ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 568–581

ПРОЯВЛЕНИЯ КВАНТОВЫХ АНОМАЛИЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В КВАНТОВОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

В. И. Захаров [1,*], *Г. Ю. Прохоров* [2,**], *О. В. Теряев* [2,***]

[1] Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт», Москва

[2] Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Описывается новый класс соотношений для статистических средних матричных элементов от различных операторов (таких как гамильтониан, сохраняющиеся токи) в однопетлевом приближении. Матричные элементы имеют полиномиальную зависимость от температуры и других термодинамических величин, характеризующих состояние равновесия среды (химический потенциал, угловая скорость вращения, ускорение). В этом смысле ситуация аналогична киральной аномалии в квантовой теории поля, которая фиксирует дивергенцию аксиального тока как полином по внешним электромагнитным полям. Более того, в этом конкретном случае матричного элемента от аксиального тока можно установить связь между выводом аномалии и однопетлевых соотношений статистической физики. Центральную роль в установлении соответствия играют полиномиальные интегралы Зоммерфельда. Предложены обобщения однопетлевых соотношений в статистической физике, которые (по крайней мере в настоящее время) не имеют аналогов в квантовой теории поля.

A new class of relations is described for statistical average matrix elements of various operators (such as the Hamiltonian, conserved currents) in the one-loop approximation. Matrix elements have a polynomial dependence on temperature and other thermodynamic quantities characterizing the state of equilibrium of the medium (chemical potential, angular velocity of rotation, acceleration). In this sense, the situation is similar to the chiral anomaly in quantum field theory, which fixes the divergence of the axial current as a polynomial in external electromagnetic fields. Moreover, in this particular case of the matrix element from the axial current, it is possible to establish a connection between the derivation of the anomaly and the one-loop relations of statistical physics. The central role in establishing correspondence is played by the Sommerfeld polynomial integrals.

[*] E-mail: vzakharov@itep.ru
[**] E-mail: prokhorov@theor.jinr.ru
[***] E-mail: teryaev@jinr.ru

Generalizations of one-loop relations in statistical physics are proposed, which (at least at present) have no analogues in quantum field theory.

PACS: 03.50.-z; 03.70.+k; 04.20.-q; 04.62.+v

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы представляем мини-обзор недавних результатов, касающихся вычисления различных матричных элементов во вращающейся и ускоренной среде в состоянии равновесия. Более подробное изложение и дальнейшие ссылки можно найти в [1–4]; впрочем, мы также добавляем некоторые оригинальные замечания.

Исследование статистических средних в среде с ускорением и угловой скоростью вращения мотивировано прежде всего феноменологией столкновений тяжелых ионов, основанной на анализе экспериментальных данных (см., например, [5]). Рассмотрение представляет собой и независимый теоретический интерес. Действительно, хотя обычно состояние равновесия характеризуют значениями различных химических потенциалов, сопряженных сохраняющимся зарядам, и угловой скоростью вращения [6], в релятивистском случае этот набор величин естественно дополняется ускорением (см. [7–10] и дальнейшие ссылки в этих работах). Ускорение, с другой стороны, может быть введено геометрическим образом, через метрику пространства Риндлера. Пространство Риндлера имеет границу, или горизонт. Таким образом, возникает весьма нетривиальная связь между квантовой статистической теорией в пространстве Минковского и квантовой теорией поля на пространстве с границей [1].

Нашей целью является исследование релятивистских статистических эффектов, для чего необходимо использовать аппарат релятивистской квантовой статистической механики. В отличие от нерелятивистской теории релятивистская квантовая статистическая теория еще не столь подробно разработана. Отправной точкой для нас будет релятивистский формализм, разработанный в [11, 12]. Вычисление статистических средних подразумевает использование оператора плотности $\hat{\rho}$. Следуя работе [8], мы используем следующую общую лоренц-ковариантную форму оператора плотности Зубарева [11, 12] в случае глобального равновесия:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp\Big(- \beta_\mu \hat{P}^\mu + \frac{1}{2}\varpi_{\mu\nu}\hat{J}^{\mu\nu} + \xi\hat{Q}\Big), \tag{1}$$

где $\hat{P}$ — оператор 4-импульса; $\hat{J}^{\mu\nu}$ — генераторы преобразований Лоренца; $\hat{Q}$ — оператор заряда. Далее

$$\varpi_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\big(\partial_\mu\beta_\nu - \partial_\nu\beta_\mu\big) \tag{2}$$

обозначает тензор тепловой завихренности, $\beta_\mu = u_\mu/T$ и u_μ — 4-скорость элемента среды, $T = 1/\sqrt{\beta^2}$, $\xi = \mu/T$ — отношение химического потенциала и температуры. Оператор $\hat{J}^{\mu\nu}$ в приложении к гидродинамике можно переписать как

$$\hat{J}^{\mu\nu} = u^\mu \hat{K}^\nu - u^\nu \hat{K}^\mu - \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} u_\rho \hat{J}_\sigma, \tag{3}$$

где $\hat{K}^\mu$ — оператор буста и $\hat{J}_\nu$ — оператор углового момента.

