

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ \mathcal{PT} -СИММЕТРИЧНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ С МАКСИМАЛЬНОЙ МАССОЙ

В. Н. Родионов^{1,}, Г. А. Кравцова^{2,**}*

¹ Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

ВВЕДЕНИЕ	252
ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ С ОГРАНИЧЕННОЙ МАССОЙ. СКАЛЯРНЫЙ И ФЕРМИОННЫЙ СЕКТОРЫ	253
ТЕОРИЯ С ОГРАНИЧЕННОЙ МАССОЙ КАК АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЭРМИТОВА \mathcal{PT} -СИММЕТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ	265
СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В ПСЕВДОЭРМИТОВОЙ МОДЕЛИ	273
γ_5 -МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДИРАКА В ПОСТОЯННОМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ	278
НЕЭРМИТОВА МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДИРАКА–ПАУЛИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ	282
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	289
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	291

*E-mail: rodyvn@mail.ru

**E-mail: gakr@chtc.ru

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ \mathcal{PT} -СИММЕТРИЧНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ С МАКСИМАЛЬНОЙ МАССОЙ

В. Н. Родионов^{1,*}, Г. А. Кравцова^{2,**}

¹ Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва

² Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

В этой статье мы хотим обратить внимание на то, что работы В. Г. Кадышевского, посвященные построению *геометрической квантовой теории поля с фундаментальной массой*, в последнее время получили мощное развитие в виде разработки неэрмитового алгебраического подхода к построению квантовой теории. Центральным пунктом таких теорий — построение нового скалярного произведения, в котором средние значения неэрмитовых гамильтонианов оказываются действительными. Причем среди многочисленных работ по этой теме имеются как чисто математические, так и содержащие обсуждение экспериментально полученных результатов. В связи с этим мы рассматриваем разработку алгебраической релятивистской псевдоэрмитовой квантовой теории с максимальной массой и обсуждаем ее экспериментально значимые следствия.

In this article we want to draw attention to the fact that the approaches developed by V. G. Kadyshevsky in the course of several decades and devoted to *the geometric construction of quantum field theory with fundamental mass* containing non-Hermitian mass extensions have recently gained a powerful development in the form of construction of the non-Hermitian algebraic approach. The central point of these theories is the construction of new scalar products in which the average values of non-Hermitian Hamiltonians are valid. Among numerous works on this subject there are both purely mathematical and containing a discussion of experimental results. In this regard, we consider the development of algebraic relativistic pseudo-Hermitian quantum theory with a maximal mass and discuss its experimentally significant consequences.

PACS: 02.30.Jr; 03.65.-w; 03.65.Ge; 12.10.-g; 12.20.-m

*E-mail: rodyvn@mail.ru

**E-mail: gakr@chtc.ru

*Светлой памяти
Владимира Георгиевича Кадышевского
посвящается*

Камень, который отвергли строители,
сделался главою угла. . . (ПС.117:22–23).

ВВЕДЕНИЕ

Эта работа намечалась как совместная с В. Г. Кадышевским, однако судьба распорядилась иначе. Ушел из жизни замечательный человек, выдающийся ученый, академик РАН Владимир Георгиевич Кадышевский. Нам посчастливилось вместе с ним начать работу в области теории, которая по праву является его детищем. Эта теория получила название *квантовая теория поля (КТП) с фундаментальной массой*, т. е. модифицированная КТП, в которой кроме обычных постулатов квантовой теории за основу принимается новый фундаментальный физический принцип, утверждающий, что спектр масс элементарных частиц должен быть ограничен сверху: $m \leq M$.

На сегодняшний день элементарными считаются частицы, свойства и взаимодействия которых могут быть адекватно описаны в терминах локальных полей. В этих же терминах может быть сформулирован вопрос: должна ли масса элементарных частиц быть ограничена сверху? А именно: до каких значений массы частицы m для ее описания применима концепция локального поля?

Сам Владимир Георгиевич по этому поводу писал: «Формально стандартная КТП остается логически безупречной схемой и тогда, когда в элементарном акте взаимодействия участвуют объекты, массы которых сравнимы, скажем, с массами автомобилей. Столь далекая экстраполяция локальной теории поля в область макроскопических значений масс выглядит, как патология, и вряд ли имеет что-либо общее с потребностями физики элементарных частиц. Однако повторяем: современная КТП такую физически бессмысленную экстраполяцию не запрещает. Может быть, это принципиальный дефект теории, ее "ахиллесова пята"?» [1].

Должна ли масса элементарных частиц быть ограничена сверху? Многие утверждают, что «не верят» в это ограничение. Однако данная проблема не является вопросом веры. На вопрос, поставленный в области науки, окончательный ответ может дать лишь эксперимент. До сих пор специальные эксперименты по поиску частиц с максимальной массой не ставились. Известно лишь, что в СМ на сегодняшний день наиболее массивной частицей считается топ-кварк, масса которого примерно в 300 000 раз превышает массу электрона. Понятно, что поиск прямых экспериментов по обнаружению «максимонов» ограничивается возможностями создания сверхмощной

ускорительной техники. Однако детальное изучение моделей с максимальной массой может открыть совершенно новые уникальные возможности обнаружения следствий этого ограничения. Речь идет об учете различных внешних воздействий, позволяющих выделить эффекты, которые обусловлены существованием ограниченности спектра масс элементарных частиц. В качестве примера здесь можно привести изучение влияния на подобные процессы интенсивных магнитных полей, учет взаимодействия с которыми может привести к наблюдаемости ряда эффектов. В частности, одним из возможных следствий ограниченности спектра масс является появление в теории так называемых экзотических частиц, существование которых было предсказано В. Г. Кадышевским в рамках геометрического подхода [2]. Свойства этих частиц кардинально отличаются от аналогичных свойств их обычных партнеров. Однако оказалось, что появление в теории «экзотических» частиц не является прерогативой геометрического подхода. Действительно, развитие псевдоэрмитовой алгебраической \mathcal{PT} -симметричной теории показало, что эти частицы появляются как следствие *самого ограничения спектра масс элементарных частиц*. Таким образом, эксперименты по поиску «экзотических» частиц фактически могут приводить к обнаружению существования предельной массы. Подобный подход становится реальным благодаря расчету спектра энергий нейтрального фермиона, обладающего аномальным магнитным моментом в теории с максимальной массой [3, 4]. Таким образом, дальнейшее развитие теории, основанной В. Г. Кадышевским, может и должно дать предложения по постановке подобных экспериментов в ближайшем будущем.

1. ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ТЕОРИЮ С ОГРАНИЧЕННОЙ МАССОЙ. СКАЛЯРНЫЙ И ФЕРМИОННЫЙ СЕКТОРЫ

Идея ограниченности спектра масс элементарных частиц была высказана еще в 1965 г. М. А. Марковым. Это ограничение связывалось с «планковской массой» $m_{\text{Planck}} = \sqrt{\hbar c/G} \sim 10^{19}$ ГэВ, где G — гравитационная постоянная, \hbar — постоянная Планка, c — скорость света, и записывалось в виде [5]

$$m \leq m_{\text{Planck}} = 10^{19} \text{ ГэВ.} \quad (1)$$

Частицы с предельной массой $m = m_{\text{Planck}}$ были названы автором «максимонами». Им отводилось особое место среди элементарных частиц, в частности, в марковском сценарии ранней Вселенной максимоны должны были играть существенную роль [6]. Однако первоначально условие (1) было чисто феноменологическим и в построении теории фактически не участвовало. Новый, радикальный подход действительного введения в теорию условия ограниченности спектра масс был предложен в конце 1970-х гг. В. Г. Кадышевским [2].

В этом подходе марковская идея о существовании максимальной массы частиц принималась как новый фундаментальный физический принцип квантовой теории поля. В предложенной теории постулировалось условие конечности спектра масс в виде

$$m \leq M, \quad (2)$$

где параметр максимальной массы M , называемый фундаментальной массой, являлся новой физической константой. При этом величина M рассматривалась как радиус кривизны 5-мерного гиперboloида, поверхность которого представляет собой реализацию искривленного импульсного 4-пространства, или пространства анти-де Ситтера

$$p_0^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 + p_5^2 = M^2. \quad (3)$$

Легко видеть, что для свободной частицы $p_0^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$ условие (2) автоматически выполняется на поверхности (3). Также очевидно, что в приближении

$$|p_0|, \quad |\mathbf{p}| \ll M, \quad p_5 \cong M \quad (4)$$

геометрия анти-де Ситтера переходит в геометрию Минковского в 4-мерном псевдоевклидовом p -пространстве (так называемый плоский предел).

Таким образом, в пространстве анти-де Ситтера строилась новая теория, в которой объекты с массой больше M не могут рассматриваться как элементарные частицы, так как им не соответствуют никакие локальные поля [7–17].

Важно отметить, что с понятием фундаментальной массы тесно связана и концепция фундаментальной длины

$$l = \hbar/Mc. \quad (5)$$

Ее физический смысл может быть, по крайней мере частично, прояснен из сравнения l и комптоновской длины волны частицы $\lambda_C = \hbar/mc$. Из формулы (2) видно, что λ_C не может быть меньше l . Поскольку (согласно Ньютону и Вигнеру [18]) параметр λ_C характеризует размеры области пространства, в которой можно локализовать релятивистскую частицу массы m , следует признать, что фундаментальная длина l должна вносить в теорию универсальное ограничение на точность пространственной локализации элементарных частиц.

Идея о введении фундаментальной длины как новой универсальной постоянной размерности длины, фиксирующей характерный масштаб в пространстве-времени, активно обсуждалась в литературе (см., например, [19–27]). Главным стимулом использования данного параметра была надежда с помощью l избавиться от ультрафиолетовых расходимостей. Однако, как известно, нашлось более простое решение этой проблемы. Теперь фундаментальная

длина снова возникает в теории в совершенно ином контексте: как величина, в определенном смысле сопряженная фундаментальной массе.

Следует заметить, что модели КТП, в которых возникал параметр типа фундаментальной длины l , оказывались нелокальными. Возвращаясь к теории Кадышевского, еще раз укажем на последовательное использование требования локальности данной версии квантовой теории. Благодаря этому при описании взаимодействия по-прежнему можно опираться на принцип локальной калибровочной симметрии. Ключевая идея, позволяющая совместить постулат об ограниченности масс (2) и условие локальности поля, состоит в необходимости модификации самого понятия поля.

Для иллюстрации этого утверждения можно рассмотреть сначала самый простой случай действительного скалярного поля $\varphi(x)$. Как известно, свободное уравнение Клейна–Гордона для $\varphi(x)$ имеет вид

$$(\square + m^2) \varphi(x) = 0, \quad (6)$$

где \square — оператор Даламбера.

После стандартных фурье-преобразований

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ip_\mu x^\mu} \varphi(p) d^4 p \quad (p_\mu x^\mu = p^0 x^0 - \mathbf{p}\mathbf{x}) \quad (7)$$

находим уравнение движения в 4-мерном импульсном пространстве Минковского:

$$(m^2 - p^2) \varphi(p) = 0, \quad p^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2. \quad (8)$$

С геометрической точки зрения m есть радиус 4-гиперboloида

$$m^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2, \quad (9)$$

на котором определено поле $\varphi(p)$. В пространстве Минковского можно помещать гиперboloиды типа (9) произвольного радиуса. Это означает, что формально современная КТП остается логически совершенной схемой, и ее математическая структура не меняется вплоть до произвольно больших значений квантовых масс.

Как можно модифицировать уравнение движения, чтобы учесть условие ограниченности масс (2)? Следуя [2, 11], заменим 4-мерное импульсное пространство Минковского, которое используется в стандартной КТП, на антидеситтеровское импульсное пространство постоянной кривизны, реализуемое на поверхности 5-гиперboloида:

$$p_0^2 - \mathbf{p}^2 + p_5^2 = M^2. \quad (10)$$

Предположим, что в p -представлении скалярное поле φ определено на этой поверхности, т. е. оно является функцией пяти переменных p_0, \mathbf{p}, p_5 .

связанных соотношением (10):

$$\delta(p_0^2 - \mathbf{p}^2 + p_5^2 - M^2) \varphi(p_0, \mathbf{p}, p_5). \quad (11)$$

Энергия p_0 и 3-мерный импульс \mathbf{p} сохраняют здесь свой обычный смысл, и соотношение для массовой оболочки (9) также удовлетворяется. При этом условие (2) для рассматриваемого поля $\varphi(p_0, \mathbf{p}, p_5)$ оказывается выполненным.

Из уравнения (11) ясно, что определение одной функции $\varphi(p_0, \mathbf{p}, p_5)$ пяти переменных (p_μ, p_5) эквивалентно определению двух независимых функций $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$ 4-импульса p_μ :

$$\varphi(p_0, \mathbf{p}, p_5) \equiv \varphi(p, p_5) = \begin{pmatrix} \varphi(p, |p_5|) \\ \varphi(p, -|p_5|) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(p) \\ \varphi_2(p) \end{pmatrix}, \quad |p_5| = \sqrt{M^2 - p^2}. \quad (12)$$

Отметим, что возникновение новой дискретной степени свободы

$$\epsilon = p_5/|p_5| = \pm 1 \quad (13)$$

и появление пары полевых переменных является характерной чертой развиваемой теории. Из-за выполнения соотношения (9) уравнение Клейна–Гордона (8) также должно удовлетворяться полем $\varphi(p_0, \mathbf{p}, p_5)$:

$$(m^2 - p_0^2 + \mathbf{p}^2) \varphi(p_0, \mathbf{p}, p_5) = 0. \quad (14)$$

Однако это соотношение не отражает условия ограниченности спектра масс (2). Оно также не может быть использовано для выяснения зависимости поля от нового квантового числа $\epsilon = p_5/|p_5|$, т.е. для определения полей $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$. Для того чтобы учесть эти требования и найти удовлетворяющее им модифицированное уравнение, воспользуемся соотношениями (9), (10) и получим

$$m^2 - p_0^2 + \mathbf{p}^2 = p_5^2 - M^2 \cos^2 \mu,$$

где $\cos \mu = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}$. Таким образом, вместо (14) можем записать

$$(p_5 + M \cos \mu)(p_5 - M \cos \mu) \varphi(p, p_5) = 0. \quad (15)$$

Это равенство удовлетворяется, когда

$$(p_5 - M \cos \mu) \varphi(p, p_5) = 0. \quad (16)$$

Естественно предположить, что (16) и есть новое уравнение движения скалярных частиц. Из уравнений (16), (12) следует, что

$$\begin{aligned} (|p_5| - M \cos \mu) \varphi_1(p) &= 0, \\ (|p_5| + M \cos \mu) \varphi_2(p) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Эти уравнения удовлетворяют перечисленным выше требованиям, и для $\varphi_{1,2}(p)$ уравнение (14) также выполняется. Далее, используя (17), получаем

$$\varphi_1(p) = \delta(p^2 - m^2) \tilde{\varphi}_1(p), \quad \varphi_2(p) = 0. \quad (18)$$

Таким образом, свободное поле $\varphi(p, p_5)$, определенное в анти-деситтеровском импульсном пространстве (10), описывает скалярные частицы массы m , подчиняющейся условию $m \leq M$. Заметим, что двухкомпонентность нового поля (12) не проявляется на массовой поверхности (в силу второго равенства (18)). Однако она может играть существенную роль при взаимодействии полей, т. е. вне массовой оболочки.

