

СВЕТИМОСТЬ ИОННОГО КОЛЛАЙДЕРА

И. Н. Мешков *

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

ВВЕДЕНИЕ	777
АСИММЕТРИЧНЫЕ ВСТРЕЧНЫЕ ПУЧКИ	778
Светимость — общий случай	778
Одинаковые встречные пучки	782
Столкновение распущенного пучка со сгруппированным	783
Столкновение двух распущенных пучков	785
Распределение светимости по длине участка встречи	786
Столкновение пересекающихся пучков.	786
Синхронизация столкновений	789
ОПТИМИЗАЦИЯ СВЕТИМОСТИ ЦИКЛИЧЕСКОГО КОЛЛАЙДЕРА	790
Эффекты пространственного заряда пучков	790
Оптимизация светимости коллайдера	795
ПРИМЕРЫ ОПТИМИЗАЦИИ СВЕТИМОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ КОЛЛАЙДЕРОВ	798
Ионный коллайдер NICA — симметричная мода	798
Коллайдер NICA — асимметричная мода	801
Электрон-ионный коллайдер с равновесным ионным пучком	802
«Сливающиеся» ионные пучки	805
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	807
Приложение. ПРИБЛИЖЕНИЕ ТОНКОЙ ЛИНЗЫ	807
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	809

*E-mail: meshkov@jinr.ru

СВЕТИМОСТЬ ИОННОГО КОЛЛАЙДЕРА

*И. Н. Мешков**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Получена формула светимости коллайдера при столкновении двух пучков, отличающихся, вообще говоря, своими параметрами («асимметричные коллайдеры»). Формула справедлива для встречных и «попутных» пучков, имеющих совпадающие продольные оси. Рассмотрены три частных случая формулы: столкновение двух идентичных аксиально-симметричных сгустков сгруппированных пучков, столкновение сгустка с распущенным пучком и столкновение двух распущенных пучков. Кратко рассмотрен вариант пересекающихся пучков и сформулирован способ расчета их светимости. Рассмотрена проблема синхронизации столкновений асимметричных пучков. Представлен метод оптимизации параметров циклического коллайдера на основе минимизации значений сдвигов бетатронных частот, вызванных действием пространственного заряда пучков. Приведены численные примеры расчета светимости нескольких видов асимметричных коллайдеров.

A formula is obtained for the luminosity of a collider at the collision of two beams that differ, generally speaking, by their parameters (“asymmetric colliders”). The formula is valid for counter-propagating and merging beams with coincident longitudinal axes. Three special cases of the formula are considered: collision of two identical axially symmetric bunched beams, collision of a bunch with a coasting beam, and collision of two coasting beams. Collision of intersecting beams is briefly considered, and the method for calculating their luminosity is formulated. The synchronization problem is considered for collisions of asymmetric beams. A method is presented for optimizing parameters of a cyclic collider by minimizing betatron frequency shifts caused by the action of the space charge of the beams. Numerical examples of luminosity calculations for several types of asymmetric colliders are given.

PACS: 29.20.-c; 29.27.-a; 29.27.Bd

*E-mail: meshkov@jinr.ru

ВВЕДЕНИЕ

Задача расчета светимости коллайдера известна со времени первых предложений ускорителей на встречных пучках*. Тем не менее до сих пор не предложено достаточно компактной формулы, описывающей светимость коллайдера в общем случае столкновения двух пучков с произвольными параметрами, позволяющей производить аналитические или численные расчеты, не прибегая к методам математического моделирования.

Работа над проектом NICA в Объединенном институте ядерных исследований [1] потребовала использования различных вариантов встречных ионных пучков, в том числе отличающихся сортом частиц во встречных пучках, структурой пучков — например, столкновение сгруппированного пучка с распущенным и т. п. Так появился «асимметричный коллайдер». При этом выяснилось, что формул, удобных для аналитических расчетов светимости таких коллайдеров, нет в литературе, в том числе и в обзорных публикациях. Как правило, приводятся формулы, ставшие классическими, пригодные только для «симметричных» коллайдеров, имеющих одинаковые параметры пучков сталкивающихся частиц, отличающихся, быть может, лишь знаком электрического заряда, т. е. для электрон-позитронных и протон-антипротонных коллайдеров [2, 3]. Нередко приводятся упрощенные формулы [4, 5], не содержащие так называемый «параметр песочных часов» (п. 1.2 ниже).

Попытки получить формулу для достаточно общего случая приводят, как правило, к громоздким выражениям, содержащим многократные интегралы по шести координатам пространства координат-импульсов [6].

Необходимость использования подобной формулы остается, несмотря на высокоразвитые методы численного моделирования динамики частиц в ускорителях заряженных частиц. Такая формула нужна для проведения расчетов на уровне оценок, что необходимо для выбора исходных значений параметров коллайдера.

Разд. 1 данной статьи представляет собой расширенный вариант публикации [7]. Рассматривается случай столкновения двух пучков в коллайдере, параметры которых — вид сталкивающихся частиц и их число в пучке (сгустке), их энергия, а также размеры и форма колец коллайдера и др. — могут быть различны. Подробно обсуждается вариант коллайдера, в котором оси встречных пучков совпадают на участке встречи («соударения лоб в лоб»), так что пучки могут иметь общие линзы финального фокуса, и кратко представлен ва-

*Первая формула для оценки светимости предложена Д. Керстом в докладе 1956 г. (Kerst D. W. Properties of an Intersecting-Beam Accelerating System // Proc. of Intern. Conf. on High Energy Accel., Geneva, 1956. P. 37): число событий в единицу времени для процессов с поперечным сечением A в столкновении двух сгустков с числом частиц N_1 и N_2 и длиной l при скорости частиц v равно $n = 2N_1N_2v l A$.

риант пересекающихся пучков (intersecting storage rings). Исправлены также «неизбежные» опечатки, допущенные в первой работе.

В разд. 2 описан метод оптимизации параметров циклического коллайдера на основе минимизации значений сдвигов бетатронных частот, вызванных действием пространственного заряда пучков. Первая попытка такой публикации (не вполне удачная) сделана автором в работе [8]. В разд. 2 данной работы использован полученный недавно уточненный вариант формулы эффекта встречных пучков (beam-beam effect).

Разд. 3 содержит численные примеры расчета светимости нескольких видов симметричных и асимметричных коллайдеров, включая коллайдер на «равновесных» пучках [9], представляющий интерес в современной ядерной физике.

Полученные результаты применимы как к встречно-встречным (counterpropagating beams), так и к попутно-встречным («сливающимся» — «merging beams») пучкам.

Все формулы светимости и их численные значения приводятся для одной точки встречи коллайдера (Interaction Point — IP).

1. АСИММЕТРИЧНЫЕ ВСТРЕЧНЫЕ ПУЧКИ

1.1. Светимость — общий случай. Распределение плотности частиц сгруппированного пучка, «гауссового» по всем трем измерениям (x, y, s), имеет вид

$$\rho_i(t) = \frac{N_i}{(2\pi)^{3/2} \sigma_{xi}(t) \sigma_{yi}(t) \sigma_{si}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_{xi}^2(t)} + \frac{y^2}{\sigma_{yi}^2(t)} + \frac{s^2}{\sigma_{si}^2} \right) \right\}. \quad (1.1)$$

Здесь N_i — число частиц в сгустке i -го пучка; $i = 1, 2$ — номер пучка; $\sigma_{\alpha i}$ — гауссов параметр сгустка α -степени свободы пучка ($\alpha = x, y, s$). Аналогичная формула распределения плотности в распущенном (coasting) пучке с равномерным распределением плотности по периметру кольца и числом частиц N_i следующая:

$$\rho_i(t) = \frac{N_i}{2\pi \sigma_{xi}(t) \sigma_{yi}(t) C_{\text{ring}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_{xi}^2(t)} + \frac{y^2}{\sigma_{yi}^2(t)} \right) \right\}. \quad (1.2)$$

Для упрощения описания кинематики столкновений (рис. 1) выберем отсчет времени и начало координат так, что при $t = 0$ центры обоих сгустков будут находиться в начале координат ($x = y = s = 0$): $s_1^0(0) = s_2^0(0) = 0$. Это означает, что время столкновения t

$$-\infty < t = \frac{s_1}{v_1} < \infty.$$

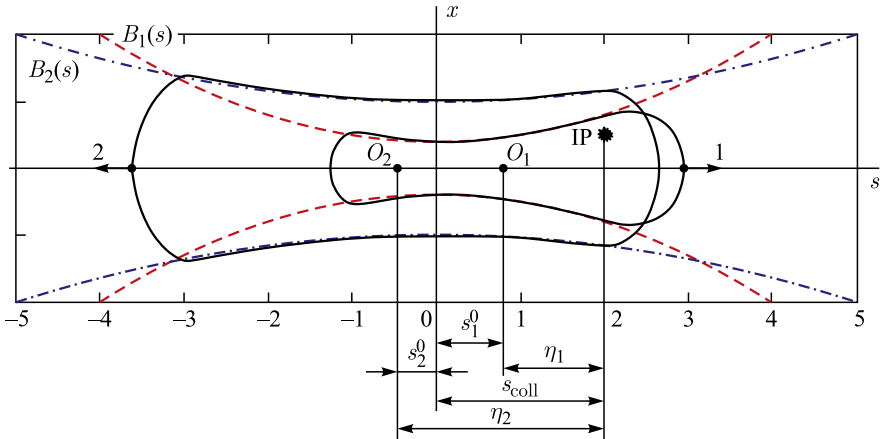


Рис. 1. Схема столкновения двух сгустков в плоскости $y = 0$. $O_{1,2}$ — центры сгустков; $\eta_{1,2}$ — расстояния точки столкновения двух частиц («interaction point») IP от центров сгустков; s_{coll} — то же, от начала координат; $B_{1,2}(s)$ — огибающие (бега-функции) первого и второго пучков

Координаты центров сгустков s_i^0 изменяются со временем как

$$s_i^0(t) = v_i t, \quad x_i^0 = y_i^0 = 0. \quad (1.3)$$

Мы ограничимся случаем так называемых лобовых столкновений, когда оси сгустков совпадают между собой и с осью s (см. рис. 1). Нам потребуются также координаты сталкивающихся частиц η_i , отсчитываемые от центров их сгустков (в лабораторной системе!). Тогда s_i — координата i -й частицы — в лабораторной системе такова (см. рис. 1):

$$s_i(t) = s_i^0(t) + \eta_i. \quad (1.4)$$

Поперечные координаты частицы по-прежнему отсчитываем от оси s в лабораторной системе. Зависимость поперечных размеров сгустков $\sigma_{xi}(t)$, $\sigma_{yi}(t)$ от времени появляется в результате их движения в фокусирующей системе:

$$\sigma_{\alpha i}(t) = \sqrt{\varepsilon_{\alpha i} B_{\alpha i}(s_i(t))}, \quad \alpha = x, y, \quad i = 1, 2, \quad (1.5)$$

где $\varepsilon_{\alpha i} = \text{const}$ — эмиттанс пучка,

$$B_{\alpha i}(s_i(t)) = B_{\alpha i}^* + \frac{s_i^2(t)}{B_{\alpha i}^*} \quad (1.6)$$

— бетатронная (бета-) функция фокусирующей системы; $B_{\alpha i}^*$ — ее минимальное значение, которое достигается, как правило, в *точке встречи* $s = 0$ (IP); $s_i(t)$ — координата частицы в момент времени t .

Мы предполагаем также, что дисперсия на участке встречи пучков равна нулю, что имеет место в большинстве практических случаев.

За время столкновения двух сгустков слой частиц первого сгустка $\rho_1(x, y, \eta_1, t) d\eta_1$ пересекает сгусток 2, сталкиваясь в каждой точке $s(t)$ со слоем $\rho_2(x, y, \eta_2, t) d\eta_2$. Координаты этой точки $s(t)$, $s_i(t)$, $s_i^0(t)$, $\eta_i(t)$ связаны между собой равенствами (см. рис. 1)

$$s(t) = s_1(t) = s_1^0(t) + \eta_1 = s_2(t) = s_2^0(t) + \eta_2. \quad (1.7)$$

Теперь можно записать «очевидное» выражение для *светимости на одну точку встречи*:

$$L = n_{\text{bunch}} f_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-l_D}^{l_D} d\eta_1 \int_{-l_D}^{l_D} d\eta_2 \rho_1(x, y, \eta_1(t)) \rho_2(x, y, \eta_2(t)), \quad (1.8)$$

где $n_{\text{bunch}} = \min\{n_{\text{bunch}1}, n_{\text{bunch}2}\}$ — меньшее из значений числа сгустков в пучках 1 и 2; f_0 — частота обращения частиц пучка с меньшим числом сгустков. Этот выбор значений n_{bunch} и f_0 следует из условия синхронизации столкновений (п. 1.5). Интегралы по продольным координатам η_1, η_2 берутся приближенно в конечных пределах, значения которых $\pm l_D$ определены ниже в пояснении к формуле (1.11).

