ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА
2020. Т. 51. ВЫП. 4. С. 665–674

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ БЕЗМАССОВОГО ПОЛЯ ДИРАКА С 2D-МАТЕРИАЛОМ В МОДЕЛИ, ПОСТРОЕННОЙ В РАМКАХ ПОДХОДА СИМАНЗИКА

Ю. М. Письмак [1,*], *О. Ю. Шахова* [2]

[1] Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

[2] Военно-медицинская академия им. С. М. Кирова, Санкт-Петербург, Россия

На основе метода, предложенного К. Симанзиком для моделирования квантово-полевых систем в неоднородном пространстве-времени, построена модель взаимодействия безмассового поля Дирака с однородной изотропной плоскостью. В этой модели изучается процесс рассеяния частиц на плоскости и рассчитывается сила Казимира для двух параллельных плоскостей.

Based on the method proposed by Symanzik for modeling quantum field systems in inhomogeneous space-time, a model for the interaction of the Dirac massless field with a homogeneous isotropic plane is constructed. In this model, the process of scattering of particles on a plane is studied, and the Casimir force for two parallel planes is calculated.

PACS: 12.20.-m; 11.10.Ef; 73.43.Cd

ВВЕДЕНИЕ

Взаимодействие квантованных полей с макроскопическими объектами в настоящее время представляет интерес для многих физиков-исследователей. Большие надежды связаны с возможностью проявления необычных квантовых эффектов в низкоразмерных материалах. Задача построения и теоретического исследования моделей физики двумерных материалов на основе использования новейших достижений в области квантовой теории поля и теории элементарных частиц остается весьма актуальной.

Для этого можно использовать предложенный К. Симанзиком метод построения квантовых полевых моделей для систем с пространственно-временными неоднородностями [1]. На его основе построены и изучены модели

*E-mail: ypismak@gmail.com

взаимодействия полей квантовой электродинамики с двумерными материалами [2–12]. В этих моделях для фотонного поля и поля Дирака получен ряд результатов для процессов рассеяния и связанных состояний частиц на макроскопических объектах и эффекта Казимира для тонких пленок.

В настоящей работе мы строим на основе подхода Симанзика модель взаимодействия безмассового спинорного поля с двумерными материалами. Для массивных дираковских частиц такие модели уже построены и в значительной степени изучены [6–12]. Безмассовое спинорное поле используется для описания нейтрино, которые очень слабо взаимодействуют с веществом, что затрудняет их экспериментальное изучение. Поэтому теоретические исследования в рамках использованного подхода могут быть полезны для углубления общего понимания физики нейтрино. В этой работе мы рассчитываем характеристики рассеяния безмассовых спинорных частиц на материальной плоскости, а также изучаем эффект Казимира для двух параллельных плоскостей, возникающий из-за флуктуаций в квантовом вакууме безмассового спинорного поля.

Простейшим применением подхода Симанзика для моделирования взаимодействия безмассового поля Дирака с двумерным материалом могла бы быть модификация функционала действия свободного безмассового поля Дирака

$$S_0(\bar{\psi}, \psi) = \int \bar{\psi}(x) i\, \hat{\partial}\psi(x)\, dx \tag{1}$$

добавкой к нему действия дефекта $S_{\rm def}(\bar{\psi}, \psi)$, сосредоточенного на двумерной поверхности в $(3+1)$-мерном пространстве-времени. Предполагается, что оно не содержит параметров отрицательной размерности (ограничение перенормируемости) и является калибровочно-инвариантным. Если форма двумерного материала описывается уравнением $\Phi(x) = 0$, то наиболее общая форма действия дефекта имеет вид

$$S_{\rm def}(\bar{\psi}, \psi, \Phi) = \int \bar{\psi}(x)\, P(\gamma)\delta(\Phi(x))\, \psi(x)\, dx. \tag{2}$$

Здесь $P(\gamma)$ — это многочлен, построенный из 16 независимых γ-матриц Дирака с безразмерными коэффициентами. Таким образом, функционал полного действия $S(\bar{\psi}, \psi, \Phi) = S_0(\bar{\psi}, \psi) + S_{\rm def}(\bar{\psi}, \psi, \Phi)$ оказывается гауссовым и содержит не более 16 постоянных параметров, описывающих свойства материала двумерной поверхности.

