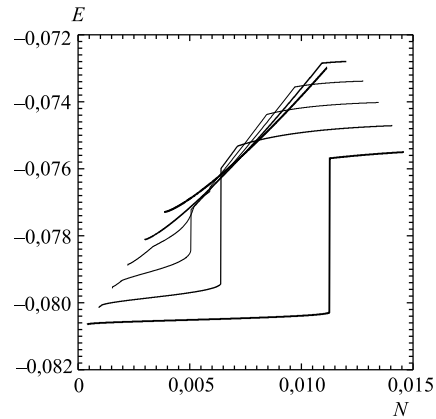


Рис. 23. Плотность энергии как функция плотности ансамбля («барионного» заряда) при сканировании по энтропии, начиная со значения $\bar{S} = 2,64 \cdot 10^{-3}$ (в десять раз меньше максимальной плотности энтропии), см. самую нижнюю кривую. Остальные кривые, идущие вверх, получены при увеличении энтропии с шагом $\Delta\bar{S} = 2,64 \cdot 10^{-3}$. При малой плотности энтропии отчетливо виден скачок энергии ансамбля

Любопытно уже сейчас отметить, что теперь возможны случаи, когда энергия кварка становится отрицательной, т. е. формально она будет отвечать уже связанному состоянию квазичастицы. Энергия квазичастицы с не равной нулю динамической массой ограничена неравенствами $-2G < P_0 < 2G$.

Для кварков с большими энергиями, $P_0 > 2G$, первое уравнение системы приводит к тривиальному решению только с нулевой динамической массой кварка: $M_q = M = 0$. Из второго уравнения (77) имеем

$$P_0 = \mu + T \ln(n^{-1} - 1). \quad (79)$$

Для удобства введем безразмерные переменные $x = \mu/(2G)$, $y = T/(2G)$ и, подставляя энергию в уравнение (78), получим

$$1 - n - \bar{n} = x + y \ln(n^{-1} - 1). \quad (80)$$

Подключая третье уравнение системы (77), можем явно выразить плотность антикварков

$$\bar{n} = \left(e^{2x/y + \ln(n^{-1} - 1)} + 1 \right)^{-1}, \quad (81)$$

подставляя которую в (80), получим окончательное расчетное трансцендентное уравнение.

Для иллюстрации будем употреблять безразмерные переменные, т. е. все характеристики поделены на соответствующие степени параметра $2G$. На рис. 24 показаны пять ветвей решений уравнений (80), (81) для плотности кварков и антикварков (точки на кривых более разрежены) с параметром $y = 0,25$ как функция параметра x . Число ветвей решений трансцендентной системы уравнений эволюционирует с изменением параметра y . Выбранное значение $y = 0,25$ соответствует наибольшему числу корней (при нулевой температуре вне кирального предела, напомним, имелись только две ветви решений для плотности). Интересно отметить, что возникают состояния с большой плотностью антикварков при весьма умеренных температурах. Рис. 25 иллюстрирует отмечавшуюся выше возможность наличия решений с отрицательной (!) энергией кварка, которые как раз и обусловлены существенным вкладом антикварков. (Наблюдаемое значение плотности заряда образовано разностью больших чисел n и \bar{n} .) Как отмечалось выше, нетривиальные решения для конденсата должны удовлетворять ограничению по энергии $|P_0| < 2G$. На рисунке также приведена прямая $P_0 = 2G$, пересечение с которой определяет предельное значение химического потенциала, при котором еще возможна конденсация (генерация динамической массы) кварков для рассматриваемой ветви решения. На рисунке эта точка обозначена как x_r . Определим некоторые интегральные характеристики кваркового ансамбля. Плотности среднего заряда и энтропии равны

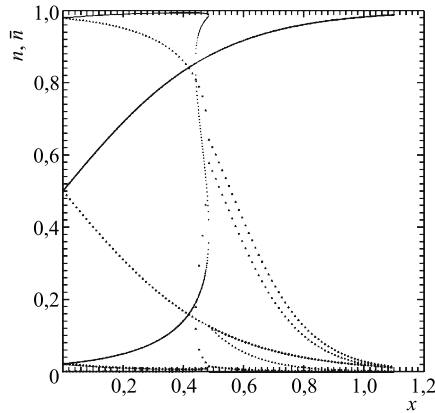


Рис. 24. Пять ветвей решений уравнений (80), (81) для плотности кварков и антикварков (которые отвечают кривым с более разреженными точками) с параметром $y = 0,25$ как функция параметра x

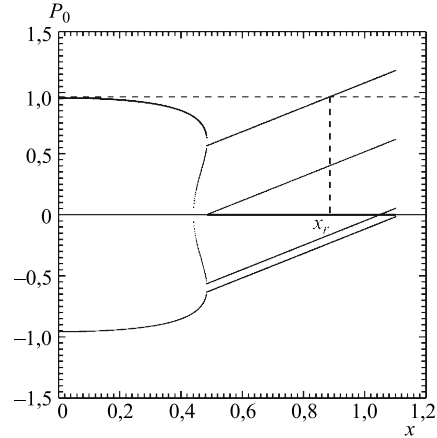


Рис. 25. Энергия кварка P_0 для решений, представленных на рис.24. Интересно отметить, что имеются корни с отрицательной энергией

$$\mathcal{Q}_0 = \gamma \int d\tilde{\mathbf{p}} (n - \bar{n}),$$

$$\mathcal{S} = \gamma \int d\tilde{\mathbf{p}} (s + \bar{s}).$$

По определению, напомним, энергия выражается через динамическую массу кварка как

$$P_0 = \begin{cases} \pm (\mathbf{p}^2 + M^2)^{1/2}, & |P_0| \leq 2G, \\ \pm |\mathbf{p}|, & |P_0| > 2G. \end{cases}$$

При этом импульс кварка $|\mathbf{p}|$ изменяется от 0 до $|P_0|$. Тогда имеем

$$\mathcal{Q}_0 = \frac{\gamma}{6\pi^2} |P_0|^3 (n - \bar{n}),$$

$$\mathcal{S} = \frac{\gamma}{6\pi^2} |P_0|^3 (s + \bar{s}),$$

причем $P_0 = 2G [x + y \ln(n^{-1} - 1)]$. На рис. 26 приведена энтропия как функция плотности заряда при температуре $y = 0,25$, при которой, напомним, обнаруживается наибольшее число ветвей решений системы уравнений (77), в киральном пределе. Для сравнения штриховой линией показан овал, получающийся при нулевой температуре, который мы обсуждали выше. Можно отчетливо проследить его эволюцию с ростом температуры.

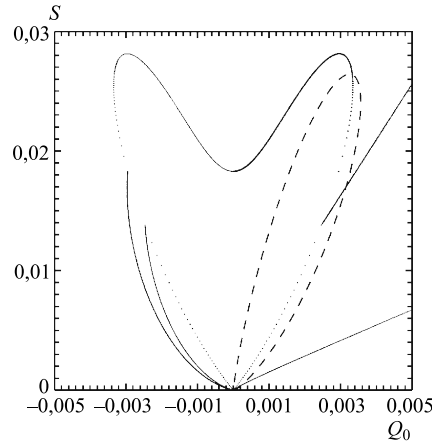


Рис. 26. Плотность энтропии как функция плотности барионного заряда при температуре $y = 0,25$. Штриховая линия отвечает нулевой температуре, см. рис. 20

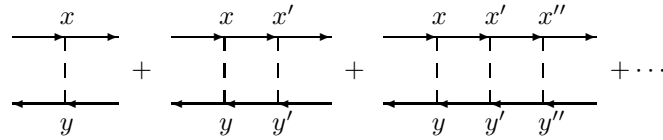
В основном изменения происходят за счет вклада антикварков и отражаются на левой ветви овала. Правая часть остается как бы более консервативной. В этом смысле можно сказать, что с ростом температуры ансамбля имеется некоторое температурное окно, где проявляется существенная асимметрия кварк-антикваркового ансамбля. Этими данными мы ограничим наш анализ в этой работе. Чтобы изучить состояние ансамбля как функцию средней энтропии и среднего заряда, аналогично тому, как это было проделано в случае нулевой температуры, следует более внимательно проанализировать киральный предел, $m \rightarrow 0$, решений системы уравнений (77).

В приложении А мы обсуждали дикварковую конденсацию (цветовую сверхпроводимость), которая возможна при больших значениях химического потенциала $\mu \sim 3G \sim 335$ МэВ. Из приведенных данных можно заключить, что дикварковое спаривание, по-видимому, не может оказать существенного влияния на процессы формирования фермионного конденсата, рассмотренные нами выше. Заметим также, что для того чтобы проанализировать аналогичным образом фермионный конденсат в модели НИЛ, требуется обратиться к изучению нелокальных моделей.

В заключение отметим, что квантовые фазовые переходы и аномальное поведение ферми-систем являются в последнее время объектами самого пристального внимания в физике конденсированного состояния [38]. В частности, в сильнокоррелированных ферми-системах теоретически предсказывается нарушение теоремы Нернста о равенстве нулю энтропии системы при абсолютном нуле температуры, аналогично тому, что мы наблюдали для квантовых жидкостей, построенных на основе кварковой модели с четырехфермионным взаимодействием.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Интересующие нас связанные состояния, как известно, получаются в виде полюсных особенностей вершинной функции лестничных диаграмм, которые в нашем случае кварк-антикварковой пары представляются суммой вида



При этом возникает уравнение на вершину

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(q; Q, p + q) &= (2\pi)^4 2iv(Q + q) + \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} dk 2v(k + q) \pi^{\Gamma}(k, k + p + q) \tilde{\Gamma}(-k; Q, p + q), \end{aligned} \quad (82)$$

где $\pi^{\Gamma}(k, k + p + q) = \text{Tr} \{S(k) \Gamma S(k + p + q) \Gamma\}$ — поляризационный оператор в канале $\Gamma(1, i\gamma_5, \gamma_{\mu}, \gamma_5 \gamma_{\mu})$; $S(k)$ — функция Грина квазичастицы кварка с динамической массой $M_q(p)$, штриховые линии обозначают формфакторы; q, Q — импульсы входящего и выходящего кварков; p — импульс входящего антикварка; v — затравочная вершина взаимодействия (функция формфактора).

Из представленного уравнения понятно, что помимо поляризационного оператора свойства мезонов как связанных состояний будут определяться также и формфактором. Здесь важно подчеркнуть, что к одному и тому же уравнению (82) мы приходим, стартуя как бы с разных позиций. В одном случае подразумевается связанное состояние двух массивных частиц, в другом речь идет об изучении возбуждений некоторого коллективного состояния, некоторой среды — конденсата. Значит, в одном случае связанные состояния появляются под действием потенциала, а в другом они обусловлены корреляциями.