Из равенств (1.7) с учетом условий (1.3), (1.4) следует соотношение между координатами η_1 и η_2 :

$$\eta_2(t) = \eta_1 + \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) s_1^0(t).$$

Здесь $v_{1,2}$ — алгебраические значения скоростей частиц 1 и 2.

Введя обозначения $s_0(t) \equiv s_1^0(t)$, $\eta \equiv \eta_1$, запишем

$$\eta_2 = \eta + V s_0, \quad V \equiv 1 - \frac{v_2}{v_1}. \quad (1.9)$$

Параметр $V \geq 1$ для встречно-встречных пучков и $V \leq 1$ для попутно-встречных.

Поскольку мы ввели переменную $s_0(t) = v_1 t$ и выразили η_2 через η и s_0 , то интегрирование в (1.8) по времени столкновения можно заменить интегрированием по s_0 (координата центра первого сгустка), а интегрирование по длинам сгустков провести по переменной η . Якобиан замены переменных равен

$$\frac{D(\eta_1, \eta_2)}{D(s_0, \eta)} = V. \quad (1.10)$$

В результате приходим к выражению

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{(2\pi)^3 \sigma_{s1} \sigma_{s2}} V \int_{-l_D}^{l_D} ds_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \psi_y(y) dy \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\eta^2}{\sigma_{s1}^2} + \frac{(\eta + V s_0)^2}{\sigma_{s2}^2} \right) \right], \quad (1.11)$$

где

$$\psi_x(x, s_0, \eta_1) = \frac{1}{\sigma_{x1}(s_0, \eta) \sigma_{x2}(s_0, \eta)} \exp \left[-\left(\frac{1}{\sigma_{x1}^2(s_0, \eta)} + \frac{1}{\sigma_{x2}^2(s_0, \eta)} \right) \frac{x^2}{2} \right], \quad (1.12)$$

$2l_D$ — продольный (s) размер участка, на котором оси обоих пучков совпадают и где расположен детектор. Локальная светимость при $s_0 = \pm l_D$ уменьшается на несколько порядков от максимального значения при $s_0 = 0$ из-за роста бета-функции, что показано в п. 1.5.

Функцию $\psi_y(y, s_0, \eta_1)$ находим заменой индекса и аргумента x на y .

Интеграл от ψ_x по dx дает

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_x(x, s_0, \eta_1) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\sigma_{x1}^2(s_0, \eta) + \sigma_{x2}^2(s_0, \eta)}}. \quad (1.13)$$

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_y(y, s_0, \eta_1) dy$ вычисляется аналогично с заменой x на y .

Используя значения (1.5) для σ_{xi} , запишем

$$\sqrt{\sigma_{x1}^2(s_0, \eta) + \sigma_{x2}^2(s_0, \eta)} = \sqrt{\varepsilon_{x1} B_{x1}(s_0, \eta) + \varepsilon_{x2} B_{x2}(s_0, \eta)}. \quad (1.14)$$

Функции B_{xi} определены в (1.6). Аналогичное выражение для σ_{yi} найдем заменой x на y .

Подставляя значения интеграла (1.13) и знаменателя (1.14), а также их y -аналогов в (1.11), приходим к довольно громоздкому выражению для светимости коллайдера с полностью асимметричными сгустками:

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{(2\pi)^2 \sigma_{s1} \sigma_{s2}} V \int_{-l_D}^{l_D} ds_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\eta^2}{\sigma_{s1}^2} + \left(\frac{\eta + V s_0}{\sigma_{s2}} \right)^2 \right] \right\} \times \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_{x1} B_{x1}(s_0, \eta) + \varepsilon_{x2} B_{x2}(s_0, \eta)) (\varepsilon_{y1} B_{y1}(s_0, \eta) + \varepsilon_{y2} B_{y2}(s_0, \eta))}}. \quad (1.15)$$

Отметим, что это есть *светимость коллайдера на одно место встречи*. Кроме того, бета-функции в точках столкновения частиц имеют разные значения $(B_{x,y})_{1,2}$, если частицы 1 и 2 отличаются хотя бы по одному из параметров — заряду, массе или энергии. Поэтому можно ввести «параметр относительной магнитной жесткости» λ :

$$\lambda = \frac{B_1^*}{B_2^*}. \quad (1.16)$$

Поскольку значения бетатронных функций $B_{1,2}$ пропорциональны магнитной жесткости сталкивающихся частиц (аналогично фокусным расстояниям магнитных линз), можно ожидать, что параметр λ описывается выражением

$$\lambda = \frac{p_1}{Z_1} \frac{Z_2}{p_2}. \quad (1.17)$$

Здесь $Z_{1,2}$ — заряд тока (в единицах заряда электрона); $p_{1,2}$ — импульс частиц пучков 1 и 2. При равных скоростях частиц 1 и 2 выражение (1.17) не зависит от скорости частиц и равно

$$\lambda_0 = \frac{m_1}{m_2} \frac{A_1}{Z_1} \frac{Z_2}{A_2},$$

где $A_{1,2}$ — атомные веса частиц; $m_{1,2}$ — массы нуклонов сталкивающихся частиц 1 и 2 (отличие m_2/m_1 от единицы не превышает $1 \cdot 10^{-3}$ для всех ядер периодической таблицы). Однако значения λ (1.17) и λ_0 приближенные, так как на величину бета-функции на общем участке колец существенно влияют значения параметров фокусирующих систем на индивидуальных участках.

В случае пучков разных частиц параметр $\lambda = 1$ также, если фокусирующие системы двух колец коллайдера не имеют на общем участке (участке взаимодействия частиц) фокусирующих элементов, определяющих значения бета-функций колец коллайдера. Это имеет место, в частности, в *коллайдерах с пересекающимися пучками* (п. 1.6).

Выражение (1.15) существенно упрощается в трех частных случаях, рассмотренных ниже.

1.2. Одинаковые встречные пучки. В рассматриваемом случае одинаковых встречно-встречных пучков имеем

$$\begin{aligned} v_1 = -v_2, \quad V = 2, \quad B_{x1}^* = B_{x2}^* \equiv B_x^*, \quad B_{y1}^* = B_{y2}^* \equiv B_y^*, \\ \sigma_{s1} = \sigma_{s2} \equiv \sigma_s, \quad \varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2} \equiv \varepsilon_x, \quad \varepsilon_{y1} = \varepsilon_{y2} \equiv \varepsilon_y. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из (1.15) с учетом значений $B_{\alpha i}$ (1.6) и η (1.9) получим

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{8\pi^2 \sigma_s^2 \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y B_x^* B_y^*}} \times \text{Int}_1(B_x, B_y, \sigma_s),$$

$$\text{Int}_1 = 2 \int_{-l_D}^{l_D} ds_0 \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{s_0 + \eta}{B_x^*}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{s_0 + \eta}{B_y^*}\right)^2\right]}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{\eta^2 + (\eta + 2s_0)^2}{2\sigma_s^2}\right].$$

Преобразуя числитель показателя экспоненты

$$\eta^2 + (\eta + 2s_0)^2 = 2 \left[(s_0 + \eta)^2 + s_0^2 \right],$$

переходя затем от переменных интегрирования s_0, η к переменным s_0 и $\phi = s_0 + \eta$ и вычислив якобиан перехода $D(s_0, \eta)/D(s_0, \phi) = 1$, находим

$$\text{Int}_1 = 2 \int_{-l_D}^{l_D} e^{-s_0^2/\sigma_s^2} ds_0 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\phi^2/\sigma_s^2}}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{\phi}{B_y^*}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{\phi}{B_x^*}\right)^2\right]}} d\phi.$$

Таким образом, двойной интеграл преобразован в произведение двух интегралов. Первый из них, интеграл по s_0 , при $\sigma_s \ll l_D$ равен $\sigma_s \sqrt{\pi}$. В случае $B_x^* = B_y^* \equiv B^*$ получаем известное выражение светимости коллайдера на аксиально-симметричных пучках (см. [2], формулы (6.134), (6.135)):

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{4\pi \sqrt{\varepsilon_x \varepsilon_y} B^*} \Phi_{\text{HG}}, \quad \Phi_{\text{HG}}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2} du}{1 + (\alpha u)^2}, \quad \alpha = \frac{\sigma_s}{B^*}. \quad (1.19)$$

Здесь $\Phi_{\text{HG}}(\alpha)$ — так называемый параметр песочных часов (hourglass effect), описывающий зависимость светимости от σ_s и B^* .

1.3. Столкновение распущенного пучка со сгруппированным. По-прежнему считаем фокусирующую систему аксиально-симметричной на участке встречи, но теперь пучки содержат частицы разного вида и отличающиеся, вообще говоря, энергией. Поэтому

$$B_{x1}^* = B_{y1}^* \equiv B_1^* \neq B_{x2}^* = B_{y2}^* \equiv B_2^*. \quad (1.20)$$

Формула для светимости, когда один из сталкивающихся пучков (N_2) распущен и имеет равномерную по периметру кольца C_{ring} плотность (1.2), отличается от (1.15) выражением в знаменателе дроби перед интегралом, равным теперь $(2\pi)^{3/2} \sigma_s C_{\text{ring}}$. Здесь $\sigma_s \equiv \sigma_{s1}$ — «гауссова» длина сгруппированного пучка.

Для аксиально-симметричных пучков формула (1.15) принимает вид

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{(2\pi)^{3/2} \sigma_s C_{\text{ring}}} \times \text{Int}_2(B_1, B_2, \sigma_s),$$

$$\begin{aligned} \text{Int}_2 = & V \int_{-l_D}^{l_D} ds_0 \int_{-l_D}^{l_D} d\eta \times \\ & \times \frac{1}{\varepsilon_1 B_1^* \left[1 + \left(\frac{s_0 + \eta}{B_1^*} \right)^2 \right] + \varepsilon_2 B_2^* \left[1 + \left(\frac{s_0 + \eta}{B_2^*} \right)^2 \right]} \exp\left(-\frac{\eta^2}{2\sigma_s^2}\right). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Здесь n_{bunch} и f_0 — число сгустков сгруппированного пучка и частота обращения его частиц. Параметр V , вообще говоря, может отличаться от 2.

Повторим преобразование переменных аналогично сделанному выше:

$$\phi = s_0 + \eta, \quad \psi = \eta.$$

Якобиан перехода $D(s_0, \eta)/D(\phi, \psi) = 1$. В результате интеграл (1.21) разбивается на два независимых:

$$\text{Int}_2 = V \int_{-l_D}^{l_D} \exp\left(-\frac{\psi^2}{2\sigma_s^2}\right) d\psi \int_{-2l_D}^{2l_D} \frac{d\phi}{\varepsilon_1 B_1^* \left[1 + \left(\frac{\phi}{B_1^*} \right)^2 \right] + \varepsilon_2 B_2^* \left[1 + \left(\frac{\phi}{B_2^*} \right)^2 \right]}.$$

Произведя интегрирование, находим

$$\begin{aligned} L = & \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{2\pi C_{\text{ring}}} V \text{erf}\left(\frac{l_D}{\sqrt{2}\sigma_s}\right) \times \\ & \times \sqrt{\frac{B_1^* B_2^*}{(\varepsilon_1 B_1^* + \varepsilon_2 B_2^*)(\varepsilon_1 B_2^* + \varepsilon_2 B_1^*)}} 2 \arctan(\chi_D), \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\chi_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 B_2^* + \varepsilon_2 B_1^*}{\varepsilon_1 B_1^* + \varepsilon_2 B_2^*}} \frac{2l_D}{\sqrt{B_1^* B_2^*}}.$$

При условии

$$\sigma_s, B_{1,2}^* \ll l_D \ll C_{\text{ring}}, \quad \chi_D \gg 1 \quad (1.23)$$

выражение (1.22) принимает более компактный вид:

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{2C_{\text{ring}}} V \sqrt{\frac{B_1^* B_2^*}{(\varepsilon_1 B_1^* + \varepsilon_2 B_2^*)(\varepsilon_1 B_2^* + \varepsilon_2 B_1^*)}}. \quad (1.24)$$

Выражение (1.24) можно упростить, используя параметр λ (1.16):

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{2C_{\text{ring}}} V \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1 + \lambda^2)}}. \quad (1.25)$$

И совсем простое выражение для светимости получается при одинаковых частицах встречных пучков, одинаковых значениях их энергии и эмиттансов пучков: $\lambda = 1$, $V = 2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \equiv \varepsilon$,

$$L = \frac{n_{\text{bunch}} N_1 N_2 f_0}{2C_{\text{ring}} \varepsilon}. \quad (1.26)$$

1.4. Столкновение двух распущенных пучков. При условиях (1.20) и $B_{1,2}^* \ll C_{1,2}$ получим из (1.15) аналогично (1.21) значение светимости:

$$L = \frac{N_1 N_2 f_0}{2C_1 C_2} \times \text{Int}_3,$$

$$\text{Int}_3 = V \int_{-l_D}^{l_D} ds_0 \int_{-l_D}^{l_D} d\eta \frac{1}{\varepsilon_1 B_1^* \left[1 + \left(\frac{s_0 + \eta}{B_1^*} \right)^2 \right] + \varepsilon_2 B_2^* \left[1 + \left(\frac{s_0 + \eta}{B_2^*} \right)^2 \right]}.$$

Здесь N_1 , N_2 — число частиц в пучках 1 и 2; C_1 , C_2 — периметры колец накопителей. Частота столкновений $f_0 = \max \{v_1/C_1, v_2/C_2\}$.

