

## МЕТОД БАРЬЕРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

*И. Н. Мешков*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

ВВЕДЕНИЕ	769
ЗОНА НАКОПЛЕНИЯ, ПАРАМЕТРЫ СЕПАРАТРИСЫ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ БАРЬЕРОВ	771
ОБЩИЙ СЛУЧАЙ БАРЬЕРОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ	775
Уравнения движения частицы в фазовом пространстве	775
Траектория частиц внутри сепаратрисы	779
НАКОПЛЕНИЕ ЧАСТИЦ (ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ)	782
Фазовые колебания частиц при накоплении	782
Достаточное условие для накопления частиц	784
Необходимое условие для накопления частиц	785
Накопление частиц в присутствии напряжения в инжекционной фазовой области	787
Пульсации барьерного ВЧ-напряжения и паразитные сепаратрисы	789
УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ БАРЬЕРНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ	791
ДВИЖУЩИЕСЯ БАРЬЕРЫ В МЕТОДЕ БАРЬЕРНЫХ ВЧ-НАПРЯЖЕНИЙ	796
Быстрое уменьшение барьеров	798
Адиабатическое уменьшение барьеров	798
ТЕХНИКА БАРЬЕРНЫХ ВЧ-НАПРЯЖЕНИЙ	802
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	803
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	804

## МЕТОД БАРЬЕРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

*И. Н. Мешков*

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Представлен принцип действия систем барьерного ВЧ-напряжения, которые находят применение для накопления и ускорения заряженных частиц в протонных синхротронах-накопителях. Описание дано на примере двух моделей таких систем — с прямоугольными и квазисинусоидальными барьерами. Используется два различных способа описания динамики частиц в синхротронах с барьерным ВЧ-напряжением. Первый из них — «пошаговый» анализ движения частицы в пространстве импульс–фаза — позволяет дать ясное и простое описание физических принципов метода и получить его главные характеристики в аналитической форме. Этот способ, однако, не всегда эффективен. Поэтому в статье представлен и широко используется способ анализа динамики частиц в барьерных системах с помощью решения дифференциальных уравнений фазового движения. Этот способ позволяет производить как вычисления в аналитической форме, так и численное моделирование, что иллюстрируется приведенными примерами.

The main principles of the Barrier Bucket Method of charge particles stacking and acceleration in proton synchrotrons are described. The consideration is done with two models of «rectangular barriers» and «quasi-sinusoidal» ones using different approaches to analysis of particle motion. The first of them — so-called «step by step approach», allows us to give a very clear physical explanation of the method and obtain easily the main characteristics of the method in analytical form. However, that is not always an efficient way. Therefore, the general case of the «barriers» of an arbitrary form is considered as well and differential equations of particle phase motion are derived. This approach gives ample opportunities for analysis and numerical simulations of different phase dynamics regimes of particles in cyclic accelerators. Numerical examples for the method illustration are presented.

PACS: 29.20.dk; 29.27.Ac

### ВВЕДЕНИЕ

Метод барьерных ВЧ-напряжений в циклических ускорителях был предложен Дж. Гриффином [1] и с тех пор достаточно успешно используется для накопления и ускорения частиц в протонных синхротронах (см., например, обзор [2]). Идея метода основана на генерации периодических импульсов ВЧ-напряжения (например, прямоугольной формы), синхронизированных с частотой обращения частиц, что позволяет осуществлять накопление и ускорение частиц в циклических ускорителях. Такие импульсы напряжения генерируются широкополосной ВЧ-системой с резонаторами, нагруженными высокочастотным ферромагнетиком (ферриты, аморфное железо и т. п.).

Интерес к барьерным ВЧ-системам значительно возрос в связи с развитием методов электронного и стохастического охлаждения заряженных

частиц в накопителях — «кулерах». В настоящее время два проекта — «Nuclotron based Ion Collider fAcility» (NICA) [3] в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне и «Facility for Antiproton and Ion Research» (FAIR) [4] в Дармштадте (ФРГ) осуществляют сооружение ускорительных комплексов, в которых метод барьерных ВЧ-систем используется для накопления и ускорения ионов.

Динамика заряженных частиц в циклических ускорителях с барьерными ВЧ-системами описывается в уравнениях, аналогичных уравнениям фазового движения частиц в циклических ускорителях с классическими ускоряющими системами гармонического ВЧ-напряжения [5]. Однако определенная специфика динамики частиц в барьерных системах требует ее специального анализа. Техника численного моделирования, развитая для этой цели [2, 6–14], очень результативна и дает практически важные результаты. Программное обеспечение, созданное для этих задач, экспериментально тестировано на пучках частиц в синхротронах-накопителях как без использования методов охлаждения [8], так и с их применением [10–14]. Тем не менее численное моделирование может дать ответы «да» или «нет», в отличие от аналитических методов, которые позволяют получить различного рода параметрические зависимости, что особенно важно при проектировании новых ускорителей и модернизации действующих.

Цель данной статьи — описание физических принципов метода барьерных ВЧ-напряжений и различных вариантов его применения, а также представление математического формализма, удобного для аналитических расчетов барьерных систем.

Широко принят способ описания динамики частиц в ускорителях с барьерными системами, основанный на анализе изменения энергии частицы при изменении ее фазы в потенциальном поле барьерных напряжений (см., например, [6, 15]). Более ясное физическое объяснение принципа метода может быть дано, на наш взгляд, с помощью анализа движения частиц в пространстве импульс–фаза, с использованием уравнений движения частицы. В обоих способах рассматривается только «продольное» движение частиц, вдоль равновесной траектории, без анализа динамики поперечного к ней движения. Поэтому в статье термин «импульс» означает, строго говоря, его продольную компоненту, которая в лабораторной системе много больше поперечных компонент.

В простейшем случае стационарных барьерных напряжений (рис. 1) в пространстве импульс–фаза образуются две зоны — устойчивого и неустойчивого движения. Анализ устойчивости фазового движения проще и яснее начать, используя подход «пошагового» описания, что и сделано в разд. 1 для частного случая барьерных импульсов прямоугольной формы. Общий случай барьеров произвольной формы представлен в остальных разделах статьи, где рассмотрена динамика частиц в режимах накопления и ускорения.

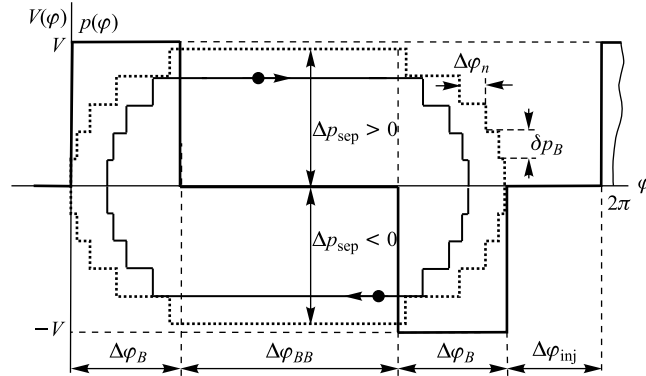


Рис. 1. Схема движения частицы в фазовом пространстве  $p(\varphi)$  между импульсами барьерного напряжения прямоугольной формы (жирная сплошная линия); тонкая сплошная линия — стабильная фазовая траектория  $p(\varphi)$ ; точечная — сепаратриса; функции  $p(\varphi)$  и  $V(\varphi)$  даны в произвольных единицах;  $\varphi_s = 2\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BV}$

Численные примеры, приведенные в статье, рассчитаны для ионного коллайдера, разрабатываемого в проекте NICA [3]. Большинство примеров дано для барьерных импульсов прямоугольной формы, использование которых в барьерных ВЧ-системах имеет определенные достоинства с точки зрения технического осуществления. Кроме того, значительно упрощаются аналитические расчеты. Несколько примеров приведены для квазисинусоидальных барьеров.

### 1. ЗОНА НАКОПЛЕНИЯ, ПАРАМЕТРЫ СЕПАРАТРИСЫ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ БАРЬЕРОВ

Рассмотрим движение частиц в фазовом интервале  $\{0, \varphi_s\}$  (рис. 1) в отсутствие ускорения (т. е. в постоянном магнитном поле  $B(t) = B = \text{const}$ ). Как будет показано ниже, фазовая траектория частицы при определенных условиях имеет форму замкнутой петли, и частицы могут быть накоплены внутри этого фазового интервала. Внутри барьера частица на каждом обороте получает изменение импульса

$$\Delta p_{\text{turn}}(\varphi) = \frac{ZeV(\varphi)}{\beta c}, \quad V(\varphi) = Vf(\varphi),$$

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B, \\ 0, & \Delta\varphi_B < \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BV}, \\ -1, & \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BV} < \varphi \leq \varphi_s, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\varphi_s = 2\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BV}.$$

Здесь  $\beta c$  — скорость равновесной частицы в синхротроне-накопителе;  $Ze$  — заряд частицы (иона);  $c$  — скорость света;  $e$  — элементарный заряд. За  $n$  оборотов в отрицательном барьере импульс частицы уменьшается на

$$\Delta p_n = \Delta p - n\delta p_B, \quad \delta p_B = \frac{ZeV}{\beta c}. \quad (1.2)$$

Здесь  $\Delta p$  — отклонение импульса частицы от равновесного значения  $p_s$  ( $\Delta p_s = 0$ ). Ниже, когда рассматривается случай квазисинусоидальных барьеров, формула (1.2) также используется, но символ  $V$  в ней означает амплитуду барьерного напряжения.

Как следует из (1.2), при

$$n = N \equiv \frac{\Delta p}{\delta p_B} \gg 1 \quad (1.3)$$

отклонение импульса  $\Delta p_n$  меняет знак, и частица изменяет направление движения в фазовом пространстве. При входе в положительный барьер частица ускоряется и, соответственно, ее отклонение по импульсу алгебраически возрастает. После следующих  $N$  оборотов  $\Delta p_n$  становится положительным, и движение частицы снова меняет направление. За  $N$  оборотов внутри каждого из двух барьеров сдвиг частицы по фазе равен

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_N &= \sum_{n=1}^N \Delta\varphi_n, \\ \Delta\varphi_n &= \eta_\omega \omega_s \frac{\Delta p_n}{p_s} T_s = 2\pi\eta_\omega \frac{\Delta p_n}{p_s}, \\ \eta_\omega &= \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь индексом  $s$  обозначены параметры равновесной частицы;  $\eta_\omega$  — коэффициент зависимости частоты обращения от ее энергии (так называемый slippage factor);  $\gamma$  — лоренц-фактор частицы;  $\gamma_{tr}$  — его значение для критической энергии частицы (transition energy);  $\omega_s/2\pi$  и  $T_s$  — частота и период обращения частицы в накопителе соответственно. Здесь рассматривается для определенности случай частиц с энергией ниже критического значения, т. е.

$$\gamma < \gamma_{tr}, \quad \eta_\omega > 0.$$

Подставив в (1.4) значение  $\Delta p_n$  (1.2) и вычислив сумму по  $n$ , находим фазовый сдвиг за  $N$  оборотов:

$$\Delta\varphi_N = \frac{2\pi\eta_\omega}{p_s} \left( N\Delta p - \frac{N(N+1)}{2}\delta p_B \right).$$

В дальнейшем удобно использовать параметр, равный фазовому сдвигу, соответствующему  $\delta p_B$ :

$$\delta\varphi_B = 2\pi\eta_\omega \frac{\delta p_B}{p_s} = 2\pi\eta_\omega \frac{ZeV}{\beta^2\gamma A m_n c^2}. \quad (1.5)$$

Здесь  $A$  — атомный вес частицы,  $m_n$  — масса нуклона в ядре  $A$ . Подставив  $\Delta p = N\delta p_B$  в формулу для  $\Delta\varphi_N$  выше, имеем

$$\Delta\varphi_N = N(N+1) \frac{\delta\varphi_B}{2}. \quad (1.6)$$

Частица не пересекает барьер и, соответственно, продолжает движение по стабильной (замкнутой) траектории, если

$$\Delta\varphi_N \leq \Delta\varphi_B.$$

Это необходимое условие существования сепаратрисы, внутри которой фазовые траектории частиц замкнуты. Подставляя сюда  $\Delta\varphi_N$  из (1.6), находим число оборотов частицы на сепаратрисе:

$$N = \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + 8 \frac{\Delta\varphi_B}{\delta\varphi_B}} - 1 \right) \approx \sqrt{2 \frac{\Delta\varphi_B}{\delta\varphi_B}}, \quad \Delta\varphi_B \gg \delta\varphi_B. \quad (1.7)$$

(См. замечания к формуле (1.12) ниже.) Отклонение импульса на сепаратрисе между барьерами, очевидно, равно (см. рис. 1 и уравнение (1.3))

$$|\Delta p|_{\text{sep}} = N\delta p_B. \quad (1.8)$$

Отсюда, с учетом значения  $\delta p_B$  (1.2), следует выражение для относительного отклонения импульса на сепаратрисе между барьерами («высота» сепаратрисы):

$$\left| \frac{\Delta p}{p_s} \right|_{\text{sep}} = \frac{1}{\pi\eta_\omega} \sqrt{\frac{\Delta\varphi_B \delta\varphi_B}{2}} = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{Z}{A} \frac{eV}{\eta_\omega \gamma m_n c^2} \frac{\Delta\varphi_B}{\pi}}. \quad (1.9)$$

Следует отметить, что последнее выражение в (1.9) меньше в  $\sqrt{2}$  классического выражения для случая гармонического ВЧ-напряжения. Переписав (1.9) для высоты барьера  $V$ , находим

$$V \geq \frac{A}{Z} \eta_\omega \beta^2 \gamma \frac{m_n c^2}{e} \frac{\pi}{\Delta\varphi_B} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{sep}}^2. \quad (1.10)$$

В интервале фаз  $\Delta\varphi_{BB}$  фазовый сдвиг частицы за оборот, очевидно, постоянен и равен (ср. (1.4))

$$\delta\varphi_{BB} = 2\pi\eta\omega \left| \frac{\Delta p}{p} \right|_{\text{sep}}. \quad (1.11)$$

В результате период обращения частицы по сепаратрисе

$$T_{\text{sep}} = 2T_s \left( \frac{\Delta\varphi_{BB}}{\delta\varphi_{BB}} + 2N \right) = T_s \sqrt{\frac{2}{\Delta\varphi_B \delta\varphi_B}} (4\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}). \quad (1.12)$$

Таким образом,  $T_{\text{sep}}$  в системе с прямоугольными барьерами имеет конечную величину, в отличие от случая гармонического ВЧ-напряжения [5]. Это результат использования идеализированной формы барьеров — бесконечно большой крутизны фронтов (см. (1.1)). Для реальных импульсов барьерного напряжения с фронтами конечной длительности период движения по сепаратрисе имеет бесконечную длительность. Мы вернемся к этой проблеме в подразд. 2.2 (см. (2.22)). Тем не менее результаты, полученные для прямоугольных барьеров с бесконечно короткими фронтами, представляют интерес для практических оценок (рис. 2).