Следуя работе [15], будем использовать евклидову формулировку теории, которая появляется при аналитическом продолжении в область чисто мнимых значений энергии:

$$p_0 \rightarrow ip_4. \quad (19)$$

В этом случае вместо пространства анти-де Ситтера (10) будем иметь дело с импульсным пространством де Ситтера:

$$-p_n^2 + p_5^2 = M^2, \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (20)$$

Очевидно,

$$p_5 = \pm \sqrt{M^2 + p_n^2}. \quad (21)$$

Если использовать (20), то оператор Клейна–Гордона в евклидовой форме $m^2 + p^2$ может быть записан, подобно (15), в следующем факторизованном виде:

$$m^2 + p_n^2 = (p_5 + M \cos \mu)(p_5 - M \cos \mu). \quad (22)$$

Ясно, что неотрицательный функционал

$$S_0(M) = \pi M \int \frac{d^4 p}{|p_5|} [\varphi_1^+(p) 2M(|p_5| - M \cos \mu) \varphi_1(p) + \varphi_2^+(p) 2M(|p_5| + M \cos \mu) \varphi_2(p)], \quad (23)$$

$$\varphi_{1,2}(p) \equiv \varphi(p, \pm |p_5|), \quad (24)$$

играет роль функционала действия свободного евклидова поля $\varphi(p, p_5)$. Это действие может быть записано в виде 5-мерного интеграла:

$$S_0(M) = 2\pi M \int \varepsilon(p_5) \delta(p_L p^L - M^2) d^5 p \times \\ \times [\varphi^+(p, p_5) 2M(p_5 - M \cos \mu) \varphi(p, p_5)], \quad (25)$$

где

$$L = 1, 2, 3, 4, 5$$

и введено обозначение

$$\varepsilon(p_5) = \frac{p_5}{|p_5|}. \quad (26)$$

Преобразование Фурье и конфигурационное представление играют особую роль в этом подходе. Во-первых, заметим, что в основном соотношении (20), которое определяет пространство де Ситтера, все компоненты 5-вектора импульса выступают равноправно. Поэтому выражение $\delta(p_L p^L - M^2) \varphi(p, p_5)$, которое теперь заменяет (11), может быть фурье-преобразовано:

$$\frac{2M}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ip_K x^K} \delta(p_L p^L - M^2) \varphi(p, p_5) d^5 p = \varphi(x, x_5), \quad (27)$$

$$K, L = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Функция (27), очевидно, удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению в 5-мерном конфигурационном пространстве:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_5^2} - \square + M^2 \right) \varphi(x, x_5) = 0. \quad (28)$$

Интегрирование по p_5 в (27) дает

$$\varphi(x, x_5) = \frac{2M}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ip_n x^n} \frac{d^4 p}{|p_5|} \left[e^{-i|p_5| x^5} \varphi_1(p) + e^{i|p_5| x^5} \varphi_2(p) \right], \quad (29)$$

$$\varphi^+(x, x_5) = \varphi(x, -x_5),$$

откуда имеем

$$\frac{i}{M} \frac{\partial \varphi(x, x_5)}{\partial x_5} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ip_n x^n} d^4 p \left[e^{-i|p_5| x^5} \varphi_1(p) - e^{i|p_5| x^5} \varphi_2(p) \right]. \quad (30)$$

Четырехмерные интегралы (29) и (30) преобразуют поля $\varphi_1(p)$ и $\varphi_2(p)$ в конфигурационное представление. Обратное преобразование выглядит следующим образом:

$$\varphi_1(p) = \frac{-i}{2M(2\pi)^{5/2}} \int e^{-ip_n x^n} d^4 x \left[\varphi(x, x_5) \frac{\partial e^{i|p_5| x^5}}{\partial x_5} - e^{i|p_5| x^5} \frac{\partial \varphi(x, x_5)}{\partial x_5} \right],$$

$$\varphi_2(p) = \frac{i}{2M(2\pi)^{5/2}} \int e^{-ip_n x^n} d^4 x \left[\varphi(x, x_5) \frac{\partial e^{-i|p_5| x^5}}{\partial x_5} - e^{-i|p_5| x^5} \frac{\partial \varphi(x, x_5)}{\partial x_5} \right]. \quad (31)$$

Заметим, что независимые полевые переменные

$$\varphi(x, 0) \equiv \varphi(x) = \frac{2M}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ip_n x^n} d^4 p \frac{\varphi_1(p) + \varphi_2(p)}{|p_5|} \quad (32)$$

и

$$\frac{i}{M} \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial x_5} \equiv \chi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ip_n x^n} d^4 p [\varphi_1(p) - \varphi_2(p)] \quad (33)$$

могут трактоваться как начальные данные задачи Коши на поверхности $x_5 = 0$ для уравнения гиперболического типа (28).

Подставляя теперь величины (31) в действие (23), имеем

$$S_0(M) = \frac{1}{2} \int d^4 x \left[\left| \frac{\partial \varphi(x, x_5)}{\partial x_n} \right|^2 + m^2 |\varphi(x, x_5)|^2 + \left| i \frac{\partial \varphi(x, x_5)}{\partial x_5} - M \cos \mu \varphi(x, x_5) \right|^2 \right] \equiv \int L_0(x, x_5) d^4 x. \quad (34)$$

Нетрудно проверить, что благодаря выполнению уравнения (28) действие (34) не зависит от x_5 :

$$\frac{\partial S_0(M)}{\partial x_5} = 0. \quad (35)$$

Так что переменная x_5 может быть произвольным образом фиксирована, и $S_0(M)$ может рассматриваться как функционал на соответствующих начальных данных задачи Коши уравнения (28). Например, для $x_5 = 0$ мы имеем

$$S_0(M) = \frac{1}{2} \int d^4 x \left[\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_n} \right)^2 + m^2 (\varphi(x))^2 + M (\chi(x) - \cos \mu \varphi(x))^2 \right] \equiv \int L_0(x, M) d^4 x. \quad (36)$$

Таким образом, показано, что в развиваемом подходе свойство локальности теории сохраняется, более того, оно становится глубже, так как распространяется и на пятую координату x_5 .

Новая плотность функции Лагранжа $L_0(x, x_5)$ (см. (34)) является эрмитовой формой, построенной из полей $\varphi(x, x_5)$ и компонент 5-мерного градиента $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_L}$ ($L = 1, 2, 3, 4, 5$). Ясно, что хотя $L_0(x, x_5)$ формально зависит от x_5 , модель существенным образом повторяет 4-мерную теорию (см. (35) и (36)).

Как следует из сделанных преобразований, зависимость действия (36) от двух функциональных аргументов $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ напрямую связана с тем фактом, что в импульсном пространстве поле имеет дублетную структуру $\begin{pmatrix} \varphi_1(p) \\ \varphi_2(p) \end{pmatrix}$, обусловленную двумя знаками p_5 . Однако лагранжиан $L_0(x, M)$ не содержит кинетического слагаемого, соответствующего полю $\chi(x)$. Таким образом, эта переменная является вспомогательной.

Особая роль 5-мерного конфигурационного пространства в новом формализме обусловлена также тем, что его введение позволяет определить преобразования локальной калибровочной симметрии теории. Объектом этих

преобразований являются начальные данные в уравнении (28):

$$\left(\begin{array}{c} \varphi(x, x_5) \\ \frac{i}{M} \frac{\partial \varphi(x, x_5)}{\partial x_5} \end{array} \right)_{x_5 = \text{fixed value}}, \quad (37)$$

рассмотренные при фиксированных значениях x_5 .

Выясним этот момент более подробно, предполагая, что поле $\varphi(x, x_5)$ неэрмитово и ассоциируется с некоторой группой внутренней симметрии:

$$\varphi' = U\varphi. \quad (38)$$

Благодаря локальности данной группы в 5-мерном x -пространстве:

$$U \rightarrow U(x, x_5), \quad (39)$$

возникают следующие калибровочные преобразования для начальных данных (37) в плоскости $x_5 = 0$:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= U(x, 0)\varphi(x), \\ \chi'(x) &= \frac{i}{M} \frac{\partial U(x, 0)}{\partial x_5} \varphi(x) + U(x, 0)\chi(x). \end{aligned} \quad (40)$$

Групповой характер преобразований (40) вполне очевиден. Явный вид матрицы $U(x, x_5)$ может быть определен из новой теории векторных полей, которая получается из стандартной теории в духе рассматриваемого подхода.

Ясно, что уравнение (28) может быть представлено в виде системы двух уравнений первого порядка относительно производной $\partial/\partial x_5$ [12]:

$$\left\{ \frac{i}{M} \frac{\partial}{\partial x_5} - \left[\sigma_3 \left(1 - \frac{\square}{2M^2} \right) - i\sigma_2 \frac{\square}{2M^2} \right] \right\} \phi(x, x_5) = 0, \quad (41)$$

где

$$\phi(x, x_5) = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left[\varphi(x, x_5) + \frac{i}{M} \frac{\partial \varphi(x, x_5)}{\partial x_5} \right] \\ \frac{1}{2} \left[\varphi(x, x_5) - \frac{i}{M} \frac{\partial \varphi(x, x_5)}{\partial x_5} \right] \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{c} \phi_{\text{I}}(x, x_5) \\ \phi_{\text{II}}(x, x_5) \end{array} \right) \quad (42)$$

и σ_i ($i = 1, 2, 3$) — матрицы Паули. Сравнивая (42) с (32) и (33), можно найти соотношения между начальными данными задачи Коши уравнения (28) и решениями системы (41):

$$\phi(x, 0) = \left(\begin{array}{c} \phi_{\text{I}}(x, 0) \\ \phi_{\text{II}}(x, 0) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2}(\varphi(x) + \chi(x)) \\ \frac{1}{2}(\varphi(x) - \chi(x)) \end{array} \right) \equiv \phi(x). \quad (43)$$

Нетрудно показать, что в базисе (43) лагранжиан $L_0(x, M)$ (см. (36)) выглядит следующим образом:

$$L_0(x, M) = \frac{\partial\phi(x)}{\partial x_n}(1 + \sigma_1)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_n} + 2M^2\phi(x)(1 - \cos \mu \sigma_3)\phi(x). \quad (44)$$

Рассмотрим вопрос о переходе от новой схемы к стандартной евклидовой КТП (так называемый принцип соответствия). Евклидово 4-мерное пространство импульсов, т. е. «плоский предел» импульсного пространства де Ситтера, может быть ассоциировано с приближением (4):

$$|p_n| \ll M, \quad p_5 \simeq M. \quad (45)$$

В этом же пределе в конфигурационном пространстве имеем

$$\varphi(x, x_5) = e^{-iMx_5}\varphi(x), \quad \chi(x) = \varphi(x) \quad (46)$$

или

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

С помощью (41) нетрудно получить [13, 14] поправки порядка $O(1/M^2)$ к нулевому приближению (47):

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} c \left(1 - \frac{\square}{4M^2}\right) \varphi(x) \\ \frac{\square}{4M^2} \varphi(x) \end{pmatrix}, \quad (48)$$

откуда (см. (43)) имеем

$$\varphi(x) - \chi(x) = \frac{\square\varphi(x)}{2M^2}. \quad (49)$$

Принимая во внимание (49) и (15), можно заключить, что в «плоском пределе» (формально — в пределе $M \rightarrow \infty$) лагранжиан $L_0(x, M)$ из (36) совпадает с обычной евклидовой теорией.

Поскольку новая КТП разрабатывается на основе импульсного пространства де Ситтера (20), естественно предположить, что в рассматриваемом подходе фермионные поля $\psi_\alpha(p, p_5)$ должны быть деситтеровскими спинорами, т. е. подчиняться преобразованию, выполненному с помощью 4-мерного представления группы $SO(4, 1)$. Поэтому в дальнейшем будем использовать базис γ -матриц ($\gamma^4 = i\gamma^0$) в виде

$$\gamma^L = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma^4, \gamma^5), \quad \{\gamma^L, \gamma^M\} = 2g^{LM},$$

$$g^{LM} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} M^2 - p_L p^L &= M^2 + p_n^2 - p_5^2 = (M - p_L \gamma^L)(M + p_L \gamma^L) = \\ &= (M + p^n \gamma^n - p^5 \gamma^5)(M - p^n \gamma^n + p^5 \gamma^5). \end{aligned} \quad (51)$$

В «плоском пределе» $M \rightarrow \infty$ поля $\psi_\alpha(p, p_5)$ становятся обычными евклидовыми спинорами.

Ясно, что соотношения (27)–(33), рассмотренные для скалярного поля, также применимы и в фермионном случае. Приведем здесь некоторые соотношения:

$$\psi(x, x_5) = \frac{2M}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-ip_K x^K} \delta(p_L p^L - M^2) \psi(p, p_5) d^5 p, \quad (52)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_5^2} - \square + M^2 \right) \psi(x, x_5) = 0, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, 0) \equiv \psi(x) &= \frac{2M}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ip_n x^n} d^4 p \frac{\psi_1(p) + \psi_2(p)}{|p_5|} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ip_n x^n} \psi(p) d^4 p, \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{M} \frac{\partial \psi(x, 0)}{\partial x_5} \equiv \chi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ip_n x^n} d^4 p [\psi_1(p) - \psi_2(p)] = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{ip_n x^n} \chi(p) d^4 p. \end{aligned} \quad (55)$$

Следуя Остервальдеру и Шредеру [28]*, запишем евклидов фермионный лагранжиан в виде

$$\begin{aligned} L_E(x) &= \bar{\zeta}_E(x) \left(-i\gamma_n \frac{\partial}{\partial x^n} + m \right) \psi_E(x), \\ \{\gamma^n, \gamma^m\} &= -2\delta^{nm} \quad (m, n = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (56)$$

*Отметим, что в работе [18] так называемый виковский поворот также интерпретируется в терминах 5-мерного пространства.

Здесь спинорные поля $\bar{\zeta}_E(x) = \zeta_E^+(x)\gamma^4$ и $\psi_E(x)$ — независимые грассмановы переменные, которые не связаны между собой эрмитовым или комплексным сопряжением. Соответственно, действие также оказывается неэрмитовым.

Нетрудно видеть, что выражение $2M(p_5 - M \cos \mu)$, которое в нашем подходе заменяет евклидов оператор Клейна–Гордона $p_n^2 + m^2$ (см. (36)), может быть представлено в виде

$$2M(p_5 - M \cos \mu) = \left[p_n \gamma^n - (p_5 - M) \gamma^5 + 2M \sin \frac{\mu}{2} \right] \times \\ \times \left[-p_n \gamma^n + (p_5 - M) \gamma^5 + 2M \sin \frac{\mu}{2} \right]. \quad (57)$$

В евклидовом приближении (45) соотношение (57) принимает вид

$$p_n^2 + m^2 = (p_n \gamma^n + m) (-p_n \gamma^n + m). \quad (58)$$

Таким образом, можно использовать выражение

$$\mathcal{D}(p, p_5) \equiv p_n \gamma^n - (p_5 - M) \gamma^5 + 2M \sin \frac{\mu}{2} \quad (59)$$

в качестве модифицированного дираковского оператора.