Произведя интегрирование аналогично (1.21)–(1.25), находим

$$L = \frac{N_1 N_2 f_0}{\pi C_1 C_2} V l_D \sqrt{\frac{B_1^* B_2^*}{(\varepsilon_1 B_1^* + \varepsilon_2 B_2^*)(\varepsilon_1 B_2^* + \varepsilon_2 B_1^*)}} 2 \arctan(\chi_D), \quad (1.27)$$

параметр χ_D определен в (1.22). При условии $B_{1,2}^* \ll l_D$, $\chi_D \gg 1$ находим

$$L = \frac{N_1 N_2 f_0}{C_1 C_2} V l_D \sqrt{\frac{\lambda}{(\varepsilon_1 \lambda + \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \lambda)}}. \quad (1.28)$$

Для идентичных колец коллайдера и встречно-встречных пучков $V = 2$, $\lambda = 1$, и формула (1.28) принимает вид

$$L = \frac{N^2 f_0}{C^2 \varepsilon} l_D. \quad (1.29)$$

1.5. Распределение светимости по длине участка встречи. Модуляция бета-функций коллайдера (1.6) вблизи точки встречи неизбежно вызывает изменение светимости по длине участка взаимодействия. Наиболее просто показать это в случае одинаковых встречных пучков (п. 1.2). Действительно, производная светимости по координате s_0 пропорциональна подинтегральной функции в выражении для $\Phi_{\text{HG}}(\alpha)$ в (1.19):

$$\frac{dL}{ds_0} = \left(\frac{dL}{ds_0} \right)_{\max} \frac{e^{-(s_0/\sigma_s)^2}}{1 + (s_0/B^*)^2}.$$

Введя переменную $\chi = s_0/B^*$, получаем функцию распределения светимости, нормированную на максимум:

$$f_L(\chi) = \frac{e^{-(\chi/\alpha)^2}}{1 + \chi^2}, \quad \alpha = \frac{\sigma_s}{B^*}. \quad (1.30)$$

Графики этой функции (рис. 2) показывают, что с ростом σ_s (параметр α) функция распределения светимости уширяется, пока ее ширина не достигнет насыщения ($\chi > 5$).

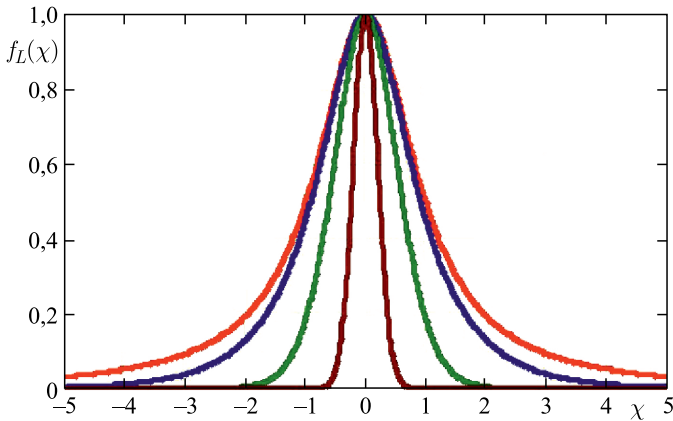


Рис. 2. Функции (1.30) распределения светимости по участку встречи пучков: $\alpha = 10; 3; 1; 0,3$

Это насыщение соответствует столкновению двух распущенных пучков (п. 1.4). Кроме того, результаты, представленные на рис. 2, позволяют выбрать значение

$$l_D = 3B^*. \quad (1.31)$$

1.6. Столкновение пересекающихся пучков. Для увеличения светимости в современных коллайдерах используется многоструктовый режим, что

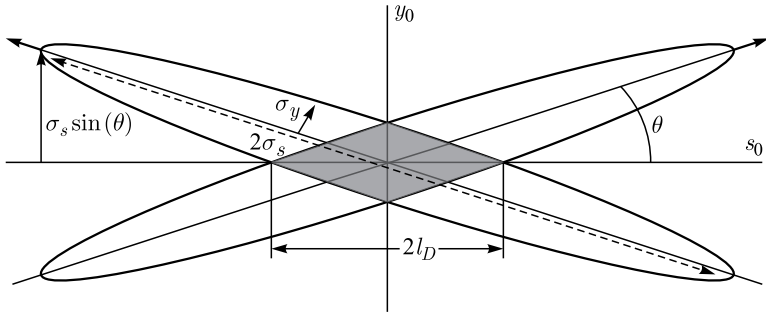


Рис. 3. Схема столкновения пересекающихся пучков для $\phi \gg 1$; овальные границы показывают «1- σ -размеры» сгустков, фоном залита область взаимодействия частиц

обычно подразумевает наличие двух независимых колец во избежание паразитных столкновений на общих участках траекторий и столкновение пучков под углом. Это и называется «пересекающиеся пучки» («intersecting beams»). При этом вне участка взаимодействия пучки разведены достаточно далеко, так что их фокусирующие системы не имеют общих элементов, что допускает независимую регулировку параметров двух сталкивающихся пучков асимметричного коллайдера. Это особенно существенно для электрон-ионного коллайдера (п. 3.3). Продольные оси каждой из фокусирующих систем двух колец задают оси сталкивающихся пучков, при этом локальные значения их бета-функций по-прежнему описываются соотношениями (1.6), но теперь в «собственных» координатах колец $x_{\alpha i}$, оси s_i которых пересекаются в IP под углом 2θ («full crossing angle») (рис. 3). Расположение колец выбрано так, что все три оси s_1 , s_2 , s_0 лежат в одной плоскости. В этой же плоскости лежат оси y_i , а оси x_i совпадают и направлены ортогонально плоскости (s_i , y_i). Такой выбор направлений осей неслучаен: он обеспечивает наиболее быстрое разведение пучков, что нужно, если $\sigma_{xi} \geq \sigma_{yi}$.

Эффективность разведения пучков на участке взаимодействия принято оценивать величиной отношения y -координаты точки на оси сгустка, отстоящей от IP на σ_s , ($\delta y_0 = \sigma_s \sin(\theta)$, см. рис. 3), к проекции поперечного размера сгустка σ_y на ось y_0 ($\Delta y_0 = \sigma_y \cos(\theta)$) — так называемый параметр Пивинского (Piwinski angle):

$$\phi = \frac{\sigma_s}{\sigma_y} \tan \theta. \quad (1.32)$$

Протяженность области взаимодействия (залита фоном на рис. 3) $2l_D$ можно оценить как

$$l_D = \frac{\sigma_x}{\sin \theta}, \quad \sigma_x \ll \sigma_s. \quad (1.33)$$

В общем случае эта величина равна

$$l_\phi = \frac{\sigma_s}{\sqrt{1 + \phi^2}}. \quad (1.34)$$

Отметим, что при $\phi \gg 1$, $\theta \ll 1$ формула (1.34) совпадает с (1.33), а при $\phi \ll 1$ $l_D \approx \sigma_s$.

В коллайдерах, где применяется схема пересекающихся пучков, угол $\theta \ll 1$. Так, в ЛНС угол θ («the half crossing angle») варьируется в зависимости от выбора режима коллайдера и запросов эксперимента от 0,6 мкрад до 0,32 мкрад [10], в КЕКВ этот угол составляет 11 мкрад [11]. Поэтому для оценки светимости коллайдера с пересекающимися пучками можно по-прежнему пользоваться формулами, приведенными выше (пп. 1.1–1.4), заменив σ_y на $\sigma_y \sqrt{1 + \phi^2}$ и используя для значения l_D формулы (1.33), (1.34).

Тем не менее при использовании схемы пересекающихся пучков возникают два других нежелательных эффекта, для компенсации которых применяется так называемая крабовая техника*.

Первый эффект — ненулевой угол столкновения 2θ двух встречных сгустков. Для устранения этого эффекта используется схема «крабового пересечения» («crab crossing») [12]. На траекториях каждого из пучков, до и после прохождения IP, устанавливаются ВЧ-резонаторы, настроенные на моду с поперечным магнитным полем, которое меняет знак за время прохождения сгустка и равно нулю при прохождении центра. В результате «голова» и «хвост» получают удары поля в противоположных направлениях, сгустки поворачиваются вокруг оси x (на рис. 3) и приходят в IP в фазе с направлениями своих осей навстречу друг другу. Резонаторы, установленные за IP, возвращают ориентацию сгустков в исходное положение.

Цель этой операции — подавить синхробетатронные резонансы (точнее, нарушить условие их возбуждения), которые возникают при столкновении сгустков под углом. Резонансы, в том числе и невысокого порядка, появляются из-за корреляции между поперечной координатой частицы в системе встречного пучка (т. е. поперечного удара) и продольной координаты. И устраняются они применением crab crossing.

Второй эффект сложнее. При уменьшении бетатронной функции (с целью повышения светимости) до размера области взаимодействия возбуждаются нелинейные бетатронные резонансы из-за взаимодействия частицы с полем встречного сгустка (см. также «эффект встречи», п. 3.1). Для устранения этого эффекта П. Раймонди был предложен метод, получивший название «крабовые талии» («crab waist») [13–15]. Для этого перед и за IP на обоих кольцах устанавливаются специальные секступольные линзы, так что подавляются бетатронные резонансы, возникающие из-за того же эффекта встречи пучков.

*Метод получил свое название по аналогии с движением сгустка между «крабовыми» резонаторами и краба, который, как известно, движется боком («физики шутят»).

К сожалению, crab crossing и crab waist несовместимы, приходится выбирать один метод из двух — тот, который в конкретном случае дает бóльшую светимость. Крабовая техника — отличное решение для электрон-позитронных коллайдеров, но не всегда подходит для ионных.

Подробное изложение «крабовой техники» выходит за рамки данной статьи (см., например, [16]).

1.7. Синхронизация столкновений. *Асимметричный коллайдер встречных сгруппированных пучков* является наиболее сложным вариантом с точки зрения синхронизации столкновений двух сгустков этих пучков. Столкновения сгруппированных пучков происходят на одном и том же участке, общем для обоих колец, если частоты обращения частиц $f_{1,2}$ и число сгустков в пучках $(n_{\text{bunch}})_{1,2}$ удовлетворяют равенству

$$n_1 n_{\text{bunch}1} f_1 = n_2 n_{\text{bunch}2} f_2, \quad (1.35)$$

где $n_{1,2}$ — целые числа. В оптимальном варианте размеры колец и энергия частиц выбраны так, что $n_1 = n_2 = 1$. При этом частота столкновений

$$f_{\text{coll}} = n_{\text{bunch}1} f_1 = n_{\text{bunch}2} f_2. \quad (1.36)$$

Это и есть параметр $n_{\text{bunch}} f_0$ при столкновении двух сгруппированных пучков (см. (1.8), (1.11), (1.15) и далее). Условие синхронизации (1.35) выполняется только для определенных значений энергии (скоростей v_1, v_2) сталкивающихся частиц:

$$v_2 = v_1 \frac{n_1 n_{\text{bunch}1} C_2}{n_2 n_{\text{bunch}2} C_1}. \quad (1.37)$$

Поскольку параметры $n_{1,2}$ и $n_{\text{bunch}1,2}$ — целые числа, минимальное изменение энергии частиц возможно только скачкообразно, с шагом $\Delta n = 1$. Сканирование с более мелким шагом требует специальных мер по изменению длины орбиты одного из пучков.

Очевидно, что при равных периметрах колец и равных числах $n_1 = n_2$, $n_{\text{bunch}1} = n_{\text{bunch}2}$ скорости частиц следует выбрать равными, и сканирование по скорости (но не по энергии!) допускается с произвольным, но одинаковым шагом. Кроме того, если один из пучков или оба распущенные, такой проблемы не существует. Сказанное особенно существенно для встречных пучков умеренно релятивистских частиц, что имеет место, например, в электрон-ионных коллайдерах [17].

При столкновении распущенного пучка со сгруппированным $f_{\text{coll}} = n_{\text{bunch}} f_0$, где n_{bunch} и f_0 — параметры сгруппированного пучка, а при столкновении двух распущенных пучков

$$f_{\text{coll}} = \max\{f_1, f_2\},$$

где $f_{1,2}$ — частоты обращения частиц первого и второго пучков.