Аналогично построенные модели использовались для исследования взаимодействия массивной дираковской частицы с материальной плоскостью [7–12]. В этой статье мы исследуем процессы рассеяния безмассовых дираковских частиц на однородной изотропной материальной плоскости и вычислим силу Казимира между двумя параллельными плоскостями, возникающую из-за вакуумных флуктуаций безмассового поля Дирака.

1. РАССЕЯНИЕ ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ НА МАТЕРИАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Действие $S_0(\bar{\psi}\psi)$ (1) свободного безмассового поля Дирака инвариантно относительно преобразования полей $\psi \to \gamma^5\psi$, $\bar{\psi} \to -\bar{\psi}\gamma^5$, где $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ и γ^j, $j = 0, 1, 2, 3,$ — это матрицы Дирака.

Мы предполагаем, что действие дефекта также должно удовлетворять этому условию. Тогда его наиболее общий вид для изотропной однородной плоскости $x_3 = 0$

$$S_{\mathrm{def}}(\bar{\psi}, \psi, \Omega) = \int \bar{\psi}(x)\Omega(x_3)\psi(x)\,dx, \quad \Omega(x_3) = Q\delta(x_3), \tag{3}$$

$$Q = r_1\gamma^0 + r_2\gamma^3 + r_3\gamma^5\gamma^0 + r_4\gamma^5\gamma^3. \tag{4}$$

Оператор $\mathcal{D} = i\hat{\partial}$ в функционале действия свободных полей Дирака (1) и его эрмитово сопряжение $\mathcal{D}^\dagger$ удовлетворяют соотношению $\gamma^0\mathcal{D}\gamma^0 = \mathcal{D}^\dagger$. Мы налагаем ограничение $\gamma^0 Q\gamma^0 = Q^\dagger$, чтобы взаимодействие поля Дирака с плоскостью $x^3 = 0$ обеспечивало унитарность матрицы рассеяния. Это означает, что параметры $r_1, \ldots, r_4$, определяющие в (4) матрицу Q, — это действительные числа. Таким образом, функционал полного действия, моделирующий взаимодействие материальной плоскости с безмассовым спинорным полем, имеет вид

$$S(\bar{\psi}, \psi, \Omega) = \int \bar{\psi}(x)(i\hat{\partial} + \Omega(x_3))\,\psi(x)\,dx. \tag{5}$$

Уравнение Эйлера–Лагранжа для $S(\bar{\psi}, \psi, \Omega)$ — это модифицированное уравнение Дирака

$$(i\hat{\partial} + Q\delta(x_3))\psi(x) = 0. \tag{6}$$

Его решение $\psi(x)$ с неисчезающей асимптотикой для $x^3 \to \pm\infty$ описывает рассеяние спинорной частицы на плоскости $x^3 = 0$. Мы проведем расчет наиболее важных характеристик этого процесса.

Обозначим $\psi^{(-)}(x) \equiv \psi(x)$ для $x_3 < 0$ и $\psi^{(+)}(x) \equiv \psi(x)$ для $x_3 > 0$, где $\psi(x)$ является решением модифицированного уравнения Дирака (6). Спиноры $\psi(x)$, $\psi^{(\pm)}(x)$ для $x_3 \neq 0$ удовлетворяют свободному безмассовому уравнению Дирака и граничному условию

$$\lim_{x^3 \to +0} \psi^{(+)}(x) = S \lim_{x^3 \to -0} \psi^{(-)}(x). \tag{7}$$

Рассмотрим процесс рассеяния, в котором падающие и отраженные частицы находятся в области $x^3 < 0$, а прошедшие частицы движутся в положительном направлении оси x^3 в области $x^3 > 0$. В этом случае функции $\psi^{(\pm)}$ могут быть представлены в виде $\psi^{(-)}(x) = \psi^{(-)}_{\uparrow}(x) + \psi^{(-)}_{\downarrow}(x)$,