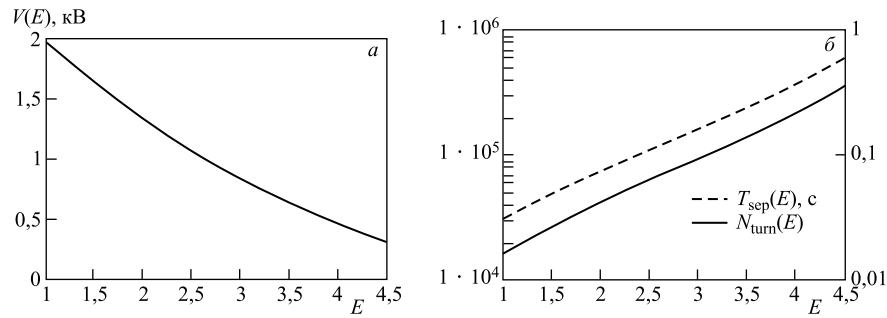


Рис. 2. Зависимость параметров сепаратрисы от энергии ионов (ГэВ/нукл.): а) амплитуда барьерного ВЧ-напряжения  $V(E)$  (1.10); б) число оборотов (сплошная кривая, левая ось ординат) и период обращения (штриховая кривая, правая ось ординат) ионов золота  $^{197}\text{Au}^{79+}$  при движении по сепаратрисе; параметры накопителя и ВЧ-системы: периметр  $C_{\text{Ring}} = 503$  м,  $\gamma_{\text{tr}} = 7,09$ ,  $|\Delta p/p_s| = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $\Delta\varphi_B = \pi/10$ ,  $\Delta\varphi_{BB} = 1,3\pi^*$

Для дальнейшего полезно привести еще одно выражение для параметра  $\delta\varphi_B$  (1.5):

$$\delta\varphi_B = \pi^2 \eta^2 \frac{2}{\Delta\varphi_B} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{sep}}^2. \quad (1.13)$$

\* Эти параметры использованы в дальнейшем во всех численных примерах.

## 2. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ БАРЬЕРОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

**2.1. Уравнения движения частицы в фазовом пространстве.** Из предыдущего рассмотрения нетрудно получить уравнения фазового движения частицы в системе барьерного ВЧ-напряжения, аналогичные известным уравнениям для системы гармонического напряжения (см. (1.1) и (1.4)):

$$V(\varphi) = Vf(\varphi), \quad |f(\varphi)| \leq 1, \quad (2.1)$$

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{ZeV}{C_{\text{Ring}}} f(\varphi), \quad (2.2)$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \omega - \omega_s = \omega_s \eta_\omega \frac{p(t) - p_s(t)}{p_s}. \quad (2.3)$$

Здесь  $V = V_{\text{max}}(\varphi)$ ,  $f(\varphi)$  — функция барьерного напряжения,  $C_{\text{Ring}} = \beta c T_s$  — периметр накопителя. Эти уравнения справедливы как в случае постоянного магнитного поля накопителя, так и при изменяющемся во времени (например, при ускорении частиц). Последний режим рассмотрен в разд. 4.

Введя безразмерные параметры

$$\psi = \sqrt{\delta\varphi_B} \frac{t}{T_s}, \quad Y(\psi) = \frac{2\pi\eta_\omega}{\sqrt{\delta\varphi_B}} \frac{\Delta p(\psi)}{p_s}, \quad (2.4)$$

где параметр  $\delta\varphi_B$  определен в (1.5), (1.13), получим из (2.2), (2.3) следующие уравнения:

$$\frac{dY}{d\psi} = f(\varphi), \quad (2.5)$$

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = Y, \quad (2.6)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\psi^2} = f(\varphi). \quad (2.7)$$

Переменные  $Y(\psi)$  и  $\varphi(\psi)$  являются канонически сопряженными, и гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \frac{Y^2}{2} - \int f(\varphi) d\varphi. \quad (2.8)$$

Другими словами,

$$W(\psi) = Y^2/2 \quad \text{и} \quad U(\varphi) = - \int f(\varphi) d\varphi \quad (2.9)$$

представляют собой кинетическую и потенциальную энергию частицы в пространстве переменных  $Y(\psi)$  и  $\varphi(\psi)$ , которые являются аналогами импульса и координаты соответственно, а параметр  $\psi$  — аналогом времени. Из уравнений (2.5)–(2.7) следует, что  $Y(\psi)$  и  $\varphi(\psi)$  зависят только от формы функ-



ции  $f(\varphi)$ , т.е. от формы барьерного напряжения. В этом смысле эти функции представляют собой *универсальное решение* уравнений (2.5)–(2.7). Выражение (2.8) позволяет записать общее решение этих уравнений в переменных  $Y(\varphi)$ ,  $\varphi$ :

$$Y(\varphi) = \pm \sqrt{Y_0^2 + 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} f(\phi) d\phi}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (2.10)$$

Здесь  $Y_0 = Y(\varphi_0)$ , знак «+» следует выбрать при  $Y(\varphi_0) > 0$ , и наоборот.

Формулу для гамильтониана (2.8) легко получить, если записать уравнение (2.5) в виде

$$\frac{dY}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\psi} = f(\varphi)$$

и подставить сюда  $d\varphi/d\psi$  из (2.6). Тогда, после интегрирования, приходим к (2.8), где  $\mathcal{H}$  — постоянная интегрирования.

Следует отметить, что параметр  $\delta\varphi_B$  (1.5) может быть записан в виде  $\delta\varphi_B = (\Omega_{\text{synch}} T_s)^2$ , где  $\Omega_{\text{synch}}$  — частота линейных синхротронных колебаний частицы в поле гармонической ВЧ-системы при номере гармоники  $h = 1$ . Поэтому можно сказать, что  $\psi$  является фазой синхротронных колебаний частицы в барьерной ВЧ-системе, а (2.7) является аналогом известного уравнения синхротронных колебаний в гармонической ВЧ-системе [5, гл. IV].

Форма потенциальной функции  $U(\varphi)$  на рис. 3 показывает существование потенциальной ямы, где возможно накопление частиц. Условие захвата частиц в потенциальную яму области накопления, или условие стабильности фазового движения частиц, очевидно, есть

$$\mathcal{H} \leq 0.$$

Фазовые траектории захваченных частиц имеют, как уже было сказано выше, форму замкнутых кривых. Это утверждение справедливо и в случае барьеров произвольной формы. Точку поворота  $\varphi_{\text{max}}$  можно найти из уравнения (2.10), выбрав  $Y_0 = 0$ . В этом случае уравнение для  $\varphi_{\text{max}}$  имеет вид

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_{\text{max}}} f(\varphi) d\varphi = 0. \quad (2.11)$$

Для прямоугольных барьеров одинаковой амплитуды  $V$  (рис. 1, 3, а) это дает

$$\varphi_{\text{max}} = 2\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} - \varphi_0. \quad (2.12)$$

Отсюда следует фазовый размер сепаратрисы ( $\varphi_0 = 0$ )

$$\varphi_{\text{max}} = 2\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB},$$

что совпадает с результатом разд. 1.

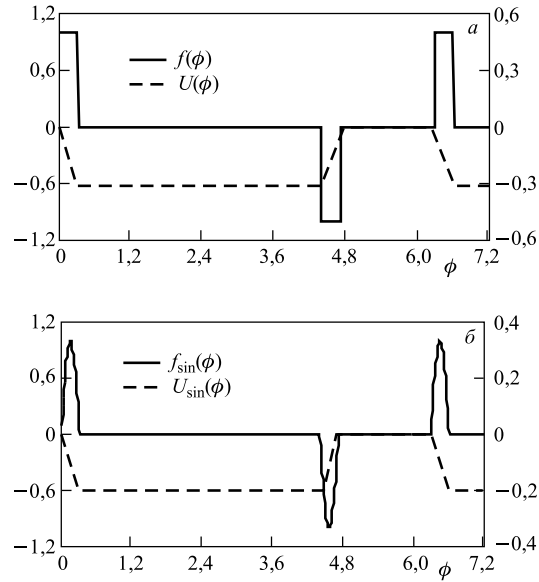


Рис. 3. Функции  $f(\varphi)$  (сплошные кривые, левые оси ординат) и  $U(\varphi)$  (штриховые, правые оси ординат) для прямоугольных (а) и квазисинусоидальных (б) барьеров;  $\Delta\varphi_B = \pi/10$ ,  $\Delta\varphi_{BB} = 1,3\pi$

При  $\mathcal{H} > 0$  частица, инжектированная в интервал фаз  $\Delta\varphi_{inj}$  ( $U(\varphi_{inj}) = 0$ ) с ненулевым импульсом  $Y_{inj} > 0$ , проходит область накопления и продолжает двигаться вдоль абсциссы фазового пространства неопределенно долго. Для захвата такой частицы в потенциальную яму области накопления необходимо уменьшить ее полную энергию до уровня  $\mathcal{H} < 0$ , т. е. применить какой-либо механизм *охлаждения*. Эта процедура рассмотрена в разд. 3.

Уравнение (2.7) имеет известное общее решение для случая произвольной функции  $f(\varphi)$ :

$$\psi(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\chi}{\sqrt{2 \int_{\varphi_0}^{\chi} f(\xi) d\xi + (\varphi'(\varphi_0))^2}}, \quad \psi(\varphi_0) = 0. \quad (2.13)$$

Здесь, как и прежде,  $\varphi_0$  — начальное значение фазы. В случае кусочно-гладкой функции  $f(\varphi)$ , как это имеет место для барьерного ВЧ-напряжения, нужно решить уравнение (2.7) последовательно для каждого «гладкого» отрезка, сшивая решение на границах отрезков. Простейший способ сделать это состоит в вычислении первого интеграла уравнения (2.7), который, в свою очередь, равен знаменателю подынтегрального выражения в (2.13). Одновременно это есть уравнение фазовой траектории (2.10) в перемен-

ных  $(Y, \varphi)$  как в случае  $\mathcal{H} \leq 0$ , так и при  $\mathcal{H} > 0$  в (2.8). В частности, при  $Y_0 = 0$  решение (2.10) для *прямоугольных барьеров* в области накопления ( $\mathcal{H} \leq 0$ ) имеет вид

$$Y(\varphi) = \pm \begin{cases} \sqrt{2(\varphi - \varphi_0)}, & \varphi_0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B, \\ \sqrt{2(\Delta\varphi_B - \varphi_0)}, & \Delta\varphi_B \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}, \\ \sqrt{2(2\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} - \varphi_0 - \varphi)}, & \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} \leq \varphi \leq \varphi_s - \varphi_0, \end{cases} \quad (2.14)$$

значение  $\varphi_s$  определено в (1.1).

