

# ДВУХПЕТЛЕВОЙ МАСТЕР-ИНТЕГРАЛ ДИАГРАММЫ ТИПА «КАЙТ» ДЛЯ КОРРЕЛЯТОРА ДВУХ СОСТАВНЫХ ВЕРШИН

*Н. И. Волчанский*<sup>1,2,\*</sup>, *С. В. Михайлов*<sup>1,\*\*</sup>

<sup>1</sup> Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

<sup>2</sup> Научно-исследовательский институт физики Южного федерального университета,  
Ростов-на-Дону, Россия

Двухпетлевой фейнмановский интеграл пропагаторного типа с двумя внешними составными вершинами рассматривается как функция двух бьёркеновских переменных  $x$ ,  $y$ , произвольных индексов пропагаторов  $n_i$  и размерности пространства-времени  $D$ . Интеграл выражается через двойные гипергеометрические ряды. Для физически интересных ситуаций найдена цепочка редукций этих двойных рядов к более простым функциям. Вычислены и меллиновские моменты этого интеграла по  $x$  и  $y$ .

We consider a two-loop propagator-type Feynman integral with two composite external vertices as a function of two Bjorken variables  $x$ ,  $y$  and arbitrary indices  $n_i$  of propagators and space-time dimension  $D$ . The integral is evaluated in terms of a hypergeometric double series. We find a chain of reductions of this double series to simpler functions in some physically interesting situations. The Mellin moments of the integral are also considered.

PACS: 12.38.Bx

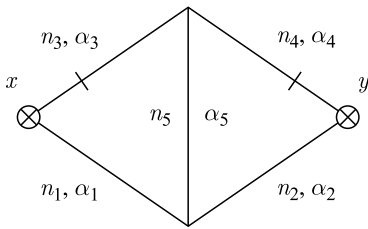
## ВВЕДЕНИЕ

Нелокальные составные вершины и их корреляторы возникают в КХД и КХД-подобных теориях как следствие факторизации жестких и мягких масштабов в жестких адронных процессах. В частности, безмассовая двухточечная функция, одна из внешних вершин которой составная, играет важную роль в пертурбативных вычислениях переходного формфактора пиона — свертка этой «двухточки» с соответствующей коэффициентной функцией представляет собой результат факторизации треугольной диаграммы процесса

---

\*E-mail: nikolay.volchanskiy@gmail.com

\*\*E-mail: mikhs@theor.jinr.ru



Двухпетлевая диаграмма «кайт» с двумя составными вершинами  $\otimes$ . Индексы  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , и размерность пространства-времени  $D$  произвольны;  $\alpha_i$  — соответствующие  $\alpha$ -параметры;  $x$  и  $y$  — переменные Бьёркена. Штрих на линии, соединенной с составной вершиной, обозначает  $\delta$ -функцию Дирака в подынтегральном выражении в уравнении (1)

$\gamma^*(q_1)\gamma^*(q_2) \rightarrow \pi^0(p)$ , где  $\pi^0$  — нейтральный пион, а  $\gamma^*$  — фотоны с большими виртуальностями  $-q_1^2, -q_2^2 \gg p^2$ .

Здесь мы описываем, как вычислять корреляторы с составными вершинами в случае «кайт»-диаграммы (см. рисунок), важной для расчетов в порядке NLO, а также некоторых классов диаграмм более высоких порядков. Для этого мы рассмотрим наиболее общую размерно-регуляризованную диаграмму типа «кайт» с двумя составными внешними вершинами и двумя составными внешними вершинами и пропагаторами, возведенными в произвольные степени. Мы покажем, что такой коррелятор и его меллиновские моменты можно выразить в виде гипергеометрических рядов — функций Кампе де Ферье (КдФ) и обобщенных функций Лауричеллы. Кроме того, мы найдем цепочку последовательных

приведений этих выражений к более простым функциям в случаях, важных для практических расчетов. Гипергеометрические представления определяют аналитические свойства корреляторов и позволяют находить  $\varepsilon$ -разложения корреляторов в размерной регуляризации.

Ниже мы представляем только узловые результаты с целью ограничить класс функций, к которым сводится кайт-коррелятор. С доказательствами и техническими деталями читатель может познакомиться в работе [1].

В разд. 1 кратко описано доказательство того, что наиболее общий коррелятор двух составных вершин выражается в функциях КдФ. В разд. 2 обсуждаются некоторые частные случаи, в которых коррелятор приводится к более простым функциям. В разд. 3 представляются выражения для меллиновских моментов коррелятора.