Соотношение (1) очевидным образом диктуется соображениями лоренц-ковариантности. Физический смысл (1) становится более прозрачным после введения 4-векторов «теплового» ускорения $\alpha_\mu = a_\mu/T$ и «тепловой» завихренности $w_\mu = \omega_\mu/T$

$$\alpha_\mu = \varpi_{\mu\nu} u^\nu, \quad w_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} u^\nu \varpi^{\alpha\beta}, \tag{4}$$

которые в системе покоя жидкости равны a_i/T и ω_i/T, т. е. совпадают с компонентами обычных векторов ускорения и угловой скорости соответственно, деленными на температуру. В несколько иной форме

$$\varpi_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} w^\alpha u^\beta + \alpha_\mu u_\nu - \alpha_\nu u_\mu. \tag{5}$$

Соотношения (1), (2), (5) позволяют рассматривать общий случай, когда присутствуют эффекты и вращения, и ускорения. В настоящем докладе мы сосредоточимся на случае $\omega_\mu = 0$. Тогда оператор плотности принимает вид

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z}\exp\left(-\beta_\mu \hat{P}^\mu - \alpha_\mu \hat{K}^\mu\right), \tag{6}$$

где α_μ — 4-ускорение, деленное на температуру, см. выше.

Мы обсуждаем в основном вычисление статистически среднего значения плотности энергии нагретого фермионного газа в однопетлевом приближении. Утверждение сводится к тому, что среднее значение плотности энергии как функция температуры и ускорения дается полиномом с тремя отличными от нуля членами в разложении по отношению ускорения к температуре. Отсутствие поправок более высокого порядка объясняется свойствами интегралов Зоммерфельда. Как уже упоминалось, полиномиальность интегралов Зоммерфельда играет ту же роль, что и сведение киральной аномалии к треугольному графику с двумя внешними фотонными линиями.

Из-за ограниченности объема обсуждение носит в основном качественный характер. Нашей основной целью является пояснить связь аномалий квантовой теории поля с полиномиальными интегралами Зоммерфельда. Мы делаем это сначала на простом примере матричного элемента аксиального тока как функции химического потенциала. И затем формулируем результаты вычислений плотности энергии как функции ускорения и температуры.

1. МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ПРОЯВЛЕНИЯ КВАНТОВОЙ АНОМАЛИИ

Связь между квантовой теорией поля и статистической физикой оказалась в центре внимания во многом благодаря обсуждению так называемых киральных эффектов (см., например, сборник обзоров [13]). В свою очередь, интерес к киральным эффектам связан с тем, что их можно представить как проявление квантовой аномалии в гидродинамическом или макроскопическом движении жидкости. Разъяснением этого обстоятельства мы во многом обязаны пионерской работе [14]. В ней рассматривается равновесное движение жидкости с киральным дисбалансом или аксиальным химическим потенциалом, отличным от нуля $\mu_5 \neq 0$, и в присутствии внешних электромагнитных полей, $\mathbf{E}, \mathbf{B} \neq 0$. Используется гидродинамическое приближение, или разложение по производным, и вязкостью пренебрегается, $\eta = 0$. Информация о динамике системы, как это обычно для гидродинамического приближения, заключена в законах сохранения. В частности, для аксиального тока $j_{\alpha,5}$:

$$\partial_\alpha j^{\alpha,5} = C_{\mathrm{anom}} e^2 (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}), \tag{7}$$

где e — заряд, а C_{anom} — константа, значение которой зависит от набора элементарных составляющих жидкости. В частности, для одного вейлевского спинора $C_{\mathrm{anom}} = 1/(4\pi^2)$.

Основное утверждение работы [14] состоит в том, что возникают макроскопические токи, пропорциональные C_{anom}. В частности, возникает ток, пропорциональный завихренности ω^α:

$$j^{\alpha,5}_{\mathrm{vortical}} = C_{\mathrm{anom}} \mu^2 \omega^\alpha. \tag{8}$$

Еще один пример — киральный магнитный эффект, или ток, текущий вдоль внешнего магнитного поля:

$$j^\alpha_{el} = C_{\mathrm{anom}} e \mu_5 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} u_\beta \partial_\gamma A_\delta, \tag{9}$$

где A_δ — вектор-потенциал электромагнитного поля. Отметим, что заряды, отвечающие токам (8), (9), отличны от нуля только при наличии винтовых конфигураций поля скоростей или электромагнитных полей. Например, $j^{0,5}_{\mathrm{vortical}} \sim \mathbf{v} \cdot \mathbf{\Omega}$, где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{\Omega}$ — обычная и угловая скорости соответственно.

