

ЧЕТЫРЕХВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ ВО ВНЕШНЕМ ЛИНЕЙНО РАСТУЩЕМ ПОЛЕ ПРИ ФИКСИРОВАННЫХ И ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Н. М. Боголюбов

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия

Вычислена статистическая сумма точно решаемой четырехвершинной модели на квадратной решетке в присутствии линейно растущего внешнего поля. Исследована система, когда внешнее поле приложено к одному из столбцов решетки. Модель рассмотрена как для случая фиксированных, так и для случая периодических граничных условий.

The partition function of the exactly solvable four-vertex model on a square grid in the presence of a linearly growing external field is calculated. Namely, we study the system when the external field is applied to one of the columns of the grid. The model is considered both for the fixed and periodic boundary conditions.

PACS: 03.65.-w; 05.30.-d; 02.30.Ik

ВВЕДЕНИЕ

Вершинные модели двумерной статистической механики играют важную роль в современных исследованиях точно решаемых моделей [1–7]. Особый интерес представляет связь этих моделей с задачами перечислительной комбинаторики [8, 9].

Четырехвершинная модель является частным случаем шестивершинной модели [1], в которой две вершины заморожены. Квантовый метод обратной задачи [10–12] был применен для решения четырехвершинной модели на конечной решетке с различными граничными условиями в [13]. Статистическая сумма модели во внешнем линейно растущем поле была вычислена в [14] для фиксированных граничных условий и была представлена в детерминантном виде. В настоящей статье мы исследуем модель как для фиксированных, так и для периодических граничных условий в случае, когда внешнее поле приложено к одному из столбцов решетки.

1. ЧЕТЫРЕХВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ

Четырехвершинная модель на квадратной $2N \times (M + 1)$ решетке определяется четырьмя различными конфигурациями стрелок, направленными как в сторону каждого узла решетки, так и от него. Статистический вес ω приписывается каждой допустимой конфигурации.

Мы рассмотрим модель, в которой вершинные веса третьей и четвертой вершин совпадают (рис. 1). Изображая стрелки, направленные вверх

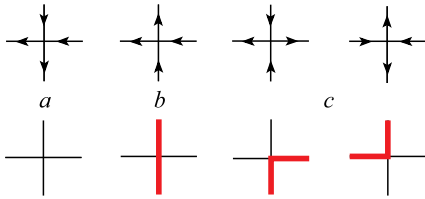


Рис. 1. Четыре допустимых вершины в виде конфигураций стрелок и линий

или направо линиями, мы получим альтернативное описание вершин с помощью линий, протекающих сквозь узлы решетки. Так как грани решетки могут находиться лишь в двух состояниях, с линией или без нее, то существует взаимно-однозначное соответствие между допустимыми конфигурациями стрелок на решетке и графами линий — наборами решеточных путей. Число вершин a, b, c в каждой

конфигурации равно l^a, l^b, l^c . Каждому типу узла решетки соответствует свой больцмановский вес, зависящий от узла решетки. Для горизонтальной неоднородности имеем $(\omega_a)_j, (\omega_b)_j, (\omega_c)_j$, где $j = 1, \dots, 2N$. Мы рассмотрим интегрируемый случай, когда $(\omega_b)_j = (\omega_a)_j^{-1} = (\omega_j)$, а $(\omega_c)_j = 1$. Статистическая сумма модели имеет вид

$$Z(\omega_a, \omega_b, \omega_c) = \sum_{\{\nu\}} Z^\nu(\omega_a, \omega_b, \omega_c) = \sum_{\{\nu\}} \prod_{j=1}^{2N} \omega_j^{b_\nu - l_\nu^a}. \tag{1}$$

Здесь суммирование ведется по всем допустимым конфигурациям стрелок $\{\nu\}$, а $Z^\nu(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$ — это статистический вес конфигурации. Здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться обозначением $\mathbf{x} \equiv x_1, \dots, x_{2N}$.

Рассмотрим случай, когда внешнее линейно растущее поле $l\mathcal{H}(l = 0, 1, \dots, M; \mathcal{H} \geq 0)$ действует на стрелки, смотрящие направо в k -м столбце решетки. Координаты K стрелок, смотрящих направо в этом столбце μ_i^k ($i = 1, 2, \dots, K$), образуют строгое разбиение μ^k с элементами, расположенными в порядке убывания $M \geq \mu_1^k > \mu_2^k > \dots > \mu_K^k \geq 0$ и удовлетворяющими условию $\mu_i^k > \mu_{i+1}^k + 1$.