$\psi^{(+)}(x) = \psi_{\uparrow}^{(+)}(x)$, где $\psi_{\uparrow}^{(\pm)}(x)\,(\psi_{\downarrow}^{(-)}(x))$ описывает частицу, которая движется в положительном (отрицательном) направлении оси x^3. Если функция $\psi(x)$ не является непрерывной при $x^3 = 0$, то $S \neq 1$ в уравнении (7), и нужно использовать вспомогательную регуляризацию $\delta(x^3)$-функции в уравнении (6), чтобы выразить матрицу S в терминах Q. Применив предложенную в [11] регуляризацию, получаем следующий результат:

$$S = \mathrm{e}^{-i\gamma^3 Q}. \tag{8}$$

Используя проекторы $P_\pm = (1 \pm \gamma^5)/2$, мы можем представить решение уравнения Дирака в виде $\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)$, где $\psi_\pm(x) = P_\pm\psi(x)$ и оба спинора $\psi_+(x), \psi_-(x)$ удовлетворяют уравнению (6). В силу $P_\pm\gamma_3 Q = \gamma_3 Q P_\pm$ матрица S, заданная в (8), также коммутирует с проекторами $P_\pm$. Поэтому, если мы обозначим $S_\pm = P_\pm S$, $\psi_\pm^{(+)} = P_\pm\psi^{(+)}$, $\psi_\pm^{(-)} = P_\pm\psi^{(-)}$, то

$$\psi_\pm^{(+)}(x) = S_\pm\psi_\pm^{(-)}(x),\ \psi_\pm^{(+)}(x) = P_\pm\psi_\uparrow^{(+)}(x) = \psi_{\uparrow\pm}^{(+)}(x), \tag{9}$$

$$\psi_\pm^{(-)}(x) = P_\pm\psi_\uparrow^{(-)}(x) + P_\pm\psi_\downarrow^{(-)}(x) = \psi_{\uparrow\pm}^{(-)}(x) + \psi_{\downarrow\pm}^{(-)}(x), \tag{10}$$

где спиноры $\psi_{\uparrow\pm}^{(+)}(x),\ \psi_{\uparrow\pm}^{(-)}(x),\ \psi_{\downarrow\pm}^{(-)}(x)$ являются решениями свободного безмассового уравнения Дирака. Спинор $\psi_\pm(x) = P_\pm\psi(x)$ может иметь только две произвольные компоненты, так как может быть записан в виде $\psi_\pm(x) = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \pm\varphi_1(x), \pm\varphi_2(x)\}$. Решение свободного безмассового уравнения Дирака в виде плоской волны с заданным импульсом p определяется с точностью до произвольного множителя:

$$\psi_{\uparrow+}^{(-)}(x) = c_{\mathrm{in}+}\{p^1 - ip^2, p^0 - p^3, p^1 - ip^2, p^0 - p^3\}\mathrm{e}^{-i(p_0x^0 + p_1x^1 + p_2x^2 + p_3x^3)},$$
$$\psi_{\downarrow+}^{(-)}(x) = c_{r+}\{p^1 - ip^2, p^0 + p^3, p^1 - ip^2, p^0 + p^3\}\mathrm{e}^{-i(p_0x^0 + p_1x^1 + p_2x^2 - p_3x^3)},$$
$$\psi_{\uparrow+}^{(+)}(x) = c_{\mathrm{tr}+}\{p^1 - ip^2, p^0 - p^3, p^1 - ip^2, p^0 - p^3\}\mathrm{e}^{-i(p_0x^0 + p_1x^1 + p_2x^2 + p_3x^3)},$$
$$\psi_{\uparrow-}^{(-)}(x) = c_{\mathrm{in}-}\{-p^1 + ip^2, p^0 + p^3, p^1 - ip^2, -p^0 - p^3\}\mathrm{e}^{-i(p_0x^0 + p_1x^1 + p_2x^2 + p_3x^3)},$$
$$\psi_{\downarrow-}^{(-)}(x) = c_{r-}\{-p^1 + ip^2, p^0 - p^3, p^1 - ip^2, -p^0 + p^3\}\mathrm{e}^{-i(p_0x^0 + p_1x^1 + p_2x^2 - p_3x^3)},$$
$$\psi_{\uparrow-}^{(+)}(x) = c_{\mathrm{tr}-}\{-p^1 + ip^2, p^0 + p^3, p^1 - ip^2, -p^0 - p^3\}\mathrm{e}^{-i(p_0x^0 + p_1x^1 + p_2x^2 + p_3x^3)}.$$