Нас интересует частный случай коррелятора, когда $v(p) = G \delta(\mathbf{p})$, решение уравнения для которого будем искать в виде

$$\tilde{\Gamma}(q; Q, p + q) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{Q} + \mathbf{q}) i \Gamma(p_0 + q_0; \mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (83)$$

Анализ итерационного ряда показывает, что переменные q_0 и Q_0 оказываются формальными (по ним не проводится интегрирование), и поэтому в функции Γ оставлены только существенные зависимости. Тогда уравнение (82) сво-

дится к

$$\begin{aligned} \Gamma(p_0 + q_0; \mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \\ &= 2G + 2G \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_0}{2\pi} i\pi^\Gamma(k_0, -\mathbf{q}; k_0 + p_0 + q_0, \mathbf{p}) \Gamma(p_0 + q_0; \mathbf{q}, \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (84)$$

Как следствие, вершинная функция факторизуется, и ниже мы продемонстрируем, что связанные состояния имеются в каналах Γ при любых импульсах кварка и антикварка \mathbf{q}, \mathbf{p} . Несколько упростим запись формул, опуская несущественные при интегрировании в уравнении (84) параметры \mathbf{q}, \mathbf{p} :

$$\Gamma(\varepsilon) = 2G + 2G \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} i\pi^\Gamma(k, \varepsilon) \Gamma(\varepsilon), \quad (85)$$

где $\varepsilon = -p_0 - q_0$. Выделим интеграл

$$\Pi^\Gamma(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} i\pi^\Gamma(k, \varepsilon) \quad (86)$$

и получим

$$\Gamma(\varepsilon) = [(2G)^{-1} - \Pi^\Gamma(\varepsilon)]^{-1}. \quad (87)$$

Итерационное решение уравнения (85) связано обычно с введением вспомогательной функции $\kappa^\Gamma(k, \varepsilon)$, удовлетворяющей уравнению

$$\kappa^\Gamma(k, \varepsilon) = \pi^\Gamma(k, \varepsilon) + \pi^\Gamma(k, \varepsilon) 2G \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} i\kappa^\Gamma(k', \varepsilon). \quad (88)$$

По существу это соответствует стандартной процедуре, используемой при изучении уравнений типа Бете–Солпитера для четырехточечной функции Грина. Продолжая эту линию, введем функцию

$$K^\Gamma(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} i\kappa^\Gamma(k, \varepsilon), \quad (89)$$

для которой можно получить

$$K^\Gamma(\varepsilon) = \Pi^\Gamma(\varepsilon) + \Pi^\Gamma(\varepsilon) 2G K^\Gamma(\varepsilon), \quad (90)$$

откуда

$$K^\Gamma(\varepsilon) = [(\Pi^\Gamma(\varepsilon))^{-1} - 2G]^{-1}, \quad (91)$$

а также для ядра

$$\begin{aligned}\kappa^\Gamma &= \pi^\Gamma + \pi^\Gamma 2G \left[(\Pi^\Gamma)^{-1} - 2G \right]^{-1} = \\ &= \pi^\Gamma + \pi^\Gamma \Pi^\Gamma \left[(2G)^{-1} - \Pi^\Gamma \right]^{-1}.\end{aligned}\quad (92)$$

В окрестности полюса, там, где последний множитель в (92) обращается в нуль, можно пренебречь вкладом первого, регулярного слагаемого. Полученное при этом уравнение соответствует уравнению Шредингера в канале Γ для кварк-антикварковой пары с импульсами \mathbf{q} , \mathbf{p} :

$$\kappa^\Gamma(k, \varepsilon^\Gamma; \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \pi^\Gamma(k, \varepsilon^\Gamma; -\mathbf{q}, \mathbf{p}) 2G \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{2\pi} i\kappa^\Gamma(k', \varepsilon^\Gamma; \mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (93)$$

(в этой записи мы восстановили зависимость от импульса квазичастиц), в котором роль волновой функции выполняет $K^\Gamma(\varepsilon^\Gamma; \mathbf{q}, \mathbf{p})$, поскольку интегрирование обеих частей уравнения (93) по k приводит в точности к уравнению Шредингера для этой волновой функции:

$$\left\{ \left[\Pi^\Gamma(\varepsilon^\Gamma; -\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right]^{-1} - 2G \right\} K^\Gamma(\varepsilon^\Gamma; \mathbf{q}, \mathbf{p}) = 0 \quad (94)$$

(сравним с уравнением для скалярного поля $(\varepsilon^2 - \mathbf{p}^2 - m^2)\phi(\varepsilon; \mathbf{p}) = 0$, например). Видно, что сам поляризационный оператор (естественно, с учетом влияния, которое оказывает формфактор) выступает в роли гамильтониана для связанного состояния. Обратим также внимание на нормировку связанного состояния. Фактически в рассматриваемой модели отсутствует рассеяние, входящий и выходящий кварки имеют тождественно одинаковые импульсы, и, неожиданно, нормировку следует производить как бы со свободными частицами. При фиксированной энергии связанного состояния ε^Γ уравнение (94) определяет область допустимых импульсов кварка и антикварка в \mathbf{p} , \mathbf{q} -плоскости и позволяет изучить детали разделения относительного и общего движения связанной пары.

Представленные элементы описания связанных состояний вполне понятны в контексте картины потенциального рассеяния. Непривычной, однако, выглядит редукция ядра интегрального уравнения до формы простого умножения на функцию. Напомним, что обычно в случае потенциала приходится решать задачу построения самосопряженного расширения соответствующего интегрального оператора [39].

Интересно отметить, что в случае нерелятивистских частиц поляризационный оператор для вакуума строго обращается в нуль, и нетривиальный

вклад может проявиться только при наличии среды, т.е. для заполненных состояний с ненулевым химическим потенциалом*.

Для псевдоскалярного ($\Gamma = i\gamma_5$) и скалярного ($\Gamma = 1$) каналов поляриза-
ционные операторы представляются как

$$\begin{aligned} \Pi^{\pi,\sigma} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} i \frac{k(k-\varepsilon) + \mathbf{p}\mathbf{q} \mp M_p M_q}{(k^2 - E_q^2)((k-\varepsilon)^2 - E_p^2)} = \\ &= \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} \frac{\mathbf{p}\mathbf{q} - E_p E_q \mp M_p M_q}{\varepsilon^2 - (E_p + E_q)^2}, \quad (95) \end{aligned}$$

где $M_p = M_q(\mathbf{p})$, $E_p = E(\mathbf{p})$, аналогично для импульса \mathbf{q} (множитель $2N_c$ мы включили в определение константы взаимодействия G). Энергия связанного состояния получается на основе уравнения $\Pi^{-1} - 2G = 0$ и равна:

$$\varepsilon_{\pi,\sigma}^2 = (E_p + E_q)^2 - 2G \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} (E_p E_q \pm M_p M_q - \mathbf{p}\mathbf{q}) \quad (96)$$

(верхний знак соответствует псевдоскалярному каналу). Первое слагаемое является энергией движения свободных частиц. Второй член строго положителен при любых импульсах \mathbf{p} и \mathbf{q} и играет роль энергии связи в каналах π и σ . Однако в случае скалярного канала, при $\mathbf{q} = \mathbf{p}$, энергия связи обращается в нуль.

Интересно сопоставить полученный результат со случаем, когда пренебрегают приводящими к формированию квазичастиц эффектами корреляций и связанные состояния разыскиваются в системе «исходных» частиц с некоторыми эффективными (формально токовыми) массами m . Понятно, что в случае модели ККБ стандартная процедура типа Бете–Солпитера, где в качестве отправного применяется нерелятивистское приближение, приведет к противоположному результату — полному отсутствию связанных состояний.

В вершине эффективного взаимодействия можно выделить затравочный член взаимодействия

$$\Gamma^{\pi,\sigma} = 2G + \frac{2G}{(2G\Pi^{\pi,\sigma})^{-1} - 1} = 2G - 2G \frac{(E_p + E_q)^2 - \varepsilon_{\pi,\sigma}^2}{\varepsilon^2 - \varepsilon_{\pi,\sigma}^2}. \quad (97)$$

*Тогда соответствующий поляризационный интеграл

$$\pi(\varepsilon) \sim \int \frac{dk}{2\pi} i \frac{i}{k - E_p + i\delta \operatorname{sign} k} \frac{i}{k - \varepsilon - E_q + i\delta \operatorname{sign} (k - \varepsilon)}$$

отличен от нуля, только если энергии частиц E_p , E_q имеют противоположные знаки ($E_p = \mathbf{p}^2/2m - \mu$, $\mu \neq 0$). В итоге можно получить $\pi(\varepsilon) = 1/(E_p + E_q - \varepsilon)$.

Важно отметить, что числитель в (97) строго положителен. Тогда, как следствие, можно аналогично модели НИЛ ввести вспомогательное нелокальное мезонное поле с (вещественной) вершиной взаимодействия с полями кварков (в псевдоскалярном канале, например):

$$\int dx_0 d\mathbf{x} d\mathbf{y} \bar{q}(x_0; \mathbf{x}) i\gamma_5 q(x_0; \mathbf{y}) g_\pi(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \pi(x_0; \mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

с оператором взаимодействия $g_\pi(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}})$ (в модели НИЛ с константой взаимодействия), который для определенности будем считать действующим, например, только на мезонное поле. Мнимая единица в этом выражении даст при квадрировании отрицательный знак в последней формуле соотношения (97). В случае кварков нескольких ароматов следует произвести замену $\gamma_5 \rightarrow \gamma_5 \tau$, $\pi \rightarrow \pi$, где векторы определены в пространстве ароматов, а τ — генераторы калибровочной группы $SU(2)$. Мезонные поля можно представить через соответствующие операторы рождения и уничтожения нелокального поля:

$$\pi(x_0; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \frac{1}{[2\varepsilon_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})]^{1/2}} \left[a_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x} + i\mathbf{q}\mathbf{y} - i\varepsilon_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})x_0} + a_\pi^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{q}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x} - i\mathbf{q}\mathbf{y} + i\varepsilon_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})x_0} \right],$$

с коммутатором операторов рождения и уничтожения

$$[a_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}), a_\pi^\dagger(\mathbf{p}', \mathbf{q}')] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}') \delta(\mathbf{q} - \mathbf{p}').$$

Используя пропагатор нелокального поля

$$\begin{aligned} \langle T \pi(x_0; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \pi(x'_0; \mathbf{x}', \mathbf{y}') \rangle &= \\ &= \int \frac{d\varepsilon d\mathbf{k} d\mathbf{l}}{2\pi (2\pi)^6} e^{i\varepsilon(x_0 - x'_0) + i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y}') + i\mathbf{l}(\mathbf{y} - \mathbf{x}')} D_\pi(\varepsilon; \mathbf{k}, \mathbf{l}), \\ D_\pi(\varepsilon; \mathbf{k}, \mathbf{l}) &= \frac{i}{\varepsilon^2 - \varepsilon_\pi^2(\mathbf{k}, \mathbf{l})}, \end{aligned}$$

придем к сингулярной части вершины взаимодействия Γ в псевдоскалярном канале, если согласуем вычет в формуле (97) и константу связи кварк-мезонного взаимодействия g_π (в импульсном представлении) как

$$g_\pi = \{2G [(E_p + E_q)^2 - \varepsilon_\pi^2]\}^{1/2}.$$

Согласована должна быть также эволюция операторов рождения и уничтожения и гамильтониана свободного мезонного нелокального поля:

$$H_\pi = \int \frac{d\mathbf{p} d\mathbf{q}}{(2\pi)^6} \varepsilon_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) a_\pi^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{q}) a_\pi(\mathbf{q}, \mathbf{p}),$$

$$\begin{aligned}\dot{a}_\pi^+(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= i[H, a_\pi^+(\mathbf{p}, \mathbf{q})] = i\varepsilon_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) a_\pi^+(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \\ \dot{a}_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= i[H, a_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})] = i\varepsilon_\pi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) a_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}).\end{aligned}$$

Поскольку функция энергии мезонного поля симметрична относительно перестановки импульсов $\varepsilon_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \varepsilon_\pi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, можно показать, что пропагатор мезонного поля восстанавливается должным образом. Аналогично можно поступить и в отношении σ -поля. Вопрос построения нелокальных операторов мезонного поля как композиции соответствующих кварковых операторов выходит за рамки настоящего исследования, и мы рассматриваем введение определения мезонных полей только как удобное средство описания выделенного класса диаграмм лестничного типа.