Функция  $f(\varphi)$  для квазисинусоидальных барьеров (рис. 3, б) имеет вид

$$f(\varphi) = \pm \begin{cases} \sin\left(\pi \frac{\varphi}{\Delta\varphi_B}\right), & 0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B; \\ 0, & \Delta\varphi_B \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}; \\ -\sin\left(\pi \frac{\varphi - (\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB})}{\Delta\varphi_B}\right), & \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} \leq \varphi \leq \Delta\varphi_s. \end{cases}$$

Интегрирование (2.10) с этой функцией при  $Y_0 = 0$  дает

$$Y(\varphi) = \pm \sqrt{\frac{2\Delta\varphi_B}{\pi}} \begin{cases} \sqrt{\cos \frac{\pi\varphi_0}{\Delta\varphi_B} - \cos \frac{\pi\varphi}{\Delta\varphi_B}}, & \varphi_0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B, \\ \sqrt{\cos \frac{\pi\varphi_0}{\Delta\varphi_B} + 1}, & \Delta\varphi_B \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}, \\ \sqrt{\cos \frac{\pi\varphi_0}{\Delta\varphi_B} - \cos \frac{\pi(\varphi - \Delta\varphi_B - \Delta\varphi_{BB})}{\Delta\varphi_B}}, & \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} \leq \varphi \leq \varphi_s - \varphi_0. \end{cases} \quad (2.15)$$

В случае сепаратрисы ( $\varphi_0 = 0, Y_0 = 0$ ) функция  $f(\varphi_0) = 0$  и из (2.14), (2.15) находим величину  $Y_{\text{sep}}$  между барьерами:

$$Y_{\text{sep}} = \pm \begin{cases} \sqrt{2\Delta\varphi_B}, & \text{прямоугольные барьеры,} \\ & \Delta\varphi_B \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}. \\ 2\sqrt{\frac{\Delta\varphi_B}{\pi}}, & \text{квазисинусоидальные барьеры,} \end{cases} \quad (2.16)$$

Первое выражение в (2.16) приводит, после подстановки  $Y(\psi)$  из (2.4), к формуле (1.9). Аналогично, для квазисинусоидальных барьеров

$$\left| \frac{\Delta p(\varphi)}{p_s} \right|_{\text{sep}}^{\sin} = \frac{\sqrt{\delta\varphi_B \Delta\varphi_B}}{\pi^{3/2} \eta_\omega} = \frac{1}{\beta\pi} \sqrt{\frac{Z}{A} \frac{2eV}{\eta_\omega \gamma m_n c^2} \Delta\varphi_B}, \quad (2.17)$$

$$V_{\text{sin}} \geq \frac{A}{Z} \eta_\omega \beta^2 \gamma \frac{m_n c^2}{e} \frac{\pi^2}{2\Delta\varphi_B} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{sep}}^2.$$

Как следует из (2.16), (2.17), значение отклонения импульса при движении по сепаратрисе при квазисинусоидальных барьерах отличается от аналогичного значения при прямоугольных барьерах множителем  $\sqrt{2/\pi}$ , а значение амплитуды  $V_{\text{sin}}$  превышает  $V$  (1.10) в  $\pi/2$  раз (что соответствует отношению интегралов от  $f(\varphi)$  по интервалу  $\Delta\varphi_B$  для функций  $f(\varphi)$  для этих барьеров).

Выражения (2.14), (2.15) позволяют вычислить эмиттанс пучка, накопленного между барьерами:

$$\varepsilon_{\text{stack}}(\varphi_0) = 2 \int_{\varphi_0}^{2\pi-\varphi_0} Y(\phi) d\phi, \quad Y(\varphi) > 0. \quad (2.18)$$

Множитель «2» появляется благодаря симметрии фазовой траектории сгустка накопленных частиц относительно абсциссы на рис. 1. Для прямоугольных барьеров интегрирование дает

$$\varepsilon_{\text{stack}}(\varphi_0) = 2\sqrt{2} \left[ \frac{4}{3} (\Delta\varphi_B - \varphi_0)^{3/2} + \sqrt{\Delta\varphi_B - \varphi_0} \Delta\varphi_{BB} \right], \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{\text{stack}}(Y_{\text{max}}) = 2 \left( \frac{4}{3} Y_{\text{max}}^3 + Y_{\text{max}} \Delta\varphi_{BB} \right), \quad Y_{\text{max}} \equiv \sqrt{2(\Delta\varphi_B - \varphi_0)}.$$

Здесь  $Y_{\text{max}}$  — значение  $Y(\varphi)$  между барьерами для фазовой траектории частицы сгустка с максимальным отклонением по импульсу.

Зная решение  $Y(\varphi)$ , можно вычислить второй интеграл уравнения (2.7) и найти в результате зависимости  $Y(\psi)$  и  $\varphi(\psi)$ . Это позволяет рассчитать период движения частицы по замкнутой траектории в области накопления (см. подразд. 2.2 и разд. 3).

**2.2. Траектория частиц внутри сепаратрисы.** Аналитическое решение возможно, как обычно, для ограниченного числа частных случаев функции  $f(\varphi)$ , таких как рассмотренные выше прямоугольные и квазисинусоидальные барьеры, гармоническое ВЧ-напряжение и т. п. Наиболее эффективным способом анализа динамики частиц в барьерной ВЧ-системе является численное решение уравнений (2.5)–(2.7) в безразмерных переменных  $Y$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$ . Используя полученные таким способом универсальные функции  $Y(\psi)$  и  $\varphi(\psi)$  для заданной функции  $f(\varphi)$ , можно рассчитать конкретные характеристики барьерной ВЧ-системы в интересующем диапазоне энергий частиц.

В качестве примера рассмотрим случай прямоугольных барьеров (1.1) с параметрами функции  $f(\varphi)$ , представленными в подписях к рис. 2 и 4. Как указано выше, период обращения по сепаратрисе «должен быть» неопределенно длительным. Действительно, если инжектировать частицу в точке  $\varphi_{\text{inj}}=0$  с нулевым отклонением по импульсу  $\Delta p_{\text{inj}} = 0$ , она просто не будет

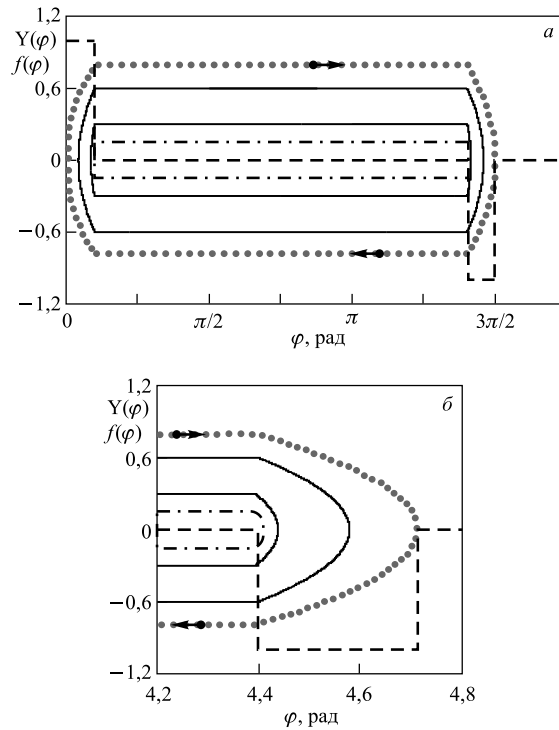


Рис. 4. Фазовые траектории частицы внутри сепаратрисы в области накопления (а) и внутри отрицательного барьера (б) в увеличенном масштабе по  $\varphi$ ; на обоих рисунках точечные кривые — функция  $Y(\varphi)$ , рассчитанная по системе уравнений (2.5), (2.6) в Mathcad при  $\varphi_0 = Y_0 = 0$  (сепаратриса), по две сплошные кривые и штрихпунктирные кривые — рассчитанные для начальных условий  $(\varphi_0, Y_0)$ , равных  $(\pi/2, 0,6)$ ,  $(\pi, 0,3)$ ,  $(4,2, 0,15)$  соответственно; стрелками показаны направления движения частиц по сепаратрисе; прямоугольные барьеры (штриховые кривые) имеют параметры  $\Delta\varphi_B = \pi/10$ ,  $\Delta\varphi_{BV} = 1,3\pi$

смещаться в фазовом пространстве, так как  $V(0) = 0$ . Небольшие ненулевые значения  $\Delta p_{inj}$  или  $\varphi_{inj}$  обеспечивают движение по фазовой траектории, близкой к сепаратрисе. Единственное исключение представляют прямоугольные барьеры с фронтами бесконечно большой крутизны, упомянутые выше (формула (1.12)).

Эта особенность прямоугольных барьеров обнаруживается, например, при численном решении уравнений (2.5), (2.6) методом Рунге–Кутты в Mathcad: процесс вычислений с начальными значениями  $Y_0 = \varphi_0 = 0$  останавливается, если положить  $f(\varphi) = 1$  при  $\varphi > 0$ , и нормально проходит, если  $f(\varphi) = 1$  при  $\varphi \geq 0$ .

Для вычисления периода движения частицы по фазовой траектории можно воспользоваться уравнением (2.6) при заданной функции  $Y(\varphi)$ :

$$\Delta\psi_{\text{period}} = 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi_s - \varphi_0} \frac{d\phi}{Y(\phi)}, \quad Y(\varphi) > 0. \quad (2.20)$$

Здесь опять использовано свойство симметрии фазовой траектории (множитель 2),  $\varphi_0$  — начальная фаза, в которой  $Y(\varphi_0) \equiv Y_0 = 0$ . Для прямоугольных барьеров (2.14) интегрирование дает

$$\Delta\psi_{\text{period}} = \sqrt{\frac{2}{\Delta\varphi_B - \varphi_0}} (4\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} - 4\varphi_0) = 4Y_{\text{max}} + \frac{2\Delta\varphi_B}{Y_{\text{max}}}, \quad (2.21)$$

$$T_{\text{period}} = T_s \sqrt{\frac{2}{\Delta\varphi_B \delta\varphi_B}} (\Delta\varphi_{BB} + 4\Delta\varphi_B - \varphi_0).$$

Для частицы на сепаратрисе  $\varphi_0 = 0$ , и мы опять получаем результат (1.12). Таким образом, окончательно показано, что «пошаговые» вычисления (разд. 1) дают тот же результат, что и интегрирование общих уравнений (2.5)–(2.7).

Случай квазисинусоидальных барьеров более сложный. Действительно, аналогичное аналитическое интегрирование (2.20) с функцией  $Y(\varphi)$  из (2.15) приводит к логарифмической зависимости  $\Delta\psi_{\text{period}}$  от  $\varphi_0$ . Этот результат подтверждает и численное интегрирование уравнений (2.5), (2.6) для квазисинусоидальной функции  $f(\varphi)$  (рис. 5): имеет место логарифмический рост периода движения частицы по сепаратрисе с уменьшением начальной фазы  $\varphi_0$ :

$$\Delta\psi_{\text{period}} \approx 13,7 - \ln \varphi_0. \quad (2.22)$$

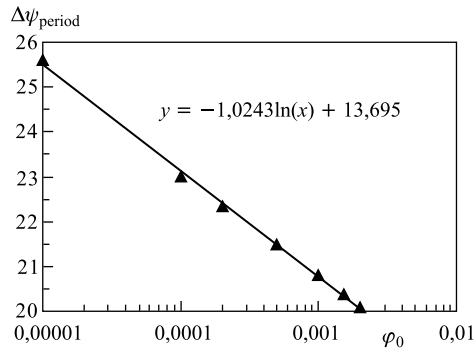


Рис. 5. Зависимость  $\Delta\psi_{\text{period}}$  от значения начальной фазы  $\varphi_0$  вблизи точки  $\varphi = 0$ , полученная из решения уравнений (2.5), (2.6) в Mathcad для квазисинусоидальной функции  $f(\varphi)$ ;  $\Delta\varphi_B = \pi/10$ ,  $\Delta\varphi_{BB} = 1,3\pi$ ; формула тренда (сплошная линия) приведена на рисунке

Таким образом, налицо качественная разница между случаями квазисинусоидальных и «идеализированных» прямоугольных барьеров, что связано с обсуждавшейся выше крутизной фронтов импульсов барьерного напряжения (и функции  $f(\varphi)$  соответственно). Для квазисинусоидальных барьеров частица в точках  $\varphi^* = \{0, \varphi_s\}$  не движется совершенно, если ее импульс в этих точках равен нулю, поскольку  $f(\varphi^*) = 0$  точно. Для «идеализированных» прямоугольных барьеров, как уже сказано выше, имеет место неопределенность, которая не влияет на результат «пошаговых» вычислений (разд. 1) из-за конечной величины шага (частица «проскакивает» особые точки).

По известной (вычисленной) универсальной функции импульса  $Y(\varphi)$  для заданной барьерной функции  $f(\varphi)$  можно найти значения конкретных параметров. Например, *амплитуда барьерного напряжения* может быть записана, согласно (2.4), через значения  $Y_{\max}$  и других параметров как

$$V \geq \frac{A}{Z} \eta_\omega \beta^2 \gamma \frac{m_n c^2}{e} \frac{2\pi}{Y_{\max}^2} \left( \frac{\Delta p}{p} \right)_{\text{sep}}^2. \quad (2.23)$$

Значение  $Y_{\max}$  определено выше (формула (2.19)).

### 3. НАКОПЛЕНИЕ ЧАСТИЦ (ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ БАРЬЕРЫ)

Для формирования интенсивных пучков в циклических ускорителях часто используется многократная инжекция с определенной периодичностью и накопление инжектированных частиц (stacking, англ.). Процесс накопления для случая прямоугольных барьеров рассмотрен ниже с использованием результатов разд. 2.