Подстановка этих спиноров в (9), (10) дает следующие результаты:

$$c_{r+} = \frac{c_{\mathrm{in}+}(p^3 - p^0)\sin(u_+ + u_-)\,\mathrm{e}^{2ip_3x_3}}{ip^3\cos(u_+ + u_-) + p^0\sin(u_+ + u_-)},$$
$$c_{\mathrm{tr}+} = \frac{ic_{\mathrm{in}+}p^3\,\mathrm{e}^{i(u_+ - u_-)}}{ip^3\cos(u_+ + u_-) + p^0\sin(u_+ + u_-)},$$

$$c_{r-} = \frac{c_{\mathrm{in}-}(-p^3 - p^0)\sin(v_+ + v_-)\,\mathrm{e}^{2ip_3x_3}}{ip^3\cos(v_+ + v_-) + p^0\sin(v_+ + v_-)},$$

$$c_{\mathrm{tr}-} = \frac{ic_{\mathrm{in}-}p^3\,\mathrm{e}^{i(v_+ - v_-)}}{ip^3\cos(v_+ + v_-) + p^0\sin(v_+ + v_-)}.$$

Здесь использованы обозначения

$$u_+ = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 - r_3 - r_4), \qquad u_- = \frac{1}{2}(r_1 - r_2 - r_3 + r_4),$$
$$v_+ = \frac{1}{2}(r_1 - r_2 + r_3 - r_4), \qquad v_- = \frac{1}{2}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4).$$

Обозначив $j_\pm^{(+)}$ и $j_\pm^{(-)}$ токи, протекающие в положительном направлении оси x^3 при $x^3 > 0$ и при $x^3 < 0$, получим

$$j_\pm^{(+)} = \bar\psi_{\uparrow+}^{(+)}\gamma^3\psi_{\uparrow+}^{(+)} = 4p^3|c_{\mathrm{tr}\pm}|^2(p^0 \mp p^3),$$
$$j_\pm^{(-)} = \bar\psi_{\uparrow\pm}^{(-)}\gamma^3\psi_{\uparrow\pm}^{(-)} + \bar\psi_{\downarrow\pm}^{(-)}\gamma^3\psi_{\downarrow\pm}^{(-)} = 4p^3(|c_{\mathrm{in}\pm}|^2(p^0 \mp p^3) - |c_{r\pm}|^2(p^0 \pm p^3)).$$

Используя приведенные выше выражения для $c_{r\pm}$, $c_{\mathrm{tr}\pm}$, можно проверить, что $j_\pm^{(+)} = j_\pm^{(-)}$. Это означает, что ток, текущий параллельно оси x^3, при пересечении плоскости $x^3 = 0$ является непрерывным.

Для рассматриваемого процесса рассеяния мы определяем коэффициенты прохождения $K_{\mathrm{tr}\pm}$ и коэффициенты отражения $K_{r\pm}$ как

$$K_{\mathrm{tr}\pm} = \frac{j_\pm^{(+)}}{\bar\psi_{\uparrow\pm}^{(-)}\gamma^3\psi_{\uparrow\pm}^{(-)}} = \frac{|c_{\mathrm{tr}\pm}|^2}{|c_{\mathrm{in}\pm}|^2}, \quad K_{r\pm} = -\frac{\bar\psi_{\downarrow\pm}^{(-)}\gamma^3\psi_{\downarrow\pm}^{(-)}}{\bar\psi_{\uparrow\pm}^{(-)}\gamma^3\psi_{\uparrow\pm}^{(-)}} = \frac{|c_{r\pm}|^2(p^0 \pm p_3)}{|c_{\mathrm{in}\pm}|^2(p^0 \mp p^3)}.$$