Если за $Z_{\mu^k}^\nu(\omega_a, \omega_b, \omega_c)$ принять вес конфигурации $\{\nu\}$ с фиксированным набором μ^k , то статистическая сумма рассматриваемой модели будет иметь вид

$$Z(\omega_a, \omega_b, \omega_c | h) = \sum_{\mu^k} e^{2h|\mu^k|} \sum_{\nu} Z_{\mu^k}^\nu(\omega_a, \omega_b, \omega_c), \tag{2}$$

где суммирование ведется по всем строгим разбиениям μ^k , а $|\mu^k| = \sum_{i=1}^M \mu_i^k$.

Здесь $2h = -\beta\mathcal{H}$; $h \leq 0$, а β — постоянная Больцмана.

Допустимые конфигурации, а соответственно, и статистическая сумма модели зависят от наложенных граничных условий, которые определяются направлением стрелок на границе решетки.

2. ФИКСИРОВАННЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Фиксированными граничными условиями мы будем называть условия, при которых все стрелки на правой и левой границе направлены налево, верхние и нижние стрелки первых N колонок (считая слева) направлены внутрь, а верхние и нижние стрелки последних N колонок направлены наружу (рис. 2). Заданной конфигурации вершин соответствует набор непересекающихся путей, стартующих из N нижних левых узлов и финиширующих в N верхних правых. Путь идет только вверх и вправо. Длина одного пути в конфигурации равна $N + M$. Число вершин типа c в допустимом пути равно $2N$, так как лишь один последовательный шаг разрешен в горизонтальном направлении, и, соответственно, число вершин типа b равно $M - N + 1$. Это означает, что число вершин типа c и b в наборе путей равно, соответственно, $l^c = 2N^2$ и $l^b = l^a = N(M - N + 1)$.

Для однородной модели $(\omega)_j \equiv \omega$ и

$$Z(\omega_a, \omega_b, \omega_c | h) \equiv Z(\omega | h) = \sum_{\mu^k} e^{2h|\mu^k|} S(\nu, \mu^k), \quad (3)$$

где $S(\nu, \mu^k)$ — число конфигураций (число путей) с заданным набором μ^k . При $h = 0$ статсумма равна числу конфигураций.

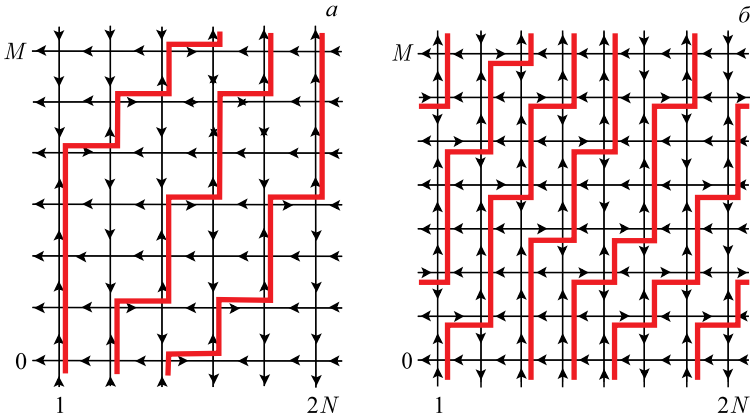


Рис. 2. Типичная конфигурация допустимых решеточных путей на решетке с фиксированными (а) и периодическими (б) граничными условиями

Для вычисления статистической суммы модели применим квантовый метод обратной задачи рассеяния [10–12], воспользовавшись спиновым описанием модели. Состояние со спином вверх на i -м горизонтальном ребре $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i \equiv |\leftarrow\rangle_i$ соответствует стрелке, направленной налево, а состояние со спином вверх $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_i \equiv |\rightarrow\rangle_i$ — стрелке, направленной направо. Стрелкам, направленным вверх и вниз на l -м вертикальном ребре, соответствуют состояния $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_l \equiv |\uparrow\rangle_l$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_l \equiv |\downarrow\rangle_l$.