2. ОПТИМИЗАЦИЯ СВЕТИМОСТИ ЦИКЛИЧЕСКОГО КОЛЛАЙДЕРА

2.1. Эффекты пространственного заряда пучков. Проблема устойчивости движения заряженных частиц в циклических ускорителях достаточно хорошо изучена, и разработаны различные методы возможного подавления разрушающего действия неустойчивостей. Среди наиболее сильных и трудно подавляемых неустойчивостей — эффекты пространственного заряда, приводящие к сдвигу частот бетатронных колебаний частиц под действием собственного электромагнитного поля пучка (эффект Ласлетта) и поля встречного пучка в коллайдерах («эффект встречи» — «beam-beam effect»). Метод выбора оптимальных значений параметров пучка, минимизирующий действие этих двух эффектов, рассмотрен в данном разделе.

Эффект Ласлетта. Распределение плотности заряда «гауссова» сгустка частиц с зарядом Ze описывается в лабораторной системе формулой

$$\rho(x, y, s) = Ze\rho(x, y, s). \quad (2.1)$$

Здесь $\rho(x, y, s)$ — распределение плотности частиц сгустка (1.1). В дальнейшем рассматриваем случай длинных сгустков $\sigma_s \gg \sigma_x, \sigma_y$, для которых электрическое поле гауссова сгустка эллиптического сечения с полуосями σ_x, σ_y в области $x \ll \sigma_x, y \ll \sigma_y$ описывается формулой

$$E_{x,y}(s) = \frac{2\rho_0(s)}{\sigma_x + \sigma_y} \times \begin{cases} \frac{x}{\sigma_x}, & x \text{ — компонента,} \\ \frac{y}{\sigma_y}, & y \text{ — компонента,} \end{cases} \quad \rho_0(s) = \frac{ZeN}{\sqrt{2\pi}\sigma_s} e^{-s^2/2\sigma_s^2}. \quad (2.2)$$

Подобная формула получена, строго говоря, для пучков эллиптического сечения и с постоянной плотностью (см., например, [18]). Строгий вывод формулы для пучков с эллиптическим сечением и гауссовым распределением плотности слишком громоздкий и требует использования специальных функций. Поэтому мы ограничились здесь формулировкой результата и указанием на совпадение данной формулы при $\sigma_x = \sigma_y$ с формулой для аксиально-симметричного гауссова пучка, которая рассчитывается аналитически достаточно просто по теореме Гаусса.

Магнитное поле сгустка в лабораторной системе связано с электрическим полем известным соотношением $\mathbf{B} = 1/c [\mathbf{v}, \mathbf{E}]$. Здесь и далее все векторные величины обозначены жирным шрифтом, \mathbf{v} — скорость сгустка, направленная вдоль оси s .

Сила, действующая на частицу сгустка со стороны поля ее сгустка, описывается выражением

$$\mathbf{F} = Ze \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) = Ze (\mathbf{E} - \beta^2 \mathbf{E}_\perp), \quad (2.3)$$

$\beta = \mathbf{v}/c$, c — скорость света. Поперечная компонента силы \mathbf{F} равна

$$\mathbf{F}_\perp = \frac{Ze}{\gamma^2} \mathbf{E}_\perp, \quad \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}. \quad (2.4)$$

Уравнение бетатронных колебаний частицы массы M в фокусирующей системе кольца коллайдера с учетом действия на нее поля сгустка описывается выражением

$$\gamma M \left[\frac{d^2 x}{dt^2} + Q_x^2 \omega_0^2 x \right] = \frac{ZeE_x}{\gamma^2}, \quad (2.5)$$

где Q_x — число бетатронных колебаний по оси x за один оборот частицы в кольце («бетатронное число»), ω_0 — частота обращения. Введем сдвиг частоты бетатронных колебаний $\Delta q_x \omega_0$ под действием x -компоненты силы \mathbf{F}_\perp (2.4) и перепишем уравнение (2.5) в виде

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \left(Q_x^2 \omega_0^2 x - \frac{ZeE_x}{\gamma^3 M} \right).$$

Затем представим правую часть в виде $-(Q_x + \Delta q_x)^2 \omega_0^2 x$. Из равенства двух выражений для правых частей при условии $s \ll \sigma_s$, $\Delta q_x \ll Q_x$ находим

$$\Delta q_x \approx - \frac{ZeE_x}{2Q_x \gamma^3 M \omega_0^2 x} = - \frac{Z^2 N r_p}{\gamma^3 A \langle \sigma_x (\sigma_x + \sigma_y) \rangle} \frac{1}{Q_x \omega_0^2 \sqrt{2\pi} \sigma_s}. \quad (2.6)$$

Здесь мы использовали равенства $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi(C_{\text{ring}}/\beta c)$ и обозначения: N — число частиц в сгустке (пучке); $r_p = e^2/m_p c^2 = 1,535 \cdot 10^{-16}$ см — классический радиус протона; $m_p \approx 938$ МэВ/ c^2 — масса протона (нуклона); A — масса частицы в атомных единицах. Затем мы использовали равенства, в которых $\langle B_x \rangle$ есть среднее по периметру кольца значение x -бетатронной функции, ε_x — x -эмиттансе пучка. Окончательно получаем (см. также [19])*

$$\begin{aligned} \Delta q_x &= - \frac{Z^2 N r_p k_{\text{bunch}} \langle B_x \rangle}{2\pi \beta^2 \gamma^3 A \langle \sigma_x (\sigma_x + \sigma_y) \rangle} = \\ &= \frac{Z^2 N r_p}{2\pi \beta^2 \gamma^3 A} \frac{\sqrt{B_x}}{\sqrt{\varepsilon_x (\sqrt{\varepsilon_x \langle B_x \rangle} + \sqrt{\varepsilon_y \langle B_y \rangle})}} k_{\text{bunch}}, \quad (2.7) \\ k_{\text{bunch}} &\equiv \frac{C_{\text{ring}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_s}. \end{aligned}$$

Δq_y находим заменой $x \leftrightarrow y$.

*Эта формула справедлива для электронов (позитронов) при $A = 1$ и замене r_p на r_e — классический радиус электрона.

При условиях $B_x = B_y$, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon$ приходим к классической формуле Ласлетта [20] для круглых гауссовых пучков:

$$\Delta q = -\frac{Z^2}{A} \frac{r_p N}{4\pi\beta^2\gamma^3\varepsilon} k_{\text{bunch}}. \quad (2.8)$$

Для *распущенных пучков* в формулах (2.7), (2.8) достаточно положить $k_{\text{bunch}} = 1$, в чем можно убедиться, повторив выкладки (2.3)–(2.8) для $\rho(x, y, s)$ (1.2) при $x \ll \sigma_x$, $y \ll \sigma_y$.

Эффект встречи. Частица 1, пересекая встречный сгусток частиц 2, летящий ей навстречу, получает под действием электромагнитного поля сгустка приращение импульса

$$\Delta \mathbf{p}_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{12}(t) dt,$$

где (см. (2.3))

$$\mathbf{F}_{12} = Z_1 e \left(\mathbf{E}_2 + \frac{1}{c^2} [\mathbf{v}_2 [\mathbf{v}_2, \mathbf{E}_2]] \right) = Z_1 e (\mathbf{E}_2 - (\beta_1, \beta_2) \mathbf{E}_{\perp 2}).$$

Здесь векторы $\beta_{1,2} = \mathbf{v}_{1,2}/c$; \mathbf{E}_2 — вектор электрического поля сгустка 2 в лабораторной системе в точке нахождения частицы 1; $\mathbf{E}_{\perp 2}$ — его компонента, поперечная оси s .

Зависимость поперечных координат частицы 1 в лабораторной системе $x_{\alpha 1}(t)$ от времени находим, используя инвариант $(x_{\alpha 1}(t))^2/B_{\alpha 1}(s(t))$ (см. рис. 1 и формулу (1.6)):

$$x_{\alpha 1}(s(t)) = x_{\alpha 1}(0) \sqrt{1 + \left(\frac{s(t)}{B_{\alpha 1}^*} \right)^2}. \quad (2.9)$$

Продольная координата $s(t)$ определена в (1.7), $B_{\alpha 1}^* = B_{\alpha 1}(0)$ (1.6). Координаты частицы 1 относительно центра сгустка 2 находим, воспользовавшись рис. 1 и равенствами (1.7) и (1.9):

$$x_{\alpha 2}(t) = x_{\alpha 1}(t), \quad \eta_2(\eta, s_0) = \eta + V s_0. \quad (2.10)$$

Приращение импульса частицы в плоскости (x, s) определяются x -компонентой силы \mathbf{F}_{12} :

$$F_{x12} = Z_1 e (1 - (\beta_1, \beta_2)) E_{x2}(t). \quad (2.11)$$

Компоненту E_{x2} поля сгустка 2 в точке $(x_1, 0, s(t))$ находим из (2.2):

$$E_{x2}(t) = \frac{2Z_2 e N_2}{\sigma_{x2}(t) (\sigma_{x2}(t) + \sigma_{y2}(t)) \sqrt{2\pi} \sigma_{s2}} \exp\left(\frac{-\eta_2^2(t)}{2\sigma_{s2}^2}\right) x_1(t). \quad (2.12)$$

Поперечные « σ -размеры» сгустка 2 на координате $s(t)$ — $\sigma_{x2}(t)$ и $\sigma_{y2}(t)$ — определены в (1.5), (1.6) для значений бета-функций $B_{\alpha 2}(s)$ частиц сгустка 2 в точке $(x_1(t), 0, s(t))$ — координате частицы 1 (2.9) в той же точке. Отметим, что в точке $s(t)$ частицы 2 и 1 находятся в момент времени

$$t(s, \eta) = \frac{s - \eta}{v_1}.$$

Это равенство позволяет преобразовать зависимость параметров от времени к зависимости от s .

За одно столкновение частица 1 получает поперечный импульс (усредненный по многим оборотам (!))

$$\Delta p_{x12}(\eta) = \int_{-t_1}^{t_2} F_{x12}(s(t)) dt = \frac{4Z_1 Z_2 e^2 N_2}{\sigma_{s2}} \frac{1 - (\beta_1, \beta_2)}{\beta_1 c} \Phi(\eta),$$

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l_D}^{l_D} \frac{x_1(s)}{\sigma_{x2}(s)(\sigma_{x2}(s) + \sigma_{y2}(s))} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\eta_2(\eta, s)}{\sigma_{s2}} \right)^2 \right] ds. \quad (2.13)$$

Координата $x_1(s)$ определена в (2.9), параметры $\sigma_{\alpha 2}(s)$ — в (1.5), (1.6).

При многократном пересечении частицей 1 встречного сгустка 2 возникает сдвиг частоты бетатронных колебаний ξ_{12} (принятое обозначение). Это и есть «*параметр эффекта встречи*», или «*beat-beam (BB) tune shift*».

Величину ξ_{12} можно найти в *приближении тонкой линзы*, вычислив матрицу перехода для оборота частицы в кольце коллайдера с учетом возмущения движения частицы электромагнитным полем встречного сгустка 2 (см. приложение). Зная приращение поперечной компоненты импульса частицы Δp_{x12} (2.13) и пренебрегая изменением координаты x_1 за один пролет сквозь сгусток 2, можно заменить сгусток 2 тонкой линзой с фокусным расстоянием f_{BB} :

$$\frac{1}{f_{\text{BB}}} = \frac{1}{x_1(0)} \frac{\Delta p_{x12}}{p_1}, \quad x_1(0) = \sqrt{\varepsilon_{x1} B_{x1}^*}. \quad (2.14)$$

Здесь B_{x1}^* — значение бетатронной функции в точке встречи в отсутствие «возмущающей» тонкой линзы. Сдвиг фазы бетатронных колебаний при каждом пересечении составляет (формула (П. 3) в приложении)

$$\Delta \varphi = \frac{B_{x1}^*}{2f_{\text{BB}}}. \quad (2.15)$$

Этому сдвигу фазы бетатронных колебаний соответствует сдвиг их частоты

$$\xi_{x12} = \frac{\Delta \varphi}{2\pi} = \frac{B_{x1}^*}{4\pi} \frac{1}{x_1(0)} \frac{\Delta p_{x12}}{p_1}.$$

Подставляя сюда значение f_{BB} (2.14) и Δp_{x12} (2.13), находим

$$\xi_{x12}(\eta) = \frac{Z_1 Z_2 r_p N_2}{A_1 2\pi \varepsilon_{x2}} \frac{1 - (\beta_1, \beta_2)}{\beta_1^2 \gamma_1} \frac{B_{x1}^*}{B_{x2}^*} \Phi_{x12}(\eta), \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{x12}(\eta) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l_D}^{l_D} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{B_{x1}^*}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{s}{B_{x2}^*}\right)^2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{s}{B_{x2}^*}\right)^2} + \sqrt{\frac{\varepsilon_{y2} B_{y2}^*}{\varepsilon_{x2} B_{x2}^*}} \sqrt{1 + \left(\frac{s}{B_{y2}^*}\right)^2} \right)} \times \\ &\quad \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\eta_2(\eta, s)}{\sigma_{s2}} \right)^2 \right] \frac{ds}{\sigma_{s2}}. \end{aligned}$$

Подчеркнем, что формула (2.16) дает абсолютное значение BB -параметра. О выборе его знака сказано ниже, в начале п. 2.2.