**3.1. Фазовые колебания частиц при накоплении.** Прежде всего, расширим рассматриваемую область фаз от  $\varphi = -0,2$  до  $\varphi = 2\pi$  (рис. 1, 6):

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B, \\ 0, & \Delta\varphi_B < \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}, \\ -1, & \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} < \varphi \leq \varphi_s, \\ 0, & \varphi_s \equiv 2\pi - \Delta\varphi_{\text{inj}} < \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (3.1)$$

Как уже сказано в подразд. 2.1, частица, инжектированная в интервал фаз  $\Delta\varphi_{\text{inj}}$  ( $U(\varphi_{\text{inj}}) = 0$ ), путешествует вдоль оси  $\varphi$  неограниченно долго. В этом случае ее импульс  $Y(\varphi)$  также испытывает периодические изменения при пересечении барьеров (рис. 6). Параметры фазовой траектории можно рассчитать так же, как это делалось в предыдущем разделе. Вначале вычисляем функцию  $Y(\varphi)$ , интегрируя (2.10) по интервалу  $\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0 + 2\pi$  при

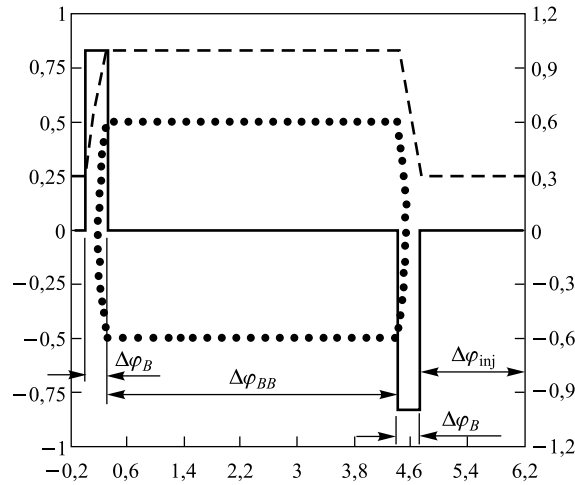


Рис. 6. Фазовые траектории инжектированной частицы (штриховая кривая,  $\varphi_{inj} = -0,2$ ,  $Y_{inj} = 0,25$ ) и частицы, захваченной в потенциальную яму области накопления (точечная кривая,  $Y_{max} = 0,5$ ),  $f(\varphi)$  — сплошная кривая

условию, что начальная фаза  $\varphi_0$  лежит в интервале  $\Delta\varphi_{inj}$  (рис. 1, 6). Импульс частицы в этом интервале постоянен и равен  $Y_0$ . Поэтому выбор значения  $\varphi_0$  не изменяет величины функции  $Y(\varphi)$ , и для интегрирования в (2.10) можно выбрать интервал  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . В результате находим

$$Y(\varphi) = \frac{Y_0}{|Y_0|} \begin{cases} \sqrt{Y_0^2 + 2\varphi}, & 0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B, \\ \sqrt{Y_0^2 + 2\Delta\varphi_B}, & \Delta\varphi_B < \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}, \\ \sqrt{Y_0^2 + 2(\varphi_s - \varphi)}, & \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} < \varphi \leq \varphi_s, \\ |Y_0|, & 2\pi - \Delta\varphi_{inj} < \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (3.2)$$

Используя этот результат, можно рассчитать период колебаний импульса инжектированной частицы с помощью уравнения (2.6), аналогично тому, как это сделано при вычислении (2.21). Выбрав начальную точку в конце интервала инъекции  $\Delta\varphi_{inj}$  (т. е.  $\varphi_0 = 0$ ), получим:

$$\begin{aligned} \Delta\psi_{\text{period}} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{Y(\phi)} = \\ &= 2\sqrt{Y_0^2 + 2\Delta\varphi_B} + \frac{\Delta\varphi_B}{\sqrt{Y_0^2 + 2\Delta\varphi_B}} - 2Y_0 + \frac{\Delta\varphi_{inj}}{Y_0}. \end{aligned} \quad (3.3)$$



**3.2. Достаточное условие для накопления частиц.** Сравнивая выражения (3.2) и (2.16), нетрудно видеть, что при любом значении импульса инжектированной частицы  $Y_0$  ее импульс в фазовом интервале  $\Delta\varphi_{BB}$  (см. второе выражение в (3.2)) превышает  $Y_{sep}$ . Это означает, что фазовая траектория инжектированной частицы, импульс которой в интервале  $\Delta\varphi_{inj}$  отличен от нуля,  $\Delta p_{inj} \neq 0$ , не образует замкнутую кривую (рис. 6, штриховая кривая). Чтобы захватить частицу в *область накопления*

$$0 \leq \varphi \leq \varphi_s, \quad (3.4)$$

нужно каким-то способом обеспечить выполнение условия

$$|Y_{BB}| \leq |Y_{sep}|, \quad (3.5)$$

где  $Y_{BB}$  — значение  $Y(\varphi)$  в области накопления. Это и есть *достаточное условие* для захвата частиц на замкнутую траекторию в область накопления.

Это условие, как сказано выше, не удовлетворяется для частицы, инжектированной в интервал  $\Delta\varphi_{inj}$ . Таким образом, при любом значении  $Y_0$  частица, инжектированная в интервале  $\Delta\varphi_{inj}$ , не может быть захвачена в зону накопления (3.4). Для захвата частицы нужно, чтобы ее импульс в некоторой фазе внутри барьера (положительного или отрицательного, безразлично) принимал нулевое значение. В этом случае частица движется внутри сепаратрисы. Единственный способ обеспечить это условие (в случае стационарных барьеров, ср. разд. 5) — уменьшение импульса частицы после инжекции во время движения в фазовом пространстве, т. е. применение методов охлаждения, электронного или стохастического.

Последнее утверждение наглядно иллюстрирует рис. 3. Действительно, частица, инжектированная в фазовую область  $\Delta\varphi_{inj}$ , имеет нулевую потенциальную энергию и положительную полную энергию  $\mathcal{H} > 0$ . По этой причине она не может быть захвачена в потенциальную яму в области  $\Delta\varphi_{BB}$ .

Можно сформулировать требование к скорости охлаждения  $\tau_{cool}^{-1}$ : за время периода инжекции  $T_{inj}$  отклонение импульса частицы  $\Delta p_{BB}$  должно уменьшиться настолько, чтобы частица вошла внутрь сепаратрисы области накопления. Предполагая экспоненциальную зависимость импульса частицы при охлаждении от времени, можем записать

$$\Delta p(t) = \Delta p(0) \exp(-t/\tau_{cool}), \quad \Delta p(0) \equiv \Delta p_{BB}.$$

Здесь  $\Delta p_{BB}$  — отклонение импульса частицы внутри области накопления при первом, после инжекции, ее пересечении. Отсюда следует *достаточное условие* для захвата частицы в область накопления:

$$\frac{\tau_{cool}}{T_{inj}} \leq \left[ \ln \left| \frac{\Delta p_{BB}}{\Delta p_{sep}} \right| \right]^{-1} = \left[ \ln \left| \frac{Y_{BB}}{Y_{sep}} \right| \right]^{-1}. \quad (3.6)$$

Здесь  $Y_{BB}$  описывается вторым выражением (3.2),  $Y_{sep} = \sqrt{2\Delta\varphi_B}$  (см. (2.16)). Подставив эти значения в (3.6), находим

$$\frac{\tau_{cool}}{T_{inj}} \leq 2 \left[ \ln \left( 1 + \frac{Y_0^2}{2\Delta\varphi_B} \right) \right]^{-1} \sim \begin{cases} 2/\ln 2, & Y_0 \sim Y_{sep}, \\ 4 \left( \frac{Y_{sep}}{Y_0} \right)^2, & Y_0 \ll Y_{sep}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Таким образом, наиболее жесткое требование к значению  $\tau_{cool}$  имеет место для больших величин  $Y_0$ . И наоборот, для малых  $Y_0$  требование (3.7) очень мягкое. Это почти очевидно: чем меньше значение  $Y_0$ , тем ближе траектория инжектированной частицы к сепаратрисе при прохождении области накопления. Соответственно, тем быстрее происходит захват.

**3.3. Необходимое условие для накопления частиц.** При малых  $Y_0$  появляется еще одно требование к этому параметру. Действительно, значение  $Y_0$  должно быть достаточно велико, чтобы позволить частице совершить по крайней мере одно синхротронное колебание за время между двумя импульсами инжекции,  $T_{inj}$ :

$$T_{period} < T_{inj}. \quad (3.8)$$

В противном случае частица будет потеряна при следующем импульсе инжекции, когда область  $\Delta\varphi_{inj}$  заполняется очередной порцией частиц. Используя значение  $\Delta\psi_{period}$  (3.3) с учетом выражения для  $\psi$  из (2.4), приходим к нелинейному алгебраическому уравнению для минимально допустимого значения  $Y_0$ :

$$\Delta\psi_{period}(Y_0) = \frac{T_{inj}}{T_s} \sqrt{\delta\varphi_B}. \quad (3.9)$$

Эту формулу можно записать в виде, содержащем  $(\Delta p/p)_{sep}$  — параметр, характеризующий фазовую область накопления:

$$\Delta\psi_{period}(Y_0) = \pi\eta\omega \frac{T_{inj}}{T_s} \sqrt{\frac{2}{\Delta\varphi_B}} \left| \frac{\Delta p}{p} \right|_{sep}. \quad (3.10)$$

Решение полученного уравнения для  $Y_0$  (ср. (3.10) с (3.3)) можно найти численно и, зная минимально допустимое значение  $Y_0$ , рассчитать минимально допустимое значение импульса частицы при инжекции:

$$\frac{|\Delta p_{inj}|_{min}}{p_s} = \frac{Y_{0min}}{\sqrt{2\Delta\varphi_B}}. \quad (3.11)$$

Пример таких расчетов представлен на рис. 7.

Вычисления существенно упрощаются при  $Y_0 \ll 1$ , когда  $\Delta\psi_{period}(Y_0) \approx \Delta\varphi_{inj}/Y_0$ . Подставив это значение в (3.9) с учетом выражения для  $Y$  из (2.4), получаем приближенно

$$\frac{|\Delta p_{inj}|}{p_s} \geq \frac{\Delta\varphi_{inj}}{2\pi\eta\omega} \frac{T_s}{T_{inj}} \left| \frac{\Delta p}{p_s} \right|_{sep}. \quad (3.12)$$

Параметр  $|\Delta p/p_s|_{\text{sep}}$  является фактически характеристикой барьерной ВЧ-системы. Результаты приближенного расчета по формуле (3.12) хорошо согласуются с результатами численного решения уравнения (3.10), описанного выше. Так, для значений параметров, указанных в подписи к рис. 7, расхождение не превышает 1–5 %, в зависимости от энергии. Таким образом, приближенная формула (3.12) пригодна для простых оценок.

На рис. 8 приведены результаты эксперимента по накоплению ионов в накопителе ESR (GSI, ФРГ) с электронным охлаждением и барьерной ВЧ-системой [10].

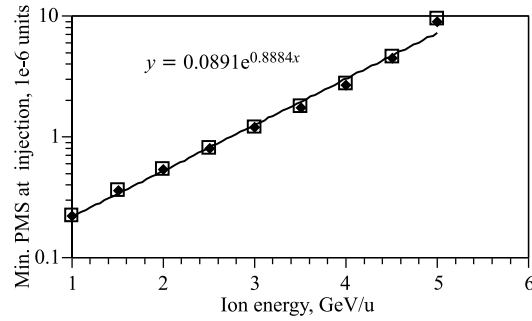


Рис. 7. Зависимость  $|\Delta p_{\text{inj}}|/p_s$  (в единицах  $10^{-6}$ ) от энергии частицы; ромбиками показаны результаты численного решения уравнения (3.10), (3.11) для случая прямоугольных барьеров, а светлые квадраты — приближенные значения по формуле (3.12); параметры накопителя и барьерной системы те же, что и в предыдущих примерах,  $|\Delta p/p_s|_{\text{sep}} = 5 \cdot 10^{-4}$ ,  $T_{\text{inj}} = 10$  с; формула аппроксимации показана на рисунке

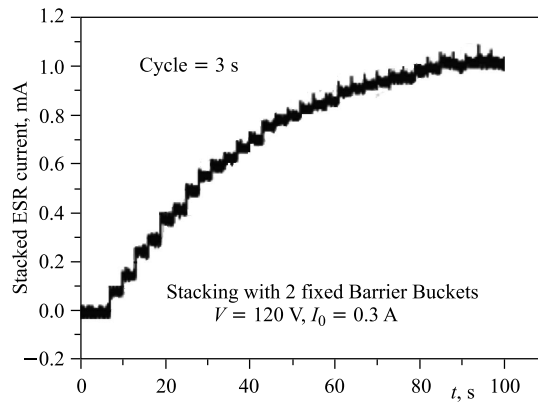


Рис. 8. Накопление ионов  $^{124}\text{Xe}^{54+}$  в ESR [10] с барьерной ВЧ-системой и электронным охлаждением с током  $I_0$ . Насыщение интенсивности накопленных частиц связано, по-видимому, с несовершенством применяемой ВЧ-системы (подразд. 3.5)

**3.4. Накопление частиц в присутствии напряжения в инжекционной фазовой области.** Во избежание при накоплении потерь частиц, имеющих смещение по импульсу меньше допустимого минимума (3.11), (3.12), можно приложить в фазовой области  $\Delta\varphi_{inj}$  (рис. 1, 6) небольшое ВЧ-напряжение с амплитудой  $V_{inj} \equiv k_{inj} V \ll V$  [16]. Например, в случае прямоугольных барьеров функция  $f(\varphi)$  тогда имеет вид

$$f(\varphi) = \begin{cases} 1, & 2\pi n \leq \varphi \leq 2\pi n + \Delta\varphi_B, \\ 0, & 2\pi n + \Delta\varphi_B < \varphi \leq 2\pi n + \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}, \\ k, & 2\pi n + \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} < \varphi \leq 2\pi n + \varphi_s, \\ k_{inj}, & 2\pi n + \varphi_s < \varphi \leq 2\pi(n+1). \end{cases} \quad (3.13)$$

Очевидно, функция  $f(\varphi)$  должна удовлетворять условию

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0. \quad (3.14)$$

В противном случае частица, не захваченная в область накопления, ускоряется, проходя весь интервал фаз  $0 \leq \varphi \leq 2\pi^*$ . Условие (3.14) дает значение параметра  $k$  при заданном  $k_{inj}$

$$k = - \left( 1 + \frac{\Delta\varphi_{inj}}{\Delta\varphi_B} k_{inj} \right). \quad (3.15)$$

Выбор значения  $k_{inj}$  определяется тем же критерием (3.8), что, в свою очередь, требует вычисления значения  $T_{period}$  как функции параметра  $k_{inj}$ . Эти вычисления аналогичны тем, что выполнены при выводе формулы (3.3), но еще более громоздки. Однако для прямоугольных барьеров можно получить простую оценку, рассмотрев крайний случай частицы, инжектированной с нулевым отклонением по импульсу в фазовую точку  $\varphi_{inj}$  в самом начале фазовой области  $\Delta\varphi_{inj}$  (рис. 9):

$$Y_0 = 0, \quad \varphi_{inj} = -\Delta\varphi_{inj}. \quad (3.16)$$

Обратим внимание, что на рис. 9 область инжекции  $\Delta\varphi_{inj}$  сдвинута в отрицательные значения фаз. Это сделано, чтобы сохранить положение области накопления в прежнем интервале фаз (3.4).