Их можно представить в виде

$$K_{\mathrm{tr}+} = \frac{p_3^2}{p_3^2\cos(u_+ + u_-)^2 + p_0^2\sin(u_+ + u_-)^2},$$
$$K_{r+} = \frac{(p_0^2 - p_3^2)\sin(u_+ + u_-)^2}{p_3^2\cos(u_+ + u_-)^2 + p_0^2\sin(u_+ + u_-)^2},$$
$$K_{\mathrm{tr}-} = \frac{p_3^2}{p_3^2\cos(v_+ + v_-)^2 + p_0^2\sin(v_+ + v_-)^2},$$
$$K_{r-} = \frac{(p_0^2 - p_3^2)\sin(v_+ + v_-)^2}{p_3^2\cos(v_+ + v_-)^2 + p_0^2\sin(v_+ + v_-)^2}.$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты отражения и прохождения удовлетворяют соотношению $K_{\mathrm{tr}\pm} + K_{r\pm} = 1$. Мы видим, что частица, движущаяся ортогонально плоскости $x^3 = 0$ ($p_3^2 = p_0^2$), не отражается от нее. В этом случае коэффициент прохождения равен единице, а коэффициент отражения равен нулю. При углах падения, близких к $\pi/2$ ($p_3^2 \ll p_0^2$), коэффициент отражения становится близким к единице.

2. СИЛА КАЗИМИРА

Сила Казимира возникает между макроскопическими объектами из-за флуктуаций квантовых вакуумных полей. Мы проведем ее расчеты для двух параллельных материальных плоскостей, используя функционал действия

$$S(\bar{\psi}, \psi, \Theta) = \int \bar{\psi}(x)(i\hat{\partial} + \Theta(x_3))\, \psi(x)\, dx, \tag{11}$$

где $\Theta(x_3) = Q_a\delta(x^3 - r/2) + Q_b\delta(x^3 + r/2)$, $Q_a = a_1\gamma^0 + a_2\gamma^3 + a_3\gamma^5\gamma^0 + a_4\gamma^5\gamma^3$, $Q_b = b_1\gamma^0 + b_2\gamma^3 + b_3\gamma^5\gamma^0 + b_4\gamma^5\gamma^3$. Обозначим

$$G(\Theta) = c\int \mathrm{e}^{iS(\bar{\psi},\psi,\Theta)} D\bar{\psi}D\psi, \quad c^{-1} = \int \mathrm{e}^{iS_0(\bar{\psi},\psi)} D\bar{\psi}D\psi. \tag{12}$$

Функция $G(\Theta)$ зависит от параметров a_k, b_k и расстояния r между поверхностями. Силу Казимира (давление Казимира) F_{Cas} можно выразить через производную от $\ln G(\Theta)$:

$$TSF_{\mathrm{Cas}} = -i\frac{\partial}{\partial r}\ln G(\Theta). \tag{13}$$

Здесь $S = \int dx^1 dx^2$ — площадь дефекта плоскостей; $T = \int dx_0$ — время существования дефекта. Если мы заменим в функциональном интеграле (12) переменную интегрирования $\psi(x)$: $\psi(x) = \{\psi_1(x), \psi_2(x), \psi_3(x), \psi_4(x)\} \to \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \chi_1(x), \chi_2(x)\}$, где

$$\psi_1 = \frac{\varphi_1 + \chi_1}{\sqrt{2}}, \quad \psi_2 = \frac{\varphi_2 + \chi_2}{\sqrt{2}}, \quad \psi_3 = \frac{\varphi_1 - \chi_1}{\sqrt{2}}, \quad \psi_4 = \frac{\varphi_2 - \chi_2}{\sqrt{2}},$$