Параметр $\Phi_{x12}(\eta)$, в отличие от $\Phi(\eta)$ (2.13), приведен здесь к безразмерному виду. Кроме того, он записан через эмиттансы и бета-функции пучков, что удобно при численных расчетах. Этот параметр является аналогом известного «параметра песочных часов» (1.19) в формулах светимости. Параметры эффекта встречи для y -степени свободы ξ_{y12} и Φ_{y12} получим из (2.16) заменой $x \rightleftharpoons y$. Для оценки эффекта встречи достаточно рассмотреть случай $\eta \ll \sigma_s$. В этом случае параметр Φ_{x12} не зависит от η и становится константой. Здесь, как и в формулах светимости в разд. 1, следует принять $l_D = 3B^*$ (1.31) для соосных пучков и (1.33), (1.34) для пересекающихся.

Отметим, что формула (2.16) отличается от встречающихся в литературе: в них отсутствует параметр Φ_{x12} (по крайней мере, автору не удалось обнаружить формулы, содержащие этот параметр) (см., например, [21]).

В случае *одинаковых встречно-встречных аксиально-симметричных пучков* с частицами равных скоростей и равных эмиттансов в аксиально-симметричной фокусирующей системе коллайдера

$$\begin{aligned} Z_1 = Z_2 = Z, \quad A_1 = A_2 = A, \quad v_1 = -v_2, \quad \beta_1 = -\beta_2 \equiv \beta, \quad V = 2, \\ \varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2} = \varepsilon_{y1} \equiv \varepsilon, \quad \sigma_{s1} = \sigma_{s2} \equiv \sigma_s, \\ B_{x1}^* = B_{y1}^* = B_{x2}^* = B_{y2}^* \equiv B^*, \end{aligned} \quad (2.17)$$

выражения (2.15), (2.16) значительно упрощаются: параметры ξ для обоих пучков совпадают и равны

$$\xi_x(\eta) = \xi_y(\eta) = \frac{Z^2 r_p N_2}{A 4\pi\varepsilon} \frac{1 + \beta^2}{\beta^2 \gamma} \lambda_0 \Phi_x(\eta),$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_{x,y12}(\eta = 0) &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l_D/B^*}^{l_D/B^*} \frac{1}{\sqrt{1+\chi^2}} e^{-2(\chi/\alpha)^2} d\chi = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l_D/\sigma_s}^{l_D/\sigma_s} \frac{1}{\sqrt{1+(\alpha u)^2}} e^{-2u^2} du, \quad (2.18) \\
 \alpha &= \frac{\sigma_s}{B^*}, \quad \chi = \frac{s_0}{B^*}, \quad u = \frac{s_0}{\sigma_s}.
 \end{aligned}$$

При $\sigma_s \rightarrow 0$ имеем $\alpha \rightarrow 0$ и, соответственно, получаем

$$\Phi_{x,y12}(\eta = 0) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2u^2} du = 1.$$

С ростом эмиттанса функция $\Phi_{x,y12}$ монотонно убывает и равна 0,913 при $\alpha = 1$ и 0,554 при $\alpha = 5$.

Эффект встречи частицы с распущенным пучком описывается выражениями (2.16), (2.18), в которых длина сгустка σ_s принята равной периметру кольца C_{ring} (см. п. 3.2).

Отметим, что бетатронные сдвиги Δq и ξ зависят от энергии частиц через лоренц-факторы β и γ .

2.2. Оптимизация светимости коллайдера. В ионных коллайдерах оба сдвига бетатронных частот, Δq и ξ , имеют отрицательное значение. Этот факт имеет простой физический смысл: частицы обоих встречных сгустков имеют положительный заряд (за исключением «экзотического» случая отрицательно заряженных ионов одного из пучков). Поэтому сила пространственного заряда как собственного сгустка, так и встречного отталкивающая, направлена наружу от их оси. Этим и определяется отрицательный знак сдвига частот (см. формулы (2.5), (2.6)). Иначе обстоит дело в электрон-ионных, электрон-позитронных и протон-антипротонных коллайдерах. Там сила встречного пучка притягивающая, и параметр ξ имеет положительное значение. Тем не менее оба эффекта работают независимо, и картина развития неустойчивости пучка при приближении бетатронной частоты к резонансному значению достаточно сложная. Поэтому для простых оценок в качестве критерия устойчивости бетатронных колебаний можно выбрать требование, чтобы сумма модулей сдвигов бетатронных чисел не превышала максимального значения:

$$|\Delta q| + |\xi| \leq \Delta Q_{\text{max}}.$$

В дальнейшем мы будем использовать, для краткости изложения, обозначения $\Delta q \equiv |\Delta q|$, $\xi \equiv |\xi|$.

Из практики известно, что интенсивный пучок устойчив (при прочих выполненных условиях), если

$$\Delta Q \leq 0,05. \quad (2.19)$$

Это *первый критерий оптимизации*. При выборе оптимальных значений параметров пучков коллайдера достаточно обеспечить выполнение этого условия для наибольшей из двух пар параметров $\Delta q_x, \xi_x$ и $\Delta q_y, \xi_y$. Будем считать, что наибольшие значения имеют x -параметры (случай $\sigma_x \ll \sigma_y$), поэтому дальше рассматриваем задачу оптимизации именно этих параметров.

Представим параметры первого пучка Δq_1 (2.7) и ξ_{12} (2.15), (2.16) в виде

$$\begin{aligned} \Delta q_{x1} &= \frac{Z_1^2}{A_1} N_1 a_{x1}, \quad \xi_{x12} = \frac{Z_1 Z_2}{A_1} N_2 b_{x1}, \\ a_{x1} &= \frac{r_p}{\pi \beta_1^2 \gamma_1^3} \frac{\sqrt{\langle B_{x1} \rangle} k_{\text{bunch1}}}{\sqrt{\varepsilon_{x1}} \left(\sqrt{\varepsilon_{x1} \langle B_{x1} \rangle} + \sqrt{\varepsilon_{y1} \langle B_{y1} \rangle} \right)}, \\ b_{x1} &= \frac{r_p}{2\pi \varepsilon_{x2}} \frac{1 - (\beta_1, \beta_2) \frac{B_{x1}^*}{B_{x2}^*}}{\beta_1^2 \gamma_1} \Phi_{x12}(\eta) \end{aligned} \quad (2.20)$$

и, аналогично, параметры второго пучка Δq_2 и ξ_{21} , заменив $1 \leftrightarrow 2$. Затем запишем два уравнения

$$\begin{aligned} \Delta q_{x1} + \xi_{x12} &= \Delta Q_{x1}, \\ \Delta q_{x2} + \xi_{x21} &= \Delta Q_{x2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Теперь можно, казалось бы, потребовав выполнения условия (2.19) для обоих пучков ($\Delta Q_{1,2} \leq 0,05$) и записав параметры Δq и ξ в виде (2.20), получить систему двух алгебраических уравнений относительно неизвестных N_1 и N_2 :

$$\begin{aligned} \frac{Z_1^2}{A_1} a_{x1} N_1 + \frac{Z_1 Z_2}{A_1} b_{x1} N_2 &= \Delta Q_{x1}, \\ \frac{Z_2^2}{A_2} a_{x2} N_2 + \frac{Z_1 Z_2}{A_2} b_{x2} N_1 &= \Delta Q_{x2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Отметим, что эти уравнения связаны между собой через параметры эффекта встречи — ξ_{x12} и ξ_{x21} . Однако при попытке решить «в лоб» эту систему уравнений выясняется, что при определенных значениях энергии детерминант системы обращается в нуль, что означает отсутствие решения. Поэтому оптимизацию параметров пучков приходится производить, исходя из физических и очевидных математических соображений.

Примем, что оба кольца коллайдера и встречные пучки 1 и 2 «настроены» так, что их ласлетговские сдвиги равны (*второе условие оптимизации*):

$$\Delta q_{x1} = \Delta q_{x2} \equiv \Delta q_x. \quad (2.23)$$

Тогда число частиц в ступках этих пучков удовлетворяет соотношению (см. (2.20))

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{A_1}{Z_1^2} \frac{Z_2^2}{A_2} \frac{a_{x2}}{a_{x1}}. \quad (2.24)$$

Подставив N_1/N_2 (2.24) в отношение параметров $\Delta q/\xi$, найдем

$$\frac{\Delta q_x}{\xi_{x12}} = \lambda_0 \frac{a_{x2}}{b_{x1}}, \quad \frac{\Delta q_x}{\xi_{x21}} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{a_{x1}}{b_{x2}}. \quad (2.25)$$

Эти соотношения позволяют исключить из уравнений (2.21) параметры ξ_{x12} , ξ_{x21} , и система уравнений (2.22) содержит только три неизвестных — Δq_x , ΔQ_{x1} и ΔQ_{x2} :

$$\begin{aligned} \Delta q_x \left(1 + \frac{b_{x1}}{\lambda_0 a_{x2}} \right) &= \Delta Q_{x1}, \\ \Delta q_x \left(1 + \frac{\lambda_0 b_{x2}}{a_{x1}} \right) &= \Delta Q_{x2}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Отсюда следует также, что сдвиги ΔQ_{x1} и ΔQ_{x2} не являются независимыми параметрами. Выбрав, например, значение ΔQ_{x1} , мы однозначно определяем значения Δq_x и ΔQ_{x2} :

$$\Delta q_x = \frac{\lambda_0 a_{x2}}{\lambda_0 a_{x2} + b_{x1}} \Delta Q_{x1}, \quad \Delta Q_{x2} = \frac{a_{x1} + \lambda_0 b_{x2}}{\lambda_0 a_{x2} + b_{x1}} \frac{\lambda_0 a_{x2}}{a_{x1}} \Delta Q_{x1}. \quad (2.27)$$

Затем из (2.25) находим ξ_{x12} , ξ_{x21} и из (2.20) значения N_1 , N_2 . Таким образом, определены все параметры, необходимые для вычисления светимости.

Вообще говоря, первый критерий может нарушаться, так что функция $\Delta Q_{x2}(E_{\text{ion}})$ превысит выбранное предельное значение (например, 0,05). В этом случае приходится снижать значение ΔQ_{x1} , пока ΔQ_{x2} не опустится ниже 0,05.

Представленный способ оптимизации параметров коллайдера налагает ограничения на интенсивность встречных пучков и тем самым на светимость коллайдера. Но это не значит, что нет способа повысить светимость. Действительно, вся оптимизация выше была проведена для выбранных значений параметров фокусирующей системы (B^*), эмиттансов пучков (ε) и продольных размеров их ступков (σ_s) для сгруппированных пучков. Фактически три набора этих параметров остаются свободными. Их выбор определяет величину светимости после проведения оптимизации. И для них существуют свои ограничения.

Начнем с эмиттанса. Как следует из общей формулы для светимости (1.15) и ее частных случаев, светимость пропорциональна произведению числа частиц во встречных пучках (или их ступках) N_1 , N_2 и обратно пропорциональна эмиттансам пучков. В свою очередь, максимальное число частиц,

как следует из (2.20), прямо пропорционально эмиттансу. В результате светимость также прямо пропорциональна эмиттансу:

$$L \propto \frac{N_1 N_2}{\varepsilon} \propto \varepsilon. \quad (2.28)$$

Таким образом, светимость можно повысить, увеличивая эмиттансы обоих встречных пучков и, соответственно, число частиц в них (!). Но здесь рано или поздно наступает ограничение интенсивности в инжекционной системе коллайдерного комплекса.

Влияние двух других параметров не столь очевидно. Светимость (1.15) обратно пропорциональна значению бета-функции в точке встречи B^* и зависит от отношения $\alpha = \sigma_s / B^*$ — так называемого эффекта песочных часов. Особенно ясно этот эффект проявляется в случае двух одинаковых сгруппированных пучков (1.19). Функция $\Phi_{\text{HG}}(\alpha)$ монотонно спадает от 1 при $\alpha = 0$ до 0,287 при $\alpha = 5$, и, как отсюда следует, продольное сжатие сгустка при постоянном числе частиц в пучках (сгустках) не дает значительного увеличения светимости при $\sigma_s < B^*$. Так, $\Phi_{\text{HG}}(1) = 0,7578$.

В то же время максимальное число частиц в сгруппированных пучках прямо пропорционально длине сгустка ($1/k_{\text{bunch}}$). Следовательно, зависимость светимости от продольного размера сгустка аналогична ее зависимости от эмиттанса: увеличивая длину сгустка, можно пропорционально его длине σ_s повысить светимость, увеличивая одновременно число частиц в сгустке. Однако при этом, кроме «технических» ограничений интенсивности, появляется ограничение длины сгустка требованием локализации участка столкновения пучков (см. п. 1.5 и рис. 2). Фактически приходится выбирать между величиной светимости и *акцептансом детектора*.