Каждому узлу решетки поставим в соответствие оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes (M+1)}$. Используя спиновое описание модели, можно записать L -оператор четырехвершинной модели в виде [13]:

$$L(n|u) = \begin{pmatrix} L_{11}(n|u) & L_{12}(n|u) \\ L_{21}(n|u) & L_{22}(n|u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u\check{e}_n & \sigma_n^- \\ \sigma_n^+ & u^{-1}\check{e}_n \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где параметр $u \in \mathbb{C}$, $\sigma^{z,\pm}$ — это матрицы Паули, проекторы $\check{e}_n = (1/2)(1 + \sigma_n^z)$. Матрица с подстрочным индексом n действует нетривиально только в n -м квантовом пространстве: $s_n = I \otimes \dots \otimes I \otimes s \otimes I \otimes \dots \otimes I$.

Вертикальная матрица монодромии определяется как произведение L -операторов:

$$T(u) = L(M|u)L(M-1|u)\dots L(0|u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Матричные элементы введенного L -оператора можно представить в виде точек с примыкающими стрелками (рис. 3). В представлении элемента $L_{11}(n|u)$ точкой обозначен оператор $-ue_n$ ($e_n = (1/2)(1 - \sigma_n^z)$) с единственным ненулевым элементом ${}_n\langle \leftarrow | -ue_n | \leftarrow \rangle_n$, определяющим вершину b (см. рис. 1) с весом $-u$. В представлении $L_{22}(n|u)$ точкой обозначен оператор $u^{-1}e_n$, имеющий ненулевой элемент ${}_n\langle \leftarrow | u^{-1}e_n | \leftarrow \rangle_n$, который определяет вершину a (см. рис. 1) с весом u^{-1} . Ненулевые матричные элементы ${}_n\langle \rightarrow | \sigma_n^- | \leftarrow \rangle_n$ и ${}_n\langle \leftarrow | \sigma_n^+ | \rightarrow \rangle_n$ операторов $L_{12}(n|u) = \sigma_n^-$ и $L_{21}(n|u) = \sigma_n^+$ определяют вершины c (см. рис. 1) с весом, равным единице. Матричные элементы матрицы монодромии (5) выражаются через суммы по всем возможным конфигурациям стрелок на одномерной решетке с $M+1$ узлами (см. рис. 3).

L -оператор (4) удовлетворяет соотношениям

$$e^{-2h\sigma_n^z} L(n|u) e^{2h\sigma_n^z} = e^{2h\sigma^z} L(n|u) e^{-2h\sigma^z}, \quad (6)$$

$$e^{-2h\sigma^z} L(n|u) = e^{-h\sigma^z} L(n|e^{-2h} u) e^{h\sigma^z}. \quad (7)$$

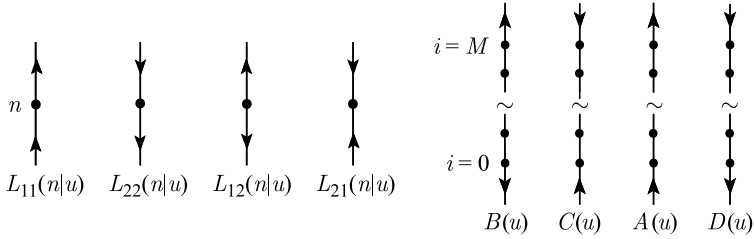


Рис. 3. Графическое представление матричных элементов L -оператора и матрицы монодромии $T(u)$

Соответственно, для матрицы монодромии (5) имеем:

$$\exp\left(-2h \sum_{j=0}^M \sigma_j^z\right) T(u) \exp\left(2h \sum_{j=0}^M \sigma_j^z\right) = e^{2h\sigma^z} T(u) e^{(-2h\sigma^z)}, \quad (8)$$

$$\exp\left(-2h \sum_{j=0}^M j\sigma_j^z\right) T(u) = e^{2h(M+1)\sigma^z} \times e^{-h\sigma^z} T(e^{-2h}u) e^{h\sigma^z} \exp\left(-2h \sum_{j=0}^M j\sigma_j^z\right). \quad (9)$$