В векторном и аксиал-векторном каналах поляризаационные операторы равны:

$$\begin{aligned}\Pi_{00}^{V,A} &= 2N_c \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} \frac{-E_p E_q - \mathbf{p}\mathbf{q} \pm M_p M_q}{\varepsilon^2 - (E_p + E_q)^2}, \\ \Pi_{i0}^{V,A} &= \Pi_{0i}^{V,A} = 2N_c \left(\frac{p_i}{E_p} + \frac{q_i}{E_q} \right) \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 - (E_p + E_q)^2}, \\ \Pi_{ij}^{V,A} &= 2N_c \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} \frac{(-E_p E_q + \mathbf{p}\mathbf{q} \mp M_p M_q) \delta_{ij} - p_i q_j - q_j p_i}{\varepsilon^2 - (E_p + E_q)^2}.\end{aligned}$$

Эффективная вершина для этих каналов $R^{V,A}$ определяется уравнением

$$2iG^{V,A} \delta_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{V,A} T_{\nu'\nu}^{V,A}, \quad T_{\nu'\nu}^{V,A} = \delta_{\nu'\nu} - 2G^{V,A} \Pi_{\nu'\nu}^{V,A} \quad (98)$$

(напомним, что имеется возможность ввести в этих каналах константы взаимодействия $G^{V,A}$, отличные от предписываемой правилом Фирца $G/2$). Введем вспомогательную тройку векторов:

$$\begin{aligned}I_i &= \left(\frac{p_i}{p} + \frac{q_i}{q} \right) [2(1 + \cos \theta)]^{-1/2}, \quad J_i = \left(\frac{p_i}{p} - \frac{q_i}{q} \right) [2(1 - \cos \theta)]^{-1/2}, \\ K_i &= \varepsilon_{ijk} I_j J_k,\end{aligned}$$

где $\cos \theta = \mathbf{p}\mathbf{q}/(pq)$, $p = |\mathbf{p}|$, $q = |\mathbf{q}|$. Тензоры, образованные произведениями векторов

$$\tilde{I}_{ij} = I_i I_j, \quad \tilde{J}_{ij} = J_i J_j, \quad \tilde{K}_{ij} = K_i K_j,$$

обладают проекционными свойствами:

$$\tilde{I}^2 = \tilde{I}, \quad \tilde{J}^2 = \tilde{J}, \quad \tilde{K}^2 = \tilde{K}, \quad \tilde{I}\tilde{J} = 0, \quad \tilde{I}\tilde{K} = 0, \quad \tilde{J}\tilde{K} = 0, \quad \tilde{K} = E - \tilde{I} - \tilde{J},$$

где $E_{ij} = \delta_{ij}$. Тензор T для векторного канала можно записать в треугольном представлении:

$$T = A \left\| \begin{array}{c} a \\ \tilde{\varepsilon}\mathbf{Q} \\ \tilde{\varepsilon}\mathbf{Q} \\ T_3 \end{array} \right\| = A \left\| \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} -\mathbf{P} \\ \mathbf{1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} a + \tilde{\varepsilon}\mathbf{P}\mathbf{Q} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ T_3 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ -\mathbf{P} \\ 0 \\ 1 \end{array} \right\|,$$

где использованы обозначения $A = \rho/(\varepsilon^2 - (E_p + E_q)^2)$, $\rho = 4N_c G_V (E_p + E_q)/(E_p E_q)$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/(E_p + E_q)$. Вектор $\mathbf{Q} = E_q \mathbf{p} + E_p \mathbf{q}$ имеет только I -, J -компоненты в базисе $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, $\mathbf{Q} = Q_I \mathbf{I} + Q_J \mathbf{J}$, $Q_{I,J} = (E_p p \pm E_q q)(1 \pm \cos \theta)^{1/2}/2^{1/2}$. Вектор \mathbf{P} выбирается с тем условием, чтобы имело место треугольное представление для тензора T ,

$$\tilde{\varepsilon} \mathbf{Q} + A_I (\mathbf{I} \mathbf{P}) \mathbf{I} + A_J (\mathbf{J} \mathbf{P}) \mathbf{J} + A_K (\mathbf{K} \mathbf{P}) \mathbf{K} = \mathbf{0},$$

где $A_B = (\varepsilon^2 - \varepsilon_B^2)/\rho$, $B = I, J, K$, $\varepsilon_{I,J}^2 = (E_p + E_q)^2 - \rho(E_p E_q + M_p M_q \pm p q)$, $\varepsilon_K^2 = (E_p + E_q)^2 - \rho(E_p E_q + M_p M_q - p q)$. Используя представленные соотношения, для вектора \mathbf{P} можно получить $P_{I,J} = \tilde{\varepsilon} Q_{I,J}/A_{I,J}$, $P_K = 0$. $a = [\varepsilon^2 - (E_p + E_q)^2]/\rho + [\varepsilon_K^2 - (E_p + E_q)^2]/\rho + 2E_p E_q$. Пространственная компонента тензора имеет вид $T_3 = A (A_I \tilde{I} + A_J \tilde{J} + A_K \tilde{K})$. Для тензора T^{-1} можно получить

$$T^{-1} = \left\| \begin{array}{cc} 1 & \mathbf{P} \\ 0 & \mathbf{1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} A^{-1}(a + \tilde{\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{Q})^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_3^{-1} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{cc} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P} & 1 \end{array} \right\|,$$

$$T_3^{-1} = \mathcal{E}^2 \left[\frac{\tilde{I}}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_I^2} + \frac{\tilde{J}}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_J^2} + \frac{\tilde{K}}{\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_K^2} \right],$$

где использованы обозначения $\mathcal{E}^2 = \varepsilon^2 - (E_p + E_q)^2$, $\mathcal{E}_{I,J}^2 = \varepsilon_{I,J}^2 - (E_p + E_q)^2$. Для аксиального поля следует произвести в приведенных формулах замену $M_p M_q \rightarrow -M_p M_q$. Величинами $\varepsilon_I, \varepsilon_J, \varepsilon_K$ определяются энергии связанных состояний для пространственных компонент мезонных полей. Для нулевой компоненты можно получить

$$A (a + \tilde{\varepsilon} \mathbf{P} \mathbf{Q}) = \frac{\mathcal{E}^4 + A' \mathcal{E}^2 + B'}{(\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_I^2)(\mathcal{E}^2 - \mathcal{E}_J^2)},$$

$$A' = -\mathcal{E}_I^2 - \mathcal{E}_J^2 - \rho^2 Q_I^2 \left(\frac{1}{\mathcal{E}_I^2} + \frac{1}{(E_p + E_q)^2} \right) - \rho^2 Q_J^2 \left(\frac{1}{\mathcal{E}_J^2} + \frac{1}{(E_p + E_q)^2} \right),$$

$$B' = \mathcal{E}_I^2 \mathcal{E}_J^2 + \rho^2 Q_I^2 \mathcal{E}_J^2 \left(\frac{1}{\mathcal{E}_I^2} - \frac{1}{(E_p + E_q)^2} \right) + \rho^2 Q_J^2 \mathcal{E}_I^2 \left(\frac{1}{\mathcal{E}_J^2} - \frac{1}{(E_p + E_q)^2} \right).$$

Аналогично псевдоскалярному и скалярному каналам можно определить (операторы) константы связи полей в заданном канале, например, для векторного поля: $g_A^2 = |2G_V \mathcal{E}_I^2|$, $A = I, J, K$ (аналогично для нулевой компоненты). Поскольку тензоры $\tilde{I}, \tilde{J}, \tilde{K}$ представляются в виде соответствующих произведений векторов $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, то сингулярную компоненту вершины взаимодействия в векторном и аксиал-векторном каналах можно представить в факторизованной форме в виде хронологического произведения соответствующих векторных полей, аналогично тому, как это было проделано для скалярного и псевдоскалярного каналов. Из треугольного представления тензора T видно

также, что нулевая компонента поля и компонента в направлении вектора \mathbf{K} факторизуются от компонент \mathbf{I} , \mathbf{J} -плоскости. Проведенный нами численный анализ показывает, что аналогично случаю псевдоскалярного и скалярного полей связанные состояния в векторном и аксиал-векторном каналах имеются при любых импульсах \mathbf{p} и \mathbf{q} , и только тензорный канал остается стерильным по взаимодействиям.

В дикварковом канале

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{x} \\ | \\ \xrightarrow{y} \end{array} + \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \quad \xrightarrow{x'} \\ | \quad | \\ \xrightarrow{y} \quad \xrightarrow{y'} \end{array} + \begin{array}{c} \xrightarrow{x} \quad \xrightarrow{x'} \quad \xrightarrow{x''} \\ | \quad | \quad | \\ \xrightarrow{y} \quad \xrightarrow{y'} \quad \xrightarrow{y''} \end{array} + \dots$$

поляризационный оператор в уравнении (82) имеет вид $\pi^\Gamma(k, k+p+q) = -\text{Tr}\{S(k)\Gamma S^T(k+p+q)C\Gamma\}$, где $C = \gamma_2\gamma_0$, S^T — транспонированная матрица. В частности, в модели ККБ в псевдоскалярном и скалярном дикварковом каналах (см. определение (86))

$$\tilde{\Pi}^{\pi,\sigma} = \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} \frac{E_p E_q - \mathbf{p}\mathbf{q} \mp M_p M_q}{\varepsilon^2 - (E_p + E_q)^2}.$$

По сравнению с кварк-антикварковой парой здесь, как известно, притяжение возникает в антитриплетном ($\bar{3}$) канале*, причем константа связи эффективного взаимодействия в N_c раз слабее по сравнению с кварк-антикварковым взаимодействием. Принимая во внимание этот факт, для энергии π - и σ -мезонов (с дикварковым спариванием) получим

$$\varepsilon_{\pi,\sigma}^2 = (E_p + E_q)^2 - \frac{2G}{N_c} \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} (E_p E_q \mp M_p M_q - \mathbf{p}\mathbf{q}). \quad (99)$$

Можно сказать, что π - и σ -возбуждения в дикварковом канале как бы поменялись местами (сравни с (96)). Подобно мезонным полям в кварк-антикварковом канале можно ввести нелокальные дикварковые мезонные поля и определить их взаимодействие с кварками. Векторный и аксиал-векторный каналы могут быть рассмотрены аналогично кварк-антикварковому случаю, но мы не приводим детали этих вычислений. Отметим также, что, по-видимому, и мультикварковые системы также будут связанными через дикварковый канал.