Примеры применения представленного метода оптимизации параметров коллайдера приведены в разд. 3.

3. ПРИМЕРЫ ОПТИМИЗАЦИИ СВЕТИМОСТИ ЦИКЛИЧЕСКИХ КОЛЛАЙДЕРОВ

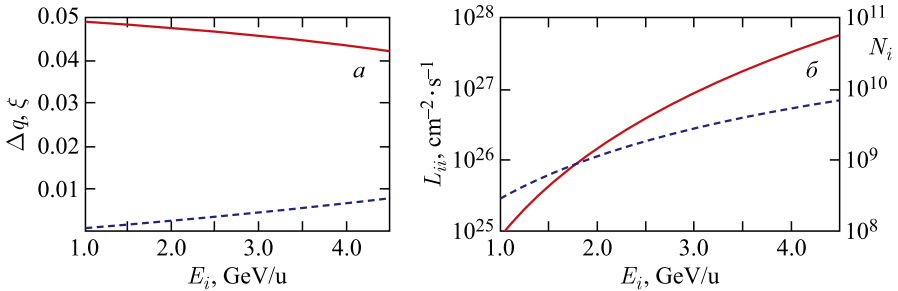
В этом разделе приведены четыре примера выбора оптимальных значений параметров для различных вариантов циклических ионных коллайдеров, включая электрон-ионный коллайдер и коллайдер на «сливающихся» пучках.

Параметры коллайдера и его пучков формулируются в каждом из примеров.

3.1. Ионный коллайдер NICA — симметричная мода. Симметричная мода ионной фазы коллайдера NICA предполагает столкновение в одной IP двух сгустков ядер $^{197}\text{Au}^{79+}$ (табл. 1).

Таблица 1. Параметры коллайдера NICA при столкновении ядер золота (симметричная мода)

Параметр	Кольца 1 и 2
Периметры колец, м	503,04
Ионы	$^{197}\text{Au}^{79+}$
Энергия ионов, ГэВ/нуклон	1,0–4,5
Минимум бета-функции в IP B^* , см	60
Эмиттанс сгустка ионов, $\pi \cdot \text{мм} \cdot \text{мрад}$	1,1
Длина сгустка σ_s , см	60
Бетатронная частота Q_x	9,44


 Рис. 4. Зависимость от энергии ионов E_i параметров ионного коллайдера на сгруппированных пучках $^{197}\text{Au}^{79+}$; $\Delta Q = 0,05$: а) параметры Ласлетта Δq (сплошная кривая) и эффекта встречи ξ (штриховая); б) светимость коллайдера L_{ii} (сплошная кривая) и число частиц в сгустке N_i (штриховая)

В этом контексте параметр λ равен единице ввиду симметрии как пучков, так и фокусирующей системы.

Как показывают результаты расчетов (рис. 4, а), эффектом, определяющим значение интенсивности пучков и, соответственно, светимости, является эффект Ласлетта (Δq (2.7), (2.8)). Влияние эффекта встречи (ξ (2.16), (2.18)) становится заметным при энергии выше 3 ГэВ/нуклон. Сумма сдвигов бетатронных частот Δq и ξ остается постоянной и равной $\Delta Q_1 = \Delta Q_2 = 0,05$. Параметр Φ_{x12} (2.16) здесь равен 0,457.

Максимальная светимость, рассчитанная по формуле (1.19) (рис. 4, б), при энергии 4,5 ГэВ/нуклон достигает значения $5,7 \cdot 10^{27} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$. Но для этого требуется довольно высокая интенсивность пучка: в каждом сгустке нужно иметь по $6,9 \cdot 10^9$ ионов.

При повышении энергии сталкивающихся частиц эффекты пространственного заряда меняются ролями — параметр эффекта встречи превышает параметр Ласлетта. Это видно на примере встречных протонных пучков, ко-

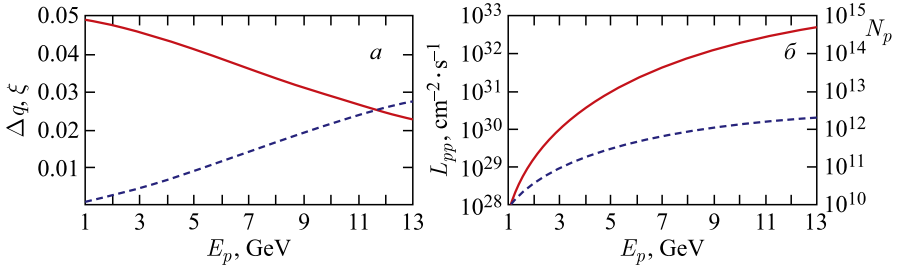


Рис. 5. Зависимость от энергии протонов E_p параметров протон-протонного коллайдера; $\Delta Q = 0,05$: а) параметры Ласлетта Δq (сплошная кривая) и эффекта встречи ξ (штриховая); б) светимость коллайдера L_{pp} (сплошная кривая) и число частиц в сгустке N_p (штриховая)

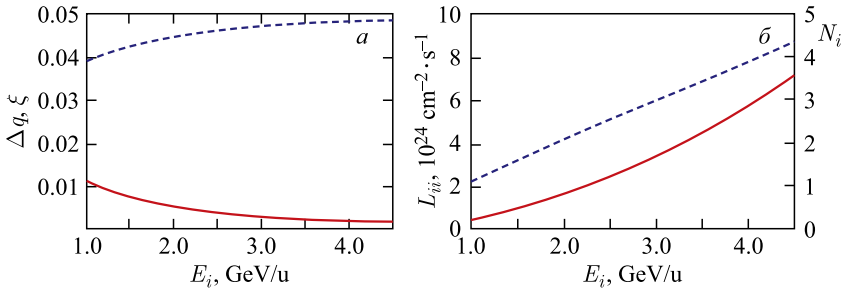


Рис. 6. Зависимость от энергии ионов E_i параметров ион-ионного коллайдера на распущенных пучках $^{197}\text{Au}^{79+}$; эмиттансы пучков $11 \pi \cdot \text{мм} \cdot \text{мрад}$; а) параметры Ласлетта Δq (сплошная кривая) и эффекта встречи ξ (штриховая); б) светимость коллайдера L_{ii} (сплошная кривая) и число частиц в пучке N_i (штриховая)

торые планируются в проекте NICA [1] с поляризованными протонами и дейтронами (рис. 5).

Симметричная мода двух идентичных *распущенных пучков* (рис. 6) убедительно показывает, как влияет отсутствие их группировки на светимость: ее величина (формула (1.29)) уменьшается на несколько порядков. Это почти очевидный результат. Менее очевидно, что главным ограничением в данном случае является эффект встречи (рис. 6, а).

Светимость рассчитана по формулам (1.28), (1.29). Эмиттанс распущенных пучков здесь был увеличен до $11 \pi \cdot \text{мм} \cdot \text{мрад}$, что, в соответствии с (2.28), привело к пропорциональному, в 10 раз, увеличению светимости.

По сравнению с предыдущим случаем сгруппированных ионных пучков $^{197}\text{Au}^{79+}$ (см. рис. 4) параметры эффекта встречи и эффекта Ласлетта поменялись местами — теперь интенсивность пучков ограничивает эффект встречи.

3.2. Коллайдер NICA — асимметричная мода. В качестве примера асимметричного коллайдера рассмотрим коллайдер NICA на *встречных протонных и дейтронных пучках*. Такая задача появляется при изучении физики спина нуклона, когда можно различить протон-протонные и протон-нейтронные соударения. При этом интерес представляют оба случая — покоящегося центра масс (ц. м.) двух сталкивающихся нуклонов (pp или pn) и ц. м. системы протон-дейтрон. В первом случае скорости протонов и дейтронов равны по величине, во втором скорость дейтрона меньше скорости протона:

$$\beta_N = \frac{\beta_p}{\sqrt{A_\mu^2 + \beta_p^2 (1 - A_\mu^2)}}. \quad (3.1)$$

Здесь β_N и β_p — скорости ядра (дейтрона) и протона в единицах скорости света, $A_\mu = \mu A_N$, μ равно отношению массы нуклона ядра к массе протона, A_N — атомный вес ядра. Такой режим представляет интерес для изучения тензорной поляризации, возможной при pd -столкновениях. Для расчета режимов таких столкновений нужно в соответствующие формулы светимости вставить

$$V = 1 + \frac{\beta_p}{\beta_N},$$

а в (2.16), (2.18) вместо $1 + \beta^2$ записать $1 + \beta_N \beta_p$. Кроме того, в этой моде столкновений протон-ядро из-за разности скоростей протонов и дейтронов синхронизация оптимальна, если один из пучков распушен.

Результаты расчетов для коллайдера NICA со сгруппированными дейтронным и протонным пучками для *протон-нуклонных соударений* (т. е. в системе

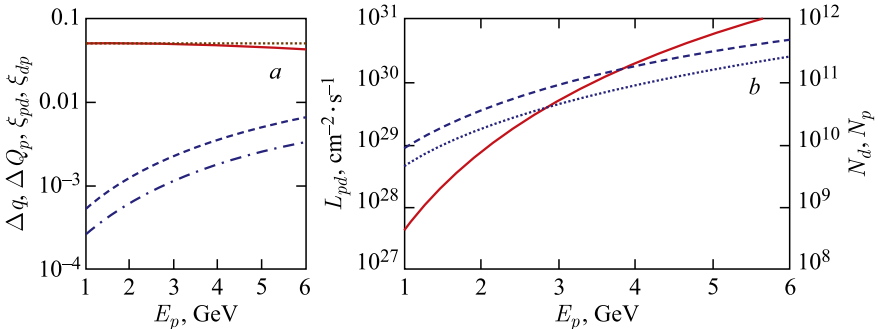


Рис. 7. Зависимость от энергии протонов E_p параметров ионного коллайдера со сгруппированными дейтронным и протонным пучками; эмиттансы пучков $1,1 \pi \cdot \text{мм} \cdot \text{мрад}$, $B^* = 3 \text{ м}$: а) параметры Ласлетта Δq (сплошная кривая), суммарный сдвиг бета-тронного числа для протонов ΔQ_p (пунктирная) и эффекта встречи для протонов на дейтронном сгустке ξ_{pd} (штриховая) и дейтронов на протонном ξ_{dp} (штрихпунктирная); б) светимость коллайдера L_{pd} (сплошная кривая) и число частиц в сгустках дейтронов N_d (штриховая) и протонов N_p (пунктирная)

центра масс протона и нуклона ядра) приведены ниже (рис. 7). Светимость в протон-нуклонных соударениях вычислена здесь по формуле (1.19). Пучки имеют равные эмиттансы $1,1 \pi \cdot \text{мм} \cdot \text{мрад}$. Энергия частиц в коллайдере составляет 1–6 ГэВ/нуклон, $\sqrt{s_{NN}} = 3,87\text{--}13,87$ ГэВ. Значения остальных параметров те же, что и в табл. 1. Параметр λ принят равным 1, так как в коллайдере NICA предполагается применение оригинальной схемы сведения пучков, где магниты сведения установлены ближе к точке встречи, чем линзы финального фокуса, что позволяет их регулировать независимо. В этом примере основным ограничением интенсивности пучков и, соответственно, светимости также является эффект Ласлетта для обоих пучков.

3.3. Электрон-ионный коллайдер с равновесным ионным пучком. Одним из важных применений в ядерной физике при исследовании редких и радиоактивных изотопов может стать электрон-ионный коллайдер с распущенными ионными и сгруппированными электронными пучками. Как можно ожидать, такой коллайдер будет давать очень низкую интенсивность ионного пучка. Решить проблему его светимости предлагалось, применяя так называемый кристаллический, или упорядоченный, ионный пучок.

Идея такого пучка была предложена в 1985 г. В. В. Пархомчуком после успешных экспериментов по подавлению шума протонного пучка и его сжатия в накопителе с электронным охлаждением НАП-М в Институте ядерной физики СО АН СССР. В 1990-х гг. в нескольких лабораториях мира эксперименты были повторены и процесс сжатия пучка детально исследован. Вскоре появились и первые предложения коллайдеров на кристаллических пучках [22, 23]. Однако дальнейший анализ показал, что интенсивность кристаллических пучков очень невелика и светимость такого коллайдера будет очень низкой (см. детали в [9]). В нескольких независимых экспериментах обнаружено, что кристаллический («упорядоченный») пучок, представляющий собой цепочку ионов, циркулирующих в кольцевом накопителе, имеет линейную плотность, не превышающую

$$\left(\frac{dN_{\text{ион}}}{ds} \right) \leq 3 \cdot 10^5 \text{ ионов/м.} \quad (3.2)$$

Главными достоинствами упорядоченных пучков являются их чрезвычайно малые эмиттансы и разброс частиц по импульсу:

$$\varepsilon \sim 0,1\text{--}1,8 \text{ нм}, \quad \Delta p/p \sim (1\text{--}5) \cdot 10^{-6} (1\sigma).$$

Переход пучка в упорядоченное состояние происходит скачком при уменьшении плотности пучка до *критического значения около 90 ионов/м*. При этом поперечный размер пучка и разброс по импульсу уменьшаются почти на порядок. Это своего рода фазовый переход из квазиупорядоченного состояния в упорядоченное (рис. 8).