Вывод киральных эффектов, данный в [14], прост сам по себе и основан на построении тока энтропии, удовлетворяющего условию роста энтропии, с учетом уравнений движения. Оказывается возможным предложить еще более простой вывод киральных эффектов, который сводится к простым алгебраическим манипуляциям известного выражения для треугольной аномалии.

Рассмотрим случай химического потенциала $\mu \neq 0$. В термодинамике следует перейти от начального гамильтониана системы $\hat{H}^0$ к новому «эффективному» гамильтониану

$$\hat{H} = \hat{H}^0 - \mu\hat{Q}, \tag{10}$$

где $Q = \int d^3x j^0(x)$ — оператор заряда, сопряженного химическому потенциалу μ. Усреднение с эффективным гамильтонианом (10) отвечает тому, что в состоянии равновесия энтропия максимальна. Удобно далее перейти от вариации $\delta\hat{H} = -\mu\hat{Q}$ к вариации лагранжиана δL, пользуясь известным правилом

$$\delta L = -\delta H = +\mu Q. \tag{11}$$

Введем далее плотность лагранжиана $\delta L(x)$. Лоренц-инвариантность $\delta L(x)$ достигается, как это обычно в гидродинамике, введением 4-скорости элемента жидкости u_α:

$$\delta L(x) = \mu u_\alpha j^\alpha(x). \tag{12}$$

Ключевой момент вывода — сходство между вариацией плотности лагранжиана (12) и плотностью лагранжиана электромагнитных взаимодействий, $L_{\rm el}(x) = eA_\alpha j^\alpha(x)$, $A_\alpha(x)$ — вектор-потенциал внешнего электромагнитного поля. Очевидно, что графики теории возмущений, генерируемые взаимодействием (12), могут быть получены из графиков, генерируемых электромагнитным взаимодействием, путем замены [15]

$$eA_\alpha \to eA_\alpha + \mu u_\alpha. \tag{13}$$

Применим теперь подстановку (13) к выражению для киральной аномалии.

Хорошо известно, что в случае $U(1)$-симметрии эффект аномалии можно свести к переопределению начального, или «наивного», выражения для сохраняющегося аксиального тока:

$$j^\alpha_{\rm conserved} = j^\alpha_{\rm naive} + C_{\rm anom}e^2 K^\alpha_{\rm el}, \tag{14}$$

$K^\alpha_{\rm el} = (1/2)\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}A_\beta\partial_\gamma A_\delta$. Введем вспомогательное поле «аксиального» фотона $\tilde{A}_\alpha$. Тогда можно сказать, что аномалия генерируется добавкой к действию:

$$\delta S = C_{\rm anom}e^2 \int d^4x\, \tilde{A}_\alpha K^\alpha_{\rm el}. \tag{15}$$

Следующим шагом заменяем $\tilde{A}_\alpha$ в согласии с (13) на $\mu_5 u_\alpha$ и, пользуясь определением электромагнитного тока через действие как $j^\alpha_{\rm el} = \delta S/\delta A_\alpha$, воспроизводим киральный магнитный эффект, см. (9). Аналогичным образом воспроизводится киральный вихревой эффект, см. (8).

Эти простые выкладки дают первое представление о вычислениях в рамках статистической теории возмущений, которую мы будем обсуждать. Статистическая теория возмущений — это разложение по таким величинам, как химический потенциал, характеризующим состояние равновесия. Довольно очевидно, что мы ограничены однопетлевым приближением, поскольку поле скоростей u_α можно рассматривать только как внешнее (и нельзя рассматривать обмен квантами этого поля). Применяя формулы (1), (2), (5), мы можем легко найти другие вершины взаимодействия, используемые в статистической теории возмущений, и включить в рассмотрение ускорение a_α и завихренность ω_α как внешние поля.

Статистическая теория возмущений может обладать специфическими свойствами, которые требуют отдельного рассмотрения. Приведем пример. С помощью замены (13) мы свели однопетлевое вычисление в статистической теории к однопетлевому вычислению в квантовой электродинамике. Однако электромагнитное взаимодействие — фундаментальное и вводится на малых расстояниях. В то время как взаимодействие с полем скоростей, см. (12), — эффективное, вводится в рамках термодинамики и может описывать физику на больших расстояниях, или в инфракрасной области. Известно, что аномальный матричный элемент аксиального тока в электродинамике определяется большими расстояниями. Поэтому киральный магнитный эффект и киральный вихревой эффект правильно воспроизводятся подстановкой (12).