Еще одним способом изучения мезонных наблюдаемых, как известно, является процедура бозонизации. Однако в случае нелокального взаимодействия в ней обнаруживается произвол, связанный с формфактором. Чтобы

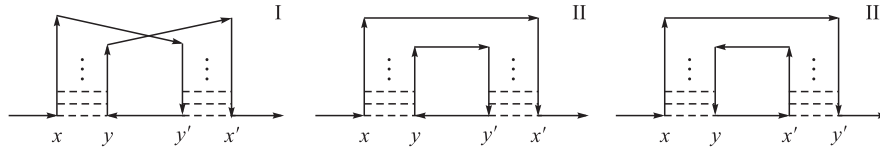
*Поляризационный оператор здесь имеет знак, противоположный кварк-антикварковому каналу. Проекция композиции цветовых генераторов на антитриплетный канал входит с отрицательным знаком, что соответствует притяжению.

пояснить ситуацию, введем упрощенные обозначения. Член взаимодействия входит в виде $\exp(-FG(\bar{q}q)^2/2)$, где F — формфактор, G — константа взаимодействия. Экспоненту соответствующего гауссовского интеграла можно представить в форме $\exp(-\sigma^2/(2GF^\alpha))$, с некоторым вспомогательным параметром α . При этом вспомогательное интегрирование будет проводиться по переменной $[\sigma/(G^{1/2}F^{\alpha/2}) - F^{1/2}G^{1/2}\bar{q}q]$. В сущности, параметр α может быть произвольным числом, так как обычно нормировкой гауссовского интеграла пренебрегают. В [26] мы пользовались $\alpha = 0$. При таком выборе мезонные наблюдаемые ((96), (99), а также их аналоги в векторном и аксиал-векторном каналах) воспроизводятся для ряда наборов импульсов, но в целом обнаруживается существенное неудобство, связанное с неопределенностью извлечения квадратного корня обобщенной функции. Следствием этого были затруднения в определении константы пионного распада f_π . Как мы продемонстрировали выше, в лестничном приближении эта трудность не возникает, поскольку определена константа пион-кваркового взаимодействия g_π , и полюсная особенность эффективного взаимодействия разрешена (факторизована) в явной форме путем введения вспомогательного мезонного поля. Численный анализ с параметрами, которые мы применяли в [26], показывает, что приемлемое значение f_π можно получить при существенном относительном движении кварка и антикварка, $|\mathbf{p}| \sim G$, см. ниже. В литературе встречаются также варианты с $\alpha = 1$. Мезонные наблюдаемые изучать при этом крайне затруднительно даже в модели ККБ, поскольку в этом случае не проявляются свойства формфактора, регуляризующие поляризационный оператор.

На первый взгляд трудно увидеть связь модели ККБ и модели с линейным потенциалом. Но различия квазичастиц в этих моделях могут оказаться в целом несущественными. Линейно растущая часть $F \sim 1/\mathbf{k}^4$ (в импульсном представлении) не оказывает влияния при больших импульсах, и поведение динамической массы определяется в этой области импульсов «кулоновским» взаимодействием $F \sim \alpha(\mathbf{k})/\mathbf{k}^2$. Подобная модель весьма эффективна в описании резонансов, построенных из тяжелых кварков. Если константа связи модели уменьшается недостаточно быстро, то требуется вводить обрезание наподобие модели НИЛ. Если же рассматривается интегрируемый случай, то квазичастица определена для любого импульса. В [40] приведена (регуляризованная) энергия для модели с конфайнирующим потенциалом, которая качественно согласуется с законом дисперсии квазичастицы в модели ККБ, приведенном нами выше. Расходимость энергии, отмечавшаяся в работе [40], не связана с линейно растущим потенциалом, а обусловлена разрывностью средней энергии как функции токовой массы, см. [11]. Можно заключить, что в тех случаях, когда удастся получить осмысленные решения уравнения на динамическую массу кварка (22), одночастичные спектры моделей в целом идентичны, и надежда на проявление каких-то особенностей, которые запрещали бы одночастичное состояние, не оправдывается. Любопытным представляется

также то, что удерживающие свойства демонстрирует модель со взаимодействием, выраженным в самой слабой форме. Притягивающее потенциальное поле может только усиливать эффекты связанных состояний. В аналогичную сторону действует и переход к более локализованному формфактору (в асимптотике к δ -образному формфактору, характерному для модели НИЛ). Создается впечатление, что собственно кварковая составляющая некоторым образом нивелируется в тех каналах, где проявляются связанные состояния, ведь эффективные вершины (97), (98) (а также их аналоги в дикварковых каналах) всегда сингулярны, при любых импульсах частиц. Другими словами, эффективная матрица рассеяния квазичастиц оказывается сингулярной, за исключением тензорного канала, где она тривиальна. Можно заключить, что в случае доминирования потенциала успешное описание связанного состояния достигается путем использования нерелятивистского приближения, а в случае корреляций появляется выделенная система отсчета, связанная с конденсатом.

П. В1. Влияние мезонов. Здесь мы хотели бы отметить еще один интересный момент, связанный с нелокальной моделью ККБ. Существует укоренившееся мнение, что влияние мезонов на свойства кварков хотя и важно, но в целом незначительно и вызывает эффекты на уровне 10 % ($1/N_c$ -разложение). Это заключение базируется на модели НИЛ [41], в которой фактически оперируют с локальным взаимодействием. Продemonстрируем, что для взаимодействия с явно выраженной нелокальностью могут проявиться дополнительные возможности. В таких моделях помимо стандартных диаграмм II, III, которые



дают вклад и в случае локального взаимодействия, имеется дополнительная диаграмма вида I. На рисунке штриховыми линиями обозначены формфакторы и подразумевается суммирование (вставка) соответствующих лестничных диаграмм. Диаграмма I — непланарная. Многоточие на всех графиках подразумевает непрерывное заполнение графика штриховыми линиями. Диаграммы I и II отвечают двум возможным вариантам спаривания, возникающим в дикварковом канале, с вершиной взаимодействия с нелокальным дикварковым полем D_ρ (\bar{D}_ρ), например:

$$g_D(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \bar{q}_{i\alpha}(t, \mathbf{x}) \frac{i\varepsilon^{\rho ik}}{\sqrt{2}} \Gamma_{\alpha s}^A C_{s\gamma} \bar{q}_{k\gamma}(t, \mathbf{y}) \bar{D}_{\rho A}(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

$$g_D(\partial_{\mathbf{y}}, \partial_{\mathbf{x}}) q^{l\delta}(t, \mathbf{x}) \frac{i\varepsilon^{\rho lj}}{\sqrt{2}} C_{\delta r} \Gamma_{r\beta}^A q^{j\beta}(t, \mathbf{y}) D_A^\rho(t; \mathbf{y}, \mathbf{x})$$

(и также аналогичные вершины с переставленными \mathbf{x} и \mathbf{y}). Хронологическое произведение дикваркового поля имеет вид

$$\langle TD_{\rho A}(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) D_B^\lambda(t; \mathbf{x}', \mathbf{y}') \rangle \sim \delta_\rho^\lambda \delta_{AB} \frac{i}{\varepsilon^2 - \varepsilon_A^2},$$

причем, как мы упоминали выше, возможны два варианта спаривания, связывающие точки \mathbf{x} , \mathbf{x}' и \mathbf{x} , \mathbf{y}' .

Полная функция Грина кварка \mathcal{S} , как известно, определяется решением уравнения

$$\mathcal{S} = S + S \Sigma S,$$

где S — затравочная функция Грина; Σ — соответствующий поляризационный оператор, который мы продемонстрируем в явном виде в интересующем нас приближении. Можно показать, что и в модели с формфактором вида $F(\mathbf{p}) = \delta(\mathbf{p})$ диаграммы вида II и III ультрафиолетово расходятся (кроме того, наличествует также расходимость по объему V , в котором заключена система, см. также приложение Г). В отличие от них диаграмма I конечна. Эту диаграмму рассмотрим отдельно, поскольку диаграммы II и III сингулярны, и, как это можно проследить из приложения Г, они вызывают также модификацию затравочной константы взаимодействия, что требует дополнительных исследований. Рассмотрим несколько первых членов итерационного ряда для полной функции Грина. Интересующий нас поляризационный оператор в первой итерации имеет вид

$$\begin{aligned} \Sigma_{\alpha\delta}^A = \int \frac{dk_0}{2\pi} i(-1) \Gamma_{\alpha s}^A C_{s\gamma} \left(\frac{1}{\hat{k}_0^T - \hat{\mathbf{p}}^T - M_p} \right)_{\gamma\beta} \times \\ \times C_{\beta r} \Gamma_{r\delta}^A \frac{g_D^A(\mathbf{p}, \mathbf{p}) g_D^A(-\mathbf{p}, -\mathbf{p})}{(k_0 + p_0)^2 - \varepsilon_A^2(-\mathbf{p}, -\mathbf{p})}, \end{aligned}$$

ε_A — энергия для вершины A в дикварковом канале, т. е.

$$\Sigma^A = \int \frac{dk_0}{2\pi} i(-1) \Gamma^A \frac{\hat{k}_0^T - \hat{\mathbf{p}}^T - M_p}{k_0^2 - E_p^2} \Gamma^A \frac{g_D^A(\mathbf{p}, \mathbf{p}) g_D^A(-\mathbf{p}, -\mathbf{p})}{(k_0 + p_0)^2 - \varepsilon_A^2(-\mathbf{p}, -\mathbf{p})}.$$

Импульс кварков на диаграмме всюду одинаков и совпадает с входящим импульсом \mathbf{p} . В псевдоскалярном и скалярном каналах имеем

$$\begin{aligned} \Sigma^A = g_A^2 [a_A \hat{p}_0 + b_A (\hat{\mathbf{p}} - M_p)], \\ a_A = \frac{1}{2\varepsilon_A} \frac{1}{p_0^2 - (E_p + \varepsilon_A)^2}, \quad b_A = a_A \frac{E_p + \varepsilon_A}{E_p}, \end{aligned}$$

$g_A^2 = g_D^A(\mathbf{p}, \mathbf{p}) g_D^A(-\mathbf{p}, -\mathbf{p})$, индекс A следует понимать как π , σ , где энергии мезонов в дикварковом канале даются выражениями (99). Из формулы (99)