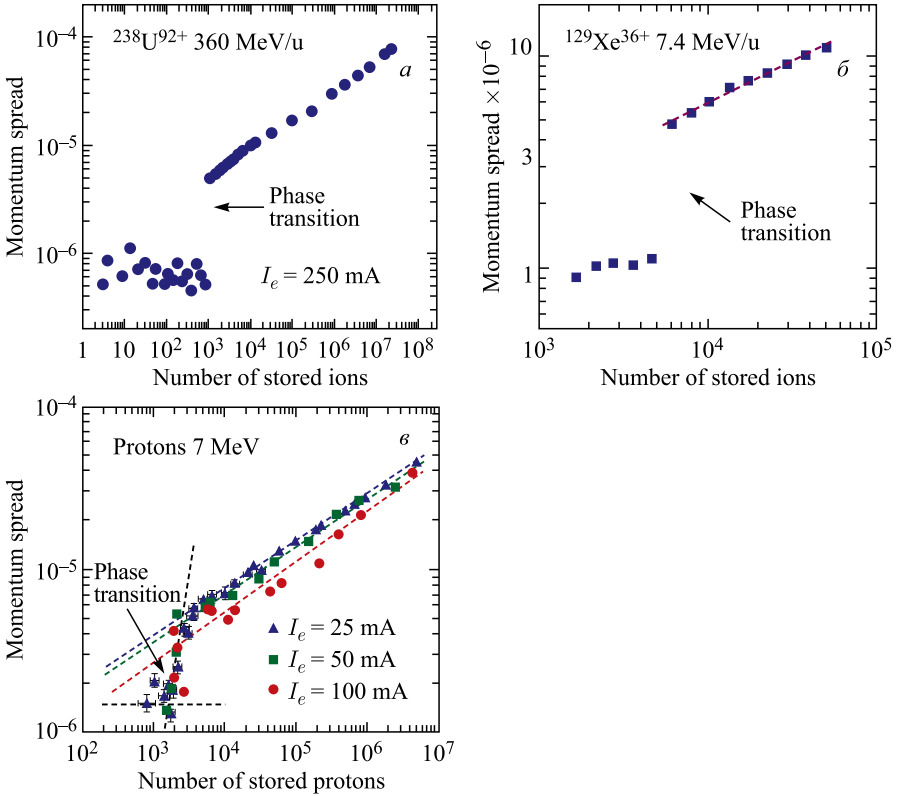


Рис. 8. Зависимость разброса по импульсу (1σ) от числа частиц пучка в накопителях с электронным охлаждением: а) $^{238}\text{U}^{92+}$ в ESR [24]; б) $^{129}\text{Xe}^{36+}$ в CRYRING [25]; в) протоны в S-LSR [26]

Для сгруппированных упорядоченных пучков условие (3.2) выполняется также, только теперь это линейная плотность сгустка, а не средняя плотность пучка. Поэтому применение сгруппированного пучка имеет смысл лишь при значительном дефиците ионов.

Практический интерес представляет другое свойство таких глубоко охлажденных ионных пучков: в надкритическом состоянии их поперечный размер и разброс по импульсу увеличиваются от значения (3.2) с ростом линейной плотности по закону

$$\sigma_{\perp}(N_i) = \sigma_{\text{transition}} \left(\frac{N}{N_{\text{transition}}} \right)^{1/3}. \quad (3.3)$$

И этот закон выполняется вплоть до максимальной линейной плотности порядка $5 \cdot 10^5$ ионов/м [9]. Такой закон является результатом равновесия внешнего охлаждения ионов электронным пучком и внутреннего нагрева так

Таблица 2. Параметры электрон-ионного коллайдера

Частицы пучков коллайдера	Ионы $^{238}\text{U}^{92+}$	Электроны
Пучок	«Равновесный» распущенный	Сгруппированный
Периметр кольца, м	18,56*	16,0
Энергия частиц, МэВ/нуклон, МэВ	300	500
Частота обращения, МГц	10,547	18,75
Число частиц в пучке/в сгустке	$1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^7$	10^{10}
Число сгустков	—	9
Длина сгустка, см	—	4
Эмиттанс пучка, нм	0,01–170	50
Поперечный размер сгустка, мкм	≤ 220	220
Ласлеттовский сдвиг Δq	$\leq 0,004$	$7,6 \cdot 10^{-5}$
Эффект встречи ξ_{ie}, ξ_{ei}	0,08	$\leq 0,01$
Значение бета-функции B^* в IP, м	1,0	1,0
Светимость, $\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$	$7,5 \cdot 10^{23} - 1,7 \cdot 10^{27}$	

*Периметр кольца выбран так, чтобы выполнялось условие синхронизации (1.35), необходимое для сгруппированного ионного пучка.

называемым внутрипучковым рассеянием — кулоновским рассеянием ионов пучка один на другом. Закон (3.3) был экспериментально проверен для распущенных пучков.

«Равновесный» пучок ионов (3.3) планируется использовать в электрон-ионном коллайдере проекта DERICA (Dubna Electron-Radioactive Isotope Collider fAcility) [27]. В табл.2 приведены возможные параметры коллайдера и его светимость при столкновении электронных сгустков с «равновесным» ионным пучком (см. детали в [9]). Принято, что в коллайдере использована схема пересекающихся пучков (п. 1.6). Поэтому $\lambda = 1$. Угол ϕ (1.32) принят пренебрежимо малым. Светимость рассчитана по формуле (1.25).

Результаты оценок (рис. 9) показывают, что «равновесный» пучок (сплошные кривые) имеет несколько большую светимость, чем сгруппированный пучок с постоянным эмиттансом (штриховые), но до тех пор пока их поперечные размеры не сравнялись, и «проигрывает» последнему, когда размер равновесного ионного пучка превысил поперечные размеры электронного. Ионный пучок, поперечный размер которого ограничен эффектом Ласлетта (пунктирные кривые), имеет наименьшую их трех вариантов светимость, так как в этом случае она определяется поперечным размером электронного пучка.

Ограничение интенсивности ионного и электронного пучков имеет в этом коллайдере разные причины. Максимальное число частиц в ионном в пучке определяется условием сохранения малого поперечного размера сгустка (3.3). Интенсивность электронного сгустка диктуется эффектом встречи, который

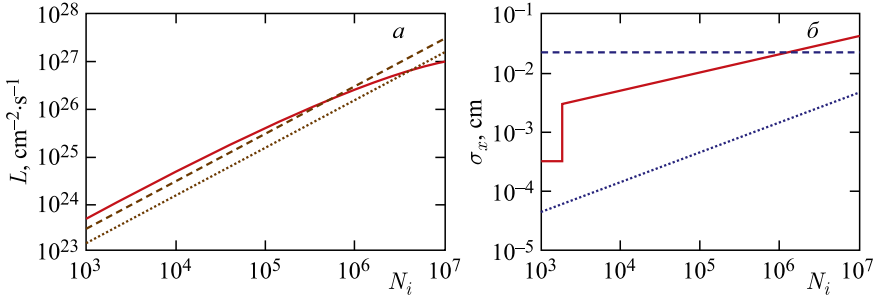


Рис. 9. Зависимость от числа частиц ионного пучка светимости электрон-ионного коллайдера L (а) и поперечного размера σ_x (б) ионного пучка (сгустка): сплошная линия — распущенный охлажденный ионный пучок ниже и выше фазового перехода; штриховая — сгруппированный ионный пучок с постоянным эмиттансом, равным эмиттансу электронного пучка (50 нм); пунктирная — сгруппированный ионный пучок, эмиттанс которого ограничен пространственным зарядом (параметр Ласлетта)

этот сгусток создает для ионов. В численном примере параметр ξ_{ie} имеет значение, которое достижимо только при эффективном воздействии на ионный пучок электронного охлаждения, что, впрочем, необходимо и для формирования равновесного ионного пучка.

Необходимость применения распущенного ионного пучка вызвана требованиями синхронизации столкновений, и в данном случае эти требования носят принципиальный характер. Скорости релятивистских электронов и ионов значительно отличаются, что требует самой постановкой эксперимента на таком коллайдере [17]. Но поэтому удовлетворить условию (1.35) для сгруппированных электронного и ионного пучков можно лишь при строго определенных (дискретных) значениях параметров частиц и размеров колец. А это исключает возможность плавного сканирования по энергии частиц, что нужно, как правило, в ядерно-физических исследованиях. Проблема снимается для ультрарелятивистских электрон-ионных коллайдеров, где скорости электронов и тяжелых частиц практически не отличаются от скорости света. Такие коллайдеры разрабатываются в ЦЕРН (Large Hadron–Electron Collider — LHeC) и в двух лабораториях США — Брукхейвенской (Relativistic Electron–Hadron Collider — eRHIC) и лаборатории им. Джефферсона (Medium energy Electron–Ion Collider — MEIC).

Низкая интенсивность равновесных пучков ограничивает область их применений изучением физики редких («экзотических») и радиоактивных изотопов [27].

3.4. «Сливающиеся» ионные пучки. Первое предложение по применению ионных накопителей с электронным охлаждением («кулеры-накопители») в экспериментах по ядерной физике [28] появилось в конце 1970-х гг. в работах, проводившихся в ИЯФ СО АН СССР по развитию метода элект-

Таблица 3. Параметры коллайдера со сливающимися пучками

Частицы пучков коллайдера	$^{238}\text{U}^{92+}$	$^{235}\text{U}^{92+}$
Пучок	Распущенный	Распущенный
Периметр кольца, м	76,22	62,86
Энергия частиц, МэВ/нуклон	785	500
Магнитное поле диполей, Тл	1,5	1,5
Число частиц в пучке	$4,9 \cdot 10^{10}$	$2,35 \cdot 10^{10}$
Эмиттанс пучка, $\pi \cdot \text{мм} \cdot \text{мрад}$	1,1	1,1
Ласлеттовский сдвиг Δq	0,043	0,043
Эффект встречи ξ_{12}, ξ_{21}	0,007	0,002
Значение бета-функции B^* в IP, м	2,0	2,0
Длина участка взаимодействия, м	6,0	
Светимость, $\text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$	$2,4 \cdot 10^{25}$	

тронного охлаждения. Такие эксперименты были начаты спустя почти 10 лет, когда в нескольких ядерно-физических лабораториях были построены накопители с электронным охлаждением. Наиболее активно исследования велись на накопителе Experimental Storage Ring (ESR) в исследовательском центре GSI (Дармштадт, ФРГ). Тогда же было высказано предложение [29] о постановке экспериментов на коллайдере со «сливающимися» («merging»), или «догоняющими», пучками, частицы которых на участке встречи движутся в одном и том же направлении, имея разную скорость (энергию). Такая постановка эксперимента открывает дополнительные возможности в исследовании структуры радиоактивных ядер.

Одно из возможных применений коллайдера на сливающихся пучках, предложенное в работе [30], — изучение физики вакуума в столкновениях тяжелых ядер, создающих «сверхкритическое» электрическое поле, разделяющее частицы виртуальной электрон-позитронной пары. Подобная задача обсуждается довольно давно. В конкретной схеме эксперимента (табл. 3) сталкиваются ядра двух изотопов урана $^{238}\text{U}^{92+}$ и $^{235}\text{U}^{92+}$, энергия которых выбрана так, что их полная энергия в системе центра масс составляет 6 МэВ/нуклон. Этого достаточно для преодоления кулоновского барьера. Предлагается также использовать схему пересекающихся пучков (п. 1.6) или схему коллайдера NICA — такую же, как в варианте встречных дейтрон-протонных пучков (п. 3.2).

Проблема синхронизации столкновений, так же, как описано выше, решается применением двух распущенных пучков.

Светимость коллайдера ограничена эффектом Ласлетта, что объясняется сравнительно невысокой энергией тяжелых ядер. Ее значение рассчитано по формулам (1.28), (1.29), и, как предполагается в [30], оно вполне достаточно для проведения предложенного эксперимента.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные формулы светимости коллайдера в трех различных режимах столкновений — двух сгруппированных пучков, двух распущенных и сгруппированного с распущенным описывают все возможные варианты применения циклических коллайдеров. Предложенный метод оптимизации параметров ионного коллайдера позволяет определить их предельные значения и, соответственно, найти максимально возможную светимость коллайдера. В качестве главных критериев, ограничивающих предельные значения светимости, предложены и используются в численных примерах два эффекта пространственного заряда сталкивающихся пучков коллайдера — сдвиги частот поперечных (бетатронных) колебаний частиц под действием собственного электромагнитного поля сгустка (эффект Ласлетта) и поля встречного сгустка (эффект встречи). Сформулированы условия синхронизации столкновений, показывающие преимущество распущенного пучка в случае асимметричного коллайдера (п. 3.2). На численных примерах показаны случаи, когда определяющим является ласлетт-эффект (пп. 3.1, 3.2 — сгруппированные ионные пучки, п. 3.3 — электронный пучок и п. 3.4 — распущенные ионные пучки), и случаи ограничения светимости эффектом встречи (п. 3.1, распущенные ионные пучки, пп. 3.2, 3.3). В п. 3.1 для протонных встречных пучков показан промежуточный случай, когда эффект встречи преобладает при большой энергии.