В то же время киральная аномалия, $\partial_\alpha j^{\alpha,5} \sim e^2\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}$, связана с расходимостями теории поля на малых расстояниях, и учет влияния среды не может ее изменить. Однако чисто алгебраически замена (12) приводит к новым вкладам в дивергенцию тока. Чтобы избежать противоречия, должно выполняться условие

$$\partial_\alpha\left(\mu^2\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}u_\beta\partial_\gamma u_\delta\right) = 0. \tag{16}$$

Эти, казалось бы, несовместимые между собой требования на самом деле выполняются для идеальной жидкости за счет уравнений движения. В частности, соотношение (16) хорошо известно как сохранение «хелисити жидкости». То есть в случае идеальной жидкости существуют дополнительные законы сохранения, не принятые во внимание, скажем, в работе [14]. Дальнейшие детали и ссылки можно найти в работах [16, 17].

2. АНОМАЛИИ И ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ЗОММЕРФЕЛЬДА

В рамках статистического подхода киральный вихревой эффект был впервые обнаружен около 40 лет назад Виленкиным [18] без какого-либо обращения к киральной аномалии. Детальное рассмотрение позволяет установить (см. работы [19,20] и ссылки в них), что аналогом киральной аномалии в статистической квантовой теории поля является полиномиальность некоторых интегралов от распределения Ферми.

В частности, непосредственное статистическое усреднение матричного элемента тока дублета безмассовых правых фермионов сводит ток частиц J_N к следующему выражению:

$$J_N = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \epsilon^2 \, d\epsilon \Big(\frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon - (\mu + \Omega/2))}} - \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{\beta(\epsilon - (\mu - \Omega/2))}} \Big), \qquad (17)$$

где J_N — проекция тока правых частиц на направление вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$, $\beta = 1/T$, где T — температура. Первый член в скобках отвечает току частиц, а второй — античастиц.

Подчеркнем, что с точностью до общего множителя выражение (17) легко понять исходя из простых физических соображений. Действительно, под энергией ϵ в нулевом приближении следует понимать энергию свободных безмассовых частиц. Степень ϵ в подынтегральном выражении устанавливается из размерных соображений. Задача обладает цилиндрической симметрией, и квантовать частицы следует в терминах углового момента и его проекции на ось вращения. Киральные частицы обладают отрицательной проекцией спина на ось вращения, а античастицы — положительной. Этих наблюдений достаточно для понимания (17). Отдельно следует проверить, что спиновые эффекты не приводят к появлению отрицательных мод. Детальные выкладки, подтверждающие изложенные соображения, достаточно громоздки, см., например, оригинальный вывод кирального вихревого эффекта в [18].

Бросается в глаза простота окончательного ответа: эффект спина для киральных частиц сводится к сдвигу химического потенциала на $\pm\Omega/2$. Более того, правая часть (17) вычисляется явно и сводится к полиному по μ, Ω:

$$j_N = \Omega \left(\frac{\mu^2}{4\pi^2} + \frac{\Omega^2}{48\pi^2} + \frac{T^2}{12} \right). \qquad (18)$$

Указанная полиномиальность имеет место для разности интегралов в правой части (17). Каждый из интегралов представляет собой трансцендентную функцию параметров.

Полиномиальность (18) является аналогом аномалии в квантовой теории поля. Проще всего убедиться в этом на примере первого члена в правой части (18). Действительно, в этом члене легко узнать выражение для кирального вихревого эффекта, см. (8). С другой стороны, выше мы объяснили, как с помощью подстановки (13) киральный вихревой эффект непосредственно сводится к киральной аномалии теории поля.

Подчеркнем, что связь полиномиальных интегралов Зоммерфельда с аномалиями установлена к настоящему времени только в очень небольшом числе случаев. Последний и весьма нетривиальный пример относится к члену, пропорциональному T^2 в правой части (18). В работе [19] была продемонстрирована связь этого члена с гравитационной киральной аномалией,

$$\nabla_\alpha J^{\alpha,5} = (\text{const}) R_{\alpha\beta\gamma\delta} \tilde{R}^{\alpha\beta\gamma\delta}, \tag{19}$$

где $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — тензор Римана; $\tilde{R}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ — дуальный тензор Римана. Предлагается вычислить с помощью (19) поток киральных частиц с горизонта вращающейся черной дыры. Правая часть (19) отлична от нуля вблизи горизонта черной дыры и обращается в нуль на больших расстояниях. В работе [19] поток частиц вычислен интегрированием (19) по расстоянию. Ответ квадратичен по гравитационному ускорению вблизи горизонта и линеен по Ω в пределе малых Ω. Более того, ответ совпадает с термальным вкладом в правой части (18) при *условии*, что под Ω понимается угловая скорость вращения на горизонте, а под температурой T — температура Унру T_U, где

$$T_U = \frac{a}{2\pi} \tag{20}$$

и a — ускорение.