можно видеть, что $g_\pi^2 = 0$ (поскольку кварки на диаграмме имеют одинаковый импульс). Поэтому влияние на кварки в этом случае осуществляется только σ -мезоном в дикварковом канале. Непосредственные вычисления для вклада первой итерации приводят к

$$\mathcal{S}^{(1)} = [(1 - g_\sigma^2 a_\sigma) \hat{p}_0 - (1 + g_\sigma^2 b_\sigma) (\hat{\mathbf{p}} + M_p)]^{-1},$$

здесь $g_\sigma^2 = 32G_D^2 M_p^2/E_p$. Для сокращения записи формул удобно ввести безразмерные обозначения: $\varepsilon = \varepsilon_\sigma/(4G_D)$, $p = p_0/(4G_D)$, $E = E_p/(4G_D)$, $M = M_p/(4G_D)$. В результате дисперсионное уравнение, которым определяются полюса соответствующей функции Грина $\mathcal{S}^{(1)}$, можно представить в следующем виде:

$$\left\{ \varepsilon [p^2 - (E + \varepsilon)^2] \frac{E^2}{M^2} - E \right\}^2 p^2 - \left\{ \varepsilon [p^2 - (E + \varepsilon)^2] \frac{E^2}{M^2} + E + \varepsilon \right\}^2 E^2 = 0$$

(напомним, кстати (см. (99)), $\varepsilon^2 = 4E^2 - 4M^2/E$). При помощи алгебраических преобразований это уравнение можно привести к виду

$$\left[\left(p^2 - \frac{E^2 + (E + \varepsilon)^2}{2} - \frac{M^2}{E\varepsilon} \right)^2 - \left(E + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 \left(\varepsilon^2 + \frac{4M^2}{E\varepsilon} \right) \right] [p^2 - (E + \varepsilon)^2] = 0.$$

Последний множитель не приводит к полюсной особенности, поскольку сокращается с соответствующим множителем, приходящим в дисперсионное соотношение вместе с a_σ . Итак, полюса определяются решениями уравнений

$$p^2 = \left(E + \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 + \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{M^2}{E\varepsilon} \pm \left(E + \frac{\varepsilon}{2} \right) \left(\varepsilon^2 + \frac{4M^2}{E\varepsilon} \right)^{1/2},$$

откуда можно получить

$$p_{1,2} = E + \frac{\varepsilon}{2} \pm \left(\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{M^2}{E\varepsilon} \right)^{1/2} = E + \frac{\varepsilon}{2} \pm \left(E^2 + \frac{M^2}{E} \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (100)$$

и еще два корня $p_{3,4} = -p_{1,2}$. В безразмерных переменных первая итерация полной функции Грина приобретает вид

$$\mathcal{S}^{(1)} = \frac{(p^2 + a) \hat{p}_0 - (p^2 + b) (\hat{\mathbf{p}} + M)}{(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2)},$$

где $a = (p_1 - E)(p_2 - E) - (p_1 + p_2 - E)^2$, $b = p_1 p_2 (p_1 + p_2 - E)/E$.

На рис. 27 представлены два положительных корня p_1, p_2 (МэВ) дисперсионного уравнения (100) (сплошные кривые) в сравнении с законом дисперсии одного кварка E_p (штриховые кривые). Верхняя штриховая линия отвечает зависимости $3E_p$ (чтобы правильно воспроизводить асимптотику линии p_2). Настройка параметров G (константы четырехфермионного взаимодействия) и токовой массы m (~ 5 МэВ) осуществляется с тем условием, чтобы при нулевом импульсе кварка получалось значение динамической массы кварка в районе 300–350 МэВ, см. [11]. Обращает на себя внимание, что поправка собственной энергии кварка каждой ветви действительно составляет приблизительно 10 %, как это имеет место в модели НИЛ, но самое существенное заключается в том, что помимо стандартной кварковой ветви обнаруживается решение формально примерно с удвоенной (утроенной) динамической массой. По сути диаграмма вида I соответствует радиально-возбужденному кварку.

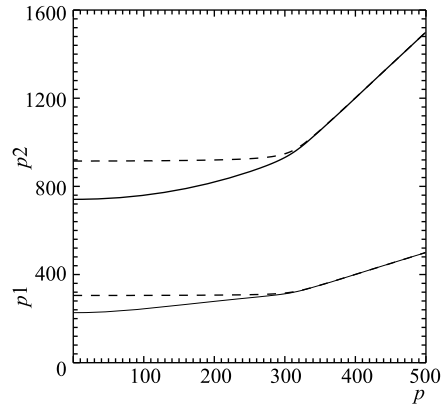


Рис. 27. Два положительных корня дисперсионного уравнения p_1, p_2 (МэВ) (сплошные кривые) в сравнении с законом дисперсии одного кварка E_p (штриховые кривые). Верхняя штриховая линия отвечает зависимости $3E_p$ (чтобы правильно воспроизводить асимптотику корня p_2). Импульс кварка дан в МэВ

Далее была найдена следующая итерация и вычислен поляризационный оператор σ -мезона в дикварковом канале с полученным выражением $\mathcal{S}^{(1)}$ для функции Грина кварка (для диаграммы типа I с совпадающими импульсами кварков в петле). После чего определялся соответствующий закон дисперсии σ -мезона дикваркового канала. Мы опускаем все промежуточные выкладки и демонстрируем результат на рис. 28. Оказывается, имеются три базисные ветви решений для квадрата интересующей нас энергии σ -мезона в дикварковом канале, которые в общем виде являются комплексными числами $\varepsilon^2 = A + iB$. На рис. 28 показаны $A^{1/2}$ (а), $B^{1/2}$ (МэВ) (б). Импульс дается в МэВ. Мы ограничились этими зависимостями, чтобы не загромождать рисунок соответствующими шестью корнями, поскольку, чтобы понять масштаб действительной и мнимой частей энергии ε , для иллюстративных целей этих данных вполне достаточно. На рис. 28, а в той области импульсов, где имеются три корня, мнимые части обращаются в нуль. Там, где происходит слияние каких-либо двух вещественных ветвей, проявляются мнимые части решений. Интересно отметить, что в области малых импульсов мнимую часть приобре-

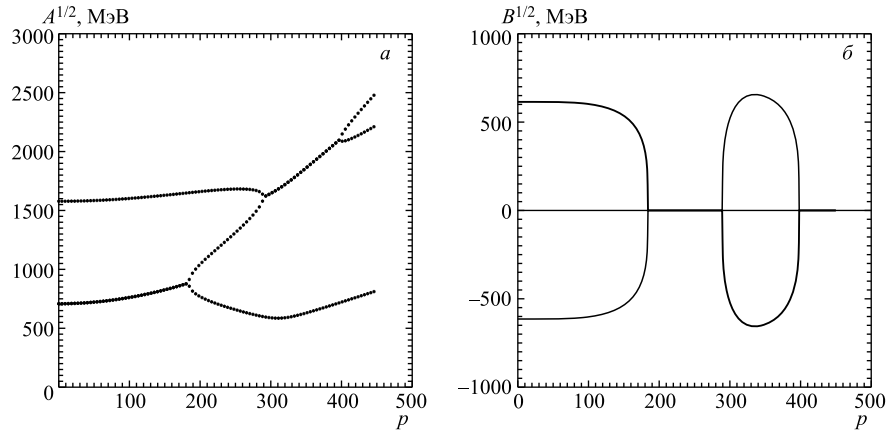


Рис. 28. а) Действительные части решений дисперсионного уравнения $A^{1/2}$ для σ -мезона в дикварковом канале с функцией Грина $S^{(1)}$. б) Соответствующие мнимые части $B^{1/2}$. Дополнительные пояснения см. в тексте. Напомним на всякий случай, что эти данные должны быть дополнены вкладом диаграмм II и III

тает состояние с меньшей массой, порядка 600 МэВ, т. е. оно превращается в состояние, которое соответствует распадающемуся резонансу. Понятно, что последующие итерации, как и полноценное исследование уравнения для полной функции Грина, могут выявить весьма богатую структуру, однако следует отметить, что возможности аналитического исследования соответствующих дисперсионных уравнений почти исчерпываются представленными итерациями. Полученные результаты кажутся достаточно убедительными, чтобы утверждать, что развитая модель может служить разумной моделью адронных резонансов.

П. В2. Константа пионного распада. Распад π -мезона на два лептона описывается произведением двух вершин пион-кваркового и кварк-лептонного взаимодействий:

$$\int dx_0 d\mathbf{x} d\mathbf{y} g_\pi(\partial_{\mathbf{x}}, \partial_{\mathbf{y}}) \pi(x_0; \mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{q}(x_0; \mathbf{x}) i\Gamma q(x_0; \mathbf{y}) \times \\ \times \int dx' \bar{q}(x') i\Gamma^A q(x') l(x') l'(x').$$

Вид вершин Γ и Γ^A определим ниже (кварковые операторы хронологически спарены, образуя соответствующую кварковую петлю $(\bar{q}(x_0; \mathbf{x})q(x'), \bar{q}(x')q(x_0; \mathbf{y}))$). В импульсном представлении

$$i g_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \pi[\varepsilon; \mathbf{p}, \mathbf{q}] \int \frac{dk_0}{2\pi} i \text{Tr} \{ \Gamma^A S(k_0 + \varepsilon; -\mathbf{p}) \Gamma S(k_0; \mathbf{q}) \} l(k_1) l(k_2),$$

где l обозначают поля лептонов. В силу сохранения энергии-импульса для внешнего наблюдателя (нелокальная) частица выглядит, как если бы она обладала энергией ε и импульсом $\mathbf{p} + \mathbf{q}$. Конкретно в интересующей нас ситуации матричный элемент выражается через следующий интеграл:

$$\begin{aligned} R_\mu &= \int \frac{dk_0}{2\pi} i \operatorname{Tr} \{i\gamma_5 \gamma_\mu S(k_0 + \varepsilon; -\mathbf{p}) i\gamma_5 S(k_0; \mathbf{q})\}, \\ R_0 &= -4N_c \int \frac{dk_0}{2\pi} i \frac{(k_0 + \varepsilon) M_q - k_0 M_p}{(k_0^2 - E_q^2)((k_0 - \varepsilon)^2 - E_p^2)}, \\ \mathbf{R} &= -4N_c \int \frac{dk_0}{2\pi} i \frac{\mathbf{p} M_q + \mathbf{q} M_p}{(k_0^2 - E_q^2)((k_0 - \varepsilon)^2 - E_p^2)}. \end{aligned}$$

В результате можно получить

$$\begin{aligned} R_\mu &= N_c \frac{E_p + E_q}{E_p E_q} \frac{M_p + M_q}{(E_p + E_q)^2 - \varepsilon_\pi^2} (P_\mu^\pi + Q_\mu^\pi), \\ P_\mu^\pi &= (\varepsilon_\pi; \mathbf{p} + \mathbf{q}), \\ Q_\mu^\pi &= \frac{M_p - M_q}{M_p + M_q} \left(\varepsilon_\pi \frac{E_p - E_q}{E_p E_q}; \mathbf{q} - \mathbf{p} \right). \end{aligned}$$