Весьма важно, что новый оператор Клейна–Гордона $2M(p_5 - M \cos \mu)$ может быть разложен на матричные множители и иным, независимым от (57) способом:

$$2M(p_5 - M \cos \mu) = \left[\gamma^0 p_0 + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + \gamma^5 (p_5 + M) + 2M \cos \frac{\mu}{2} \right] \times \\ \times \left[\gamma^0 p_0 - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + \gamma^5 (p_5 + M) - 2M \cos \frac{\mu}{2} \right]. \quad (60)$$

Таким образом, в развиваемом подходе мы встречаемся с неким не имеющим аналога в обычной теории *экзотическим фермионным полем*, ассоциированным с волновым оператором [1, 15]

$$D_{\text{exot}}(p, M) = p_\nu \gamma^\nu + (p_5 + M) \gamma^5 - 2M \cos \frac{\mu}{2}. \quad (61)$$

Главное отличие оператора $D_{\text{exot}}(p, m)$ от оператора (59) состоит в том, что он не имеет плоского предела (см. (4)) и, таким образом, не может служить для описания известных частиц. Следовательно, (61) может соответствовать описанию *еще не известных в СМ фермионов*.

Используя разработанный формализм [1], можно построить выражение для действия фермионного поля в импульсном пространстве де Ситтера [15]:

$$S_0(M) = 2\pi M \int \varepsilon(p_5) \delta(p_L p^L - M^2) d^5 p \times \\ \times \left[\bar{\zeta}(p, p_5) \left[p_n \gamma^n - (p_5 - M) \gamma^5 + 2M \sin \frac{\mu}{2} \right] \psi(p, p_5) \right]. \quad (62)$$

Если в интеграле перейти к другим переменным:

$$\begin{aligned}\psi(p) &= \frac{M}{|p_5|}(\psi(p, |p_5|) + \psi(p, -|p_5|)) \equiv M \frac{\psi_1(p) + \psi_2(p)}{|p_5|}, \\ \chi(p) &= \psi_1(p) - \psi_2(p), \quad \bar{\zeta}(p) = M \frac{\bar{\zeta}_1(p) + \bar{\zeta}_2(p)}{|p_5|}, \quad \bar{\xi}(p) = \bar{\zeta}_1(p) - \bar{\zeta}_2(p),\end{aligned}\quad (63)$$

которые представляют собой фурье-образы локальных полей $\psi(x)$, $\chi(x)$, $\bar{\zeta}(x)$ и $\bar{\xi}(x)$ (см. с (54) и (55)), то в результате будем иметь

$$\begin{aligned}S_0^D &= -\pi \int d^4p \left(M + \frac{p_n^2}{M} \right) \bar{\zeta}(p) \gamma^5 \psi(p) + \\ &+ \pi \int d^4p \bar{\zeta}(p) \left(\not{p} + M\gamma^5 + 2M \sin \frac{\mu}{2} \right) \chi(p) + \\ &+ \pi \int d^4p \bar{\xi}(p) \left(\not{p} + M\gamma^5 + 2M \sin \frac{\mu}{2} \right) \psi(p) - \\ &- \pi \int d^4p M \bar{\xi}(p) \gamma^5 \chi(p).\end{aligned}\quad (64)$$

В конфигурационном пространстве можно получить

$$\begin{aligned}S_0^D &= \int L_0^D(x, M) d^4x = \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\zeta}(x) \left(\frac{\square}{M^2} - 1 \right) \gamma^5 \psi(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\zeta}(x) \left(i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + M\gamma^5 + 2M \sin \frac{\mu}{2} \right) \chi(x) + \\ &+ \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\xi}(p) \left(i\gamma^n \frac{\partial}{\partial x^n} + M\gamma^5 + 2M \sin \frac{\mu}{2} \right) \psi(x) - \\ &- \frac{1}{2} \int d^4x \bar{\xi}(x) \gamma^5 \chi(x).\end{aligned}\quad (65)$$

Следовательно, модифицированный лагранжиан Дирака $L_0^D(x, M)$ представляет собой локальную функцию спинорных полевых переменных $\psi(x)$, $\chi(x)$, $\bar{\zeta}(x)$ и $\bar{\xi}(x)$. Следует отметить, что здесь очевидна аналогия с бозонным случаем (см. (36)).

Вводя обозначения*

$$\begin{aligned} m_1 &= 2M \sin \frac{\mu}{2}, & m_2 &= 2M \sin^2 \frac{\mu}{2}, \\ m_3 &= 2M \cos \frac{\mu}{2}, & m_4 &= 2M \cos^2 \frac{\mu}{2}, \end{aligned} \quad (66)$$

а также $p_\mu = i\partial_\mu$ и переходя к гамильтоновой форме дираковских уравнений движения, можно записать

$$(p_0 - \hat{\alpha}\mathbf{p} - \hat{\beta}m_1 - \hat{\beta}\gamma^5 m_2)\Psi(x, t, x_5) = 0, \quad (67)$$

$$(p_0 - \hat{\alpha}\mathbf{p} - \hat{\beta}m_3 - \hat{\beta}\gamma^5 m_4)\Psi^{\text{exot}}(x, t, x_5) = 0. \quad (68)$$

В этих модифицированных уравнениях Дирака матрицы $\hat{\beta} = \gamma_0$, $\gamma^i = \hat{\beta}\hat{\alpha}^{i**}$.

В квантово-механическом приближении гамильтонианы, соответствующие уравнениям (67), (68), могут быть представлены в виде

$$\hat{H} = \hat{\alpha}\mathbf{p} + \hat{\beta}(m_1 + m_2\gamma_5), \quad (69)$$

$$\hat{H}_{\text{exot}} = \hat{\alpha}\mathbf{p} + \hat{\beta}(m_3 + m_4\gamma_5). \quad (70)$$

Очевидно, что выражения (69), (70) оказываются неэрмитовыми из-за появления в них γ_5 -массовых слагаемых ($H \neq H^+$, $H_{\text{exot}} \neq H_{\text{exot}}^+$). Таким образом, можно сделать вывод о том, что ограничение спектра масс (2), которое было положено в основу геометрического подхода при разработке модифицированной КТП с максимальной массой [15, 17], приводит к появлению неэрмитовых вкладов в гамильтонианы (69), (70).

2. ТЕОРИЯ С ОГРАНИЧЕННОЙ МАССОЙ КАК АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ НЕЭРМИТОВА \mathcal{PT} -СИММЕТРИЧНАЯ ТЕОРИЯ

В последние годы происходит бурное развитие неэрмитовой квантовой теории, изучающей модели с неэрмитовыми гамильтонианами [30–68]. Центральным пунктом таких теорий — построение нового скалярного произведения, в котором средние значения неэрмитовых гамильтонианов становятся действительными. Эта теория приобрела в короткий срок столь большую популярность, что в настоящее время невозможно даже процитировать здесь

* Отметим, что аналогичные обозначения для масс использовались в работе [29].

** Важно заметить, что на массовой поверхности $p_5 = M \cos \mu$ не существует операторов, которые действуют на координату x_5 , и этот параметр без потери общности может быть выбран равным нулю [15, 17].

все публикации по данной тематике. Среди них имеются работы, посвященные исследованию чисто математических вопросов данной теории (см., например, [30–34]). Часть работ посвящена рассмотрению модельных лагранжианов и иллюстрации возможностей данного метода (например, [35–38]). Однако имеются и исследования в области экспериментальной физики. Среди них особенно многообещающими выглядят работы, посвященные применению псевдоэрмитова подхода в области нелинейной оптики [39–46]. Вызывает интерес попытка применения данной теории к исследованию вопроса о неэрмитовой трактовке фундаментальной длины [47, 48]. Однако, поскольку в [47, 48] рассматриваются нерелятивистские гамильтонианы, эта попытка с точки зрения релятивистской квантовой физики выглядит несколько наивной. Тем не менее важно подчеркнуть, что неэрмитовые гамильтонианы можно рассматривать как своего рода очень плодотворную среду для поиска новой физики за пределами СМ.

Один из вариантов построения нового скалярного произведения осуществляется в \mathcal{PT} -симметричных теориях, т. е. в моделях, где гамильтониан обладает совместной \mathcal{PT} -симметрией, хотя по отдельности \mathcal{P} - и \mathcal{T} -симметрии в теории отсутствуют. Это достигается нахождением специального оператора \mathcal{C} , который в некотором смысле можно сопоставить оператору зарядового сопряжения, с помощью рекуррентных соотношений (см. [57, 58]) и построением с его помощью нового скалярного произведения.

Другой способ построения оператора \mathcal{C} осуществляется в псевдоэрмитовых теориях [32]. В них рассматриваются модели с неэрмитовыми гамильтонианами, обладающими свойством псевдоэрмитовости:

$$\eta_0 H \eta_0^{-1} = H^\dagger, \quad (71)$$

где η_0 — линейный эрмитов оператор. Оператор \mathcal{C} строится с помощью η_0 следующим образом: $\mathcal{C} = \eta_0^{-1} \mathcal{P}$, где \mathcal{P} — оператор пространственного отражения.

Среди многочисленных моделей, рассмотренных в контексте развития неэрмитовой квантовой теории [30–68], имеется так называемая \mathcal{PT} -симметричная массивная модель Тирринга [58], рассмотренная в пространстве $(1+1)$, с гамильтоновой плотностью

$$\mathcal{H}(x, t) = \bar{\psi}(x, t) (-i\partial\!\!\!/ \gamma + m_1 + \gamma_5 m_2) \psi(x, t). \quad (72)$$

Обобщая выражение для гамильтоновой плотности на случай $(3+1)$ -измерения и записывая следующий из (72) гамильтониан в виде

$$H(x, t) = \gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + \gamma_0 (m_1 + \gamma_5 m_2), \quad (73)$$

для уравнений движения получим

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu - m_1 - \gamma_5 m_2) \psi(x, t) = 0. \quad (74)$$

Легко видеть, что так называемая физическая масса m , появляющаяся в данной модели как

$$m^2 = m_1^2 - m_2^2, \quad (75)$$

действительна, когда выполняется неравенство

$$m_1^2 \geq m_2^2. \quad (76)$$

Это неравенство рассматривалось в данной теории как базовое требование, определяющее область ненарушенной \mathcal{PT} -симметрии исследуемого гамильтониана. В цитируемой работе [58] в рекуррентной форме был вычислен оператор \mathcal{C} , позволяющий ввести модифицированное скалярное произведение.

Очевидно (см. [69–76]), что модель, рассмотренная в работе [58] с точки зрения алгебраического подхода к неэрмитовым моделям, и есть аналог модели Кадышевского в ее фермионном секторе [1, 2, 11, 15, 16]. Действительно, гамильтонианы (69), (70) и (73), а также следующие из них уравнения движения (67), (68) и (74) совпадают с точностью до обозначений. Иначе говоря, в работе [58] авторы рассмотрели некое подобие модели Кадышевского с точки зрения алгебраического подхода к неэрмитовым \mathcal{PT} -симметричным теориям. По-видимому, в тот период авторы [58] еще не знали, что неэрмитово γ_5 -расширение массы ранее уже было использовано В. Г. Кадышевским. Кроме того, как нетрудно видеть, в смысле приложения к физике подход, развиваемый в работе [58], не был доведен до логического конца.

В частности, при анализе модели с гамильтонианом (73) возникает вопрос: как с помощью этого гамильтониана описать конкретную физическую частицу? Иначе говоря, как по известной физической массе данной частицы m найти параметры m_1 , m_2 для ее описания в рамках неэрмитовой алгебраической модели. Очевидно, что с помощью лишь условий (75), (76) невозможно однозначно ответить на этот вопрос. Уравнение (75) позволяет по данной массе m найти бесконечное множество пар значений m_1 и m_2 . Суть в том, что модель, задаваемая гамильтонианом (73) (или, что то же самое, (69)), является двухпараметрической. Использование лишь одного параметра m означает попытку перейти от двухпараметрического подхода к однопараметрическому описанию данной модели. Ясно, что такая «замена переменных» неоднозначна. Для того чтобы описывать физическую систему с использованием параметра m , необходимо ввести второй параметр. Достаточно очевидным представляется, что его выбор должен диктоваться физическими соображениями. Следовательно, в алгебраической теории также должен существовать параметр m_{\max} , соответствующий параметру M в геометрической модели.

Можно предположить, что так же, как параметр M в геометрической теории, m_{\max} должен являться ограничивающим параметром массы для алгебраической модели. Для этого утверждения очень легко получить наводя-

щие соображения. Действительно, используя теорему о среднем арифметическом и среднем геометрическом двух положительных чисел m^2 и m_2^2 , имеем (см., например, [73])

$$\frac{m^2 + m_2^2}{2} \geq \sqrt{m^2 m_2^2}, \quad (77)$$

откуда с учетом (75) следует неравенство

$$m \leq \frac{m_1^2}{2m_2} \equiv m_{\max}. \quad (78)$$

Заметим, что здесь ограничение (78) является пока формальным, так как значение m_{\max} определяется параметрами теории m_1 и m_2 , значения которых в общем случае могут меняться в бесконечных пределах. Однако, как будет показано далее, можно установить еще более тесную связь между m_{\max} и фундаментальной массой M из геометрической теории. Для этого достаточно так же, как в геометрической модели Кадышевского, постулировать существование параметра максимальной массы, равного M . Необходимость этого постулата станет ясна в дальнейшем.

Проверкой корректности развиваемого алгебраического подхода является то, что в эрмитовом пределе $m_2 \rightarrow 0$ из (78) имеем

$$m_{\max} \rightarrow \infty, \quad (79)$$

что соответствует переходу к стандартной дираковской теории, в которой, как известно, отсутствует какое бы то ни было ограничение на массы фермионов. Следовательно, предел (79) не только корректен, но и означает, что рассматриваемая алгебраическая модель удовлетворяет принципу соответствия, т. е. в указанном пределе она переходит в обычную дираковскую модель. В этом же смысле в «плоском пределе» (4), когда формально также $M \rightarrow \infty$, мы имеем переход от искривленного импульсного пространства анти-де Ситтера к обычному пространству Минковского, и так же получаем эрмитов предел [69].