Видно, что путь от полиномиальности интегралов Зоммерфельда до аномалии квантовой теории поля может быть очень непростым. Возможна, однако, и другая точка зрения: существование любого полиномиального интеграла Зоммерфельда подразумевает знание точного (в однопетлевом приближении) ответа для некоторого матричного элемента в статистической теории возмущений. Но этот матричный элемент не обязательно связан с киральной аномалией. В частности, увеличивая степень энергии ϵ в подынтегральном выражении в соотношениях типа (17), можно получать полиномы сколь угодно высокого порядка. Выяснение физической интерпретации полиномиальных интегралов Зоммерфельда представляется увлекательной задачей.

3. УСКОРЕНИЕ

Как уже упоминалось, наибольший прогресс в последние год-два был достигнут в понимании эффектов ускорения среды. Мы рассмотрим нагретый газ безмассовых фермионов в состоянии равновесия во вращающейся и ускоренной системе координат. Для простоты ограничимся случаем, когда вектор угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ и вектор ускорения $\mathbf{a}$ параллельны друг другу.

Простые аргументы приводят нас тогда к неожиданному выводу [21], что естественно ожидать, что ускорение входит в распределение Ферми как мнимая часть химического потенциала. Действительно, вернемся к соотношению (17), которое демонстрирует, что влияние эффекта вращения на рассматриваемую систему сводится к сдвигу химического потенциала на $\pm\Omega/2$, где выбор знака определяется тем, идет ли речь о частице или античастице.

Эффективное взаимодействие, которое при этом учитывается, сводится к взаимодействию спина с полем вращения: $\delta\hat{H} = -\boldsymbol{\Omega}\cdot\hat{\mathbf{J}}$, где $\hat{\mathbf{J}}$ — угловой момент, или генератор вращений. Критичным является далее утверждение о том, что спектр частиц в поле вращения, входящий в распределение Ферми (17), относится к частицам с определенной проекцией спина на направление вектора $\boldsymbol{\Omega}$. В результате

$$\boldsymbol{\Omega}\cdot\hat{\mathbf{J}}\Psi_{L,R} = \pm\frac{\Omega}{2}\Psi_{L,R}, \tag{21}$$

$\Psi_{L,R}$ — левый или правый фермион соответственно.

Лоренц-инвариантная форма эффективного взаимодействия, описывающего равновесное состояние, подразумевает также включение члена с ускорением:

$$\delta\hat{H} = -\mathbf{a}\hat{\mathbf{K}}, \tag{22}$$

где $\hat{\mathbf{K}}$ — оператор буста. Центральным для нас является следующее соотношение:

$$\big(\boldsymbol{\Omega}\cdot\hat{\mathbf{J}} + \mathbf{a}\hat{\mathbf{K}}\big)\Psi_{L,R} = \pm\left(\frac{\Omega}{2} + \frac{ia}{2}\right)\Psi_{L,R}, \tag{23}$$

где предполагается, что векторы $\mathbf{a}$, $\boldsymbol{\Omega}$ параллельны.

Критично появление мнимой единицы перед ускорением a. Отметим, что при рассмотрении общей структуры группы Лоренца оператор буста $\hat{\mathbf{K}}$ полагается эрмитовым. Однако, как подчеркивается в учебниках по теории поля, использование базиса левых (правых) безмассовых фермионов не позволяет реализовать действие операторов $\hat{\mathbf{J}}$ и $\hat{\mathbf{K}}$ как эрмитовых. Обычно для операторов буста выбирают антиэрмитово представление (23) (удовлетворяющее тем не менее коммутационным соотношениям между операторами $\hat{K}_i$). Таким образом, ускорение a в распределении Ферми играет роль мнимой части химического потенциала.

Однако одно это наблюдение не позволяет написать общее представление для статистических средних значений матричных элементов в присутствии ускорения. Приближение, при котором роль ускорения сводится к мнимой части потенциала, отвечает использованию функции Вигнера [20]. При использовании же оператора Зубарева (6) необходимо еще учитывать некоммутативность гамильтониана $\hat{H}$ и оператора буста $\hat{K}$. Эта нетривиальная задача была решена только недавно и только в применении к разложению матричных элементов по ускорению [10]. Причем алгебраическая сложность возрастает значительно с каждым порядком теории возмущений.