Матричный элемент перехода имеет вид

$$\begin{aligned} M &= \frac{G_W}{\sqrt{2}} \cos \theta g_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \frac{1}{[2\varepsilon_\pi(\mathbf{p}, \mathbf{q})]^{1/2}} \times \\ &\quad \times (-i) R_\mu \frac{\bar{u}_\nu(k_\nu)}{(2k_{\nu 0})^{1/2}} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) \frac{u_e(k_e)}{(2k_{e0})^{1/2}}, \end{aligned}$$

где \bar{u}_ν, u_e — поля нейтрино и электрона соответственно. Следует принять во внимание, что оператор рождения нелокального поля $a_\pi^\dagger(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ имеет смысл оператора плотности, и ширину нелокального мезонного состояния с фиксированной энергией ε и полным импульсом $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ мы узнаем, проинтегрировав по внутреннему импульсу $\mathbf{p} - \mathbf{q}$. Проследивая нормировку матричного элемента, можно убедиться, что в итоге ширина приобретает правильную размерность и выражается в МэВ. В моделях, где π -мезон описывается локальным полем, матричный элемент зависит только от переменной P_μ^π . В общем случае может проявиться и вклад вектора Q_μ^π . Ширина π -мезона определяется как

$$\Delta = \int \frac{d(\mathbf{p} - \mathbf{q})/2}{(2\pi)^3} |\bar{M}^2| \delta(P^\pi - k_\nu - k_e) d\mathbf{k}_\nu d\mathbf{k}_e,$$

где

$$|\bar{M}^2| = \frac{G_W^2}{2} \cos^2 \theta g_\pi^2(\mathbf{p}, \mathbf{q}) 8 \frac{2(Rk_e)(Rk_\nu) - R^2(k_e k_\nu)}{2\varepsilon_\pi 2k_{e0} 2k_{\nu 0}}.$$

В частном случае для состояния с полным импульсом $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ вектор $Q_\mu^\pi = 0$. Зная фазовый объем

$$\Phi = \int \frac{d\mathbf{k}_e}{(2\pi)^3} \frac{d\mathbf{k}_\nu}{(2\pi)^3} (2\pi)^4 \frac{\delta(P^\pi - k_\nu - k_e)}{2k_{e0} 2k_{\nu 0}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon_\pi^2 - m_e^2}{2\varepsilon_\pi^2},$$

вычисляя

$$2(Rk_e)(Rk_\nu) - R^2(k_e k_\nu) = N_c^2 \frac{4}{E^2} \frac{4M^2}{(4E^2 - \varepsilon_\pi^2)^2} m_e^2(k_e k_\nu),$$

где $E = E_{\mathbf{p}} = E_{\mathbf{q}}$, $g_\pi^2 = 2G$ ($4E^2 - \varepsilon_\pi^2$) = $2G$ $8\tilde{G}E$, $\tilde{G} = 2N_c G$, и сопоставляя все эти факторы со стандартными выражениями для константы распада, вычисленными в локальной теории, можно окончательно получить

$$f_\pi^2 = \int^{Q^*} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} g_\pi^2 N_c^2 \frac{4}{E^2} \frac{4M^2}{(4E^2 - \varepsilon_\pi^2)^2} = \int^{Q^*} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{2N_c M^2}{E^3}.$$

Импульс Q^* определяется через энергию ε_π . В качестве типичной величины можно принять $Q^* \sim 2\tilde{G}$ ($E \sim 2\tilde{G}$, $M \sim 2\tilde{G}$), тогда $f_\pi^2 \sim N_c(2\tilde{G})^2/(3\pi^2)$ (для нашего выбора параметров $f_\pi \sim 200$ МэВ).

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Модель ККБ предоставляет нам еще одну интересную возможность проследить связь между наблюдаемой и затравочной константами взаимодействия во всем диапазоне передаваемой энергии. Несмотря на свой кажущийся «игрушечным» вид, модель ККБ является вполне полноценной теорией поля, со всеми присущими таковой атрибутами, в частности, расходимостями. Мы отмечали в [26], что помимо регулярных диаграмм, с помощью которых были получены результаты для связанных мезонных состояний (см. примеры в разделе, посвященном поляризованному оператору, и приложение В), имеются сингулярные диаграммы, которые расходятся как ультрафиолетово, так и инфракрасно. Конкретно в этой работе мы рассматриваем ряд диаграмм, приводящих к модификации затравочных констант связи в скалярном и псевдоскалярном секторах (см. рис. 29, на котором показаны начальные члены ряда теории возмущений). Мы изобразили четырехфермионное взаимодействие, подчеркнув его нелокальный характер, как произведения двух цветовых токов, сосредоточенных в точках x и y . Как неоднократно отмечалось, в модели ККБ все интегрирования по импульсам факторизуются, и в качестве актуальной переменной, по которой производится интегрирование в диаграммах, выступает только энергия квазичастицы (виртуальной квазичастицы), и

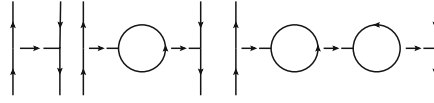


Рис. 29. Первые члены ряда теории возмущений для наблюдаемой константы связи

задача фактически становится одномерной, т. е. в этом смысле кажется самой простой.

Будем далее полагать, что во всех виртуальных процессах участвуют квазичастицы с динамической массой, соответствующей переносимому частицей импульсу, например, \mathbf{p} , $M(\mathbf{p})$ (в этом разделе для краткости записи формул будем употреблять это обозначение для динамической массы кварка). Это предположение (приближение) представляется вполне правдоподобным, если учесть, что в модели ККБ динамическая масса кварка, как это демонстрируется на рис. 2, например, гладко переходит к массе голого (токового) кварка. Нетрудно показать, что ряд теории возмущений, изображенный на рис. 29, может быть выражен посредством поляризационного оператора

$$\tilde{\Pi}^{\pi,\sigma} = 4N_c \int \frac{d\tilde{\mathbf{k}}}{E} \frac{-2E^2 + M^2 \mp M^2}{\varepsilon^2/4 - E^2} \quad (101)$$

(где ε — передаваемая энергия, $E = [\mathbf{k}^2 + M^2(\mathbf{k})]^{1/2}$ — энергия квазичастицы в петле) в виде

$$G_0 = G + VG\tilde{\Pi} + (VG\tilde{\Pi})^2 + \dots, \quad (102)$$

здесь V — объем, в котором заключена система. Объем системы и есть тот самый инфракрасный вклад, о котором мы упоминали выше. Он появляется как следствие нелокальности модели, в виде дополнительной дельта-функции $\delta^3(0)$, стандартная регуляризация вклада которой и приводит к обсуждаемому множителю. Из выражения (101) можно заключить, что интеграл содержит сильную ультрафиолетовую расходимость. Обсуждая выражение для удельной энергии кварка (14), (20), мы упоминали естественный способ придания смысла формально расходящимся выражениям, заключающийся в нормировке их на свободный лагранжиан (гамильтониан). Поступим аналогичным образом (в духе теории перенормировок) и в рассматриваемом случае. Будем полагать, что в качестве наблюдаемого поляризационного оператора Π выступает разность $\tilde{\Pi}$ и оператора Π_0 , который генерируется токовыми кварками с массой m :

$$\Pi = \tilde{\Pi} - \Pi_0. \quad (103)$$

Поскольку динамическая масса кварка при больших импульсах гладко выходит на токовую массу кварка, то понятно, что при достаточно быстром стремлении к токовой массе любая диаграмма теории возмущений будет приводить

к конечному(!) выражению. В частности, в киральном пределе интегралы (автоматически) строго обрезаются на импульсе $2G$. Посмотрим теперь в деталях, как это происходит для рассматриваемого ряда рис. 29.

Итак, представим выражение (101) в следующем виде:

$$\tilde{\Pi} = N_c(\tilde{I} + \varepsilon^2 \tilde{J} - \tilde{K}^{\pi, \sigma}), \quad (104)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{I} &= 2 \int d\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{E}, \quad \tilde{J} = \frac{1}{2} \int d\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{E} \frac{1}{E^2 - \varepsilon^2/4}, \\ \tilde{K}^\sigma &= 2 \int d\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{E} \frac{M^2}{E^2 - \varepsilon^2/4}, \quad K^\pi = 0. \end{aligned}$$

Масса в модели ККБ связана с энергией соотношением $M - m = 2GM/E$. Принимая во внимание определение энергии $E^2 = \mathbf{k}^2 + M^2$, можно преобразовать интеграл по импульсу в интеграл по энергии: $k dk = E dE \left(1 + \frac{2Gm^2}{(E - 2G)^3}\right)$, где $k = \frac{E}{E - 2G} [(E - 2G)^2 - m^2]^{1/2}$. Интегралы \tilde{I} , \tilde{J} , \tilde{K} берутся в элементарных функциях. Для первого интеграла можно получить

$$\begin{aligned} \tilde{I} = \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{\tilde{E}_\Lambda}{2} + 2G - G \frac{m^2}{\tilde{E}_\Lambda^2} \right) \tilde{s}_\Lambda + \frac{4G^2}{3} \frac{\tilde{s}_\Lambda^3}{\tilde{E}_\Lambda^3} - \right. \\ \left. - \frac{m^2}{2} \ln \frac{\tilde{E}_\Lambda + \tilde{s}_\Lambda}{m} - Gm \arccos \frac{m}{E} \right], \end{aligned}$$

где использованы обозначения $\tilde{E} = E - 2G$, $E_\Lambda = [\Lambda^2 + M^2(\Lambda)]^{1/2}$, $\tilde{s}_\Lambda = [(E_\Lambda - 2G)^2 - m^2]^{1/2}$, Λ — формальный верхний предел интегрирования по импульсу. Как мы уже отмечали, физически осмысленные результаты получаются, если вычесть I_0 , посчитанный с «голым» кварком:

$$I_0 = 2 \int d\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{e} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{e_\Lambda s_\Lambda}{2} - \frac{m^2}{2} \ln(e_\Lambda + s_\Lambda) \right),$$

где $e = (k^2 + m^2)^{1/2}$. Полагая обрезающий импульс интегрирования большим, $\Lambda \gg G, m$, раскладываем полученные выражения, выделяя конечный вклад

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} I = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \tilde{I} - I_0 \rightarrow -\frac{1}{\pi^2} \left(\frac{10}{3} G^2 + \frac{\pi}{2} Gm \right).$$

Для интеграла \tilde{J} можно получить

$$\begin{aligned} \tilde{J} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} & \left[\left(1 - \frac{v_1}{2G_-} + \frac{v_2}{(2G_-)^2} - \frac{v_3}{(2G_-)^3} + \frac{v_4}{(2G_-)^4} \right) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E_-} - \right. \\ & - \left(1 - \frac{v_1}{2G_+} + \frac{v_2}{(2G_+)^2} - \frac{v_3}{(2G_+)^3} + \frac{v_4}{(2G_+)^4} \right) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E_+} + \\ & + (v_1 a_1 - v_2 a_2 + v_3 a_3 - v_4 a_4) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E} + (v_2 a_1 - v_3 a_2 + v_4 a_3) \times \\ & \left. \times \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E^2} + (v_3 a_1 - v_4 a_2) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E^3} + v_4 a_1 \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E^4} \right], \end{aligned}$$

где $E_\pm = E \pm \varepsilon/2$, $G_\pm = G \pm \varepsilon/4$, $v_1 = 2G$, $v_2 = 0$, $v_3 = 2Gm^2$, $v_4 = 4G^2m^2$, $a_n = 1/(2G_-)^n - 1/(2G_+)^n$, $n = 1, 2, 3, 4$ (в выражении для K^σ появятся также слагаемые, содержащие $n = 5, 6$). Расходящаяся часть интеграла J^d определяется асимптотиками следующих интегралов:

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E_\pm} & \rightarrow E_\Lambda - 2G_\pm \ln \frac{2E_\Lambda}{m}, \\ \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E} & \rightarrow E_\Lambda, \quad \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E^2} \rightarrow \ln \frac{2E_\Lambda}{m}. \end{aligned}$$

Остальные члены \tilde{J} на фоне расходящихся пренебрежимо малы. Используя определение a_n , можно видеть, что в асимптотике, $\Lambda \rightarrow \infty$, расходимость интеграла является всего лишь логарифмической: $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \tilde{J}^d \rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \ln \frac{2E_\Lambda}{m}$.