## 1. ДВУХПЕТЛЕВОЙ КОРРЕЛЯТОР ДВУХ СОСТАВНЫХ ВЕРШИН

Наиболее общий кайт-коррелятор имеет вид

$$\int \frac{d^D k_1 d^D k_2 \delta(x - \tilde{n}k_1) \delta(y - \tilde{n}k_2)}{[-(k_1 - p)^2]^{n_1} [-(k_2 - p)^2]^{n_2} [-k_1^2]^{n_3} [-k_2^2]^{n_4} [-(k_1 - k_2)^2]^{n_5}} = -\pi^D (-p^2)^{\omega/2} G(\mathbf{n}; x, y; D), \quad (1)$$

где  $\mathbf{n} = n_1, n_2, n_3, n_4, n_5$  — индексы диаграммы, а  $\omega = 2D - 2 \sum n$  — ее степень расходимости. В зависимости от значений индексов  $\mathbf{n}$  вышеприведенный интеграл описывает все одно- и двухпетлевые диаграммы, а также любые многопетлевые диаграммы, которые можно получить из двухпетлевого случая двухточечными вставками в линии.

В частном случае, когда один из индексов  $\mathbf{n}$  равен нулю, вычисление интеграла в (1) сведется к простой однопетлевой задаче (см. разд. 2 в [1]). В случае ненулевых индексов интегрирование можно провести в два этапа. Во-первых, заменим пропагаторы их  $\alpha$ -представлениями, а  $\delta$ -функции — их экспоненциальными фурье-образами, что позволяет взять импульсные интегралы обычным образом. В результате исходные зависящие от импульса  $\delta$ -функции в (1) перейдут в новые  $\delta$ -функции, зависящие теперь от переменных Бьёркена  $(x, y)$  и некоторых однородных полиномов  $\alpha$ -параметров:

$$\begin{aligned}
 -\pi^D \int_0^\infty \prod_{r=1}^5 \left[ \frac{d\alpha_r \alpha_r^{n_r-1}}{\Gamma(n_r)} \right] \delta\left(x - \frac{A_1}{\mathcal{D}}\right) \delta\left(y - \frac{A_2}{\mathcal{D}}\right) \frac{e^{p^2 A_0/\mathcal{D}}}{\mathcal{D}^{D/2}} = \\
 = -\pi^D (-p^2)^{\omega/2} G(\mathbf{n}; x, y; D), \quad (2)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &= (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5)(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5) - \alpha_5^2, & A_0 &= \alpha_3 A_1 + \alpha_4 A_2, \\
 A_1 &= \alpha_1(\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5) + \alpha_2 \alpha_5, & A_2 &= \alpha_2(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5) + \alpha_1 \alpha_5.
 \end{aligned} \quad (3)$$

Во-вторых, следует применить преобразование Бореля к обеим сторонам уравнения (2). Приведем определение преобразования Бореля и необходимые нам образы:

$$B[f(t)](\mu) = \lim_{\substack{t=n\mu \\ n \rightarrow \infty}} \frac{(-t)^n}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad (4)$$

$$B[e^{-at}](\mu) = \delta(1 - \mu a), \quad a > 0, \quad B[t^{-a}](\mu) = \frac{\mu^{-a}}{\Gamma(a)}, \quad a > 0. \quad (5)$$

Избавляясь от борелевского параметра переопределением  $\alpha$ -параметров, получим в итоге

$$\begin{aligned}
 G(\mathbf{n}; x, y; D) &= \Gamma\left(-\frac{\omega}{2}\right) \int_0^\infty \prod_{r=1}^5 \left[ \frac{d\alpha_r \alpha_r^{n_r-1}}{\Gamma(n_r)} \right] \times \\
 &\times \delta\left(x - \frac{A_1}{\mathcal{D}}\right) \delta\left(y - \frac{A_2}{\mathcal{D}}\right) \delta\left(1 - \frac{A_0}{\mathcal{D}}\right) \frac{1}{\mathcal{D}^{D/2}}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Три  $\delta$ -функции немедленно снимают три из пяти интегрирований по  $\alpha$ -параметрам, после чего  $G$ -функция выражается через оставшийся двойной интеграл:

$$G(\mathbf{n}; x, y; D) = \frac{\Gamma(-\omega/2)}{5} \bar{x}^{D/2-n_1-1} \bar{y}^{D/2-n_2-1} x^{D/2-n_3-1} y^{D/2-n_4-1} |x-y|^{-n_5} \times \prod_{r=1}^5 \Gamma(n_r) \times [\Theta(\bar{z})F(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5; z; D) + \Theta(-\bar{z})F(n_3, n_4, n_1, n_2, n_5; 1/z; D)], \quad (7)$$