Легко видеть, что условия (75), (76) и (78) выполняются автоматически, если ввести параметризацию [69], вытекающую из решения системы уравнений

$$\begin{cases} m_1^2 - m_2^2 = m^2, \\ \frac{m_1^2}{2m_2} = m_{\max}, \end{cases} \quad (80)$$

а именно:

$$m_1^\mp = \sqrt{2}m_{\max} \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \frac{m^2}{m_{\max}^2}}}, \quad (81)$$

$$m_2^\mp = m_{\max} \left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{m^2}{m_{\max}^2}} \right). \quad (82)$$

Из формул (81), (82) видно, что m_1 и m_2 являются двузначными функциями физической массы m . Для иллюстрации этой двузначности приведем график, представляющий связь функций m_1^\mp , m_2^\mp и m (см. рис. 1). Определим приведенные массы $\nu = m/m_{\max}$, $\nu_1 = m_1/m_{\max}$ и $\nu_2 = m_2/m_{\max}$. Тогда из (81), (82) имеем

$$\nu_1^\mp = \sqrt{2} \sqrt{1 \mp \sqrt{1 - \nu^2}}, \quad (83)$$

$$\nu_2^\mp = 1 \mp \sqrt{1 - \nu^2}. \quad (84)$$

На рис. 1 демонстрируется зависимость параметров ν_1^\mp , ν_2^\mp от величины ν [69, 70]. Область существования \mathcal{PT} -симметрии теперь очевидна: $0 \leq \nu \leq 1$. Для этих значений параметров ν_1 и ν_2 модифицированное уравнение Дирака с максимальной массой описывает распространение частиц, имеющих действительные массы.

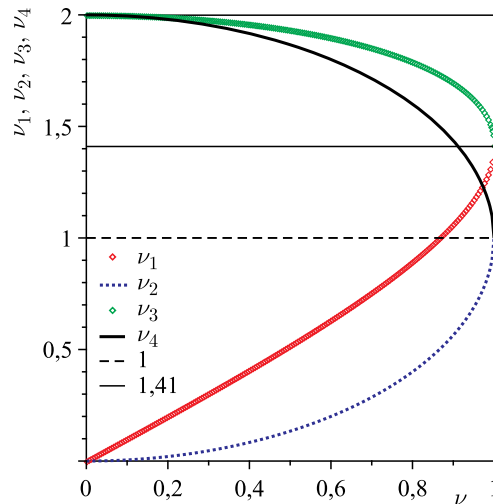


Рис. 1. Значения параметров ν_1^\mp, ν_2^\mp как функции ν

Чтобы понять физический смысл двузначной зависимости m_1 и m_2 от m , m_{\max} , обратимся вновь к геометрической теории с ограниченной массой. Подставляя в формулу (66), определяющую массы m_1, m_2, m_3, m_4 , значение $\cos \mu = \sqrt{1 - m^2/M^2}$, получаем

$$m_1 = \sqrt{2}M \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}}, \quad (85)$$

$$m_2 = M \left(1 - \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \right), \quad (86)$$

$$m_3 = \sqrt{2}M \sqrt{1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}}}, \quad (87)$$

$$m_4 = M \left(1 + \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \right). \quad (88)$$

Совершенно очевидно, что выражения (85)–(88) и (81), (82) совпадают с точностью до замены $M \leftrightarrow m_{\max}$:

$$\frac{m_1^2}{2m_2} = \frac{m_3^2}{2m_4} = M \longleftrightarrow \frac{m_1^{\mp 2}}{2m_2^{\mp}} = m_{\max}.$$

Это должно означать, что если в алгебраической теории ввести параметр m_{\max} и отождествить его с максимальной массой M из геометрической теории Кадышевского, то окажется, что в алгебраической модели также имеется описание «экзотических» частиц, ранее считавшееся прерогативой геометрического подхода. Значит, можно установить, что как в геометрической теории параметры m_1 и m_2 участвуют в описании обычных частиц, так и в алгебраической модели ту же роль выполняют параметры m_1^- , m_2^- (им соответствуют нижние ветви графиков рис. 1: ν_1^-, ν_2^-). Совершенно аналогично для описания экзотических частиц в геометрической теории используются параметры m_3, m_4 , а в алгебраической им соответствуют m_1^+, m_2^+ (верхние ветви графиков: ν_1^+, ν_2^+). Области изменения физической массы m , а также параметров m_1 и m_2 таковы:

$$0 \leq m \leq m_{\max}, \quad m \leq m_1 \leq 2m_{\max}, \quad 0 \leq m_2 \leq 2m_{\max}. \quad (89)$$

На графике это, соответственно, $0 \leq \nu \leq 1$, $\nu \leq \nu_1 \leq 2$, $0 \leq \nu_2 \leq 2$. Очевидно, что в алгебраической интерпретации эти ограничения определяют область ненарушенной \mathcal{PT} -симметрии модели, которая соответствует (76). Точка $m = m_{\max}$ (на графике $\nu = 1$) представляет собой особый случай:

она соответствует максимуму. В этой точке графика имеем $\nu_1^- = \nu_1^+ = \sqrt{2}$ и $\nu_2^- = \nu_2^+ = 1$. Подчеркнем, что при появлении экзотических частиц суть максимона в теории не меняется ни физически, ни математически. Он по-прежнему играет роль частицы с максимальной массой.

Заметим, что в геометрической модели появление «экзотических» частиц считалось следствием самого подхода, где появление новых необычных свойств частиц связывалось с присутствием в теории новой степени свободы — знака компоненты импульса p_5 ($\epsilon = p_5/|p_5| = \pm 1$, см. [2, 11]). Однако мы видим, что в алгебраическом подходе введение параметра m_{\max} также позволяет включить в теорию описание «экзотических» частиц. Таким образом, появление «экзотических» частиц напрямую связано с неэрмитовостью рассматриваемого гамильтониана [69, 70].

Кроме того, это дает возможность уточнить область \mathcal{PT} -симметрии модели. На рис. 2 можно видеть, что область \mathcal{PT} -симметрии гамильтониана

$$\hat{H} = \hat{\alpha}\mathbf{p} + \hat{\beta}(m_1^{\mp} + m_2^{\mp}\gamma_5) \quad (90)$$

в плоскости m_1, m_2 на самом деле определяется тремя группами неравенств (с учетом возможности изменения знака параметра m_2):

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & \frac{m_1}{\sqrt{2}} \leq m_2 \leq m_1, \\ \text{II:} \quad & -\frac{m_1}{\sqrt{2}} \leq m_2 \leq \frac{m_1}{\sqrt{2}}, \\ \text{III:} \quad & -m_1 \leq m_2 \leq -\frac{m_1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что в отличие от работы [58] здесь область \mathcal{PT} -симметрии детализирована, и показано, что если центральная подобласть II действительно отвечает обычным частицам, то I и III соответствуют описанию экзотических частиц. Таким образом, становится окончательно ясно, что выражение (76) не может рассматриваться как единственное ограничение в теории, и введение параметра m_{\max} , а также учет неравенства (78) позволяет уточнить область формирования \mathcal{PT} -симметрии модели [70].

Удивительным представляется тот факт, что в алгебраической модели для любых наперед заданных значений m_1 и m_2 при учете (80) так же, как и в геометрической теории, автоматически возникает ограничение (78). Действительно, рассмотрим параметр [72]

$$\xi = \frac{m_1}{M} = \frac{2m_2}{m_1}. \quad (91)$$

Учитывая (80), имеем также

$$\frac{m_2}{M} = \frac{\xi^2}{2}. \quad (92)$$

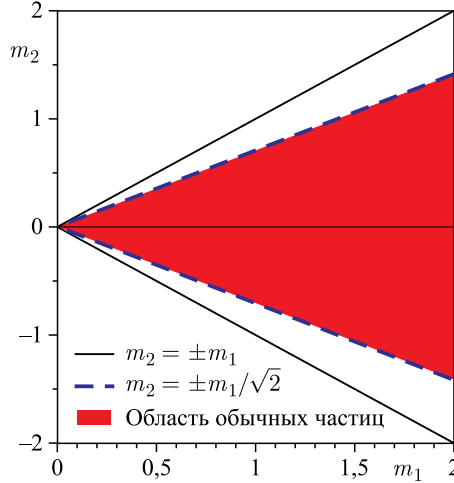


Рис. 2. Параметрическая область ненарушенной \mathcal{PT} -симметрии. Штриховые линии выделяют область обычных частиц. Сплошные линии ограничивают полную область ненарушенной \mathcal{PT} -симметрии $m_2^2 \leq m_1^2$

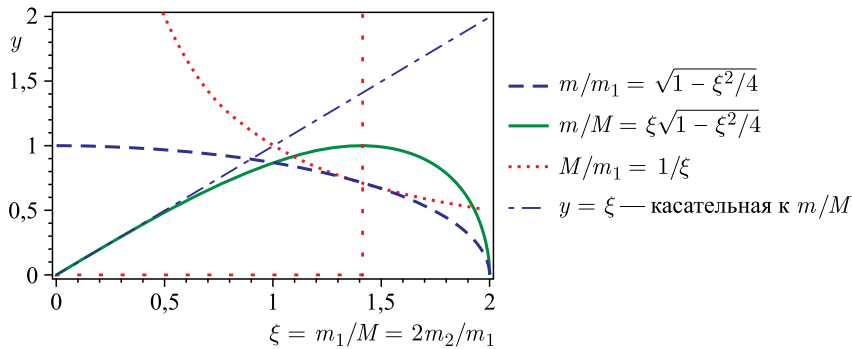


Рис. 3. Зависимость отношения масс от параметра ξ

На рис. 3 изображена зависимость величин m/m_1 , M/m_1 и m/M от параметра $\xi = m_1/M = 2m_2/m_1$. В частности, можно видеть, что функция m/M имеет максимум в точке $m = M$. Максимальное значение массы частицы $m = M$ достигается при соотношении между вспомогательными массовыми параметрами $m_2 = m_1/\sqrt{2}$. Вплоть до этого значения можно находить параметры m_1 и m_2 , для которых существует предельный переход к обычному уравнению Дирака. Дальнейшее увеличение m_2 приводит к ниспадающей ветви кривой m/M , в этой области дираковский предел отсутствует, а в точке $m_1 = m_2 = 2m_{\max}$ значение m вновь равно нулю. Так же, как на рис. 1, это означает, что теперь, например, случаю безмассовых частиц соответствуют

две точки: $m_1 = m_2 = 0$ и $m_1 = m_2 = 2M$. В первом случае мы имеем дело с описанием обычных безмассовых фермионов, второй нужно трактовать как описание их экзотических партнеров. Отсюда видно, что область $m_1 < \sqrt{2}m_2$ соответствует описанию «экзотических» частиц, для которых не существует перехода к эрмитову пределу. При этом точка $m_2 = m_1 = 2M$ соответствует безмассовым экзотическим фермионам.

Выражения (81), (82) позволяют в данной алгебраической модели рассмотреть «физический» подход [75, 76], т. е. ответить на вопрос, поставленный ранее: как с помощью гамильтониана (69) описать конкретную частицу. Иначе говоря, как по известной физической массе данной частицы m найти параметры m_1, m_2 для ее описания в рамках алгебраической модели. Как уже отмечалось, с помощью одного лишь условия (75) невозможно однозначно ответить на этот вопрос. Однако если ввести m_{\max} , то ответ следует из формул (81), (82). Фактически в этот момент совершается переход от двухпараметрической задачи, задаваемой гамильтонианом (69) с параметрами m_1, m_2 , к двухпараметрической задаче с параметрами m, m_{\max} . Это еще раз доказывает необходимость введения параметра m_{\max} , а также учета (78).

Рассмотрим в данном контексте алгебраическую модель, описывающую весь спектр фермионов [70–76]. В этом случае возникает вопрос о единственности m_{\max} для всех частиц. Из физических соображений можно предположить, что модель, в которой m_{\max} единственна для всех частиц, более предпочтительна. Тогда логично сделать вывод, что эта единственная m_{\max} является массой максимона и должна соответствовать предельной массе M в геометрическом подходе. Это оказывается возможным, потому что, как уже указывалось ранее, гамильтонианы и уравнения эволюции в этих двух моделях совпадают вплоть до обозначений. Иными словами, в теории, описывающей спектр масс элементарных частиц, необходимо из физических соображений принять предположение равенства m_{\max} и M . Так как значение M должно следовать из эксперимента, постулат о равенстве m_{\max} и M приводит к появлению в алгебраической модели физического ограничения спектра масс $m_{\max} = M$ наряду с условием $m_{\max} = m_1^2/2m_2$.

Тем самым еще раз устанавливается связь данной алгебраической модели и геометрической теории с максимальной массой [1, 2, 7–17].

3. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В ПСЕВДОЭРМИТОВОЙ МОДЕЛИ

Так как рассматриваемый гамильтониан неэрмитов (псевдоэрмитов, см. (71)), необходимо ввести новое скалярное произведение, определяемое оператором \mathcal{C} . Для этого перепишем массовый член гамильтониана в виде

$$\hat{\beta}(m_1 + m_2\gamma_5) = \hat{\beta}m(\operatorname{ch}\alpha + \gamma_5 \operatorname{sh}\alpha) = \hat{\beta}m \exp(\gamma_5\alpha), \quad (93)$$

где $\text{ch } \alpha = m_1/m$. Теперь можно записать исходный гамильтониан следующим образом:

$$\hat{H} = \hat{\alpha}\mathbf{p} + \hat{\beta}m \exp(\gamma_5 \alpha), \quad (94)$$

а эрмитово-сопряженный гамильтониан представить в виде

$$\hat{H}^\dagger = \hat{\alpha}\mathbf{p} + \hat{\beta}m \exp(-\gamma_5 \alpha). \quad (95)$$

Используя правила коммутации матриц γ_5 , $\hat{\alpha}$ и $\hat{\beta}$, нетрудно показать, что

$$e^{\alpha\gamma_5/2} \hat{H} = \hat{H}_0 e^{\alpha\gamma_5/2} = \hat{H}_0 \eta \quad (96)$$

и

$$e^{-\alpha\gamma_5/2} \hat{H}^\dagger = \hat{H}_0 e^{-\alpha\gamma_5/2} = \hat{H}_0 \eta^{-1}, \quad (97)$$

где введено обозначение

$$\hat{H}_0 = \hat{\alpha}\mathbf{p} + \hat{\beta}m,$$

соответствующее обычному свободному дираковскому гамильтониану, и

$$\eta = e^{\alpha\gamma_5/2}. \quad (98)$$

Из (96), (97) легко видеть, что эрмитов гамильтониан \hat{H}_0 и гамильтонианы \hat{H} , \hat{H}^\dagger связаны неунитарным преобразованием η . (См. для сравнения геометрическую теорию в пространстве де Ситтера [77], где аналогичное преобразование является унитарным.)

Также очевидно, что

$$\eta_0 \hat{H} \eta_0^{-1} = \hat{H}^\dagger, \quad (99)$$

где оператор $\eta_0 = e^{\alpha\gamma_5} = \eta^2$ определяет псевдоэрмитовы свойства гамильтониана. Следуя [32], можно определить оператор

$$\mathcal{C} = \eta_0^{-1} \mathcal{P} = e^{-\alpha\gamma_5} \gamma_0. \quad (100)$$

Используя стандартное представление γ -матриц, можно представить оператор \mathcal{C} в матричном виде:

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & I \frac{m_1^\mp - m_2^\mp}{m} \\ I \frac{m_1^\mp + m_2^\mp}{m} & 0 \end{pmatrix}, \quad (101)$$

где $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Заметим, что оператор \mathcal{C} в записи (100) или (101) имеет более простой вид и более удобен для использования, чем соответствующее выражение в работе [58], так как здесь (см. [71, 76]) он получен в явном

виде, в то время как в [58] данный оператор был построен методом итераций и записан в интегральном представлении.