то функционал действия в терминах новых полей будет иметь вид

$$S(\bar{\psi}, \psi, \Theta) = S_1(\bar{\varphi}, \varphi, \Lambda_1) + S_2(\bar{\chi}, \chi, \Lambda_2),$$
$$S_1(\bar{\varphi}, \varphi, \Lambda_1) = \bar{\varphi}K_1\varphi + \bar{\varphi}\Lambda_1\varphi, \quad S_2(\bar{\chi}, \chi, \Lambda_2) = \bar{\chi}K_2\chi + \bar{\chi}\Lambda_2\chi.$$

Здесь $\bar{\varphi}, \varphi$, $\bar{\chi}, \chi$ — двухкомпонентные комплексные поля: $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$, $\bar{\varphi} = \varphi^* = \{\varphi_1^*, \varphi_2^*\}$, $\chi = \{\chi_1, \chi_2\}$, $\bar{\chi} = \chi^* = \{\chi_1^*, \chi_2^*\}$ (звездочкой обозначено комплексное сопряжение). Это означает, что функциональный интеграл (12) факторизуется. Он является произведением интеграла по полям $\bar{\varphi}, \varphi$ на интеграл по полям $\bar{\chi}, \chi$, и каждый из них вносит свой вклад в силу Казимира.

Введем обозначения τ_0 для единичной 2×2-матрицы и τ_i, $i = 1, 2, 3$, для матрицы Паули. Используя их, мы можем представить операторы K_1, K_2 в виде $K_1 = i(\tau_0 \partial^0 - \boldsymbol{\tau \partial})$, $K_2 = i(\tau_0 \partial^0 + \boldsymbol{\tau \partial})$. Матрицы Λ_1, Λ_2 являются диагональными:

$$\Lambda_1 = A_1 \delta(x^3 - r/2) + B_1 \delta(x^3 + r/2),$$
$$\Lambda_2 = A_2 \delta(x^3 - r/2) + B_2 \delta(x^3 + r/2),$$

$$A_1 = (a_1 - a_3)\tau_0 + (a_2 - a_4)\tau_3, \qquad B_1 = (b_1 - b_3)\tau_0 + (b_2 - b_4)\tau_3,$$
$$A_2 = (a_1 + a_3)\tau_0 - (a_2 + a_4)\tau_3, \qquad B_2 = (b_1 + b_3)\tau_0 - (b_2 + b_4)\tau_3.$$

Если сделать замену переменных $\bar{\chi}, \chi \to \bar{\eta}, \eta$: $\chi(x^0, \mathbf{x}) = \eta(x^0, -\mathbf{x})$, $\bar{\chi}(x^0, \mathbf{x}) = \bar{\eta}(x^0, -\mathbf{x})$, то

$$S_2(\bar{\chi}, \chi, \Lambda_2) = \bar{\eta} K_1 \eta + \bar{\eta} \tilde{\Lambda}_2 \eta, \quad \tilde{\Lambda}_2 = A_2 \delta(x^3 + r/2) + B_2 \delta(x^3 - r/2).$$

Таким образом, для расчета давления Казимира в рассматриваемой модели достаточно вычислить интеграл вида

$$G(r, u, v) = c \int \mathrm{e}^{i(\bar{\varphi} K_1 \varphi + \bar{\varphi} H(u,v,r)\varphi)} D\bar{\varphi} D\varphi, \quad c^{-1} = \int \mathrm{e}^{i\bar{\varphi} K_1 \varphi} D\bar{\varphi} D\varphi. \quad (14)$$

Здесь

$$\bar{\varphi} H(u, v, r)\varphi = \int \bar{\varphi}(x)((u_1 P_1 + u_2 P_2)\ \delta(x^3 - r/2) + \\ + (v_1 P_1 + v_2 P_2)\delta(x^3 + r/2))\varphi(x)\, dx,$$

где u_1, u_2, v_1, v_2 — вещественные безразмерные параметры и $P_1 = (\tau_0 + \tau_3)/2$, $P_2 = (\tau_0 - \tau_3)/2$.