Основной вклад в значение периода синхротронных колебаний частицы дает время пересечения ею области  $\Delta\varphi_{inj}$ , где отклонение импульса от равновесного значения минимально. Это значение и набег параметра  $\psi$  в обла-

---

\*Другая причина, по которой необходимо удовлетворить условие (3.14), обсуждается в разд. 6.

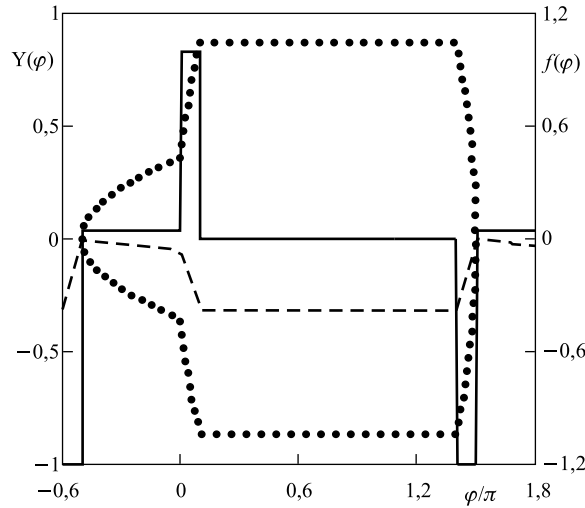


Рис. 9. Фазовая траектория частицы при накоплении в прямоугольной барьерной ВЧ-системе и дополнительном ускоряющем напряжении в фазовой области  $\Delta\varphi_{inj}$ ; сплошная кривая —  $f(\varphi)$  (3.13) при  $k_{inj} = 0,04$ ,  $k = -1,2$ ; штриховая — функция  $U(\varphi)$  (3.19); точечная — функция  $Y(\varphi)$  (2.4) (фазовая траектория), полученная численным решением системы уравнений (2.5), (2.6);  $\Delta\varphi_B = \pi/10$ ,  $\Delta\varphi_{BB} = 1,3\pi$ ,  $Y_0 = 0$ ,  $\varphi_{inj} = -\Delta\varphi_{inj}$

сти  $\Delta\varphi_{inj}$  нетрудно найти, воспользовавшись результатами разд. 2 для прямоугольных барьеров (см. (2.14)):

$$Y(\varphi^*) = \sqrt{2k_{inj}\varphi^*}, \quad \Delta\psi_{inj} \approx \sqrt{2\frac{\Delta\varphi_{inj}}{k_{inj}}}, \quad k_{inj} \ll 1, \quad 0 \leq \varphi^* \leq \Delta\varphi_{inj}. \quad (3.17)$$

Затем из условия (3.8) с учетом (3.10) находим минимально допустимое значение параметра  $k_{inj}$ :

$$k_{inj} \geq \frac{\Delta\varphi_{inj}\Delta\varphi_B}{\pi^2\eta_\omega^2} \left(\frac{T_s}{T_{inj}}\right)^2 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{sep}^{-2}. \quad (3.18)$$

Численный пример, представленный на рис. 10, показывает, что  $k_{inj}$  возрастает экспоненциально с энергией частицы по мере приближения энергии к критическому значению.

Оценка (3.18) дает нижний предел значений  $k_{inj}$ . На практике может понадобиться в несколько раз большая величина. Это связано с относительно быстрым пересечением частицей области  $\Delta\varphi_{BB}$ , где отклонение импульса от равновесного значения велико. В результате охлаждение может не успеть

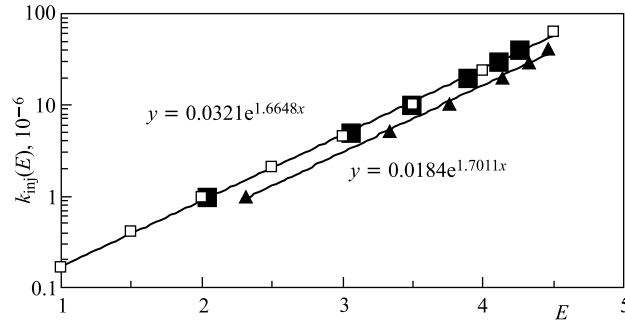


Рис. 10. Зависимость параметра  $k_{inj}$  (в единицах  $10^{-6}$ ) от энергии частицы (ГэВ/нукл.). Параметры накопителя и барьерной ВЧ-системы те же, что и в предыдущих примерах,  $T_{inj} = 10$  с; большие квадраты — результат численного решения уравнений (2.5), (2.6) для прямоугольных барьеров (3.13), маленькие светлые квадраты — расчет по приближенной формуле (3.18); треугольники — численное решение уравнений (2.5), (2.6) для синусоидальных барьеров; сплошные линии — аппроксимации, формулы которых приведены на рисунке

«опустить» частицу в потенциальную яму ниже сепаратрисы, и потребуются многократное повторение синхротронных колебаний с полным размахом по фазе. Корректное значение  $\Delta k_{inj}$  дает численное моделирование процесса накопления.

Особенность рассмотренного режима накопления/захвата иллюстрирует функция потенциала (рис. 9)

$$\begin{aligned}
 U(\varphi) &= - \int_{-\Delta\varphi_{inj}}^{\varphi_s} f(\phi) d\phi = \\
 &= \begin{cases} -k_{inj}(\varphi + \Delta\varphi_{inj}), & -\Delta\varphi_{inj} \leq \varphi \leq 0, \\ -(k_{inj}\Delta\varphi_{inj} + \varphi), & 0 < \varphi \leq \Delta\varphi_B, \\ -(k_{inj}\Delta\varphi_{inj} + \Delta\varphi_B), & \Delta\varphi_B < \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}, \\ -[k_{inj}\Delta\varphi_{inj} + \Delta\varphi_B + k(\varphi - \Delta\varphi_B - \Delta\varphi_{BB})], & \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} < \varphi \leq \varphi_s, \end{cases} \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

$$U(-\Delta\varphi_{inj}) = 0.$$

Эта функция образует потенциальную яму во всей области фаз

$$-\Delta\varphi_{inj} \leq \varphi \leq 2\pi - \Delta\varphi_{inj}. \quad (3.20)$$

### 3.5. Пульсации барьерного ВЧ-напряжения и паразитные сепаратрисы.

Несовершенство системы генерации барьерных ВЧ-напряжений может проявляться в пульсациях напряжения, сопровождающих основные барьерные

импульсы. Два типичных примера таких пульсаций и их последствия демонстрирует рис. 11. Пульсации могут формировать области «паразитных сепаратрис», в которых накапливаются инжектированные частицы. Этот эффект экспериментально наблюдался в работе [10]. Траектории частиц внутри таких сепаратрис имеют форму замкнутых кривых (рис. 11, *a, б*, кривые 3, 4).

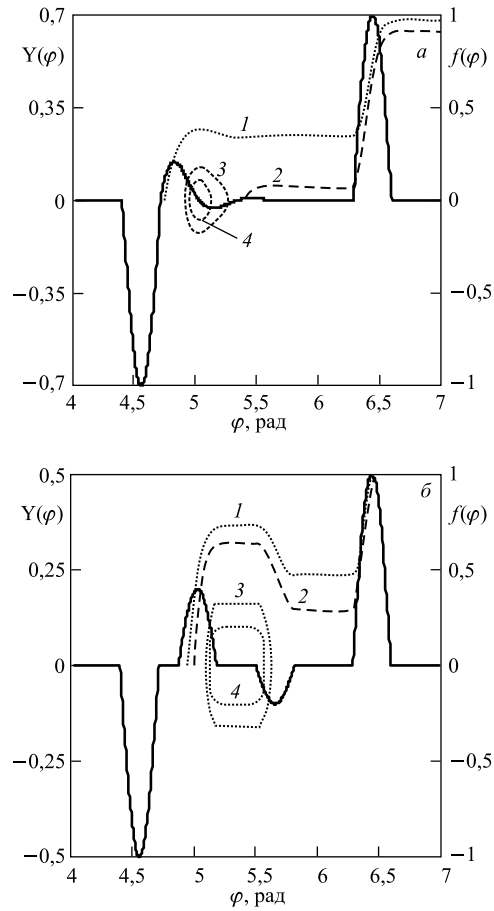


Рис. 11. Два примера пульсаций барьерного ВЧ-напряжения и фазовые траектории частиц, полученные численным решением уравнений (2.5), (2.6); главные барьерные импульсы имеют квазисинусоидальную форму с экспоненциально затухающими колебаниями (*a*) или сопровождаются двумя синусоидальными импульсами уменьшающейся амплитуды (*б*); параметры инжекции частицы на  $n$ -й фазовой траектории  $(\varphi_{\text{inj}}, Y_{\text{inj}})_n$ : *a*)  $(4,75; 0,0)_1, (5,4; 0,0)_2, (5,0; 0,12)_3, (4,95; 0,0)_4$ ; *б*)  $(4,95; 0,0)_1, (5,0; 0,0)_2, (5,1; 0,0)_3, (5,2; 0,1)_4$

Грубо оценить эффект захвата частиц в паразитные сепаратрисы можно, сравнивая площади фазового пространства, охватываемые полезной сепаратрисой,  $S_{\text{sep}}$ , и паразитной,  $S_{\text{ripp}}$ :

$$S_{\text{sep}} = \left| \frac{\Delta p}{p_s} \right|_{\text{sep}} \varphi_s \propto \sqrt{V \Delta \varphi_B \varphi_s};$$

$$S_{\text{ripp}} = \left| \frac{\Delta p}{p_s} \right|_{\text{sep}}^{\text{ripp}} \Delta_{\text{ripp}} \propto \sqrt{V_{\text{ripp}} \Delta \varphi_{\text{ripp}} \Delta_{\text{ripp}}}.$$

Здесь  $V_{\text{ripp}}$  — амплитуда импульса пульсаций;  $\Delta \varphi_{\text{ripp}}$  — его фазовая протяженность;  $\Delta_{\text{ripp}}$  — фазовая протяженность области, занятой пульсациями. Положив  $\Delta \varphi_{\text{ripp}} = \Delta \varphi_B$ , можно написать оценку доли частиц  $\varepsilon$ , не захваченных в сепаратрису и, соответственно, потерянных при следующем импульсе инжекции:

$$\varepsilon \equiv \frac{S_{\text{ripp}}}{S_{\text{sep}}} \sim \sqrt{\frac{V_{\text{ripp}}}{V}} \frac{\Delta_{\text{ripp}}}{\varphi_s}. \quad (3.21)$$

Отсюда следует требование к уровню пульсаций барьерного напряжения

$$\frac{V_{\text{ripp}}}{V} < \left( \varepsilon \frac{\varphi_s}{\Delta_{\text{ripp}}} \right)^2 \sim \varepsilon^2. \quad (3.22)$$

Например, для параметров, приведенных на рис. 11, б ( $\varphi_s = 4,71$  рад,  $\Delta_{\text{ripp}} \approx 1$  рад), нужно обеспечить  $V_{\text{ripp}}/V < 2,2 \cdot 10^{-3}$  при  $\varepsilon = 1\%$ .

#### 4. УСКОРЕНИЕ ЧАСТИЦ БАРЬЕРНЫМ НАПРЯЖЕНИЕМ

Для ускорения частиц с помощью барьерной ВЧ-системы нужно приложить ускоряющее напряжение в фазовой области накопления  $\Delta \varphi_{BB}$ . Импульс равновесной частицы должен увеличиваться при ускорении, следуя хорошо известному соотношению

$$p_s(t) = \frac{ZeB_s(t)R_s}{c}. \quad (4.1)$$

Здесь  $B_s(t)$  и  $R_s$  — магнитное поле и радиус траектории, усредненные по равновесной траектории. Отсюда следует равенство, связывающее между собой законы изменения поля и ускоряющего напряжения. Действительно, подставив

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{ZeR_s}{c} \frac{dB_s}{dt}$$

в равенство

$$\frac{dp_s}{dt} = \frac{\delta p_B}{T_s}$$



и  $\delta p_B$  из (1.2), находим

$$V_{\text{acc}} = \frac{\rho C_{\text{Ring}}}{c} \frac{dB_\rho}{dt}. \quad (4.2)$$

Здесь  $B_\rho = B_s R_s / \rho$  и  $\rho$  — магнитное поле и радиус кривизны траектории равновесной частицы в диполях соответственно. При  $C_{\text{Ring}} = 503$  м,  $\rho = 25$  м и  $dB_s/dt = 0,1$  Тл/с находим  $V_{\text{acc}} = 1,26$  кВ.