Автор выражает благодарность В. А. Лебедеву, С. С. Нагайцеву и Е. Б. Левичеву за полезные обсуждения, Д. Джоветту и С. Ямагучи за представленную ценную информацию, Д. Н. Шатилову и А. О. Сидорину, ознакомившимся с рукописью статьи и давшим многочисленные критические замечания и рекомендации, Ж. Л. Мальцевой за ценные советы при проведении численных расчетов и С. А. Мельникову, тщательно проверившему вычисления и внесшему необходимые исправления.

Работа выполнена в связи с осуществлением проектов NICA [1] и DERICA [27] в ОИЯИ. Автор приносит искреннюю благодарность коллегам за совместную работу над этими проектами.

Приложение

ПРИБЛИЖЕНИЕ ТОНКОЙ ЛИНЗЫ

Сдвиг частоты бетатронных колебаний ξ_{12} под действием beam-beam эффекта найдем, умножив матрицу перехода для оборота частицы в кольце коллайдера (так называемая матрица Твисса)

$$M_{\text{ring}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 + \alpha \sin \varphi_0 & \beta \sin \varphi_0 \\ -\gamma \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 - \alpha \sin \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_0 = 2\pi Q,$$

на матрицу тонкой линзы

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix},$$

фокусное расстояние которой f нужно связать со сдвигом фазы бетатронных колебаний.

Матрицу перехода M^* с учетом возмущения, вносимого тонкой линзой, найдем, перемножив матрицы M_{ring} и M_f :

$$M^* = M_{\text{ring}} M_f = \begin{pmatrix} \cos \varphi_0 + \alpha_0 \sin \varphi_0 - \frac{\beta_0}{f} \sin \varphi_0 & \beta_0 \sin \varphi_0 \\ -\gamma_0 \sin \varphi_0 - \frac{1}{f} \cos \varphi_0 + \frac{\alpha_0}{f} \sin \varphi_0 & \cos \varphi_0 - \alpha_0 \sin \varphi_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.1})$$

Представив члены матрицы M^* в виде

$$\varphi^* = \varphi_0 + \Delta\varphi, \quad \Delta\varphi \ll \varphi_0; \quad \beta = \beta_0 + \Delta\beta; \quad \alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha, \quad \gamma = \gamma_0 + \Delta\gamma,$$

где $\Delta\varphi$, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, $\Delta\gamma$ — возмущения, вносимые тонкой линзой, запишем матрицу M^* :

$$M^* \equiv M_\Delta = \begin{pmatrix} \cos \varphi^* + \alpha \sin \varphi^* & \beta \sin \varphi^* \\ -\gamma \sin \varphi^* & \cos \varphi^* - \alpha \sin \varphi^* \end{pmatrix}. \quad (\text{II.2})$$

Приравняв затем соответствующие члены матриц (II.1) и (II.2), найдем в линейном приближении по Δ -членам

$$m_{11}^* = m_{11}^\Delta \rightarrow -\frac{\beta_0}{f} \sin \varphi_0 = -\Delta\varphi (\sin \varphi_0 - \alpha_0 \cos \varphi_0) + \Delta\alpha \sin \varphi_0,$$

$$m_{12}^* = m_{12}^\Delta \rightarrow 0 = \beta_0 \cos \varphi_0 \Delta\varphi + \Delta\beta \sin \varphi_0,$$

$$m_{21}^* = m_{21}^\Delta \rightarrow -\frac{\cos \varphi_0}{f} + \frac{\alpha_0 \sin \varphi_0}{f} = \gamma_0 \Delta\varphi \cos \varphi_0 - \Delta\gamma \sin \varphi_0,$$

$$m_{22}^* = m_{22}^\Delta \rightarrow 0 = -\Delta\varphi (\sin \varphi_0 + \alpha_0 \cos \varphi_0) - \Delta\alpha \sin \varphi_0.$$

Таким образом, мы получили четыре уравнения для неизвестных $\Delta\varphi$, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ и $\Delta\gamma$:

$$\Delta\varphi (\sin \varphi_0 - \alpha_0 \cos \varphi_0) - \Delta\alpha \sin \varphi_0 = \frac{\beta_0}{f} \sin \varphi_0,$$

$$\Delta\varphi \beta_0 \cos \varphi_0 + \Delta\beta \sin \varphi_0 = 0,$$

$$-\Delta\varphi \gamma_0 \cos \varphi_0 - \Delta\gamma \sin \varphi_0 = -\frac{1}{f} (\cos \varphi_0 - \alpha_0 \sin \varphi_0),$$

$$\Delta\varphi (\sin \varphi_0 + \alpha_0 \cos \varphi_0) + \Delta\alpha \sin \varphi_0 = 0.$$

Решая эту систему линейных уравнения известным методом вычисления детерминантов, находим определитель системы $\text{Det}_\Delta = -2 \sin^4 \varphi_0$ и определитель с заменой первого столбца в Det_Δ на коэффициенты правой части системы $\text{Det}_\varphi = -(\beta_0/f) \sin^4 \varphi_0$. Их отношение дает искомое значение сдвига фазы φ в присутствии тонкой линзы:

$$\Delta\varphi = \frac{\text{Det}_\varphi}{\text{Det}_\Delta} = \frac{\beta_0}{2f}. \quad (\text{П.3})$$

Это выражение для $\Delta\varphi$ в точности совпадает с (2.15), поскольку $\beta_0 \equiv B_{x1}^*$ — значение бетатронной функции в точке расположения «возмущающей» тонкой линзы (в ее отсутствие), а фокусное расстояние $f \equiv f_{\text{ВВ}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агапов Н. Н., Кекелидзе В. Д., Коваленко А. Д., Ледницки Р., Матвеев В. А., Мешков И. Н., Никитин В. А., Потребеников Ю. К., Сорин А. С., Трубников Г. В. Релятивистская ядерная физика в ОИЯИ: от синхрофазотрона к коллайдеру NICA // УФН. 2016. Т. 186, № 4. С. 405–424.
2. Carrigan R., Lebedev V., Mokhov N., Nagaitsev S., Stancari G., Still D., Valishev A. Emittance Growth and Beam Loss // Accelerator Physics at the Tevatron Collider / Eds.: V. Lebedev, V. Shiltsev. New York: Springer, 2014. P. 254.
3. Handbook of Accelerator Physics and Engineering / Eds.: A. W. Chao, K. N. Mess, M. Tigner, F. Zimmermann. 2nd Ed. Singapore: World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., 2013. 311 p.
4. Syphers M. J., Zimmermann F. Luminosity. Accelerator Physics of Collider. <http://pdg.lbl.gov/2015/reviews/rpp2015-rev-accel-phys-colliders.pdf>. 2015. P. 14.
5. Gareyte J. Limitation of Hadron Beams // High Quality Beams. Joint US–CERN–Japan–Russia Accel. School, St. Petersburg, Moscow, Russia, July 1–14, 2000. Melville; New York: AIP Conf. Proc., 2001. V. 592. P. 26.
6. Batygin Y., Katayama T. Luminosity of Particle Collider. RIKEN Commun. RIKEN-AT-AC-10. Wako, 1998. 21 p.
7. Meshkov I. N. Luminosity of a Collider with Asymmetric Beams // Phys. Part. Nucl. Lett. 2018. V. 15, No. 5. P. 506–509; <http://arXiv.org/abs/1802.08447v2>.
8. Meshkov I. N. Optimum Luminosity of Proton–Ion Collider // Proc. of RuPAC’2018. jacow TUCBMNH01.
9. Meshkov I. N. Electron–Ion Collider with Quasi-Ordered Ion Beam // Nucl. Instr. Meth. A. 2019. V. 917. P. 56–60; <http://arXiv.org/abs/1806.08983>.
10. Jowett J. Private Commun.
11. Jamaguchi S. Private Commun.
12. Palmer R. B. Energy Scaling, Crab Crossing and the Pair Problem. SLAC-Pub-4707. Stanford, 1988. 7 p.

13. *Raimondi R., Shatilov D., Zobov M.* Beam–Beam Issues for Colliding Schemes with Large Piwinski Angle and Crabbed Waist. LNF-07/003-IR. 2007; arXiv:physics/0702033.
14. *Raimondi P., Shatilov D., Zobov M.* Beam–Beam Simulations for Particle Factories with Crabbed Waist // Proc. of Part. Accel. Conf. (PAC 07), Albuquerque, New Mexico, 2007. P. 1469.
15. *Raimondi P., Shatilov D., Zobov M.* Suppression of Beam–Beam Resonances in Crab Waist Collisions // Proc. of the 11th Eur. Part. Accel. Conf. (EPAC 08), Magazzini del Cotone, Genoa, Italy, 2008. P. 2620.
16. *Zobov M.* New Generation Electron–Positron Factories // Part. Nucl. 2011. V. 42, No. 3. P. 1479–1511.
17. *Antonov A. N., Gaidarov M. K., Ivanov M. V., Kadrev D. N.* The Electron–Ion Scattering Experiment ELISe at the International Facility for Antiproton and Ion Research (FAIR) — A Conceptual Design Study // Nucl. Instr. Meth. A. 2011. V. 637. P. 60–76; *Koop I. A. (BINP–GSI Collab.)*. Conceptual Design of an Electron–Nucleus Scattering Facility at GSI // Proc. of Eur. Part. Accel. Conf. (EPAC 02), Paris, 2002. P. 620.
18. *Мешков И. Н.* Транспортировка пучков заряженных частиц. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. 117; 118 С.
19. *Machida S.* Tune Shift and Tune Spread // High Quality Beams Joint US–CERN–Japan–Russia Accel. School. Moscow–St. Petersburg, 2001. V. 592. P. 408.
20. *Laslett L. J.* // Proc. of 1963 Summer Study on Storage Rings. BNL-7534. Brookhaven, 1963. P. 324.
21. *Seeman J. T.* Beam–Beam Parameter and Tune Shift // High Quality Beams: Joint US–CERN–Japan–Russia Accel. School. Moscow–St. Petersburg, 2001. V. 592. P. 165.
22. *Meshkov I., Sidorin A., Smirnov A., Syresin E., Katayama T.* Ordered State of Ion Beams. Preprint RIKEN-AF-AC-34. Japan, 2002. 15 p.
23. *Meshkov I., Mohl D., Katayama T., Sidorin A., Smirnov A., Syresin E., Trubnikov G., Tsutsui H.* Numerical Simulation of Crystalline Beam in Storage Ring // Nucl. Instr. Meth. A. 2004. V. 532. P. 376–381.
24. *Steck M., Beckert K., Beller P., Franzke B., Nolden F.* Anomalous Temperature Reduction of Electron-Cooled Heavy Ion Beams in the Storage Ring ESR // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 3803–3815.
25. *Danared H., Kaelberg A., Simonsson A.* One-Dimensional Ordering in Coasting and Bunched Beams // J. Phys. B. 2003. V. 36. P. 1003–1010.
26. *Shirai T., Noda A., Meshkov I., Smirnov A. (Kyoto Univ.–NIRS–JINR Collab.)*. One-Dimensional Beam Ordering of Protons in a Storage Ring // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 98. P. 204801–204804.
27. *Grigorenko L. V. (DERICA Collab.)* Project DERICA: Dubna Electron–Radioactive Isotope Collider Facility // Part. Nucl., Lett. 2018. V. 15, No. 7. P. 1020–1027.
28. *Будкер Г. И., Диканский Н. С., Мешков И. Н., Пархомчук В. В., Пестриков Д. В., Попов С. Г., Скринский А. Н.* Возможности спектрометрических экспериментов на сверхтонких внутренних мишенях в накопителях тяжелых заряженных частиц с электронным охлаждением // Тр. X Междунар. конф. по ускорителям заряженных частиц высоких энергий. 1977. Т. 2. С. 141–147.

29. *Meshkov I., Muenzenberg G., Schrieder G., Syresin E., Ter-Akopian G.* The Investigation of Nuclear Structure with Storage Rings — Present and Future // *Nucl. Instr. Meth. A.* 1997. V. 391. P. 2249.
30. *Ter-Akopian G. M., Greiner W., Meshkov I. N., Oganessian Yu. Ts., Reinhardt J., Trubnikov G. V.* Layout of New Experiments on the Observation of Spontaneous Electron-Positron Pair Creation in Supercritical Coulomb Fields // *Intern. J. Mod. Phys. E.* 2015. V. 24, No. 3. P. 1550016 (1–8).