Мы нормируем результаты на свободный лагранжиан, и в применении к интегралу J это означает, что следует вычесть вклад

$$J_0 = \frac{1}{2} \int d\tilde{\mathbf{k}} \frac{1}{e} \frac{1}{e^2 - \varepsilon^2/4}.$$

Для расходящейся части можно получить $\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} J_0^d \rightarrow \frac{1}{4\pi^2} \ln \frac{2e_\Lambda}{m}$. Учитывая, что $E_\Lambda \rightarrow e_\Lambda$ при $\Lambda \rightarrow \infty$, видим, что расходящиеся части в $J = \tilde{J} - J_0$

в точности компенсируются. Для регулярной части можно получить

$$J^r = \tilde{J}^r - J_0^r,$$

$$\tilde{J}^r = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(1 - \frac{v_1}{2G_-} + \frac{v_2}{(2G_-)^2} - \frac{v_3}{(2G_-)^3} + \frac{v_4}{(2G_-)^4} \right) A_{-} - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{v_1}{2G_+} + \frac{v_2}{(2G_+)^2} - \frac{v_3}{(2G_+)^3} + \frac{v_4}{(2G_+)^4} \right) A_{+} - \right. \\ \left. - (v_1 a_1 - v_2 a_2 + v_3 a_3 - v_4 a_4) \left(2G + \frac{\pi m}{2} \right) - \right. \\ \left. - (v_2 a_1 - v_3 a_2 + v_4 a_3) + (v_3 a_1 - v_4 a_2) \frac{\pi}{4m} + v_4 a_1 \frac{1}{3m^2} \right],$$

где используются обозначения

$$A_{\pm} = \begin{cases} - [(2G_{\pm})^2 - m^2]^{1/2} \ln \left| \frac{2G_{\pm} - [(2G_{\pm})^2 - m^2]^{1/2}}{m} \right|, & |2G_{\pm}| \geq m, \\ [m^2 - (2G_{\pm})^2]^{1/2} \left(\arcsin \frac{2G_{\pm}}{m} - \arcsin \frac{2G_{\pm} + m}{|2G_{\pm} + m|} \right), & |2G_{\pm}| < m. \end{cases}$$

Для J_0^r можно получить $J_0^r = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} (A_-^0 - A_+^0)$,

$$A_{\pm}^0 = \begin{cases} - \left[\frac{\varepsilon^2}{4} - m^2 \right]^{1/2} \ln \left| \frac{\pm \frac{\varepsilon}{2} - \left[\frac{\varepsilon^2}{4} - m^2 \right]^{1/2}}{m} \right|, & |\varepsilon/2| \geq m, \\ \left[m^2 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right]^{1/2} \left(\arcsin \frac{\pm \varepsilon}{2m} - \arcsin \frac{\pm \frac{\varepsilon}{2} + m}{\left| \pm \frac{\varepsilon}{2} + m \right|} \right), & m > |\varepsilon/2|. \end{cases}$$

Аналогичные результаты могут быть получены для интеграла $K^\sigma = \tilde{K}^\sigma - K_0^\sigma$. Исходный интеграл \tilde{K}^σ может быть представлен в виде, аналогичном формуле (105):

$$\tilde{K}^\sigma = \frac{m^2}{\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(1 - \frac{w_1}{2G_-} + \dots + \frac{w_6}{(2G_-)^6} \right) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E_-} - \right. \\ \left. - \left(1 - \frac{w_1}{2G_+} + \dots + \frac{w_6}{(2G_+)^6} \right) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E_+} + \right. \\ \left. + (w_1 a_1 - \dots - w_6 a_6) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E} + (w_2 a_1 - \dots + w_6 a_5) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E^2} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + (w_3 a_1 - \dots - w_6 a_4) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E^3} + (w_4 a_1 - \dots + w_6 a_3) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E^4} + \\
 & \quad \left. + (w_5 a_1 - w_6 a_2) \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E^5} + w_6 a_1 \int_m^{E_\Lambda} dE \frac{s}{E^6} \right],
 \end{aligned}$$

где $w_1 = 6G$, $w_2 = 12G^2$, $w_3 = 8G^3$, $w_4 = 12G^2 m^2$, $w_5 = 24G^3 m^2$, $w_6 = 16G^4 m^2$. Выделяя регулярную часть, имеем

$$\begin{aligned}
 K_\sigma^r &= \tilde{K}_\sigma^r - K_{0\sigma}^r, \quad \tilde{K}_\sigma^r = \frac{m^2}{\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} \left[\left(1 - \frac{w_1}{2G_-} + \dots + \frac{w_6}{(2G_-)^6} \right) A_- - \right. \\
 & - \left(1 - \frac{w_1}{2G_+} + \dots + \frac{w_6}{(2G_+)^6} \right) A_+ - (w_1 a_1 - \dots - w_6 a_6) \left(2G + \frac{\pi m}{2} \right) - \\
 & \quad - (w_2 a_1 - \dots + w_6 a_5) + (w_3 a_1 - \dots - w_6 a_4) \frac{\pi}{4m} + \\
 & \quad \left. + (w_4 a_1 - \dots + w_6 a_3) \frac{1}{3m^2} + (w_5 a_1 - \dots - w_6 a_2) \frac{\pi}{16m^3} + w_6 a_1 \frac{2}{15m^4} \right], \\
 K_{0\sigma}^r &= \frac{m^2}{\pi^2} \frac{1}{\varepsilon} (A_-^0 - A_+^0).
 \end{aligned}$$

Удобно пользоваться безразмерными переменными $m \rightarrow m/G$, $\varepsilon \rightarrow \varepsilon/G$. Можно видеть, что параметром теории, характеризующим силу взаимодействия, будет выступать комбинация объема и константы связи вида VG^3 , что, вообще говоря, ясно и по соображениям размерности.

Наблюдаемая константа связи G_0 (сумма бесконечного ряда рис. 29, взятая для каждого канала отдельно) выражается через регуляризованный поляризационный оператор как

$$G_0^{\pi, \sigma} = \frac{G}{1 - VG^3 \Pi^{\pi, \sigma}}, \quad (105)$$

причем в этом выражении поляризационный оператор Π представлен в безразмерном виде, исходно он пропорционален квадрату константы связи $\Pi \sim G^2$. Итак, введенные поляризационные операторы свободны от типичных логарифмических особенностей и вовсе не содержат расходящихся частей. Для определенности рассмотрим положительную передачу энергии $\varepsilon > 0$ (случай отрицательных передач энергии, понятно, симметричен). Из представленных формул следует, что в поляризационном операторе содержатся сильные полюсные особенности при энергии $\varepsilon = 4$ (в размерных единицах $\varepsilon = 4G$), при которой переменная G_- обращается в нуль. Окрестность этой точки, как, собственно, и все полученные выражения, заслуживает того, чтобы досконально изучить ее аналитически. Но, чтобы не загромождать текст, мы

в данной работе ограничимся лишь беглым качественным анализом и приведем для наглядности ряд рисунков. Полюсные особенности (максимальная степень равна четырем в интеграле \tilde{J} и шести в интеграле \tilde{K}^σ) приводят к тому, что при энергии $\varepsilon = 4$ наблюдаемая константа связи $G_0^{\pi,\sigma}$ обращается в нуль. Понятно, что в непосредственной окрестности этой точки можно пользоваться теорией возмущений, границы применимости которой определяются параметрами VG^3 и m . Но мы опустим подробный анализ в данной работе.

Также понятно, что в непосредственной близости к этой области могут примыкать (формально) связанные состояния, которые определяются нулями знаменателя выражения (105), поскольку все остальные вклады ничтожно малы по сравнению с полюсными особенностями, и может появиться возможность заработать нуль в знаменателе либо справа, либо слева от обсуждаемой области, в зависимости от чередования знаков в старших полюсных особенностях. На рис. 30 показаны наблюдаемые константы связи G_0^σ , G_0^π соответственно как функции передаваемой энергии ε (в безразмерных переменных). Штриховые кривые получены для $m = 0,9$. Точками показан случай $m = 0,6$. Сплошные линии отвечают случаю $m = 0,4$. Всюду объем системы для определенности положен равным единице: $V = 1$. Точка O отмечает то место, где наблюдаемая константа связи обращается в нуль: $G_0^{\pi,\sigma} = 0$. Сопоставляя кривые, можно наглядно видеть эволюцию некоторого нового («резонансного») состояния, которое проявляется в виде отчетливого, достаточно

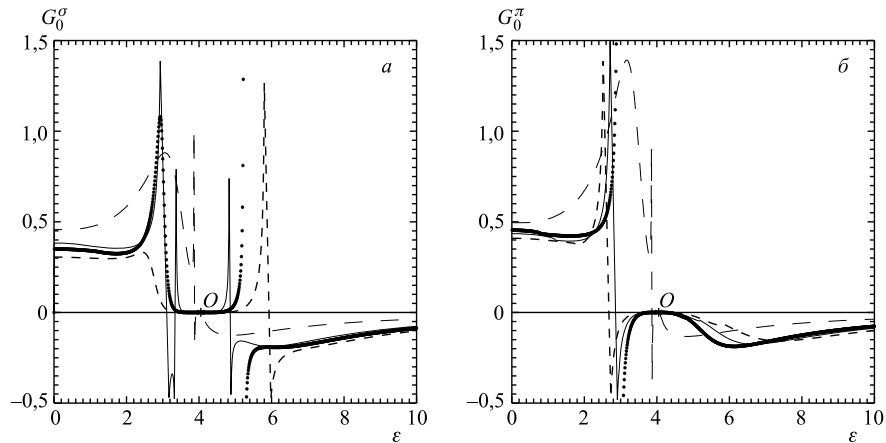


Рис. 30. *а*) Наблюдаемая константа связи G_0^σ как функция передаваемой энергии ε (в безразмерных переменных). Описание см. в тексте. *б*) Наблюдаемая константа связи G_0^π как функция передаваемой энергии ε . Обозначения аналогичны случаю скалярного мезона

широкого пика и превращается в связанное состояние вместе с уменьшением параметра m от значения $m = 0,9$ до $m = 0,4$. (Полюсные особенности на рисунках несколько сглажены по масштабу некоторым искусственным обрезанием, чтобы на их фоне не терялись регулярные «резонансные» структуры.) В случае σ -канала при уменьшении параметра m появляется сразу несколько связанных состояний, см. соответствующую кривую с $m = 0,4$. На рисунках также продемонстрирован вариант, когда параметр m уменьшается до значений, характерных для модели НИЛ, порядка $m \sim 0,01$. Эти данные показаны кривой со штриховкой, выполненной с большим шагом. На рисунках показаны не все связанные состояния. Некоторые из них настолько узки, что их неудобно изобразить в заданном на рисунке масштабе. Этот результат позволяет, в принципе, наблюдать превращение резонанса в связанное состояние.