Проблема не столь тривиальна для *неравновесной частицы*:  $p(t) = p_s(t) + \Delta p$ . Если выполнено условие (4.2) для ускоряющего напряжения, частица дрейфует в фазовой области  $\Delta\varphi_{BB}$  между барьерами, имея постоянное отклонение по импульсу от равновесного значения,  $\Delta p = \Delta p(0)$ . Это выглядит так, как будто бы частица «не чувствует» присутствия ускоряющего напряжения  $V_{\text{acc}}$ , поскольку как равновесная, так и неравновесная частицы получают за оборот одинаковые приросты энергии  $ZeV_{\text{acc}}$  и, соответственно, импульса  $\delta p_{\text{acc}}$ . В результате разность импульсов этих частиц остается постоянной. Поэтому в *первом приближении* сепаратриса фазовых траекторий частиц описывается, например, теми же формулами (1.9), (2.13), (2.14), что и в отсутствие ускорения. Во *втором приближении* следует учесть влияние роста магнитного поля, когда неравновесная частица находится внутри барьеров. Этот эффект можно включить в расчет фазового движения неравновесной частицы, введя *эквивалентное тормозящее напряжение*  $V_{\text{dec}}$  и соответствующую ему добавку  $f_{\text{dec}}(\varphi)$  к функции  $f(\varphi)$ :

$$V_{\text{dec}} = -\frac{\rho C_{\text{Ring}}}{C} \frac{dB_\rho}{dt}, \quad f_{\text{dec}} = \frac{V_{\text{dec}}}{V} < 0, \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_s. \quad (4.3)$$

Обе функции, вообще говоря, зависят от  $\varphi$ . Функцию  $f(\varphi)$ , использовавшуюся до сих пор, следует записать в виде

$$f(\varphi) = f_B(\varphi) + f_{\text{dec}}(\varphi), \quad (4.4)$$

где  $f_B(\varphi)$  — та же, что и ранее, функция барьерного ВЧ-напряжения, определенная в (2.1). Условие стабильности фазового движения частицы (2.11) теперь принимает вид

$$\int_0^{\varphi_s} f(\varphi) d\varphi = 0, \quad \text{или} \quad \int_0^{\varphi_s} f_B(\varphi) d\varphi = -\int_0^{\varphi_s} f_{\text{dec}}(\varphi) d\varphi. \quad (4.5)$$

В качестве примера рассмотрим здесь случай линейной зависимости магнитного поля  $B_\rho(t)$  от времени и прямолинейных барьеров. Тогда обе функции  $V_{\text{acc}}(\varphi)$  и  $f_{\text{dec}}(\varphi)$  постоянны.

Простейшее решение состоит в том, чтобы ввести ускоряющее напряжение  $V_{\text{acc}}$  (т.е.  $\Delta f_B = -f_{\text{dec}} = \text{const}$ ) во всей области стабильного движения (3.4). Такая добавка обеспечивает ускорение частицы, компенсируя влияние роста  $B_\rho(t)$ , а траектория неравновесной частицы имеет ту же форму,

что и в отсутствие ускорения (рис. 4). Особенность такого режима — положение равновесной фазы: это геометрическое место точек, расположенных на оси  $\varphi$  в области фаз  $\Delta\varphi_B < \varphi < \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}$ . Еще одну особенность этого режима работы барьерной ВЧ-системы мы обсудим в разд. 6 (см. условие (6.1)).

Другое возможное решение (которое может быть удобным по конструктивным причинам) — увеличить ускоряющее напряжение  $V_{\text{acc}}$  в фазовой области  $\Delta\varphi_{BB}$  на величину

$$\Delta V_{\text{acc}} = \frac{2\Delta\varphi_B}{\Delta\varphi_{BB}} V_{\text{acc}}, \quad \Delta f_B = \frac{\Delta V_{\text{acc}}}{V}, \quad \Delta\varphi_B < \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}. \quad (4.6)$$

Это обеспечивает выполнение условия (4.5), а фазовая траектория частицы может быть описана с помощью уравнений (2.5), (2.6) с заменой  $f(\varphi)$  на

$$f_{\text{equi}}(\varphi) = f_B(\varphi) + \Delta f_B(\varphi) + f_{\text{dec}}(\varphi).$$

Для прямоугольных барьеров

$$f_{\text{equi}}(\varphi) = \begin{cases} 1 + f_{\text{dec}}, & 0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B; \\ \Delta f_B, & \Delta\varphi_B < \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}; \\ -1 + f_{\text{dec}}, & \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} < \varphi \leq \varphi_s; \\ 0, & \varphi_s < \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (4.7)$$

На рис. 12 приведены фазовые траектории ускоряемых частиц при различных начальных условиях, указанных в подписи к рисунку. По своей форме траектории в этом случае близки к фазовым траекториям частиц при ускорении с помощью классической ВЧ-системы гармонического напряжения [5], и, как и для этой системы, здесь существует единственная *равновесная точка*  $Y_{\text{equi}} = 0$ ,  $\varphi_{\text{equi}} = \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}$ . Петли фазовых траекторий сжимаются в эту точку по мере того, как начальная фаза  $\varphi_{\text{inj}}$  приближается к  $\varphi_{\text{equi}}$ .

Отметим, что параметры  $Y(\psi)$ ,  $\varphi(\psi)$  фазовых траекторий, имеющих форму замкнутой петли, не чувствительны напрямую к изменению энергии частиц. Это означает, что функция  $Y(\psi)$  для каждой траектории является инвариантом энергии. Поэтому для каждой траектории можно из (2.4) (с учетом (1.5)) записать зависимость смещения частицы по импульсу от энергии при ускорении:

$$\frac{\Delta p(E, \psi)}{p_s(E)} = \frac{Y(\psi)}{\beta(E)} \sqrt{\frac{ZeV}{2\pi\eta_\omega(E)\gamma(E)Amc^2}} \quad (4.8)$$

(ср. [5, с. 159]).

Два примера ускорения частиц в системе барьерного ВЧ-напряжения рассмотрены выше при идеализированных условиях, когда функции  $V_{\text{acc}}(\varphi)$  и  $V_{\text{dec}}(\varphi)$  совпадают с абсолютной точностью. В реальности всегда существует некоторое различие значений этих функций, что ведет к деформации фазовых траекторий и их сепаратрисы (рис. 13). Ограничение величины такого разли-

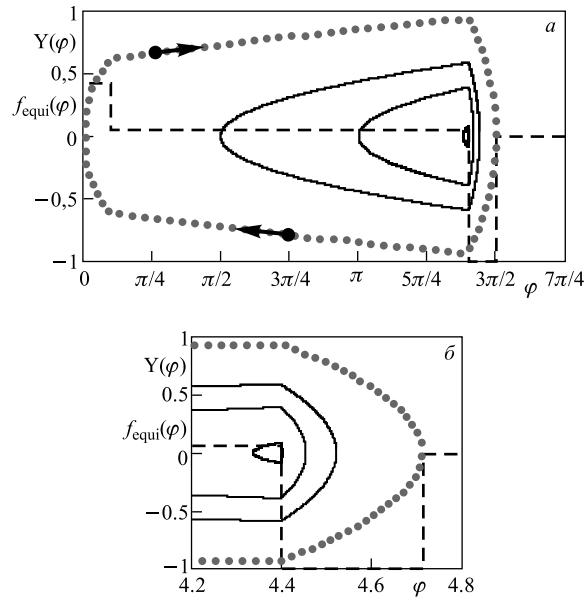


Рис. 12. Фазовые траектории частиц в области стабильного фазового движения (область накопления (3.4)) при ускорении в системе прямоугольного барьерного напряжения, рассчитанные с помощью численного решения уравнений (2.5), (2.6) для  $f_{\text{equi}}(\varphi)$  (4.7): а) полноразмерные фазовые траектории, б) части фазовых траекторий около и внутри отрицательного барьера; точечные кривые — траектория  $Y(\varphi)$  вблизи сепаратрисы, рассчитанная при  $\varphi_{\text{inj}} = 0,001$ ,  $Y_0 = 0$ , стрелки показывают направления движения частицы по траектории; три сплошные линии —  $Y(\varphi)$  при  $\varphi_{\text{inj}} = \pi/2$ ,  $\pi$  и  $1,38\pi$ , для всех трех траекторий  $Y_0 = 0$ ; штриховая кривая — барьерная функция  $f_{\text{equi}}(\varphi)$  (4.7),  $\Delta\varphi_B = \pi/10$ ,  $\Delta\varphi_{BB} = 1,3\pi$

чия можно получить, используя условия (2.11) и (4.5). Предельный случай имеет место, когда одна из границ сепаратрисы достигает границы зоны стабильного движения (3.4). Если различие превышает этот уровень, происходит потеря частиц при ускорении. Условие устойчивого ускорения можно записать в следующем виде:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_{\text{max}}} f(\varphi) d\varphi = 0, \text{ где} \quad (4.9)$$

$$\varphi_0 = \begin{cases} \Delta\varphi_B, \\ 0, \end{cases} \quad \varphi_{\text{max}} = \begin{cases} \varphi_s, \\ \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}, \end{cases} \text{ если } \int_{\Delta\varphi_B}^{\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}} f(\varphi) d\varphi \Rightarrow \begin{cases} > 0, \\ < 0. \end{cases}$$

Например, в первом примере выше ограничение разности значений  $V_{acc}$  и  $|V_{dec}|$  можно записать в виде

$$\delta f_B \equiv |\Delta f_B + f_{dec}| \leq \frac{\Delta\varphi_B}{\Delta\varphi_{BB} + \Delta\varphi_B}. \quad (4.10)$$

Этот случай представлен на рис. 13, а. Другой случай — осциллирующая разность напряжений  $\Delta V_{acc}$  и  $|V_{dec}|$  (рис. 13, б).

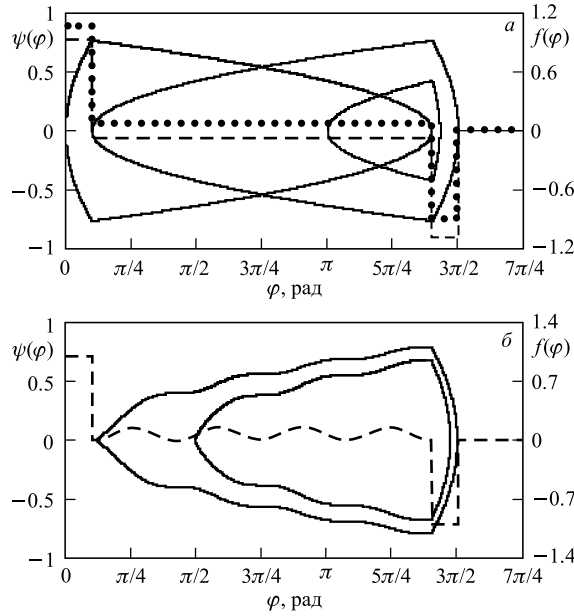


Рис. 13. Влияние разностей значений  $V_{acc}(\varphi)$  и  $|V_{dec}(\varphi)|$  на фазовое движение частиц при ускорении: а)  $\delta f_B(\varphi) = \text{const}$  во всей фазовой области (3.4), точечная кривая —  $\delta f_B(\varphi) > 0$ , штриховая кривая —  $\delta f_B(\varphi) < 0$ , две правые сплошные кривые — сепаратриса и промежуточная фазовая траектория при  $\delta f_B(\varphi) > 0$ , левая сплошная кривая — сепаратриса при  $\delta f_B(\varphi) < 0$ ; б) штриховая кривая —  $\delta f_B(\varphi) = f_d \left( 1 - \cos 8\pi \frac{\varphi - \Delta\varphi_B}{\Delta\varphi_{BB}} \right)$ ,  $f_d = \Delta\varphi_B / \Delta\varphi_{BB}$ , сплошные кривые — сепаратриса и промежуточная фазовая траектория; условие (4.10) выполняется во всех случаях

Следует отметить, что функции  $f_B(\varphi)$  и  $f_B(\varphi) + \Delta f_B(\varphi)$  в обоих примерах не удовлетворяют «условию ненасыщения», сформулированному ниже (см. (6.1)). Как показано в разд. 6, этот дефект можно легко исправить, добавив необходимое напряжение в область инжекции.

## 5. ДВИЖУЩИЕСЯ БАРЬЕРЫ В МЕТОДЕ БАРЬЕРНЫХ ВЧ-НАПРЯЖЕНИЙ

Современная цифровая электроника позволяет достаточно свободно манипулировать в широких пределах параметрами барьерного напряжения — амплитудой, фазой, формой импульсов и их шириной. Схема с изменяющимися параметрами напряжения носит название «генератор движущихся барьеров». Применение быстрых электронных ключей обеспечивает изменение режимов его работы. Поэтому простейший вариант функции  $f(\varphi)$ , рассмотренный выше, далеко не исчерпывает все возможные схемы накопления и ускорения в циклических ускорителях с барьерным ВЧ-напряжением. Наиболее развитые схемы с движущимися барьерами были разработаны в Лаборатории им. Э. Ферми (Fermilab, США) и использовались для накопления антипротонов и формирования пучков частиц в накопительных кольцах ускорительного комплекса этой лаборатории [1, 2, 6–9]. Предложенные в 1980-х гг. схемы движущихся барьеров [1] существенно развиты благодаря применению стохастического и электронного методов охлаждения заряженных частиц.

Здесь мы рассмотрим пример схемы с движущимися барьерами (Moving Barriers — MB), которую предполагается использовать в коллайдере NICA [13].