Нетрудно убедиться, что скалярное произведение, построенное с помощью \mathcal{C} -оператора (101) стандартным способом [32], положительно определено. Действительно (см. [71, 76]), запишем произвольный вектор в модифицированной теории:

$$\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} x + iy \\ u + iv \\ z + iw \\ t + ip \end{pmatrix}.$$

Используя представление (101) для оператора \mathcal{C} , нетрудно прямыми вычислениями убедиться, что норма вектора $\tilde{\psi}$ в рассматриваемой теории с модифицированным скалярным произведением дается выражением

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi} | \mathcal{C} | \tilde{\psi} \rangle = & \frac{m_1 + m_2}{m} (x^2 + y^2) + \frac{m_1 + m_2}{m} (u^2 + v^2) + \\ & + \frac{m_1 - m_2}{m} (z^2 + w^2) + \frac{m_1 - m_2}{m} (t^2 + p^2). \end{aligned} \quad (102)$$

Оно положительно определено в области (76) \mathcal{PT} -симметрии рассматриваемой теории, т. е. при $m_1 \geq m_2$.

Нетрудно видеть также, что средние значения гамильтониана (90) в модифицированном скалярном произведении действительны. Запишем

$$\langle \tilde{\psi} | \mathcal{C} \hat{H} | \tilde{\psi} \rangle = \langle \tilde{\psi} | e^{-\alpha\gamma_5} \gamma_0 (\hat{\alpha}\mathbf{p} + \hat{\beta}m e^{\alpha\gamma_5}) \tilde{\psi} \rangle. \quad (103)$$

Беря эрмитово сопряжение и производя элементарные коммутации подобно (96), (97), убеждаемся в действительности данного выражения.

Рассмотрим задачу о нахождении собственных значений и собственных векторов гамильтониана (69) [71]:

$$\hat{H}\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}.$$

Используя стандартное представление γ -матриц, запишем \hat{H} в матричном представлении:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & p_3 - m_2 & p_1 - ip_2 \\ 0 & m_1 & p_1 + ip_2 & -m_2 - p_3 \\ m_2 + p_3 & p_1 - ip_2 & -m_1 & 0 \\ p_1 + ip_2 & m_2 - p_3 & 0 & -m_1 \end{pmatrix},$$

где p_i — компоненты импульса. Условие

$$\det(\hat{H} - E) = (-E^2 + m_1^2 - m_2^2 + p_\perp^2 + p_3^2)^2 = 0$$

позволяет определить собственные значения энергии E :

$$E = \pm \sqrt{m_1^2 - m_2^2 + p_\perp^2 + p_3^2}, \quad (104)$$

где $p_\perp = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$ и $m_1^2 - m_2^2 = m^2$. Видно, что значения E совпадают с собственными значениями эрмитова оператора \hat{H}_0 .

Рассмотрим волновую функцию, описывающую свободную частицу с определенным значением энергии и импульса. Она может быть представлена в виде плоской волны:

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2E}} \tilde{u} e^{-ipx}. \quad (105)$$

Здесь амплитуда \tilde{u} является биспинором и удовлетворяет алгебраическим уравнениям

$$(\gamma p - m e^{\gamma_5 \vartheta}) \tilde{u} = 0, \quad (106)$$

$$\bar{\tilde{u}} (\gamma p - m e^{-\vartheta \gamma_5}) = 0, \quad (107)$$

где $\bar{\tilde{u}} = \tilde{u}^* \gamma_0$. Решения уравнений (106), (107) можно представить в виде (см. [71, 76])

$$\tilde{u} = \sqrt{2m} \begin{pmatrix} A_1 w \\ A_2 w \end{pmatrix}, \quad (108)$$

$$\bar{\tilde{u}} = \sqrt{2m} (A_1^* w^*, -A_2^* w^*), \quad (109)$$

где A_1, A_2 определяются выражениями

$$A_1 = \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} + \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} (\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma}),$$

$$A_2 = \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} (\mathbf{n} \boldsymbol{\sigma}).$$

Здесь $\operatorname{ch} \alpha = m_1/m$, $\operatorname{sh} \alpha = m_2/m$ и $\operatorname{ch} \beta = E/m$, $\operatorname{sh} \beta = p/m$, а w — двухкомпонентный спинор, удовлетворяющий условию

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} w_\zeta = \zeta w_\zeta \quad (110)$$

и нормировочным соотношениям

$$w^* w = 1.$$

Напомним здесь и стандартные обозначения: $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули размерности 2×2 и $\mathbf{n} = \mathbf{p}/p$ — единичный вектор вдоль направления импульса.

Решая уравнение (110), имеем

$$w_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \cos \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \sin \theta/2 \end{pmatrix}, \quad w_{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi/2} \sin \theta/2 \\ e^{i\varphi/2} \cos \theta/2 \end{pmatrix},$$

где θ и φ — полярный и азимутальный углы, определяющие направление \mathbf{n} в осях x_1, x_2, x_3 .

Непосредственным вычислением нетрудно проверить выполнение условия

$$\bar{\tilde{u}}\tilde{u} = 2m.$$

Этот результат вполне ожидаем, так как существует преобразование, связывающее биспинорные амплитуды модифицированных уравнений $\bar{\tilde{u}}, \tilde{u}$ и соответствующие решения обычных уравнений Дирака:

$$\tilde{u} = e^{-\gamma_5 \alpha/2} u, \quad \bar{\tilde{u}} = \bar{u} e^{\gamma_5 \alpha/2}.$$

Принимая во внимание, что дираковские биспиноры нормируются обычным соотношением $\bar{u}u = 2m$ (см. [78]), имеем

$$\bar{\tilde{u}}\tilde{u} = \bar{u}u = 2m. \quad (111)$$

В заключение заметим, что интересно увидеть, как в рассматриваемой алгебраической теории с γ_5 -расширением массы оператор \mathcal{C} в форме (100) возникает естественным образом (см. [73]). Для этого запишем модифицированное уравнение Дирака и сопряженное ему в x -представлении:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - (m_1 + m_2 \gamma_5)) \tilde{\psi} = 0, \quad (112)$$

$$\bar{\tilde{\psi}} (i\gamma^\mu \partial_\mu + (m_1 - m_2 \gamma_5)) = 0. \quad (113)$$

Перепишем их в виде

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \exp(\alpha \gamma_5)) \tilde{\psi} = 0, \quad (114)$$

$$\bar{\tilde{\psi}} (i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m \exp(-\alpha \gamma_5)) = 0. \quad (115)$$

Умножим теперь первое уравнение на $\bar{\tilde{\psi}} e^{-\alpha \gamma_5}$ слева, а второе на $e^{\alpha \gamma_5} \tilde{\psi}$ справа. Складывая теперь первое уравнение со вторым, а также проводя элементарные коммутации, получаем закон непрерывности плотности тока:

$$\partial_\mu (\bar{\tilde{\psi}} e^{-\alpha \gamma_5} \gamma_\mu \tilde{\psi}) = 0. \quad (116)$$

В данном случае ток j_μ определяется формулой

$$j_\mu = \bar{\psi} e^{-\alpha\gamma_5} \gamma_\mu \tilde{\psi}. \quad (117)$$

Учитывая

$$\int_{V_\infty} \operatorname{div} \mathbf{j} dV = 0,$$

получаем сохранение во времени величины

$$\int_{V_\infty} j_0 dV \equiv \int_{V_\infty} \rho dV.$$

Используя далее преобразования, произведенные в [73], имеем

$$\int_{V_\infty} \rho dV = \int_{V_\infty} \bar{\psi} e^{-\alpha\gamma_5} \gamma_0 \tilde{\psi} dV = \int_{V_\infty} \bar{\psi} \eta_0^{-1} \mathcal{P} \tilde{\psi} dV = \int_{V_\infty} \bar{\psi} \mathcal{C} \tilde{\psi} dV = 1.$$

Тем самым смысл амплитуды вероятности имеет величина $\bar{\psi} \mathcal{C} \tilde{\psi}$, и видно, что в скалярном произведении содержится оператор $\mathcal{C} = \eta_0^{-1} \mathcal{P}$. Таким образом, в данном случае оператор \mathcal{C} , совпадающий с оператором (100), построенным в строгом соответствии с теориями [32, 57], возникает естественным образом.

4. γ_5 -МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДИРАКА В ПОСТОЯННОМ ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Как известно, точные решения волнового уравнения Дирака служат основой релятивистской квантовой механики и квантовой электродинамики спинорных частиц во внешних электромагнитных полях. Получение, анализ и использование его точных решений является важным аспектом развития данной науки. Известно всего несколько физически важных точных решений обычных уравнений Дирака. Это, в частности, электрон в кулоновском поле, в однородном магнитном поле и в поле плоской волны. Нахождение точных решений релятивистского волнового уравнения, т. е. одночастичных волновых функций, позволяет применить подход, известный как картина Фарри, основанный на их использовании. Этот очень продуктивный метод исследования включает в себя изучение взаимодействия частиц с внешним полем, независимо от величины напряженности поля (см. [78]). В связи с этим интересно исследовать неэрмитовы расширения модели Дирака, представляющие собой альтернативные формулировки релятивистской квантовой механики, и попытаться реализовать в них метод картины Фарри [72–74].

Рассмотрим однородное магнитное поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$, направленное вдоль оси x_3 ($H > 0$). Потенциалы электромагнитного поля в калибровке [78] могут быть выбраны в виде $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = Hx_1$, $A_3 = 0$. Запишем модифицированное уравнение Дирака в виде

$$(\gamma_\mu \mathcal{P}^\mu - m e^{\vartheta\gamma_5}) \tilde{\Psi} = 0, \quad (118)$$

где $\mathcal{P}^\mu = i\partial_\mu - eA_\mu$, $e = -|e|$, и используются γ -матрицы в стандартном представлении. В рассматриваемой области операторы интегралов движения \mathcal{P}_0 , \mathcal{P}_2 и \mathcal{P}_3 взаимно коммутируют: $[\mathcal{D}, \mathcal{P}_0] = 0$, $[\mathcal{D}, \mathcal{P}_2] = 0$, $[\mathcal{D}, \mathcal{P}_3] = 0$, где $\mathcal{D} = (\gamma_\mu \mathcal{P}^\mu - m e^{\vartheta\gamma_5})$.

Представим функцию $\tilde{\Psi}$ в виде

$$\tilde{\Psi} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} e^{-iEt}$$

и используем гамильтонову форму уравнений Дирака

$$H\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}, \quad (119)$$

где

$$H = (\boldsymbol{\alpha}\mathcal{P}) + \beta m_1 + \beta\gamma_5 m_2.$$

Делая замену переменных [78]

$$\psi_i(x_1, x_2, x_3) = e^{ip_2 x_2 + ip_3 x_3} \Phi_i(x_1),$$

где $i = 1, 2, 3, 4$, получаем следующую систему уравнений [73]:

$$(E \mp m_1)\Phi_{1,3} + iR_2\Phi_{4,2} - (p_3 \mp m_2)\Phi_{3,1} = 0, \quad (120)$$

$$(E \mp m_1)\Phi_{2,4} + iR_1\Phi_{3,1} + (p_3 \pm m_2)\Phi_{4,2} = 0. \quad (121)$$

Здесь $R_1 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} - (p_2 + eH) \right]$, $R_2 = \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + (p_2 + eH) \right]$, верхний знак относится к компонентам волновой функции с первым индексом, а нижний — к компонентам со вторым индексом.

Далее удобно перейти к безразмерной переменной

$$\rho = \sqrt{\gamma}x_1 + \frac{p_2}{\sqrt{\gamma}}, \quad (122)$$

где $\gamma = |e|H$, тогда уравнения (120), (121) принимают вид

$$(E \mp m_1)\Phi_{1,3} + i\sqrt{\gamma}\left(\frac{d}{d\rho} + \rho\right)\Phi_{4,2} - (p_3 \mp m_2)\Phi_{3,1} = 0, \quad (123)$$

$$(E \mp m_1)\Phi_{2,4} + i\sqrt{\gamma}\left(\frac{d}{d\rho} - \rho\right)\Phi_{3,1} + (p_3 \pm m_2)\Phi_{4,2} = 0. \quad (124)$$

Общее решение этой системы может быть представлено в следующем виде:

$$u_n(\rho) = \left(\frac{\gamma^{1/2}}{2^n n! \pi^{1/2}}\right) e^{-\rho^2/2} H_n(\rho),$$

где $H_n(x)$ — стандартные полиномы Эрмита:

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2},$$

и $n = 0, 1, 2, \dots$. Заметим, что функции Эрмита удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\left(\frac{d}{d\rho} + \rho\right)u_n = (2n)^{1/2}u_{n-1}, \quad (125)$$

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \rho\right)u_{n-1} = -(2n)^{1/2}u_n. \quad (126)$$

Из (125), (126) легко видеть, что

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \rho\right)\left(\frac{d}{d\rho} + \rho\right)u_n = -2nu_n,$$

и, следовательно (см., например, [78]),

$$R_1 R_2 = -2\gamma n. \quad (127)$$

Подставляя далее в (123), (124)

$$\Phi = \begin{pmatrix} C_1 u_{n-1}(\rho) \\ iC_2 u_n(\rho) \\ C_3 u_{n-1}(\rho) \\ iC_4 u_n(\rho) \end{pmatrix},$$

можно обнаружить, что коэффициенты C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) определяются алгебраическими уравнениями

$$(E \mp m_1)C_{1,3} - (2\gamma n)^{1/2}C_{4,2} - (p_3 \mp m_2)C_{3,1} = 0,$$

$$(E \mp m_1)C_{2,4} - (2\gamma n)^{1/2}C_{3,1} + (p_3 \pm m_2)C_{4,2} = 0.$$

Приравнивая нулю определитель этой системы, найдем спектр энергии данного неэрмитова гамильтониана:

$$E = \pm \sqrt{m_1^2 - m_2^2 + 2\gamma n + p_3^2}, \quad (128)$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$, и, принимая во внимание $m^2 = m_1^2 - m_2^2$, видим, что этот результат (см. также (104)) совпадает с собственными значениями эрмитова гамильтониана, описывающими релятивистские уровни Ландау (см., например, [78]).