Наиболее сложные вычисления к настоящему времени были выполнены в работе [2] и относятся к членам порядка a^4 в разложении плотности энергии $\rho_{s=1/2}$ ускоренного газа безмассовых фермионов. В этой же работе было предложено интегральное представление для $\rho_{s=1/2}$:

$$\rho_{s=1/2} = 2\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{p+ia}{1+\exp\left(\frac{p}{T}+\frac{ia}{2T}\right)}+\frac{p-ia}{1+\exp\left(\frac{p}{T}-\frac{ia}{2T}\right)}\right)+ \\ +4\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{p}{\exp\left(\frac{2\pi p}{a}\right)-1}, \quad (24)$$

где $p = |\mathbf{p}|, a = |\mathbf{a}|$. Представление (24) было предложено исходя из определенных теоретических посылок и выдержало ряд нетривиальных проверок (см. [2]). Более того, ожидается, что (24) верно во всех порядках разложения по ускорению a.

Интегралы в правой части (24) вычисляются точно, и при $T > T_U$ можно получить

$$\rho_{s=1/2} = \frac{7\pi^2T^4}{60} + \frac{T^2a^2}{24} - \frac{17a^4}{960\pi^2}. \quad (25)$$

Доказательство того, что интегралы, входящие в правую часть (24), представляют собой полином, дано в работе [1].

4. ДУАЛЬНОСТЬ МЕЖДУ КВАНТОВО-СТАТИСТИЧЕСКИМ И ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВЫМ ПОДХОДАМИ

Поскольку мы рассматриваем случай постоянного ускорения, естественно возникает мысль об использовании геометрического языка общей теории относительности. Действительно, согласно принципу эквивалентности ускорение системы координат можно имитировать введением внешнего гравитационного поля. В первом порядке по ускорению соответствующие формулы хорошо известны. Переход к криволинейному пространству осуществляется локально.

В нашем случае, однако, соотношение (24) должно быть верно во всех порядках теории возмущений по ускорению. Иными словами, можно ожидать, что ускорение учитывается точно. Но при точном учете ускоренного движения, как известно, происходит изменение глобальной структуры пространства: возникает горизонт, или пространство с границей. Это является вызовом теории: формула (24) должна каким-то образом «спроектировать» пространство Минковского (в котором развита теория возмущений по a) на пространство с границей.

Помимо ускорения статистические матричные элементы зависят от температуры. Как хорошо известно, в евклидовой сигнатуре температура также вводится геометрическим образом. Именно, «мнимое время» периодично с периодом, пропорциональным обратной температуре.

На языке формул метрика Риндлера имеет вид

$$ds^2 = -\rho^2 dt^2 + d\rho^2 + dx_\perp^2, \tag{26}$$

$x_\perp$ — координаты, перпендикулярные радиальной координате ρ, $1/\rho$ имеет смысл ускорения. В евклидовой сигнатуре

$$ds^2 = \rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 + dx_\perp^2, \tag{27}$$

где координата τ периодична: $\tau \sim \tau + \beta$.

Если выбрать $\beta = \beta_R = 2\pi$, то в координатах (ρ, τ) имеем обычное $2d$ плоское пространство. Температура определяется длиной окружности, $T^{-1} = 2\pi\rho$, и совпадает с температурой Унру, введенной выше (с учетом того, что ρ есть обратное ускорение). Таким образом, мы воспроизводим на геометрическом языке уже известный результат: наблюдатель, движущийся с ускорением a относительно вакуума Минковского, воспринимает нижнее по энергии состояние как среду, нагретую до температуры Унру $T_U = a/(2\pi)$.

Это наблюдение одновременно означает, что выбранная нами геометрия оказалась неадекватной поставленной задаче. Температура и ускорение однозначно связаны между собой для пространства Риндлера, в то время как в статистической теории возмущений мы вычисляем матричные элементы как функции ускорения и температуры, которые рассматриваются как независимые величины. Следует поэтому обратиться к пространству Риндлера с конической сингулярностью при $\rho = 0$. Иными словами, выбрать период по координате τ равным не $\beta_R = 2\pi$, а $\beta < 2\pi$, где знак неравенства оправдывается наглядными геометрическими соображениями. Ценой введения конической сингулярности мы добиваемся независимости температуры и ускорения.