При накоплении частиц в коллайдере NICA весь  $2\pi$ -интервал фаз разделен на две области стабильного движения частиц — область накопления  $\Delta\varphi_{BB}$  и область инжекции  $\Delta\varphi_{inj}$ , для чего введена дополнительная пара барьеров противоположного знака (рис. 14, а, А). Функция  $f(\varphi)$  в этом случае имеет вид

$$f_{MB}(\varphi) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B; \\ 0, & \Delta\varphi_B < \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}; \\ -k, & \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} < \varphi \leq \varphi_s; \\ k, & \varphi_s < \varphi \leq 3\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}; \\ 0, & 3\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} < \varphi \leq 3\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} + \Delta\varphi_{inj}; \\ 1, & 3\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} + \Delta\varphi_{inj} < \varphi \leq 2\pi; \end{cases} \quad (5.1)$$

$$0 \leq k \leq 1.$$

Левая область  $\Delta\varphi_{BB}$  предназначена для накопления частиц, правая — для периодической инжекции свежих порций частиц. Барьеры, разделяющие эти области, имеют одинаковые амплитуды  $k$  и фазовые протяженности. После инжекции порции частиц в предварительно пустую зону  $\Delta\varphi_{inj}$  амплитуды обоих средних барьеров синхронно снижаются, т. е.  $k \rightarrow 0$ . При некотором значении  $k$  частицы из области инжекции проникают в область накопления (рис. 14, б, Б). В то же время накопленные частицы не покидают своей области  $\Delta\varphi_{BB}$ , пока средние барьеры не снизятся до соответствующего

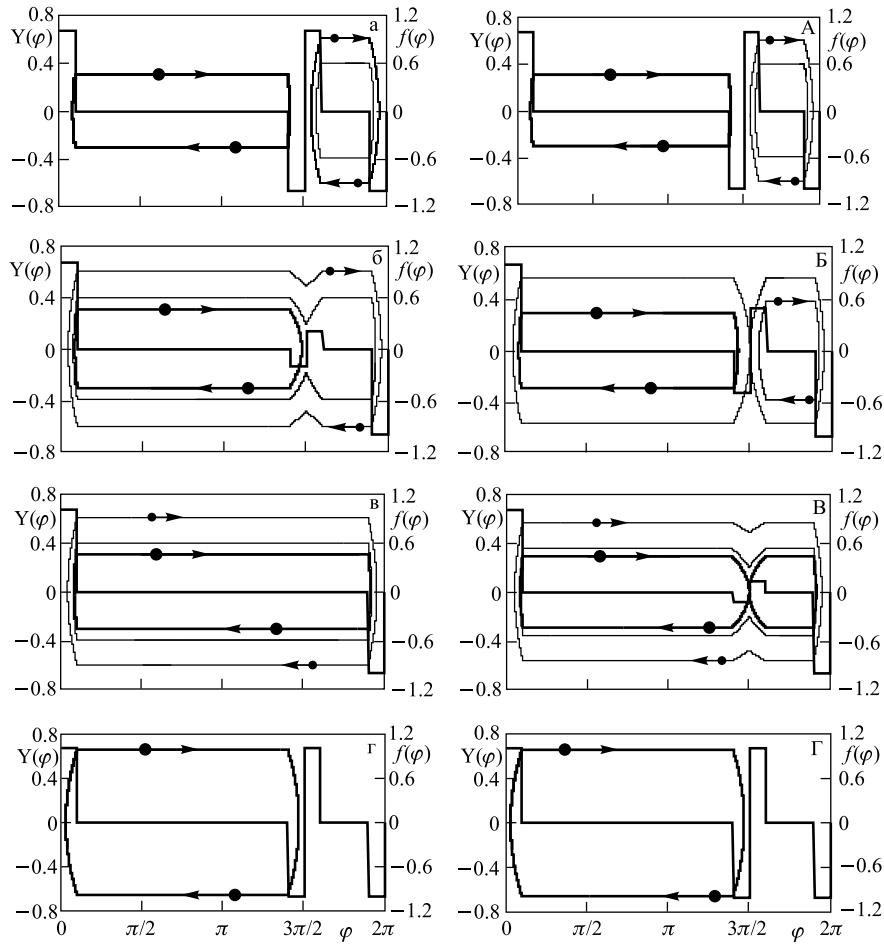


Рис. 14. Динамика слияния сгустков накопленных и интегрированных частиц; фазовые траектории рассчитаны численным решением уравнений (2.5), (2.6); описание в тексте, стрелками показаны направления движения частиц по траекториям. Быстрое уменьшение барьеров: а) инжекция новой порции частиц:  $k = 1, 0$ ;  $Y_{\text{stack}} = 0, 3$ ;  $Y_{\text{inj}1} = 0, 6$ ;  $Y_{\text{inj}2} = 0, 45$ ; б) промежуточное состояние «б»:  $k = 0, 2$ ;  $Y_{\text{stack}} = 0, 3$ ;  $Y_{\text{б}1} = Y_{\text{inj}1}$ ,  $Y_{\text{б}2} = Y_{\text{inj}2}$ ; в) промежуточное состояние «в»:  $k = 0$ ,  $Y_{\text{stack}} = 0, 3$ ;  $Y_{\text{в}1} = Y_{\text{inj}1}$ ,  $Y_{\text{в}2} = Y_{\text{inj}2}$ ; г) окончание цикла:  $k = 1$ ,  $Y_{\text{stack}\Gamma} = 0, 702$ . Адиабатическое уменьшение барьеров: А) инжекция новой порции частиц:  $k = 1, 0$ ;  $Y_{\text{stack}} = 0, 3$ ;  $Y_{\text{inj}1} = 0, 6$ ;  $Y_{\text{inj}2} = 0, 4$ ; Б) промежуточное состояние «Б»:  $k = 0, 506$ ;  $Y_{\text{stack}} = 0, 298$ ;  $Y_{\text{Б}1} = 0, 564$ ;  $Y_{\text{Б}2} = 0, 385$ ; В) промежуточное состояние «В»:  $k = 0, 288$ ;  $Y_{\text{stack}} = Y_{\text{stack penetr}} = 0, 288$ ;  $Y_{\text{В}1} = Y_{\text{Б}1}$ ,  $Y_{\text{В}2} = Y_{\text{В}2 penetr} = 0, 352$ ; Г) окончание цикла:  $k = 1$ ,  $Y_{\text{stack}\Gamma} = 0, 661$

уровня. Наконец, оба сгустка сливаются, и частицы занимают всю область фаз  $\Delta\varphi_{BB} + 2\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{inj}$  (рис. 14, в, В). Вообще говоря, боковые барьеры (с амплитудами, равными единице) также можно снизить до нуля, и слившиеся сгустки займут весь периметр накопителя, т.е. область фаз  $2\pi$ . Однако по техническим причинам иногда оказывается удобнее держать амплитуды этих барьеров постоянными.

Следующий шаг состоит в адиабатическом смещении правого барьера в положение бывшего среднего отрицательного барьера и восстановлении всех четырех барьеров в исходное состояние. В результате фазовая протяженность сгустка уменьшается, а разброс его частиц по импульсу возрастает (рис. 14, г, Г).

Уменьшение средних размеров барьеров можно производить с различной скоростью — от *быстрого*, т.е. за время, много меньшее периода движения частиц по фазовой траектории (1.12), (2.21), до *адиабатического*, — много большее этого периода.

**5.1. Быстрое уменьшение барьеров.** При быстром («мгновенном») уменьшении средних размеров барьеров частица продолжает свое движение в фазовом пространстве по траектории, определенной параметрами  $Y_{switch}$ ,  $\varphi_{switch}$  траектории в момент «выключения» барьеров. Это означает, что внешние траектории частиц инжектированной порции (тонкая внешняя кривая на рис. 14, б) и слившихся сгустков (тонкая внешняя кривая на рис. 14, в) определяются значениями  $Y_{switch} = Y_{inj1}$  (рис. 14, а). Таким образом, эмиттанс сгустка  $\varepsilon_B$  на рис. 14, в описывается формулой (2.19) с  $Y_{max} = Y_{inj1}$ . Затем, после *адиабатического сжатия* слившихся сгустков, значение  $Y_{fnl}$  внешней фазовой траектории определяется опять-таки уравнением (2.19), в котором  $\varepsilon(Y_{max}) = \varepsilon_B$  — эмиттанс слившихся сгустков до компрессии. При этом  $Y_{fnl}$  — корень кубического уравнения (2.19). Численное решение этого уравнения для параметров траекторий рис. 14, а–г дает  $Y_{stack\ r} = 0,702$ .

**5.2. Адиабатическое уменьшение барьеров.** Прежде чем детально анализировать адиабатически-медленный режим уменьшения барьеров, нам необходимо получить описание динамики частиц в *ВЧ-системе с разными амплитудами барьерного напряжения*. Начнем это описание с частиц, находящихся в области инжекции  $\Delta\varphi_{inj}$  (рис. 15). Проведя вычисления, аналогичные (2.14)–(2.19) для *прямоугольных барьеров*, находим параметры фазовой траектории в области инжекции  $\Delta\varphi_{inj}$ :

$$Y_{inj}(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{2k(\varphi - \varphi_{min})}, & \varphi_{min} \leq \varphi \leq 3\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}, \\ \sqrt{2k\Delta\varphi_0} \equiv Y, & 3\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} \leq \varphi \leq 3\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} + \Delta\varphi_{inj}, \\ \sqrt{2k(\varphi_{max} - \varphi)}, & 3\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} + \Delta\varphi_{inj} \leq \varphi \leq 2\pi - \Delta\varphi. \end{cases} \quad (5.2)$$

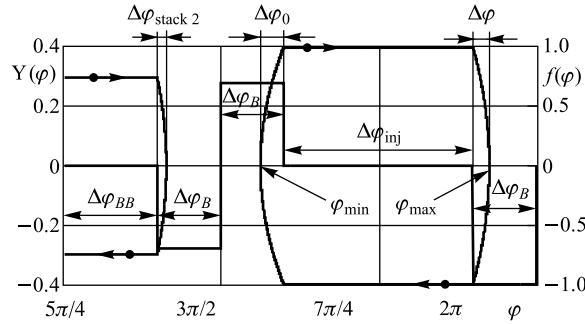


Рис. 15. Траектории частиц в области накопления (левая кривая, показана частично) и в области инжекции (правая кривая); барьеры имеют одинаковую фазовую протяженность  $\Delta\varphi_B = \pi/10$  и следующие значения амплитуд:  $V = -V_4 = 1$ ,  $V_2 = -V_3 = -0,4$ ;  $\Delta\varphi_{BB} = 1,3\pi$ ; траектории рассчитаны численным интегрированием уравнений (2.5), (2.6); описание в тексте; стрелками показаны направления движения частиц по траекториям

Здесь (см. обозначения на рис. 15)

$$\varphi_{\min} = 3\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} - \Delta\varphi_0, \quad \varphi_{\max} = 2\pi - \Delta\varphi. \quad (5.3)$$

Можно записать два очевидных равенства. Первое следует из условия

$$\int_{\varphi_{\min}}^{3\Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}} f(\varphi) d\varphi = \int_{\varphi_{\max} - \Delta\varphi}^{\varphi_{\max}} f(\varphi) d\varphi,$$

что дает

$$k\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi. \quad (5.4)$$

Второе равенство есть условие проникновения частицы из области инжекции в область накопления:

$$\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_B. \quad (5.5)$$

Подставив это значение  $\Delta\varphi_0$  во второе равенство в (5.2), находим значение сдвига частицы по импульсу в начале проникновения в область накопления:

$$Y_{\text{penetr}} = \sqrt{2k\Delta\varphi_B}. \quad (5.6)$$

В дальнейшем нам потребуются формулы для эмиттансов сгустков частиц, удерживаемых между барьерами разных амплитуд. Производя вычисления,



аналогичные (2.18), (2.19) для  $Y_{inj}(\varphi)$  из (5.2), находим формулы для эмиттанса сгустка инжектированных частиц

$$\begin{aligned}\varepsilon_{inj}(k) &= \sqrt{2k} \left[ \frac{4}{3}(1+k)\Delta\varphi_0^{3/2} + 2\sqrt{\Delta\varphi_0}\Delta\varphi_{inj} \right] = \\ &= \frac{2}{3} \frac{1+k}{k} Y^3 + 2Y\Delta\varphi_{inj}. \quad (5.7)\end{aligned}$$

Здесь  $Y$  — значение  $Y_{inj}(\varphi)$  между барьерами (второе выражение в (5.2)).

Выражение для  $Y_{stack}(\varphi)$  (область накопления) и эмиттанса сгустка накопленных частиц  $\varepsilon_{stack}$  получим аналогично (5.2) и (5.7). Для сгустка накопленных частиц эмиттанс описывается той же формулой (5.7), в которой нужно произвести замену  $\Delta\varphi_{inj}$  на  $\Delta\varphi_{BB}$ . В результате находим

$$Y_{stack}(\varphi) = \begin{cases} \sqrt{2k(\varphi - \varphi_{min})}, & \varphi_{stack\ min} \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B, \\ \sqrt{2k\Delta\varphi_{stack1}} \equiv Y, & \Delta\varphi_B \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB}, \\ \sqrt{2k(\varphi_{max} - \varphi)}, & \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} \leq \varphi \leq \Delta\varphi_B + \\ & + \Delta\varphi_{BB} + \varphi_{stack\ max}, \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\varphi_{min\ stack} = \Delta\varphi_B - \Delta\varphi_{stack1}, \quad \varphi_{max\ stack} = \Delta\varphi_B + \Delta\varphi_{BB} + \Delta\varphi_{stack2},$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{stack}(k) &= \sqrt{2k} \left[ \frac{4}{3}(1+k)\Delta\varphi_0^{3/2} + 2\sqrt{\Delta\varphi_0}\Delta\varphi_{BB} \right] = \\ &= \frac{2}{3} \frac{1+k}{k} Y^3 + 2Y\Delta\varphi_{BB}. \quad (5.9)\end{aligned}$$

Параметр  $Y$  здесь определен во втором выражении для  $Y_{stack}(\varphi)$  (5.8). Значение  $\Delta\varphi_{stack2}$  объясняется на рис. 15, а параметр  $\Delta\varphi_{stack1}$  имеет аналогичное значение для траектории частицы в области  $\Delta\varphi_B$  первого барьера. Очевидно, теперь вместо (5.4), (5.5) можно записать

$$\Delta\varphi_{stack1} = k\Delta\varphi_{stack2}, \quad \Delta\varphi_{stack2} = \Delta\varphi_B. \quad (5.10)$$

Теперь мы готовы сформулировать алгоритм расчета фазового движения частиц при адиабатическом уменьшении средних барьеров (рис. 14, А–Г).