Коэффициенты C_i могут быть определены, если использовать в качестве оператора поляризации третью компоненту тензора поляризации в направлении магнитного поля [78]:

$$\mu_3 = m_1 \sigma_3 + \rho_2 [\boldsymbol{\sigma} \mathcal{P}]_3, \quad (129)$$

где матрицы

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что биспинор C может быть записан в виде

$$\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{ch}(\vartheta/2) \Phi_1 + \text{sh}(\vartheta/2) \Phi_3 \\ \text{ch}(\vartheta/2) \Phi_2 + \text{sh}(\vartheta/2) \Phi_4 \\ \text{sh}(\vartheta/2) \Phi_1 + \text{ch}(\vartheta/2) \Phi_3 \\ \text{sh}(\vartheta/2) \Phi_2 + \text{ch}(\vartheta/2) \Phi_4 \end{pmatrix}, \quad (130)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sqrt{1 + \frac{\zeta m}{p_\perp}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right), \\ \Phi_2 &= \zeta \sqrt{1 - \frac{\zeta m}{p_\perp}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right), \\ \Phi_3 &= \zeta \sqrt{1 + \frac{\zeta m}{p_\perp}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\lambda}{2}\right), \\ \Phi_4 &= \sqrt{1 - \frac{\zeta m}{p_\perp}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\lambda}{2}\right). \end{aligned}$$

Здесь $\mu_3 \psi = \zeta k \psi$, $k = \sqrt{p_\perp^2 + m^2}$ и $\zeta = \pm 1$, что соответствует ориентации спина фермиона: вдоль (+1) или против (-1) магнитного поля, и параметр λ

удовлетворяет соотношению $\cos \lambda = p_3/E$. Функции $\text{sh}(\vartheta/2)$ и $\text{ch}(\vartheta/2)$ определяются соотношениями

$$\text{ch } \vartheta = \frac{m_1}{m}, \quad \text{sh } \vartheta = \frac{m_2}{m}. \quad (131)$$

Следует обратить внимание, что в последнее время использование точного решения уравнения Дирака в магнитном поле дает целый ряд интересных экспериментальных результатов. В частности, в работах [79,80] удалось установить точное соответствие между данной релятивистской моделью, с одной стороны, и различными комбинациями взаимодействий Джейнса–Каммингса (Jaunes–Cummings, или JC) [79] и анти-Джейнса–Каммингса (AJC) [80] — с другой. Эти нетривиальные факты позволяют получить, как следствие, важные результаты, которые широко используются в квантовой оптике.

5. НЕЭРМИТОВА МОДИФИЦИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ ДИРАКА–ПАУЛИ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

В этом разделе затронем вопрос описания движения дираковских частиц, если их собственный магнитный момент отличается от магнетона Бора [3,4]. Как было показано Швингером [81], уравнение Дирака для частиц во внешнем электромагнитном поле A^{ext} с учетом радиационных поправок может быть представлено в виде

$$(\hat{\mathcal{P}}\gamma - m) \Psi(x) - \int \mathcal{M}(x, y|A^{\text{ext}}) \Psi(y) dy = 0, \quad (132)$$

где $\mathcal{M}(x, y|A^{\text{ext}})$ — массовый оператор фермионов во внешнем поле. Из уравнения (132) разложением массового оператора в ряд по eA^{ext} с точностью до первого порядка по величине поля можно получить модифицированное уравнение (см., например, [78]). Это уравнение обладает релятивистской ковариантностью и согласуется с феноменологическим уравнением Паули, полученным в его ранних работах.

Рассмотрим модель массивных фермионов с γ_5 -расширением массы $m \rightarrow m_1 + \gamma_5 m_2$ с учетом взаимодействия их зарядов и аномального магнитного момента (АММ) с электромагнитным полем $F_{\mu\nu}$:

$$\left(\gamma^\mu \mathcal{P}_\mu - m_1 - \gamma_5 m_2 - \frac{\Delta\mu}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) \tilde{\Psi}(x) = 0, \quad (133)$$

где $\Delta\mu = (\mu - \mu_0) = \mu_0(g - 2)/2$. Здесь μ — магнитный момент фермиона, g — гиромагнитный фактор фермиона, $\mu_0 = |e|/2m$ — магнетон Бора, $\sigma^{\mu\nu} = i/2(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu)$. Таким образом, феноменологическая константа $\Delta\mu$,

которая была введена Паули, является частью уравнения и может быть интерпретирована с точки зрения квантовой теории поля.

Гамильтонова форма уравнения (133) для фермиона в однородном магнитном поле имеет следующий вид [3, 4]:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}(r, t) = H_{\Delta\mu} \tilde{\Psi}(r, t), \quad (134)$$

где

$$H_{\Delta\mu} = \alpha \mathcal{P} + \beta(m_1 + \gamma_5 m_2) + \Delta\mu \beta(\sigma \mathbf{H}). \quad (135)$$

В частности, учитывая квантовый электродинамический вклад в АММ электрона с точностью до порядка e^2 , имеем $\Delta\mu = (\alpha 2\pi)\mu_0$, где $\alpha = e^2 = 1/137$ — постоянная тонкой структуры, и мы по-прежнему считаем, что потенциал внешнего поля удовлетворяет свободному уравнению Максвелла.

Следует отметить, что здесь оператор проекции спина фермиона на направление его движения $\sigma \mathcal{P}$ не коммутирует с гамильтонианом (135) и, следовательно, не является интегралом движения. Оператором, который коммутирует с гамильтонианом, оказывается μ_3 (см. (129)). Таким образом, волновая функция $\tilde{\psi}$ является собственной функцией оператора поляризации (129) и гамильтониана (135). Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} \mu_3 \psi &= \zeta k \psi, \\ \mu_3 &= \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & \mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2 \\ 0 & -m_1 & -\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2 & 0 \\ 0 & -\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2 & m_1 & 0 \\ \mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2 & 0 & 0 & -m_1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (136)$$

где $\zeta = \pm 1$ характеризует проекцию спина фермиона на направление магнитного поля, а также

$$\begin{aligned} H_{\Delta\mu} \tilde{\psi} &= E \tilde{\psi}, \\ H_{\Delta\mu} &= \begin{pmatrix} m_1 + H\Delta\mu & 0 & \mathcal{P}_3 - m_2 & \mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2 \\ 0 & m_1 - H\Delta\mu & \mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2 & -m_2 - \mathcal{P}_3 \\ m_2 + \mathcal{P}_3 & \mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2 & -m_1 - H\Delta\mu & 0 \\ \mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2 & m_2 - \mathcal{P}_3 & 0 & H\Delta\mu - m_1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (137)$$

Выполнение расчетов здесь во многом напоминает похожие расчеты, подробно проведенные в предыдущем разделе. В результате, используя модифицированное уравнение Дирака–Паули, можно также найти *точные значения спектра энергии* в случае неэрмитова гамильтониана (135), (137) (см. [3, 74]):

$$E(\zeta, p_3, 2\gamma n, H) = \pm \sqrt{p_3^2 - m_2^2 + \left[\sqrt{m_1^2 + 2\gamma n} + \zeta \Delta\mu H \right]^2} \quad (138)$$

и собственные значения оператора поляризации μ_3

$$k = \sqrt{m_1^2 + 2\gamma n}. \quad (139)$$

Следует отметить, что формула (138) выполняется не только для заряженных фермионов, но и для нейтральных частиц, обладающих АММ. В этом случае необходимо просто заменить значение квантованного поперечного импульса заряженной частицы в магнитном поле на обычное значение $2\gamma n \rightarrow p_1^2 + p_2^2 = p_\perp^2$. В результате имеем [4, 73]

$$E(\zeta, p_3, p_\perp, H) = \pm \sqrt{p_3^2 - m_2^2 + \left[\sqrt{m_1^2 + p_\perp^2} + \zeta \Delta \mu H \right]^2}. \quad (140)$$

Из (140) видно, что в области ненарушенной \mathcal{PT} -симметрии спектр энергии действителен в случае, когда спин частицы ориентирован вдоль магнитного поля: $\xi = +1$. Однако нетрудно заметить, что в случае $\zeta = -1$ (спин фермиона ориентирован против магнитного поля) в линейном приближении по интенсивности магнитного поля действительные значения энергетического спектра могут быть получены только тогда, когда интенсивность магнитного поля ограничена значением

$$H \leq \frac{p_0^2}{2\Delta\mu k}, \quad (141)$$

где $p_0 = \sqrt{m^2 + p_\perp^2 + p_3^2}$ — обычная эрмитова энергия частиц.

Отсюда из (140) в случае $\zeta = -1$ и $p_\perp = p_3 = 0$, что соответствует фермиону в состоянии покоя, можем получить $H \leq H_{\max}$. В линейном приближении по интенсивности магнитного поля также можем найти [3, 74]

$$H_{\max} = \frac{m^2}{2m_1\Delta\mu}. \quad (142)$$

Легко видеть из (142), что прямым следствием выражения (138) будет действительность собственных значений энергии при $H \leq H_{\max}$. Используя (142), можно сформулировать новое условие ненарушенности \mathcal{PT} -симметрии для модели фермионов с неэрмитовым γ_5 -расширением массы и ненулевым АММ в интенсивном внешнем магнитном поле. Это условие заменяет условие (76) и может быть представлено в виде

$$m_1^2 - m_2^2 \geq 2m_1\Delta\mu H. \quad (143)$$

Итак, мы видим, что существует максимальное значение магнитного поля H_{\max} , превышение которого в случае фермионов в состоянии покоя и $\zeta = -1$ приводит к полной потере действительности спектра энергий.

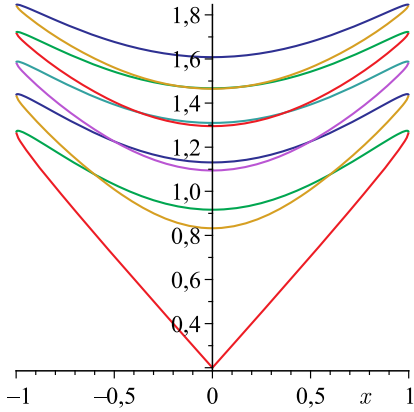


Рис. 4. Зависимость $E(+1, 0, 0, 4n, 0, 2)$ от параметра $x = m/M$ для случая $n = 0, 1, 2, 3, 4$ и $\Delta\mu H = 0, 2$

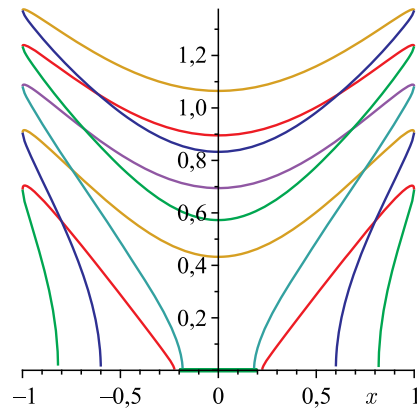


Рис. 5. Зависимость $E(-1, 0, 0, 4n, 0, 2)$ от параметра $x = m/M$ для случая $n = 0, 1, 2, 3, 4$ и $\Delta\mu H = 0, 2$

Из (140) видно [4], что в области ненарушенной \mathcal{PT} -симметрии все уровни энергии действительны в случае, когда спин частицы ориентирован вдоль магнитного поля: $\xi = +1$. Напротив, при ориентации спина против магнитного поля ($\xi = -1$) энергия основного состояния фермиона $n = 0$ имеет мнимую часть, так же как и другие нижние уровни энергии. На рис. 4 и 5 (см. также [74]) представлены зависимости значений энергии от параметра $x = m/M$ (см. рис. 4 для $\xi = +1$ и рис. 5 для $\xi = -1$).

Легко видеть, что в случае $\Delta\mu = 0$ из (138) можно получить обычное выражение для уровней энергии заряженной частицы во внешнем поле (128) (уровни Ландау). Кроме того, следует подчеркнуть, что выражение, аналогичное (138), можно получить в рамках обычного подхода Дирака–Паули, полагая $m_2 = 0$ и $m_1 = m$ (эрмитов предел):

$$E(\zeta, p_3, 2\gamma n, H) = \pm \sqrt{p_3^2 + \left[\sqrt{m^2 + 2\gamma n} + \zeta \Delta\mu H \right]^2}. \quad (144)$$

Заметим, что ранее в статье [82] был получен результат, аналогичный (144), с помощью обычного эрмитова подхода к решению уравнения Дирака–Паули. Прямое сравнение модифицированной формулы (144) в эрмитовом пределе (см. [3, 4]) с результатом [82] показывает их совпадение. Легко видеть, что выражение (138) содержит зависимость от параметров m_1 и m_2 по отдельности, не объединенных в *физическую массу (частицы)* $m = \sqrt{m_1^2 - m_2^2}$, что существенно отличается от примеров, которые были рассмотрены в предыдущих разделах.

Таким образом, в отличие от (104) и (128) в данном случае расчет взаимодействия АММ фермионов с магнитным полем позволяет ставить вопрос

о возможности экспериментального наблюдения эффектов γ_5 -расширения массы фермионов.

Заметим, что если предположить $m_2 = 0$ и, следовательно, $m_1 = m$, то мы получаем, как отмечалось ранее, эрмитов предел. Но, учитывая выражения (81) и (82), можно получить, что энергетический спектр (138) выражается через массу фермиона m и значение максимальной массы M . Таким образом, принимая во внимание, что взаимодействие АММ с магнитным полем устраняет вырождение по спиновой переменной, мы можем получить энергию основного состояния ($\zeta = -1$) в виде (см. [3, 4])

$$E(-1, 0, 0, H, x) = m \sqrt{- \left(\frac{1 \mp \sqrt{1-x^2}}{x} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{1 \mp \sqrt{1-x^2}}}{x} - \frac{\Delta\mu H}{m} \right)^2}, \quad (145)$$

где $x = m/M$, верхний индекс соответствует обычным частицам, а нижний индекс — их «экзотическим» партнерам.

Перейдем теперь к более подробному рассмотрению энергии основного состояния фермионов, находящихся во внешнем поле. Используя приведенные выше выкладки (см. (138)), можно получить зависимость энергии обычного фермиона с малой массой $x = m/M \ll 1$ от величины магнитного поля H :

$$E(-1, 0, 0, H, x) = m \sqrt{1 - \frac{\Delta\mu}{\mu_0} \frac{H}{H_c} \left(1 + \frac{x^2}{8} + 7 \frac{x^4}{128} \right) + \left(\frac{\Delta\mu H}{m} \right)^2}, \quad (146)$$

где $H_c = m^2/e = 4,41 \cdot 10^{13}$ Гс — квантующее магнитное поле для электрона [78].

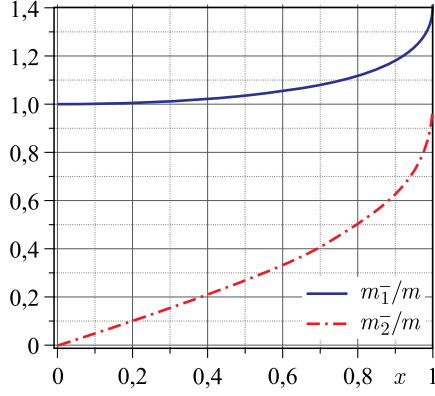
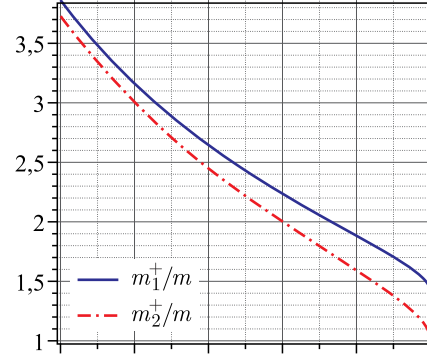
С другой стороны, для случая «экзотических» частиц в аналогичном пределе $x \ll 1$ имеем результат, существенно отличный от (146) (см. [3, 4]):

$$E(-1, 0, 0, H, x) = m \sqrt{1 - \frac{\Delta\mu}{\mu_0} \frac{2H}{xH_c} + \left(\frac{\Delta\mu H}{m} \right)^2}. \quad (147)$$

Из (147) видно, что полевые поправки в этом случае существенно возрастают: как $1/x = M/m \gg 1$. В пределе $m \rightarrow M$ получается соответствие результатов для традиционных и экзотических частиц. Таким образом, объединяя эти результаты, можем написать

$$E(-1, 0, 0, H, x) = m \sqrt{1 - \frac{\Delta\mu}{\mu_0} \frac{\sqrt{2}H}{xH_c} + \left(\frac{\Delta\mu H}{m} \right)^2}. \quad (148)$$

Можно также видеть [73], что изменение параметров m_1^\mp и m_2^\mp происходит таким образом, что в точке $x = 1$ ($m = M$) ветви графиков для


 Рис. 6. Зависимость параметров m_1^-/m , m_2^-/m от переменной $x = m/M$

 Рис. 7. Зависимость параметров m_1^+/m , m_2^+/m от переменной $x = m/M$

параметров масс обыкновенных и экзотических частиц пересекаются. Это легко увидеть на рис. 6 и 7, где представлены зависимости $m_{1,2}^-/m$ и $m_{1,2}^+/m$ от параметра $x = m/M$.