Не вдаваясь в детали расчета $G(r, u, v)$, мы укажем только на некоторые из его особенностей. Использование вспомогательного интегрирования по четырехкомпонентным фермионным полям $\bar{\xi}, \xi$, не зависящим от координаты x^3, дает возможность преобразовать подынтегральное выражение $G(r, u, v)$ в (14) так, что его квадратичная форма по полям $\bar{\varphi}, \varphi$ в показателе экспоненты приобретает вид $\bar{\varphi} K_1 \varphi$. После этого, используя вспомогательную регуляризацию дельта-функций, мы можем проинтегрировать по полям $\bar{\varphi}, \varphi$ и удалить затем регуляризацию. В результате получаем гауссов интеграл по вспомогательным фермионным полям $\bar{\xi}, \xi$ с квадратичной формой $\bar{\xi} \mathcal{D} \xi$ с матрицей $\mathcal{D}$, которая в импульсном представлении имеет вид

$$\mathcal{D}(p) = \\ = \frac{1}{\mathtt{p}} \begin{pmatrix} p^0 + \dfrac{2\mathtt{p}}{u_1} & p^1 - ip^2 & \mathrm{e}^{-r\mathtt{p}}(p^0 - i\mathtt{p}) & \mathrm{e}^{-r\mathtt{p}}(p^1 - ip^2) \\ p^1 + ip^2 & p^0 + \dfrac{2\mathtt{p}}{v_1} & \mathrm{e}^{-r\mathtt{p}}(p^1 + ip^2) & \mathrm{e}^{-r\mathtt{p}}(p^1 + i\mathtt{p}) \\ \mathrm{e}^{-r\mathtt{p}}(p^0 + i\mathtt{p}) & \mathrm{e}^{-r\mathtt{p}}(p^1 - ip^2) & p^0 + \dfrac{2\mathtt{p}}{u_2} & p^1 - ip^2 \\ \mathrm{e}^{-r\mathtt{p}}(p^1 + ip^2) & \mathrm{e}^{-r\mathtt{p}}(p^0 - i\mathtt{p}) & p^1 + ip^2 & p^0 + \dfrac{2\mathtt{p}}{v_2} \end{pmatrix},$$

где $\mathtt{p} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_0^2}$. Сделав в нем замену переменных $\xi = \mathcal{D}^{-1}\xi'$, мы получаем для $G(r, u, v)$ выражение, которое дает возможность представить давление Казимира в виде

$$F_{\mathrm{Cas}} = -i\frac{1}{8\pi^3}\int \frac{\partial}{\partial r} \ln\det\mathcal{D}(p)\, dp^0\, dp^1\, dp^2.$$

Прямой расчет приводит к следующему результату:

$$\det\mathcal{D}(p) = \frac{4(u_1 + v_1)(u_2 + v_2)(p_0 + \mathtt{p}\omega_1)(p_0 + \mathtt{p}\omega_2)}{\mathtt{p}\, u_1 u_2 v_1 v_2}\mathcal{H}(p),$$

$$\mathcal{H}(p) = \mathcal{H}(p, r, \omega_1, \omega_2) = 1 - \frac{\mathrm{e}^{-2r\mathtt{p}}\,(p_0^2 + \mathtt{p}^2)}{(p_0 + \mathtt{p}\omega_1)(p_0 + \mathtt{p}\omega_2)},$$

$$\omega_k = \frac{4 - u_k v_k}{2(u_k + v_k)}, \quad k = 1, 2.$$

Совершив евклидов разворот $p^0 \to ip^0$, мы получаем

$$F_{\mathrm{Cas}} = \frac{1}{8\pi^3}\int \frac{\partial}{\partial r}\ln\mathcal{H}(\mathbf{p})\, d\mathbf{p},$$

где $\mathbf{p}$ обозначает вектор $\mathbf{p} = \{p_0, p_1, p_2\}$ трехмерного евклидова пространства и $\mathcal{H}(\mathbf{p}) = \mathcal{H}(p)|_{p_0 \to ip_0}$, $d\mathbf{p} = dp_0, dp_1, dp_2$. Используя приведенный выше результат для $\mathcal{H}(\mathbf{p})$, мы можем представить давление Казимира как

$$F_{\mathrm{Cas}} = -\frac{3}{32\pi^2 r^4}\int\limits_{-1}^{1} \mathrm{Li}_4\left(\frac{1 - \alpha^2}{(i\alpha + \omega_1)(i\alpha + \omega_2)}\right) d\alpha.$$