При увеличении параметра VG^3 зависимость от параметра m становится более резкой (жесткой). В области малых энергий наблюдаемая константа связи сильно уменьшается, что отвечает переходу к качественно другому масштабу, но мы не приводим подобные данные в этой работе. В целом можно заключить, что если ответственный за силу взаимодействия параметр VG^3 мал ($VG^3 < 10$), то наблюдаемая константа связи достаточно плавно зависит от передаваемой энергии вплоть до значений $\varepsilon \sim 3,4$, где начинает сказываться влияние связанных состояний. Как следствие, на таких масштабах может быть получена адекватная картина спонтанного нарушения киральной инвариантности с разумным спектром мезонных наблюдаемых и с правдоподобным сценарием дикварковой конденсации, что вполне вписывается в рамки сегодняшней феноменологии сильных взаимодействий.

Закljučая этот раздел, отметим, что мы рассмотрели энергетическую зависимость константы взаимодействия модели ККБ, полученную путем комбинирования приближения среднего поля и теории возмущений для матрицы рассеяния. Модификация затравочного взаимодействия может оказаться весьма существенной, различной для разных каналов, но наиболее заметно взаимодействие модифицируется в скалярном секторе. Путем применения простой вычитательной процедуры удалось получить конечное выражение для поляризационного оператора (понятно, что аналогичные данные могут быть получены в векторном и аксиал-векторном каналах), выраженное в элементарных функциях. Модель ККБ представляет собой некоторую нелокальную теорию, в которой переход к локальной теории поля может быть, в принципе, осуществлен по непрерывности, путем модификации формфактора (потенциала) взаимодействия в импульсном пространстве, и комбинированием (суперпозицией) элементарных блоков модели ККБ. Полученная энергетическая зависимость задает естественный временной масштаб взаимодействия, и было бы интересным в качестве следующего шага рассмотреть поставленную задачу в приближении среднего поля уже самосогласованным образом, т. е. с учетом энергетической зависимости константы взаимодействия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kolb P. F. et al.* // Phys. Lett. B. 2001. V. 500. P. 232;
Kolb P. F. et al. // Ibid. V. 503. P. 58;
Hirano T. // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. P. 2754;
Hirano T. // Phys. Rev. C. 2002. V. 65. P. 011901;
Hirano T. // J. Phys. G. 2009. V. 36. P. 064031.
2. *Teaney D.* // Phys. Rev. C. 2001. V. 61. P. 006409.
3. *Ландау Л. Д.* // Изв. АН. Сер. физ. 1953. Т. 7. С. 5;
Беленький С. З., Ландау Л. Д. // УФН. 1955. Т. 56. С. 309.
4. *Aamodt K. et al. (ALICE Collab.)* // Phys. Rev. Lett. 2010. V. 105. P. 252302.
Aad G. et al. (ATLAS Collab.) // Phys. Lett. B. 2012. V. 707. P. 330.
5. *Berges J., Blaizot J.-P., Gelis F.* arXiv:1203.2042 [hep-ph].
6. *Herzog C. P.* arXiv:0904.1975 [hep-th];
Mateos D. arXiv:1106.3295 [hep-th].
7. *Giorgini S., Pitaevskii L. P., Strigari S.* // Rev. Mod. Phys. 2008. V. 80. P. 1215;
Bloch I., Dalibard J., Zwirger W. // Ibid. P. 885.
8. *Kovtun P. K., Son D. T., Starinets A. O.* // Phys. Rev. Lett. 2005. V. 94. P. 111601.
9. *Mueller M., Schmalian J., Fritz I.* // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 025301.
10. *Shuryak E., Sulejmanpasic T.* arXiv:1201.5624v3 [hep-ph].
11. *Зиновьев Г. М., Молодцов С. В.* // ТМФ. 2009. Т. 160. С. 444;
Molodtsov S. V., Zinovjev G. M. // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. P. 076001;
Molodtsov S. V., Sissakian A. N., Zinovjev G. M. // Europhys. Lett. 2009. V. 87. P. 61001;
Molodtsov S. V., Sissakian A. N., Zinovjev G. M. // Ukr. J. Phys. 2009. V. 8–9. P. 775.
12. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.* // Phys. Rev. 1961. V. 122. P. 345.
13. *Келдыш Л. В.* Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. ФИАН, 1965;
Kane E. V. // Phys. Rev. 1963. V. 131. P. 79;
Бонч-Бруевич В. Л. Физика твердого тела. М.: Изд-во ВИНТИ, 1965.
14. *Садовский М. В.* Диаграмматика. М.; Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2010;
Sadovskii M. V. Diagrammatics. Singapore: World Sci. 2006.
15. *Fukushima K., Hatsuda T.* // Rep. Prog. Phys. 2011. V. 74. P. 014001.
16. *Kalloniatis A., Nedelko S. N., von Smekal L.* // Phys. Rev. D. 2004. V. 70. P. 094037.
17. *Hatsuda T. et al.* // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 97. P. 122001;
Yamamoto N. et al. // Phys. Rev. D. 2007. V. 76. P. 074001.
18. *Molodtsov S. V., Zinovjev G. M.* // Europhys. Lett. 2011. V. 93. P. 11001;
Molodtsov S. V., Zinovjev G. M. // Phys. Rev. D. 2011. V. 84. P. 036011;
Зиновьев Г. М., Молодцов С. В. // ЯФ. 2012. Т. 75. С. 262.
19. *Hatsuda T., Kunihiro T.* // Phys. Rep. 1994. V. 247. P. 221.

20. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. М.: Изд-во иностр. лит., 1963;
Schweber S. S. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory. Elmsford, N. Y.: Row, Peterson and Co Evanston, 1961.
21. Ландау Л. Д. // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 1058;
Ландау Л. Д. // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 59;
Пайнс Д., Нозиер Ф. Теория квантовых жидкостей. М.: Мир, 1967;
Nozieres P. Theory of Interacting Fermi Systems. Westview Press., 1997;
Leggett A. J. Quantum Liquids. Oxford Univ. Press, 2006.
22. *Luttinger J. M., Ward J. C. // Phys. Rev. 1960. V. 118. P. 1417;*
Luttinger J. M. // Ibid. V. 119. P. 1153.
23. *Tezuka H. // Phys. Rev. C. 1980. V. 22. P. 2585;*
Tezuka H. // Phys. Rev. C. 1981. V. 24. P. 288;
Ваут Г., Чин С. А. // Nucl. Phys. A. 1976. V. 262. P. 537;
Matsui T. // Nucl. Phys. A. 1981. V. 370. P. 369.
24. *Asakawa M., Yazaki K. // Nucl. Phys. A. 1989. V. 504. P. 668.*
25. *Glozman L. Ya. // Phys. Rep. 2007. V. 444. P. 1.*
26. *Зиновьев Г. М., Молодцов С. В. // ЯФ. 2012. № 9;*
Зиновьев Г. М., Волков М. К., Молодцов С. В. // ТМФ. 2010. Т. 161. С. 408;
Molodtsov S. V., Volkov M. K., Zinovjev G. M. arXiv:0812.2666.
27. *Ларкин А. И., Овчинников Ю. Н. // ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1136;*
Де Жен П. Сверхпроводимость металлов и сплавов. М.: Мир, 1968.
28. *Eguchi T., Sugawara H. // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 4257;*
Kikkawa K. // Prog. Theor. Phys. 1976. V. 56. P. 947;
Волков М. К. // ЭЧАЯ. 1986. Т. 17. С. 433.
29. *Carignano S., Nickel D., Buballa M. arXiv:1007.1397 [hep-ph];*
Nickel D. // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 072301;
Basar G., Dunne G. V. // Phys. Rev. Lett. 2008. V. 100. P. 200404;
Kunihiro T., Minami Y., Zhang Z. arXiv:1009.4534 [nucl-th].
30. *Walecka J. D. // Ann. Phys. 1974. V. 83. P. 491;*
Serr F. E., Walecka J. D. // Phys. Lett. B. 1978. V. 79. P. 10;
Джай Н. В., Савушкин Л. Н. // ЭЧАЯ. 1992. Т. 23. С. 847.
31. *Boguta J., Bodmer A. R. // Nucl. Phys. A. 1977. V. 292. P. 413;*
Pinto M. B., Koch V., J. Randrup J. arXiv:1207.5186 [hep-ph];
Bjerrum-Bohr J. J., Mishustin I. N., Dossing T. arXiv:1112.2514 [nucl-th].
32. *Huang K., Stump D. R. // Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 223;*
Friedberg R., Lee T. D. // Phys. Rev. D. 1978. V. 18. P. 2623;
Goldflam R., Willets L. // Phys. Rev. D. 1982. V. 25. P. 1951;
Lübeck E. G. et al. // Phys. Rev. D. 1986. V. 33. P. 234.
33. *Broniowski W., Banerjee M. K. // Phys. Lett. B. 1978. V. 158. P. 335.*

34. *Achasov N. N., Shestakov G. N.* // Phys. Rev. D. 1994. V. 49. P. 5779;
Ачасов Н. Н., Шестаков Г. Н. // УФН. 2011. Т. 181. С. 827.
35. *Сvitanović P.* // Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 1536.
36. *Cahill R. T., Praschifka J., Burden C. J.* // Aust. J. Phys. 1989. V. 42. P. 161.
37. *Ходель В. А., Шагинян В. Р.* // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. С. 488;
Khodel V. A., Shaginyan V. R. // Phys. Rep. 1994. V. 249. P. 1.
38. *Шагинян В. Р., Амусья М. Я., Попов К. Г.* // УФН. 2007. Т. 177. С. 585;
Стишов С. М. // УФН. 2004. Т. 174. С. 853.
39. *Келдыш М. В.* // УФН. 1971. Т. 26. С. 15.
40. *Llanes-Estrada F. J., Cotanch S. R.* // Nucl. Phys. A. 2002. V. 697. P. 303.
41. *Quack E., Klevansky S. P.* // Phys. Rev. C. 1994. V. 49. P. 3283.