Так как уравнения (133) и вытекающие из него формулы (138), (146), (147) справедливы практически для любых значений интенсивности магнитного поля, легко видеть, что для значения

$$H \sim \frac{\mu_0}{\Delta\mu} \frac{m}{m_1} H_c \quad (149)$$

получается $E_0 \sim 0$. Таким образом, в интенсивном магнитном поле учет вакуумного магнитного момента может привести к существенному изменению границы энергетического спектра между фермионными и антифермионными состояниями. Следует обратить внимание, что значительное увеличение этой поправки связано с возможным вкладом так называемых экзотических частиц [3].

В качестве важного примера применения полученных выражений для энергии рассмотрим ситуацию с нейтрино. Именно в случае ультрахолодных поляризованных обычных электронных нейтрино в линейном по полю приближении получается (см. (140))

$$E\left(-1, 0, 0, H, \frac{m_{\nu_e}}{M} \ll 1\right) = m_{\nu_e} \sqrt{1 - \frac{\mu_{\nu_e}}{\mu_0} \frac{H}{H_c}}. \quad (150)$$

Однако в случае экзотических электронных нейтрино ситуация может существенно измениться:

$$E\left(-1, 0, 0, H, \frac{m_{\nu_e}}{M} \ll 1\right) = m_{\nu_e} \sqrt{1 - \frac{\mu_{\nu_e}}{\mu_0} \frac{2MH}{m_{\nu_e} H_c}}. \quad (151)$$

Хорошо известно [83,84], что в минимально расширенной СМ однопетлевые радиационные поправки, дающие вклад в магнитный момент нейтрино, пропорциональны массе нейтрино:

$$\mu_{\nu_e} = \frac{3}{8\sqrt{2}\pi^2} |e| G_F m_{\nu_e} = (3 \cdot 10^{-19}) \mu_0 \left(\frac{m_{\nu_e}}{1 \text{ эВ}} \right), \quad (152)$$

где G_F — фермиевская константа взаимодействия и μ_0 — магнетон Бора. Кроме того, обсуждение проблемы измерения массы нейтрино (активных или стерильных составляющих) показывает, что для активного нейтрино модели имеем $\sum m_\nu = 0,320$ эВ, в то время как для стерильного нейтрино $\sum m_\nu = 0,06$ эВ [85].

Таким образом, можно оценить изменение границы области ненарушенной \mathcal{PT} -симметрии из-за сдвига состояния с наименьшей энергией в магнитном поле. Действительно, используя формулы (150) и (151), можно получить соответственно области сохранения \mathcal{PT} -симметрии.

Рассмотрим следующие параметры нейтрино: массу электронного нейтрино $m_{\nu_e} = 1$ эВ и магнитный момент (152). Если предположить, что значения массы и магнитного момента экзотических нейтрино идентичны параметрам обычных нейтрино, то можно получить оценки границы области ненарушенной \mathcal{PT} -симметрии для (150) в виде [3]

$$H^{\max}_{\nu_e(\text{ordinary})} = \frac{\mu_0}{\mu_{\nu_e}} H_c. \quad (153)$$

Однако в случае (151) ситуация может измениться радикально:

$$H^{\max}_{\nu_e(\text{exot})} = \frac{\mu_0}{\mu_{\nu_e}} \frac{m_{\nu_e}}{2M} H_c. \quad (154)$$

По сравнению с (153), где экспериментально определяемые полевые поправки чрезвычайно малы, может оказаться, что критическое значение магнитного поля (154) достижимо в обычных наземных экспериментах [3,4].

Отметим также, что интенсивные магнитные поля существуют вблизи и внутри ряда космических объектов. Именно, магнитные поля интенсивностью порядка 10^{12} – 10^{13} Гс наблюдаются вблизи пульсаров. Сюда также могут быть включены такие недавно открытые объекты, как источники мягких повторяющихся гамма-всплесков и аномальные рентгеновские пульсары. Для них предлагаются магнитно-вращательные модели, названные магнетарами. Было показано, что для таких объектов магнитные поля с интенсивностью до 10^{15} Гс являются достижимыми. Очень важно, что доля магнетаров в общей численности нейтронных звезд может достигать 10% [86,87]. В связи с этим отметим, что процессы с участием простых нейтрино и особенно их

возможных «экзотических партнеров» в присутствии таких сильных магнитных полей могут значительно влиять на процессы, определяющие развитие астрофизических объектов.

Таким образом, подводя итог вышесказанному, можно отметить, что основной результат, полученный нами на пути алгебраического построения модели фермионов с γ_5 -расширением массы состоит во введении нового массового (энергетического) масштаба, определяемого параметром $m_{\max} \equiv M = m_1^2/2m_2$. Это значение на шкале масс является точкой перехода от обычных частиц к экзотическим. Кроме того, в алгебраическом подходе возникает, по существу, такое же описание экзотических частиц, как в геометрической модели с фундаментальной массой.

Следует отметить, что, хотя энергетические спектры фермионов в некоторых случаях совпадают со спектрами соответствующих эрмитовых гамильтонианов H_0 , мы нашли примеры, в которых энергия фермионов явно зависит от неэрмитовых характеристик. Имеется в виду рассмотрение взаимодействия АММ фермионов с магнитным полем. В этом случае мы получили точное решение для энергетического спектра фермионов (см. (138), (140)).

Мы не знаем, равен ли верхний предел спектра масс элементарных частиц массе Планка [5], но экспериментальное исследование этого варианта теории при высоких энергиях вряд ли сегодня может быть рассмотрено. Однако современная точность альтернативных лабораторных измерений при низких энергиях в интенсивном магнитном поле позволяет, в принципе, добиться требуемых значений для экзотических частиц в случае, если они действительно существуют. Полученные формулы (см. [3,4]) (151)–(154) позволяют не только убедиться в существовании *максимальной массы*, но также получить подтверждение реальности так называемых *экзотических частиц*, так как наличие последних неразрывно связано с существованием ограничения в спектре масс элементарных частиц.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Последовательное использование концепции Маркова, предполагающей существование стабильных объектов с планковской массой и утверждающей существование конечного верхнего предела M для значений спектра масс элементарных частиц, привело В.Г.Кадышевского к разработке модифицированной версии локальной квантовой теории поля на основе геометрического подхода. При этом параметр M в этой модели являлся не только предельно допустимой массой частицы, но и выступал как новый универсальный масштаб энергетической шкалы. Наряду с этим В.Г.Кадышевским проводилось также изучение ряда вопросов, связанных с возможным существованием фундаментальной постоянной размерности длины, которая отме-

чалась П. А. М. Дираком как одна из важнейших проблем современной физики. В данном контексте «фундаментальная длина» выступала как параметр, сопряженный «фундаментальной массе», и, таким образом, также имела исключительную важность для установления границ применимости современных физических теорий.

Таким образом, в основе практически всех публикаций В. Г. Кадышевского отчетливо видна его приверженность к геометрическим сценариям развития и углубления КТП. Он считал, что теории, основанные на геометрическом принципе, имели реальные шансы быть логически последовательными схемами. Эвристическая формула Эйнштейна

$$\text{эксперимент} = \text{геометрия} + \text{физика}$$

не раз появлялась в наших дискуссиях, и он был уверен, что эта формула была истинной. Правомочность этого подхода подтверждалась в наших совместных работах по разработке локальной КТП на основе геометрии де Ситтера, содержащих гипотетический универсальный параметр M [15, 17]. В связи с этим представляется полностью оправданной постановка работ В. Г. Кадышевского в один ряд с работами выдающихся физиков, развивавших направление исследований по проблемам существования фундаментальных ограниченной размерности массы и длины [88].

Введение ограничения спектра масс $m \leq M$ на основе геометрического подхода к разработке модифицированной КТП приводит к появлению неэрмитовых (псевдоэрмитовых) \mathcal{PT} -симметричных гамильтонианов в фермионном секторе модели с такой же областью ненарушенности \mathcal{PT} -симметрии: $m \leq M$. Однако благодаря бурному развитию теории квантовых неэрмитовых моделей появилась возможность справиться с трудностями, возникающими в теории вследствие отсутствия эрмитовости.

Синтез геометрической теории с максимальной массой и алгебраической теории с γ_5 -расширением массы дираковской частицы оказался чрезвычайно плодотворен для обеих теорий. В частности, введение параметра максимальной массы и постулата о его равенстве фундаментальной массе M позволяет придать физический смысл алгебраической теории, а также описать с ее помощью весь спектр известных частиц СМ, с одной стороны. С другой стороны, использование методов, развитых в алгебраической модели, позволяет произвести фактически прорыв в решении проблем, связанных с данной теорией. Речь идет как о решении математических вопросов, связанных с неэрмитовостью рассматриваемых операторов, так и о проблемах постановки экспериментов по проверке истинности теории и поиском значения M (см. [3, 4]).

В частности, оказывается, что эксперимент, являющийся проверкой истинности теории с максимальной массой, не обязательно должен производиться в области сверхвысоких энергий, как предполагалось ранее, но может

протекать в области низких энергий. Здесь имеется в виду рассмотрение взаимодействия АММ фермионов с интенсивным магнитным полем, а именно, определение поведения ультрахолодных поляризованных нейтрино во внешнем магнитном поле. Момент истины в этом эксперименте — это проверка существования так называемых экзотических нейтрино [4], описание которых не обладает способностью перехода к дираковскому пределу $M \rightarrow \infty$ (или к «плоскому пределу» в геометрической трактовке).

Таким образом, эксперимент по проверке истинности теории с максимальной массой и выяснению необходимости выхода за рамки стандартной квантовой теории поля, в принципе, может быть поставлен уже в скором будущем. Существует предположение, что упомянутые «экзотические» частицы входят в состав «темной материи», которая, как известно, составляет значительную часть плотности энергии Вселенной и не поддается описанию в рамках СМ. Это означает, что развитие теории с ограниченной массой как модификации и расширения современной КТП может придать значительный стимул в решении этой проблемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кадышевский В. Г.* Квантовая теория поля и «максимон» Маркова. Доклад, представленный на III Междунар. семинар «Квантовая теория гравитации», Москва, 23–25 окт. 1984 г.; Препринт ОИЯИ P2-84-753. Дубна, 1984.
2. *Kadyshevsky V. G.* Fundamental Length Hypothesis and New Concept of Gauge Vector Field // *Nucl. Phys. B.* 1978. V. 141. P. 477; Fermilab-Pub. 78/22-THY. 1978; Toward a More Profound Theory of Electromagnetic Interactions: Fermilab-Pub. 78/70-THY, 1978;
Кадышевский В. Г. Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // ЭЧАЯ. 1980. Т. 11, вып. 1. С. 5.
3. *Rodionov V. N.* Non-Hermitian \mathcal{PT} -symmetric Dirac–Pauli Hamiltonians with Real Energy Eigenvalues in the Magnetic Field // *Intern. J. Theor. Phys.* 04.11.2014. DOI 10.1007/s10773-014-2410-4 4065.
4. *Rodionov V. N.* Exact Solutions for Non-Hermitian Dirac–Pauli Equation in an Intensive Magnetic Field // *Physica Scripta.* 2015. V. 90. P. 045302.
5. *Markov M. A.* Can the Gravitational Field Prove Essential for the Theory of Elementary Particles? // *Prog. Theor. Phys. Suppl. Commemoration Issue for the Thirtieth Anniversary of Meson Theory and Yukawa Dr. H.* 1965. P. 85;
Марков М. А. Элементарные частицы максимально больших масс (кварки, максимоны) // ЖЭТФ. 1966. Т. 51. С. 878 (Sov. Phys. JETP. 1967. V. 24. P. 584).
6. *Markov M. A.* Maximon-Type Scenario of the Universe (Big Bang, Small Bang, Micro Bang). Preprint INR P-0207. 1981; On the Maximon and the Concept of Elementary Particle. Preprint INR P-0208. 1981;
Марков М. А. О «максимоне» и «минимоне» в свете возможной формулировки «элементарной частицы» // Письма в ЖЭТФ. 1987. Т. 45. С. 115;