Соотношения

$$\exp\left(2h \sum_{j=0}^M j\hat{e}_j\right) B(u) = e^{hM} B(e^{-h}u) \exp\left(2h \sum_{j=0}^M j\hat{e}_j\right), \quad (10)$$

$$C(u) \exp\left(2h \sum_{j=0}^M j\hat{e}_j\right) = e^{hM} \exp\left(2h \sum_{j=0}^M j\hat{e}_j\right) C(e^h u)$$

являются следствием (9). Заметим, что действие оператора $\hat{\mathcal{L}} = \exp\left(2h \sum_{j=1}^M j\hat{e}_j\right)$ на состояние с K спинами, направленными «вниз» и имеющими координаты μ_1, \dots, μ_K , имеет вид

$$\hat{\mathcal{L}}|\mu_1^k, \dots, \mu_K^k\rangle = \exp\left(2h \sum_{j=1}^K \mu_j^k\right) |\mu_1^k, \dots, \mu_K^k\rangle = e^{2h|\mu^k|} |\mu_1^k, \dots, \mu_K^k\rangle. \quad (11)$$

Вектор состояния строится действием операторов $B(u)$, а сопряженный ему — действием операторов $C(u)$ на состояние $|\Leftarrow\rangle$:

$$|\Psi_N(\mathbf{u})\rangle = \prod_{i=1}^N B(u_i) |\Leftarrow\rangle, \quad \langle\Psi_N(\mathbf{u})| = \langle\Leftarrow| \prod_{i=1}^N C(u_i), \quad (12)$$

где $\mathbf{u} \equiv (u_1, \dots, u_N)$ — это набор независимых параметров.

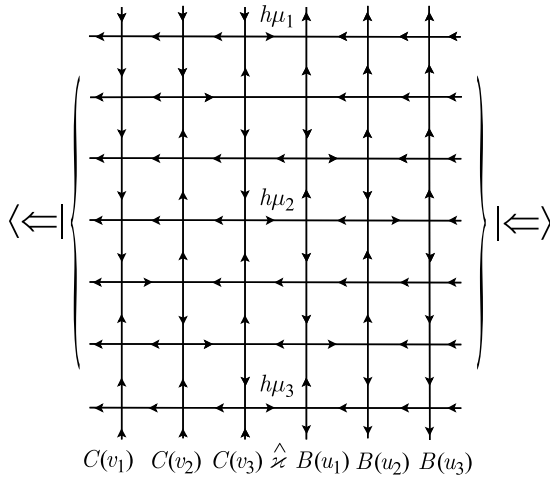


Рис. 4. Одна из конфигураций, дающая вклад в среднее $\langle \leftarrow |C(v_1)C(v_2)C(v_3)\hat{z}B(u_1)B(u_2)B(u_3)| \leftarrow \rangle$

Для того чтобы вычислить среднее $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \hat{z} | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ (его графическое представление см. на рис. 4), воспользуемся соотношениями (10). Имеем

$$\begin{aligned}
 W_N(\mathbf{u}, \mathbf{v} | h) &\equiv \langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \hat{z} | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle = \\
 &= \langle \leftarrow | C(v_1) \dots C(v_N) \hat{z} B(u_1) \dots B(u_N) | \leftarrow \rangle = \\
 &= e^{hMN} \langle \leftarrow | C(v_1) \dots C(v_N) B(e^{-h} u_1) B(e^{-h} u_2) \dots B(e^{-h} u_N) | \leftarrow \rangle = \\
 &= \langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(e^{-h} \mathbf{u}) \rangle. \quad (13)
 \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой для скалярного произведения $\langle \Psi_N(\mathbf{v}) | \Psi_N(\mathbf{u}) \rangle$ векторов состояния (12) для четырехвершинной модели [13], окончательно получим:

$$\begin{aligned}
 W_N(\mathbf{u}, \mathbf{v} | h) &= \frac{(-1)^{MN} \prod_{k=1}^N \left(\frac{v_k}{u_k} \right)^{-(M-2N+2)}}{\prod_{1 \leq m < k \leq N} (v_k^2 - v_m^2)(u_k^{-2} - u_m^{-2})} \times \\
 &\times \det \left[\frac{1 - \left(e^h \frac{v_m}{u_k} \right)^{2(M-N+2)}}{1 - \left(e^h \frac{v_m}{u_k} \right)^2} \right]_{1 \leq k, m \leq N}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Для того чтобы связать среднее (14) со статистической суммой модели во внешнем поле, положим $v_j = \omega_j, u_j = \omega_{N+j}$ ($1 \leq j \leq N$). Воспользовавшись связью $Z(\omega|h) = (-1)^{MN} W_N(\mathbf{u}, \mathbf{v}|h)$ [13, 14], получим ответ для статистической суммы неоднородной четырехвершинной модели во внешнем линейно растущем поле, приложенном к центральному столбцу решетки:

$$Z(\omega|h) = \frac{\prod_{k=1}^N \left(\frac{\omega_k}{\omega_{N+k}} \right)^{-(M-2N+2)}}{\prod_{1 \leq m < k \leq N} (\omega_k^2 - \omega_m^2)(\omega_{N+k}^{-2} - \omega_{N+m}^{-2})} \times \det \left[\frac{1 - \left(e^h \frac{\omega_m}{\omega_{N+k}} \right)^{2(M-N+2)}}{1 - \left(e^h \frac{\omega_m}{\omega_{N+k}} \right)^2} \right]_{1 \leq k, m \leq N}. \quad (15)$$

В случае, когда высота решетки велика, $M \gg 1$, а ее длина N удовлетворяет условию $N \ll M$, определитель (15) становится определителем Коши и вычисляется:

$$Z(\omega|h) \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \prod_{k=1}^N \left(\frac{\omega_k}{\omega_{N+k}} \right)^M Z(\omega|h) \right\} = \prod_{k=1}^N \prod_{m=1}^N \frac{1}{1 - \left(e^h \frac{\omega_m}{\omega_{N+k}} \right)^2}.$$

Связь статистической суммы модели с задачей перечисления плоских разбиений с фиксированной суммой их диагональных элементов рассматривалась в статье [14].

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Рассмотрим теперь модель на решетке с периодическими граничными условиями. Это означает, что на решетке с $(M+1)$ горизонтальными и $2L$ вертикальными линиями граничные стрелки на любой линии направлены в одну сторону (см. рис. 2). В четырехвершинной модели число стрелок, направленных направо или налево в последующих столбцах решетки, сохраняется. Это означает, что число вершин типа c на каждой вертикальной линии сохраняется и равно $l_c = 2N$, где N — число стрелок, направленных направо в примыкающем столбце. В силу трансляционной инвариантности достаточно рассмотреть случай, когда внешнее поле приложено к столбцу решетки, лежащему между 0 и $2L$ вертикалями. Из графического представления операторов

$A(v)$ и $D(v)$ следует, что для нахождения статистической суммы надо вычислить выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_N(\mathbf{v}|h) &= \sum_{\boldsymbol{\mu}} \langle \boldsymbol{\mu} | \hat{\kappa} \prod_{j=1}^{2L} (A(v_j) + D(v_j)) | \boldsymbol{\mu} \rangle = \\ &= \sum_{\boldsymbol{\mu}} e^{2h|\boldsymbol{\mu}|} \langle \boldsymbol{\mu} | \prod_{j=1}^{2L} (A(v_j) + D(v_j)) | \boldsymbol{\mu} \rangle. \end{aligned} \quad (16)$$

Через $|\boldsymbol{\mu}\rangle \equiv |\mu_1, \dots, \mu_N\rangle$ обозначены координаты N стрелок, смотрящих направо в столбце (соответствующие спины направлены «вниз»), а суммирование ведется по полному набору состояний.

Для того чтобы вычислить это выражение, необходимо решить задачу на собственные значения для оператора $A(v) + D(v)$ [13]. Векторы состояния (12) являются собственными векторами, если параметры u_j удовлетворяют уравнениям Бете

$$(\tilde{u}_k^2)^{M+1-N} = (-1)^{N-1} \tilde{U}^{-2}, \quad \tilde{U}^2 = \prod_{j=1}^N \tilde{u}_j^2, \quad k = 1, \dots, N. \quad (17)$$

Собственные значения равны

$$\begin{aligned} \Theta_N(v; \tilde{\mathbf{u}}) &= \exp \left[i \frac{\pi}{2} (M + 1 - 2N) \right] \times \\ &\times \left\{ v^{M+1} \tilde{U}^{-2} + (-1)^N v^{-(M+1-2N)} \right\} \prod_{k=1}^N \frac{1}{\tilde{u}_k^2 - v^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