Следующим шагом является вычисление однопетлевого выражения для тензора энергии-импульса частиц, живущих в пространстве Риндлера с конической сингулярностью. Такого рода вычисления были проведены в ряде работ. Приведем ответ для безмассовых частиц спина $s = 0, 1/2, 1$ [22, 23]:

$$\langle T_\mu^\nu \rangle_R = -\frac{h(s)}{2\pi^2\rho^4} \int\limits_0^\infty \frac{d\nu\,\nu(\nu^2 + s^2)}{\mathrm{e}^{2\pi\nu} - (-1)^{2s}}\, \mathrm{diag}\left(-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \tag{28}$$

где $h(s)$ — число безмассовых состояний частиц со спином s. После взятия интеграла для интересующего нас сейчас случая $s = 1/2$ было получено

$$\langle T_0^0 \rangle_{s=1/2} = \frac{7\pi^2}{120\beta^4\rho^4} + \frac{1}{48\beta^2\rho^4} - \frac{17}{1920\pi^2\rho^4}, \tag{29}$$

где $\beta\rho = (2\pi \cdot T_U)/(a \cdot T) = 1/T$. Выражение (29) совпадает с (25) с точностью до фактора 2, который связан с различием вкладов дираковских (формула (25)) и вейлевских (формула (29)) спиноров.

Отметим, что хотя мы констатировали тождественность конечных ответов для плотности энергии в рамках статистической теории и теории поля, в теории поля однозначный ответ получен с помощью вычитания вакуумной энергии пространства Минковского, которая полагается равной нулю. Иными словами, в теории поля зануление плотности энергии (29) при температуре Унру накладывается как требование. В то время как в рамках статистического подхода конечный ответ (25) следует непосредственно из вычислений, без дополнительных вычитаний. Этот удивительный факт не получил еще ясной физической интерпретации.

Это обстоятельство лишний раз подчеркивает, что мы имеем дуальность двух различных теорий поля. Теория поля на пространстве с границей сформулирована в терминах фундаментального взаимодействия, или на малых расстояниях. Статистическая теория имеет дело с эффективным взаимодействием, которое может быть введено только в контексте термодинамического равновесия, или на больших расстояниях. Соответственно, структура расходимостей в двух теориях тоже разная, и поэтому вычисления в двух теориях скорее дополняют, чем повторяют друг друга. Первые примеры такой дополнительности можно найти в работе [1].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вычисления эффектов ускорения в средах получили значительное развитие. Уже теория возмущений по ускорению в квантовой статистике [8–10], основанная на формализме [11, 12], в высшей степени нетривиальна из-за некоммутативности гамильтониана и оператора буста как с вычислительной, так и с принципиальной точек зрения. Разработанные методы [8–10] получили решающее подтверждение путем сравнения результатов с полученными другими методами, см. обсуждение выше.

Впервые сформулированы возможные непертурбативные подходы в статистической квантовой (однопетлевой) теории. Решающим является наблюдение, что многие матричные элементы выражаются через полиномиальные интегралы Зоммерфельда. На языке интегралов Зоммерфельда воспроизводятся известные следствия из киральных аномалий теории поля. Более того, полиномиальность однопетлевых вкладов в статистической теории может оказаться обобщением феномена аномалий. Показано, что ускорение может рассматриваться как мнимая часть химического потенциала. Обнаружены примеры дуальности квантовой теории поля и квантовой статистической теории. Во всех случаях речь идет, скорее, о многообещающих первых шагах, чем о законченном теоретическом развитии.

Несколько слов о возможных приложениях полученных результатов. Соотношение (24) демонстрирует, что плотность энергии как функция температуры неаналитична при температуре Унру $T_U = a/(2\pi)$ [1]. Более того, формула (24) допускает аналитическое продолжение в область температур ниже температуры Унру. Температура Унру T_U оказывается точкой фазового перехода второго рода; состояния с температурой ниже T_U нестабильны. «Новая аналитичность» является проявлением того, что ускорение играет роль мнимой части химического потенциала [21]. Хотя буквально утверждение о нестабильности в точке Унру получено в однопетлевом приближении и для свободных фермионов, можно думать, что оно универсально и применимо, в частности, с учетом конфайнмента. Аналогично тому, как универсально утверждение о том, что ускоренный наблюдатель видит тепловое распределение частиц с температурой T_U. В конечном счете эта универсальность восходит к принципу эквивалентности. Новое (хотя и косвенное) подтверждение этой идеи представляет собой обнаруженная дуальность (см. выше). Не исключено поэтому, что феноменологические следствия из указанного фазового перехода и нестабильности в точке Унру могут быть обнаружены при столкновениях тяжелых ионов (обсуждение и дальнейшие ссылки см. в [1]).