- Markov M. A., Mukhanov V. F.* On the Problems of a Very Early Universe // *Phys. Lett. A.* 1984. V. 104, No. 4. P. 200.
7. *Kadyshevsky V. G., Mateev M. D.* Local Gauge Invariant QED with Fundamental Length // *Phys. Lett. B.* 1981. V. 106. P. 139.
 8. *Kadyshevsky V. G., Mateev M. D.* Quantum Field Theory and a New Universal High-Energy Scale. I: The Scalar Model // *Nuovo Cim. A.* 1985. V. 87. P. 324.
 9. *Chizhov M. V. et al.* Quantum Field Theory and a New Universal High-Energy Scale. II: Gauge Vector Fields // *Ibid.* P. 350.
 10. *Chizhov M. V. et al.* Quantum Field Theory and a New Universal High-Energy Scale. III: Dirac Fields // *Ibid.* P. 373.
 11. *Кадышевский В. Г.* К вопросу о конечности спектра масс элементарных частиц // ЭЧАЯ. 1998. Т. 29. С. 563 (*Kadyshevsky V. G.* // *Phys. Part. Nucl.* 1998. V. 29. P. 227).
 12. *Kadyshevsky V. G., Fursaev D. V.* Left-Right Components of Bosonic Field and Electroweak Theory // *JINR Rapid Commun.* 1992. No. 6.
 13. *Ибадов Р. М., Кадышевский В. Г.* О преобразованиях суперсимметрии в теории поля с фундаментальной массой. Препринт ОИЯИ Р2-86-835. Дубна, 1986.
 14. *Кадышевский В. Г., Фурсаев Д. В.* О киральных фермионных полях при высоких энергиях. Препринт ОИЯИ Р2-87-913. Дубна, 1987; Докл. АН СССР. 1989. Т. 306. №4. С. 856 (*Sov. Phys. Dokl.* 1989. V. 34. P. 534).
 15. *Kadyshevsky V. G. et al.* Towards a Maximal Mass Model. CERN TH/2007-150; arXiv:hep-ph/0708.4205.
 16. *Kadyshevsky V. G., Rodionov V. N.* Polarization of the Electron-Positron Vacuum by Strong Magnetic Field in the Theory with a Fundamental Mass // *Phys. Part. Nucl. A.* 2005. V. 36, No. 7. P. 74.
 17. *Кадышевский В. Г. и др.* О геометрическом подходе к формулировке Стандартной Модели // Докл. РАН. 2006. Т. 408, №4. С. 465 (*Kadyshevsky V. G. et al.* // *Dokl. Phys.* 2006. V. 51. P. 287; arXiv:hep-ph/0512332).
 18. *Newton T. D., Wigner E. P.* Localized States for Elementary Systems // *Rev. Mod. Phys.* 1949. V. 21. P. 400 (Пер. в кн.: Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. С. 277).
 19. *Heisenberg W.* Zur Theorie der Schauer der Höhenstrahlung // *Z. Phys.* 1936. Bd. 101. S. 533.
 20. *Марков М. А.* Гипероны и K -мезоны. М.: Физматгиз, 1958.
 21. *Гольфанд Ю. А.* О введении элементарной длины в релятивистскую теорию элементарных частиц // *ЖЭТФ.* 1959. Т. 37. С. 504.
 22. *Кадышевский В. Г.* К теории пространства-времени // *ЖЭТФ.* 1961. Т. 41. С. 1885.
 23. *Кадышевский В. Г.* К теории дискретного пространства-времени // Докл. АН СССР. 1961. Т. 136, №1. С. 70.
 24. *Киржниц Д. А.* Нелокальная квантовая теория поля // *УФН.* 1966. Т. 9. С. 129.
 25. *Блохинцев Д. И.* Пространство и время в микромире. М.: Наука, 1970.
 26. *Тамм И. Е.* Собр. науч. тр. Т. 2. М.: Наука, 1975.
 27. *Ефимов Г. В.* Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977.
 28. *Osterwalder K., Schrader R.* Feynman-Kac Formula for Euclidean Fermi and Boson Fields // *Phys. Rev. Lett.* 1973. V. 29. P. 1423; Euclidean Fermi Fields and a Feynman-Kac Formula for Boson-Fermion Models // *Helv. Phys. Acta.* 1973. V. 46. P. 277;

- Axioms for Euclidean Green's Functions // Commun. Math. Phys. 1973. V. 31. P. 83;
 Axioms for Euclidean Green's Functions II // Commun. Math. Phys. 1975. V. 42.
 P. 281.
29. *Neznamov V.P.* The Dirac Equation in the Model with a Maximal Mass. arXiv: 1002.1403; Electron Self-Energy in Pseudo-Hermitian Quantum Electrodynamics with a Maximal Mass M . arXiv: 1010.4042.
 30. *Bender C.M., Boettcher S.* Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having \mathcal{PT} Symmetry // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 5243.
 31. *Bender C.M., Boettcher S., Meisinger P.N.* \mathcal{PT} -Symmetric Quantum Mechanics // J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 2210.
 32. *Mostafazadeh A.* Pseudo-Hermitian Representation of Quantum Mechanics. arXiv: 0810.5643; Intern. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 2010. V. 7. P. 1191.
 33. *Znojil M.* Non-Hermitian Heisenberg Representation. arXiv:1505.01036.
 34. *Bender C.M., Fring A., Komijani J.* Nonlinear Eigenvalue Problems. arXiv:1401.6161.
 35. *Mostafazadeh A.* Adiabatic Approximation, Semiclassical Scattering, and Unidirectional Invisibility. arXiv:1401.4315.
 36. *Mostafazadeh A.* Physics of Spectral Singularities. arXiv:1412.0454.
 37. *Mostafazadeh A.* Active Invisibility Cloaks in One Dimension. arXiv:1504.01756.
 38. *Beygi A., Klevansky S.P., Bender C.M.* Coupled Oscillator Systems Having Partial \mathcal{PT} Symmetry. arXiv: 1503.05725.
 39. *Makris M.G., Lambropoulos P.* Quantum Zeno Effect by Indirect Measurement: The Effect of the Detector // Phys. Rev. A. 2004. V. 70. P. 044101; arXiv:quant-ph/0406191.
 40. *Lambropoulos P., Nikolopoulos L.A.A., Makris M.G.* Signatures of Direct Double Ionization under XUV Radiation. arXiv:physics/0503195.
 41. *Zanolin M., Vitale S., Makris N.* Application of Asymptotic Expansions of Maximum Likelihood Estimators Errors to Gravitational Waves from Binary Mergers: The Single Interferometer Case // Phys. Rev. D. 2010. V. 81. P. 124048; arXiv:0912.0065.
 42. *Ambichl P. et al.* Breaking of \mathcal{PT} -Symmetry in Bounded and Unbounded Scattering Systems // Phys. Rev. X. 2013. V. 3. P. 041030; arXiv:1307.0149.
 43. *Esterhazy S. et al.* Scalable Numerical Approach for the Steady-State Ab Initio Laser Theory // Phys. Rev. A. 2014. V. 90. P. 023816; arXiv:1312.2488.
 44. *Mostafazadeh A.* A Dynamical Formulation of One-Dimensional Scattering Theory and Its Applications in Optics // Ann. Phys. (N. Y.). 2014. V. 341. P. 77; arXiv:1310.0592.
 45. *Makris K.G., Ge L., Tureci H.E.* Anomalous Transient Amplification of Waves in Non-Normal Photonic Media. arXiv:1410.4626.
 46. *Makris K.G. et al.* Constant-Intensity Waves and Their Modulation Instability in Non-Hermitian Potentials. arXiv:1503.08986.
 47. *Znojil M.* Fundamental Length in Quantum Theories with \mathcal{PT} -Symmetric Hamiltonians // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. P. 045022; arXiv:0907.2677.
 48. *Znojil M.* Fundamental Length in Quantum Theories with \mathcal{PT} -Symmetric Hamiltonians II: The Case of Quantum Graphs // Phys. Rev. D. 2009. V. 80. P. 105004; arXiv:0910.2560.

49. *Khare A., Mandal B. P.* A \mathcal{PT} -Invariant Potential with Complex QES Eigenvalues // *Phys. Lett. A.* 2000. V. 272. P. 53.
50. *Znojil M., Levai G.* Spontaneous Breakdown of \mathcal{PT} -Symmetry in the Solvable Square-Well Model // *Mod. Phys. Lett. A.* 2001. V. 16. P. 2273.
51. *Mostafazadeh A.* \mathcal{PT} -Symmetric Cubic Anharmonic Oscillator as a Physical Model // *J. Phys. A.* 2005. V. 38. P. 6657; Erratum. *Ibid.* P. 8185.
52. *Bender C. M. et al.* Equivalence of a Complex \mathcal{PT} -Symmetric Quartic Hamiltonian and a Hermitian Quartic Hamiltonian with an Anomaly // *Phys. Rev. D.* 2006. V. 74. P. 025016 (and references therein).
53. *Bender C. M. et al.* Small- ε Behavior of the Non-Hermitian \mathcal{PT} -Symmetric Hamiltonian $H = p^2 + x^2(ix)^\varepsilon$. arXiv:0906.1291.
54. *Khare A., Mandal B. P.* New Quasi-Exactly Solvable Hermitian as Well as Non-Hermitian \mathcal{PT} -Invariant Potentials // *Spl. Issue Pramana J. Phys.* 2009. V. 73. P. 387.
55. *Dorey P., Dunning C., Tateo R.* Spectral Equivalences, Bethe Ansatz Equations, and Reality Properties in \mathcal{PT} -Symmetric Quantum Mechanics // *J. Phys A: Math. Theor.* 2001. V. 34. P. 5679.
56. *Bender C. M., Brody D. C., Jones H. F.* Extension of \mathcal{PT} -Symmetric Quantum Mechanics to Quantum Field Theory with Cubic Interaction // *Phys. Rev. D.* 2004. V. 70. P. 025001; Erratum // *Phys. Rev. D.* 2005. V. 71. P. 049901.
57. *Bender C. M.* Making Sense of Non-Hermitian Hamiltonians. arXiv:hep-th/0703096.
58. *Bender C. M., Jones H. F., Rivers R. J.* Dual \mathcal{PT} -Symmetric Quantum Field Theories // *Phys. Lett. B.* 2005. V. 625. P. 333.
59. *Bender C. M., Brody D. C., Jones H. F.* Complex Extension of Quantum Mechanics // *Phys. Rev. Lett.* 2002. V. 89. P. 270401; Erratum // *Phys. Rev. Lett.* 2004. V. 92. P. 119902.
60. *Bender C. M. et al.* The C Operator in \mathcal{PT} -Symmetric Quantum Theories. arXiv:quant-ph/0402026.
61. *Mostafazadeh A.* Pseudo-Hermiticity versus \mathcal{PT} Symmetry: The Necessary Condition for the Reality of the Spectrum of a Non-Hermitian Hamiltonian // *J. Math. Phys.* 2002. V. 43. P. 205; Pseudo-Hermiticity versus \mathcal{PT} -Symmetry II: A Complete Characterization of Non-Hermitian Hamiltonians with a Real Spectrum // *Ibid.* P. 2814; Pseudo-Hermiticity versus \mathcal{PT} -Symmetry III: Equivalence of Pseudo-Hermiticity and the Presence of Antilinear Symmetries // *Ibid.* P. 3944.
62. *Mostafazadeh A., Batal A.* Physical Aspects of Pseudo-Hermitian and \mathcal{PT} -Symmetric Quantum Mechanics // *J. Phys A: Math. Theor.* 2004. V. 37. P. 11645.
63. *Mostafazadeh A.* Exact \mathcal{PT} -Symmetry Is Equivalent to Hermiticity // *J. Phys A: Math. Theor.* 2003. V. 36. P. 7081.
64. *Mostafazadeh A.* Hilbert Space Structures on the Solution Space of Klein–Gordon Type Evolution Equations // *Class. Quant. Grav.* 2003. V. 20. P. 155.
65. *Mostafazadeh A.* Quantum Mechanics of Klein–Gordon-Type Fields and Quantum Cosmology // *Ann. Phys.* 2004. V. 309. P. 1.
66. *Mostafazadeh A., Zamani F.* Quantum Mechanics of Klein–Gordon Fields I: Hilbert Space, Localized States, and Chiral Symmetry // *Ann. Phys.* 2006. V. 321. P. 2183;

- Quantum Mechanics of Klein–Gordon Fields II: Relativistic Coherent States // *Ibid.* P. 2210.
67. *Mostafazadeh A.* A Physical Realization of the Generalized \mathcal{PT} -, \mathcal{C} -, and \mathcal{CPT} -Symmetries and the Position Operator for Klein–Gordon Fields // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2006. V. 21, No. 12. P. 2553.
 68. *Zamani F., Mostafazadeh A.* Quantum Mechanics of Proca Fields // *J. Math. Phys.* 2009. V. 50. P. 052302.
 69. *Rodionov V.N.* \mathcal{PT} -Symmetric Pseudo-Hermitian Relativistic Quantum Mechanics with Maximal Mass. arXiv:hep-th/1207.5463.
 70. *Rodionov V.N.* Non-Hermitian \mathcal{PT} -Symmetric Quantum Mechanics of Relativistic Particles with the Restriction of Mass. arXiv:1303.7053.
 71. *Rodionov V.N.* On Limitation of Mass Spectrum in Non-Hermitian \mathcal{PT} -Symmetric Models with the γ_5 -Dependent Mass Term. arXiv:1309.0231.
 72. *Rodionov V.N.* Non-Hermitian \mathcal{PT} -Symmetric Relativistic Quantum Mechanics with a Maximal Mass in an External Magnetic Field. arXiv:1404.0503.
 73. *Rodionov V.N.* Exact Solutions for Non-Hermitian Dirac–Pauli Equation in an Intensive Magnetic Field. arXiv:1406.0383.
 74. *Rodionov V.N.* Non-Hermitian \mathcal{PT} -Symmetric Dirac–Pauli Hamiltonians with Real Energy Eigenvalues in the Magnetic Field. arXiv:1409.5412.
 75. *Родионов В. Н., Кравцова Г. А.* Алгебраический и геометрический подходы к неэрмитовой \mathcal{PT} -симметричной релятивистской квантовой механике с максимальной массой // *ВМУ. Сер. 3: «Физ. Астрон.»* 2014. № 3. С. 20 (*Mosc. Univ. Phys. Bull.* 2014. V. 69, No. 3. P. 223).
 76. *Родионов В. Н., Кравцова Г. А.* К развитию неэрмитовой алгебраической теории с γ_5 -расширением массы // *ТМФ.* 2015. Т. 182. С. 124 (*Rodionov V.N., Kravtsova G.A.* // *Theor. Math. Phys.* 2015. V. 182. P. 100).
 77. *Волобуев И. П. и др.* Уравнения движения для скалярного и спинорного полей в четырехмерном неевклидовом импульсном пространстве // *ТМФ.* 1979. Т. 40. С. 363.
 78. *Тернов И. М., Халилов В. Р., Родионов В. Н.* Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
 79. *Bermudez A., Martin-Delgado M.A., Solano E.* Mesoscopic Superposition States in Relativistic Landau Levels // *Phys. Rev. Lett.* 2007. V. 99. P. 123602.
 80. *Jaynes E.T., Cummings F.W.* Comparison of Quantum and Semiclassical Radiation Theories with Application to the Beam Maser // *Proc. IEEE.* 1963. V. 51. P. 89.
 81. *Schwinger J.* On the Green's Functions of Quantized Fields. I, II // *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.* 1951. V. 37. P. 452; 455.
 82. *Тернов И. М., Багров В. Г., Жуковский В. Ч.* Синхротронное излучение электрона, обладающего вакуумным магнитным моментом // *ВМУ. Сер. 3: «Физ. Астрон.»* 1966. Т. 7, № 1. С. 30.
 83. *Lee B., Shrock R.* Natural Suppression of Symmetry Violation in Gauge Theories: Muon and Electron–Lepton Number Nonconservation // *Phys. Rev. D.* 1977. V. 16. P. 1444.

84. *Fujikawa K., Shrock R.* Magnetic Moment of a Massive Neutrino and Neutrino–Spin Rotation // *Phys. Rev. Let.* 1980. V. 45. P. 963.
85. *Battye R. A.* Evidence for Massive Neutrinos CMB and Lensing Observations. arXiv:1308.5870v2.
86. *Михеев Н. В., Румянцев Д. А., Чистяков М. В.* Фоторождение нейтрино на электро-не в плотной замагниченной среде // *ЖЭТФ.* 2014. Т. 146. С. 289 (*Mikheev N. V., Romyantsev D. A., Chistyakov M. V.* // *JETP.* 2014. V. 119. P. 251).
87. *Chistyakov M. V. et al.* Neutrino Photoproduction on Electron in Dense Magnetized Medium. arXiv:1410.5566v1.
88. *Томилин К. А.* Фундаментальные физические постоянные. М.: Наука, 2006. С. 236; 237.