Собственные векторы образуют полную систему с нормой $\mathcal{N}_N^2(\tilde{\mathbf{u}}) = W_N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}|0)$, где $W_N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}|0)$ — это среднее (14) при $h = 0$ на решениях уравнения Бете (17). Вставив разложение единицы в (16), получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_N(\mathbf{v}|h) &= \sum_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{\tilde{\mathbf{u}}} e^{2h|\boldsymbol{\mu}|} \frac{\langle \Psi(\tilde{\mathbf{u}}) | \boldsymbol{\mu} \rangle \langle \boldsymbol{\mu} | \Psi(\tilde{\mathbf{u}}) \rangle}{W_N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}|0)} \prod_{j=1}^{2L} \Theta_N(v_j; \tilde{\mathbf{u}}) = \\ &= \sum_{\tilde{\mathbf{u}}} \frac{W_N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}|h)}{W_N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}|0)} \prod_{j=1}^{2L} \Theta_N(v_j; \tilde{\mathbf{u}}). \end{aligned}$$

Здесь сумма ведется по наборам решений уравнения Бете и мы воспользовались представлением $W_N(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}|h) = \sum_{\boldsymbol{\mu}} e^{2h|\boldsymbol{\mu}|} \langle \Psi(\tilde{\mathbf{v}}) | \boldsymbol{\mu} \rangle \langle \boldsymbol{\mu} | \Psi(\tilde{\mathbf{u}}) \rangle$ для среднего (13).

Среднее (16) и статистическая сумма модели связаны [13]:

$$\mathcal{Z}_N(\omega|h) = e^{-i\pi(M+1-2n)L} \mathcal{W}_N(-i\omega|h).$$

Это равенство решает задачу нахождения статсуммы четырехвершинной модели с периодическими граничными условиями во внешнем линейно растущем поле, приложенном к одному из столбцов решетки.

Благодарности. Автор благодарен К. Малышеву за плодотворные обсуждения. Данная работа поддержана Российским научным фондом (грант 18-11-00297).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Baxter R. G.* Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. San Diego: Acad. Press, 1982.
2. *Bogoliubov N. M., Pronko A., Zvonarev M.* Boundary Correlation Functions of the Six-Vertex Model // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2002. V. 35. P. 5525.
3. *Bogoliubov N. M.* Five-Vertex Model with Fixed Boundary Conditions // *St. Petersburg Math. J.* 2010. V. 21. P. 407.
4. *Kitaev A. V., Pronko A. G.* Emptiness Formation Probability of the Six-Vertex Model and the Sixth Painlevé Equation // *Commun. Math. Phys.* 2016. V. 345. P. 305.
5. *Reshetikhin N., Sridhar A.* Integrability of Limit Shapes of the Six-Vertex Model // *Commun. Math. Phys.* 2017. V. 56. P. 535.
6. *Colomo F., Pronko A. G., Sportiello A.* Arctic Curve of the Free-Fermion Six-Vertex Model in an L-Shaped Domain // *J. Stat. Phys.* 2019. V. 174. P. 1.
7. *de Gier J., Kenyon R., Watson S.* Limit Shapes for the Asymmetric Five-Vertex Model. arXiv:1812.11934.
8. *Stanley R.* Enumerative Combinatorics. V. 1, 2. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996; 1999.
9. *Боголюбов Н. М., Малышев К.* Интегрируемые модели и комбинаторика // *Успехи мат. наук.* 2015. Т. 70. С. 3.
10. *Faddeev L. D.* Quantum Inverse Scattering Method // *Sov. Sci. Rev. Math.* 1980. V. C1. P. 107.
11. *Korepin V. E., Bogoliubov N. M., Izergin A. G.* Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
12. *Боголюбов Н. М., Изергин А. Г., Корепин В. Е.* Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М.: Наука, 1992.
13. *Боголюбов Н. М.* Четырехвершинная модель и случайные укладки // *ТМФ.* 2008. Т. 155. С. 25.
14. *Bogoliubov N. M., Malyshev C.* The Partition Function of the Four-Vertex Model in Inhomogeneous External Field and Trace Statistics // *J. Phys. A.* 2019. V. 52. P. 495002.