Здесь мы использовали обозначение для функции полилогарифма

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k^s} = \frac{1}{\Gamma(s+1)}\int\limits_0^{\infty} q^s \ln\left(1 - z\,\mathrm{e}^{-q}\right) dq.$$

Мы видим, что давление Казимира довольно сложно зависит от параметров рассматриваемой модели. Изучение полученного результата для случая двух одинаковых плоскостей показывает, что сила Казимира между ними может быть как притягивающей, так и отталкивающей или равной нулю. Для более глубокого понимания ее свойств было бы хорошо получить более простое аналитическое выражение для силы Казимира, чем полученное нами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе подхода Симанзика была построена модель взаимодействия безмассового спинорного поля с двумерной поверхностью. Чтобы сохранить инвариантность относительно умножения спинорного поля на матрицу γ^5, мы сократили число параметров в матрице, описывающей взаимодействие поля с однородной материальной плоскостью, до четырех.

В построенной нами модели мы исследовали рассеяние безмассовых дираковских частиц на плоскости. Мы рассчитали коэффициенты прохождения и отражения для частиц с различной поляризацией. Оказалось, что они зависят только от одной комбинации параметров модели. Сумма коэффициентов пропускания и отражения равна единице. Необычно, что независимо от импульса, когда частица движется ортогонально плоскости, она не отражается, а при движении почти параллельно плоскости коэффициент ее пропускания мал.

Для двух параллельных плоскостей мы рассчитали давление Казимира. В результате для него получено довольно сложное аналитическое выражение, анализ которого показывает, что в зависимости от значений параметров модели сила Казимира между плоскостями может быть притягивающей, отталкивающей или равной нулю. Можно надеяться, что полученные результаты окажутся полезными для углубления понимания физики нейтрино.

Благодарности. Ю. Письмак выражает благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку в рамках гранта № 19-02-00983-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Symanzik K.* // Nucl. Phys. B. 1981. V. 190. P. 1.
2. *Markov V. N., Pis'mak Yu. M.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 6525; arXiv: hep-th/0505218v3. 2005.
3. *Marachevsky V. N., Pis'mak Yu. M.* // Phys. Rev. D. 2010. V. 81. P. 065005; arXiv:0907.1985v2 [hep-th]. 2009.
4. *Pis'mak D. Yu., Pis'mak Yu. M.* // Theor. Math. Phys. 2011. V. 166. P. 1423; 2013. V. 175. P. 816; Phys. Part. Nucl. 2013. V. 44. P. 450.

5. *Pis'mak D. Yu., Pis'mak Yu. M., Wegner F. J.* // Phys. Rev. E. 2015. V. 92. P. 013204; arXiv:1406.1598v1 [hep-th]. 2014.
6. *Fialkovsky I. V., Markov V. N., Pis'mak Yu. M.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. V. 39. P. 6357; Intern. J. Mod. Phys. A. 2006. V. 21. P. 2601; arXiv:hep-th/0311236v2. 2003.
7. *Pis'mak D. Yu., Pis'mak Yu. M.* // Theor. Math. Phys. 2015. V. 184. P. 1329.
8. *Pis'mak Yu. M., Shukhobodskaia D. Yu.* // Europhys. J. Web Conf. 2016. V. 125. P. 05022; V. 126. P. 05012; 2017. V. 158. P. 07005.
9. *Pis'mak Yu. M.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2018. V. 15. P. 380.
10. *Pis'mak Yu. M., Shakhova O. Yu.* // Phys. Part. Nucl. Lett. 2019. V. 16. P. 441.
11. *Wegner F. J., Pis'mak Yu. M.* // Theor. Math. Phys. 2019. V. 200. P. 1400.
12. *Pis'mak Yu. M.* // Europhys. J. Web Conf. 2019. V. 222. P. 03026.