Благодарности. Мы благодарны В. Ф. Муханову за полезные обсуждения и комментарии. Настоящая работа поддержана Российским научным фондом, грант № 16-12-10059.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Prokhorov G. Y., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Thermodynamics of Accelerated Fermion Gases and Their Instability at the Unruh Temperature // Phys. Rev. D. 2019. V. 100, No. 12. P. 125009; doi:10.1103/PhysRevD.100.125009; arXiv:1906.03529 [hep-th].
2. *Prokhorov G. Y., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Unruh Effect for Fermions from the Zubarev Density Operator // Phys. Rev. D. 2019. V. 99. P. 071901–071908; arXiv:1903.09697 [hep-th].
3. *Prokhorov G. Y., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Calculation of Acceleration Effects Using the Zubarev Density Operator // Particles. 2020. V. 3, No. 1. P. 1; doi:10.3390/particles3010001; arXiv:1911.04563 [hep-th].
4. *Prokhorov G. Y., Teryaev O. V., Zakharov V. I.* Effects of Rotation and Acceleration in the Axial Current: Density Operator vs Wigner Function // JHEP. 2019 V. 1902. P. 146–160; arXiv:1807.03584 [hep-th].
5. *Abelev B. I. et al. (STAR Collab.).* Global Polarization Measurement in Au + Au Collisions // Phys. Rev. C. 2007. V. 76. P. 024915–024922; arXiv:0705.1691 [nucl-ex].
6. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* Statistical Physics. Elsevier, 2013.
7. *Florkowski W., Speranza E., Becattini F.* Perfect-Fluid Hydrodynamics with Constant Acceleration Along the Stream Lines and Spin Polarization // Acta Phys. Polon. B. 2018. V. 49. P. 1409–1420.

8. *Buzzegoli M., Grossi E., Becattini F.* General Equilibrium Second-Order Hydrodynamic Coefficients for Free Quantum Fields // JHEP. 2017. V. 1710. P. 091; arXiv:1704.02808 [hep-th].
9. *Buzzegoli M., Grossi E., Becattini F.* Reworking the Zubarev's Approach to Non-Equilibrium Quantum Statistical Mechanics // Particles. 2019. V. 2. P. 197–207; arXiv:1902.01089 [cond-mat.stat-mech].
10. *Becattini F.* Thermodynamic Equilibrium with Acceleration and the Unruh Effect // Phys. Rev. D. 2018. V. 97. P. 085013–08519; arXiv:1712.08031 [gr-qc].
11. *Zubarev D. N.* Nonequilibrium Statistical Thermodynamics. M.: Nauka, 1971 (English translation: New York: Consultant Bureau, 1974).
12. *Zubarev D. N., Prozorkevich A. V., Smolyanskii S. A.* Derivation of Nonlinear Generalized Equations of Quantum Relativistic Hydrodynamics // Theor. Math. Phys. 1979. V. 40. P. 821–831.
13. *Kharzeev D., Landsteiner K., Schmitt A., Yee H.-Y.* Strongly Interacting Matter in Magnetic Fields // Lect. Notes Phys. 2013. V. 873. P. 1–624.
14. *Son D. T., Surowka P.* Hydrodynamics with Triangle Anomalies // Phys. Rev. Lett. 2009. V. 103. P. 191601–191604; arXiv:0906.5044 [hep-th].
15. *Sadofyev A. V., Shevchenko V. I., Zakharov V. I.* Notes on Chiral Hydrodynamics within Effective Theory Approach // Phys. Rev. D. 2011. V. 83. P. 105025–105028; arXiv:1012.1958 [hep-th].
16. *Zakharov V. I.* Notes on Conservation Laws in Chiral Hydrodynamics. arXiv:1611.09113 [hep-th].
17. *Avdoshkin A. S., Kirilin V. P., Sadofyev A. V., Zakharov V. I.* On Consistency of Hydrodynamic Approximation for Chiral Media // Phys. Lett. B. 2016. V. 755. P. 1–7; arXiv:1402.3587 [hep-th].
18. *Vilenkin A.* Quantum Field Theory at Finite Temperature in a Rotating System // Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 2260–2269.
19. *Stone M., Kim J.* Mixed Anomalies: Chiral Vortical Effect and the Sommerfeld Expansion // Phys. Rev. D. 2018. V. 98. P. 025012–025018; arXiv:1804.08668 [cond-mat.mes-hall].
20. *Prokhorov G., Teryaev O. V.* Anomalous Current from the Covariant Wigner Function // Phys. Rev. D. 2018. V. 97. P. 076013–076019; arXiv:1707.02491 [hep-th].
21. *Prokhorov G., Teryaev O., Zakharov V. I.* Axial Current in Rotating and Accelerating Medium // Phys. Rev. D. 2018. V. 98. P. 071901; arXiv:1805.12029 [hep-th].
22. *Dowker J.* Remarks on Geometric Entropy // Class. Quant. Grav. 1994. V. 11. P. L55–L60; arXiv:hep-th/9401159 [hep-th].
23. *Candelas P., Deutsch D.* Fermion Fields in Accelerated States // Proc. Roy. Soc. London. A. 1978. V. 362. P. 251; doi:10.1098/rspa.1978.0132.