*Стадия А* (рис. 14, А) — начальное состояние, заданы значения  $Y$  для трех фазовых траекторий:  $Y_{stack}$  — внешняя траектория частицы из сгустка накопленных частиц,  $Y_{inj1}$  и  $Y_{inj2}$  — внешняя и промежуточная траектории инжектированных частиц; по этим значениям рассчитываем площади траекторий («эмиттансы»), используя формулы (5.7), (5.9):  $\varepsilon_{stack}$ ,  $\varepsilon_{inj1}$ ,  $\varepsilon_{inj2}$ .

*Стадия Б* (рис. 14, Б) — средние барьеры уменьшились настолько, что частицы  $Y_{inj1}$  начинают проникать в область накопления. Прежде всего, нужно определить деформацию фазовой траектории в результате уменьшения средних барьеров. Этот процесс сопровождается расширением траектории

вдоль оси абсцисс на рис. 15, что ведет к смещению точек  $\varphi_{\min}$  и  $\varphi_{\max}$  влево и вправо вдоль оси соответственно. Поскольку площадь фазовой траектории при этом сохраняется (адиабатический инвариант!), она сжимается вдоль оси ординат, т.е. уменьшается величина импульса частицы  $Y$ . Когда  $\varphi_{\min}$  и  $\varphi_{\max}$  достигают наружных границ барьеров (т.е. выполняется условие (5.5)), частица проникает в соседнюю фазовую область.

Чтобы найти значение  $k_B$ , соответствующее этому состоянию, нужно решить кубическое уравнение для  $k_B$  (первое выражение в (5.7)) при заданном значении  $\varepsilon_{inj1}$  и  $\Delta\varphi_0 = \Delta\varphi_B$ . Затем из (5.6) при  $k = k_B$  находим значение  $Y_{B1}$ . Чтобы найти  $Y_{stack}$  и  $Y_{B2}$ , решаем кубические уравнения для  $Y$  (вторые выражения в (5.7) и (5.9)) при  $k = k_B$  и заданных значениях  $\varepsilon_{stack}$  и  $\varepsilon_{inj2}$  соответственно.

*Стадия В* (рис. 14, В) — начало проникновения накопленных частиц в область инжекции. Процедура вычислений та же, что и для стадии Б: находим значения параметров  $k_B$  и  $Y$ . Все три фазовые траектории сливаются вместе, охватывая обе области — накопления и инжекции.

Следует подчеркнуть, что все три эмиттанса,  $\varepsilon_{stack}$ ,  $\varepsilon_{inj1}$  и  $\varepsilon_{inj2}$ , не остаются постоянными, а увеличиваются после проникновения их частиц в соседнюю фазовую область в стадиях Б и В, так как частицы после пересечения барьеров движутся свободно в фазовом пространстве, пренебрежимо слабо взаимодействуя с уменьшающимися средними барьерами. В результате параметр  $Y$  этих частиц не изменяется при дальнейшем уменьшении барьеров до нуля. Например, по этой причине в стадии В (начало проникновения накопленных частиц в область инжекции) имеем  $Y_{stack} = Y_{stack\ penetr} = 0,288$ ;  $Y_{C1} = Y_{B1}$ ,  $Y_{B2} = Y_{2\ penetr} = 0,352$ . Последнее равенство достигается при  $k = 0,197$  и выполняется в дальнейшем.

*Стадия Г* (рис. 14, Г) — адиабатическое сжатие всех частиц. Окончательный размер находим из условия сохранения площади внешней траектории:  $Y_{stack\ Г} = 0,661$ . Это значение несколько меньше  $Y_{stack\ г} = 0,702$ , полученного при быстром уменьшении средних барьеров. Столь малая разница является результатом выбора довольно малой фазовой протяженности барьеров ( $\Delta\varphi_B = \pi/10$ ), когда вклад площади средних барьеров незначителен.

Аналогичная процедура описана в работе [2] на языке изменения энергии частиц. Такой способ описания скрывает, на наш взгляд, картину динамики частиц в фазовом пространстве.

В случае использования методов охлаждения схема накопления с движущимися барьерами имеет значительные преимущества по сравнению со схемой, рассмотренной в разд. 3. Главное из них — существенно смягчается требование к времени охлаждения (3.6), (3.7). Действительно, в схеме с движущимися барьерами достаточно охладить инжектированные частицы только до такого уровня, когда их сдвиг по импульсу в стадии «б» или «Б» (рис. 14) меньше  $Y_{sep}$  в области накопления  $\Delta\varphi_{BB}$ . После слияния инжектированных

и накопленных частиц и формирования конечной стадии «г» или «Г» можно продолжить охлаждение, имея больше времени для этой цели.

Значительный выигрыш эта схема дает в скорости стохастического охлаждения, когда частицы слились и занимают практически весь периметр накопителя. Поскольку скорость стохастического охлаждения обратно пропорциональна линейной плотности частиц, то выигрыш порядка  $2\pi/\Delta\varphi_{inj}$  [17]. Для электронного охлаждения выигрыш не столь очевиден. Тем не менее снижение линейной плотности пучка и в этом случае предпочтительно, так как уменьшаются эффекты пространственного заряда.

## 6. ТЕХНИКА БАРЬЕРНЫХ ВЧ-НАПРЯЖЕНИЙ

Современные ВЧ-системы барьерного напряжения конструируются на основе генераторов с цифровым управлением и усилителями мощности с полупроводниковыми переключателями. Подобный генератор позволяет формировать короткие прямоугольные импульсы высокого напряжения с крутыми фронтами и минимальной амплитудой пульсаций. Генератор питает ВЧ-резонатор, нагруженный ферромагнетиком (феррит, аморфное железо и т. п.).

Использование ферромагнетика налагает дополнительное условие на функцию барьерного напряжения  $f(\varphi)$  — «условие ненасыщения» ферромагнетика:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = 0. \quad (6.1)$$

В противном случае ферромагнетик насыщается после некоторого (небольшого) количества импульсов барьерного напряжения (поток магнитного поля пропорционален интегралу по времени от напряжения  $V(t)$ ).

Таблица 1. Параметры барьерных ВЧ-систем ускорительного комплекса Фермилаб [2]

Ускоритель/ накопитель	Тип феррита (размеры резонатора)	Мощность; амплитуда; шунтовое сопротивление; полоса частот
Debuncher	MnZn+NiZn (~ 1 м)	2,4 кВт; 700 В; 104 Ом; 10 кГц – 10 МГц
Accumulator	MnZn+NiZn (~ 1 м)	100 Вт; 70 В; 50 Ом; 10 кГц – 10 МГц
Recycler	Керамический магнетик MN60, CMD10 (~ 1 м)	4 × 3,5 кВт; 4 × 500 В; 4 × 50 Ом; 10 кГц – 10 МГц
МІ — тестовый резонатор	Finemet R <sub>core</sub> (~ 0,75 м)	150 кВт; 10 кВ; 500 Ом; быстрый ключ
МІ — демпер- резонатор	MnZn+NiZn (~ 1 м)	3 × 3,5 кВт; 3 × 500 В; 3 × 50 Ом; 10 кГц – 100 МГц

Таблица 2. Параметры некоторых барьерных ВЧ-систем

Параметр	Лаборатория (ускоритель)		
	BNL/КЕК (AGS) [18]	КЕК для BNL (AGS) [19]	ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН для ОИЯИ (коллайдер NICA)
Материал сердечника	Феррит	Finemet *	Аморфное железо
Количество ускоряющих зазоров	4	4	14
Частота, МГц	2,6	1,1	0,579–0,587
Добротность, $Q$	30	0,6	—
$R/Q$ на зазор, Ом	180	1500	—
Мощность усилителя, кВт	600	120	22

\* Коммерческая марка, Hitachi Metals, Ltd.

Наиболее совершенные и многофункциональные барьерные ВЧ-системы были созданы в Фермилаб, начиная с пионерских работ, выполненных там (табл. 1). Параметры некоторых барьерных ВЧ-систем, разработанных в последние годы, представлены в табл. 2.

Барьерные ВЧ-системы становятся все более популярными в ускорительной технике по мере развития твердотельной силовой ВЧ-электроники.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение систем барьерного ВЧ-напряжения для накопления и ускорения заряженных частиц имеет значительные преимущества по сравнению с классическими ВЧ-системами. Эти преимущества особенно существенны в случае накопителей тяжелых заряженных частиц — протонов, антипротонов и ионов, где использование методов охлаждения практически неизбежно.

Метод барьерных напряжений был значительно развит с момента его первого предложения, и в настоящее время, благодаря достижениям мощной твердотельной ВЧ-электроники, стало возможным создание многофункциональных барьерных ВЧ-систем.

Метод анализа динамики заряженных частиц в циклических ускорителях с барьерным ВЧ-напряжением, представленный в данной работе, позволяет довольно просто произвести аналитические вычисления и оценки и получить полное описание динамики частиц в широкой области параметров. Дополненный численным моделированием, этот метод обеспечивает оптимальный выбор параметров барьерной системы при ее проектировании.

Автор пользуется приятной возможностью выразить благодарность Т. Каятаме за многолетнее плодотворное сотрудничество, а также В. А. Лебедеву, А. В. Елисееву, В. М. Петрову, А. О. Сидорину и А. В. Смирнову за ценные обсуждения и замечания при написании данной работы. Автор благодарит Т. А. Степанову за тщательную подготовку работы к публикации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Griffin J. E. et al.* // IEEE. Trans. Nucl. Sci. 1983. NS-30. P. 3502.
2. *Bhat C. M.* Applications of Barrier Bucket RF Systems at Fermilab // Fermilab-Conf-06-102-AD. 2006.
3. *Meshkov I. et al.* NICA Project at JINR // Proc. of COOL'2011 Workshop. MOIO02. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/>.
4. *Steck M.* The FAIR Accelerator Facility // Proc. of STORI'2008.
5. *Коломенский А. А., Лебедев А. Н.* Теория циклических ускорителей. М.: Физматлит, 1962; *Kolomensky A., Lebedev A.* Theory of Cyclic Accelerators. N.-H., Amsterdam: Springer, 1966.
6. *Bhat C. M.* Antiproton Stacking and Un-Stacking in the Fermilab Recycler Ring // Proc. of PAC'03, WPPE010. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/>.
7. *Bhat C. M.* Barrier RF Systems in Synchrotrons // Proc. of EPAC'2004. THOBCH03. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/>.
8. *Foster G. W. et al.* Beam Manipulation and Compression Using Broad Band RF Systems in the FERMILAB Main Injector and Recycler // Ibid. TUPLT149.
9. *Bhat C. M.* A New Technique for Making Bright Proton Bunches Using Barrier FR Systems // Proc. of PAC'05. TPAP021. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/>.
10. *Steck M. et al.* Particle Article Accumulation Using Barrier Bucket RF System // Proc. of COOL'09. TUM2MCIO02. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/>.
11. *Katayama T. et al.* Simulation Study of Barrier Bucket Accumulation with Stochastic Cooling at GSI ESR // Proc. of COOL'11. TUPS19. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/>.
12. *Katayama T., Meshkov I., Trubnikov G.* Numerical Investigation of Stochastic Cooling at NICA Collider // Ibid. TUIOB01.
13. *Eliseev A. V. et al.* Storage Acceleration and Short Bunched Beam Formation of  $^{197}\text{Au}^{+79}$  Ions in the NICA Collider // Ibid. MOBCH01.
14. *Steck M. et al.* Demonstration of Longitudinal Stacking in the ESR with Barrier Buckets and Stochastic Cooling // Ibid. TUPS20. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/>.
15. *Bohl T., Linnecar T., Shaposhnikova E.* Barrier Buckets in the CERN SPS // Proc. of EPAC'00. THP2A10. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/>.
16. *Смирнов А. В.* Частное сообщение. 2012.

17. *Moehl D.* Stochastic Cooling // Proc. of CERN Accelerator School CAS-1985. CERN, 1987. P. 453–520; Stochastic Cooling of Particle Beams. The Lecture Notes in Physics. Springer, 2013.
18. *Blaskiewicz M. et al.* Barrier Cavities in the Brookhaven AGS // Proc. of PAC'99. WEP10. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/>.
19. *Fujieda M. et al.* Magnetic Alloy Loaded RF Cavity for Barrier Bucket Experiment at the AGS // Proc. of PAC'99. MOP81. <http://accelconf.web.cern.ch/accelconf/>.
20. *Куркин Г. А., Петров В. М. и др.* Технический проект ускоряющих RF систем для коллайдера NICA. ИЯФ им. Г. И. Будкера, июль 2012 г.