где  $\bar{z} = 1 - z$ ,  $\Theta(z)$  — обычная  $\theta$ -функция, а

$$F(\mathbf{n}; z; D) = \bar{z}^{D/2-1} \int_0^1 da \int_0^a db \frac{a^{n_1-1} \bar{a}^{n_2-1} b^{n_3-1} \bar{b}^{n_4-1} (a-b)^{n_5-1}}{(a\bar{b} - \bar{a}bz)^{D/2-1}}, \quad z = \frac{y\bar{x}}{x\bar{y}}. \quad (8)$$

В выражении (7) возникает своего рода «факторизация» по переменным Бьёркена, поскольку выражение в квадратных скобках в (7) является функцией одной переменной  $z$ , определяемой как отношение долей  $x$  и  $y$ . Будем называть  $z$  конформным отношением, заимствуя это название из работы [2] (см. также список литературы в ней).

Двукратный интеграл (8) относится к интегралам гипергеометрического типа [3, 4] и может быть выражен через функции КдФ:

$$F(\mathbf{n}; z; D) = \Gamma \left[ \begin{matrix} n_3, n_{2,4,\bar{5}} \\ \lambda, n_{3,4,\bar{5}} \end{matrix} \right] \mathfrak{F}_{1:0;1}^{1:1;2} \left( \begin{matrix} n_5 : \lambda; n_{3,4,\bar{5}}, n_{1,3,\bar{5}} \\ n_{3,5} : -; n_{1,2,3,4,\bar{5},\bar{5}} \end{matrix} \middle| -\frac{z}{\bar{z}}, 1 \right), \quad (9)$$

где  $\lambda = D/2 - 1$ . Мультииндексы здесь обозначают суммы следующего вида:

$$n_{i_1, \dots, i_K, \bar{j}_1, \dots, \bar{j}_L} = \sum_{k=1}^K n_{i_k} + \sum_{k=1}^L \left( n_{j_k} - \frac{D}{2} \right), \quad (10)$$

а  $\Gamma$ -функции с двухэтажными аргументами здесь и далее определяются как

$$\Gamma_r \left[ \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right] = \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma(a_i + r)}{\prod_{i=1}^q \Gamma(b_i + r)}, \quad \Gamma_0 \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \right] = \Gamma \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \right]. \quad (11)$$

Функции КдФ определены как двойной гипергеометрический ряд

$$f_{q_0:q_1;q_2}^{p_0:p_1;p_2} \left( \begin{matrix} \mathbf{a}_0 : \mathbf{a}_1; & \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_0 : \mathbf{b}_1; & \mathbf{b}_2 \end{matrix} \middle| z_1, z_2 \right) = \sum_{r_1, r_2 \geq 0} \Gamma_{r_1+r_2} \left[ \begin{matrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{b}_0 \end{matrix} \right] \Gamma_{r_1} \left[ \begin{matrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{b}_1 \end{matrix} \right] \Gamma_{r_2} \left[ \begin{matrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{matrix} \right] \frac{z_1^{r_1}}{r_1!} \frac{z_2^{r_2}}{r_2!}, \quad (12)$$

$$\mathbf{a}_i = a_{i1}, \dots, a_{ip_i}, \quad \mathbf{b}_i = b_{i1}, \dots, b_{iq_i},$$

для которого необходимо искать аналитическое продолжение за пределами области его абсолютной сходимости.

## 2. УПРОЩЕНИЕ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Представление в уравнениях (7) и (9) через двойной гипергеометрический ряд сводится к более простым гипергеометрическим функциям одной переменной в случае, когда индексы каких-то двух смежных внешних линий диаграммы — натуральные числа:

$$F(\mathbf{n}; z; D) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 - n_4 + r)}{r! \Gamma(1 - n_4)} F(n_1, n_2, n_3 + r, 1, n_5; z; D) \quad (13)$$

и

$$F(n_1, n_2, n_3, 1, n_5; z; D) = \Gamma \left[ \begin{matrix} n_5, 1 - n_5, n_{1,3,5} \\ n_{3,5} + 1, \lambda \end{matrix} \right] \times$$

$$\times \left[ \bar{z}^{n_5} {}_3f_2 \left( \begin{matrix} n_5, n_{2,5} + 1, n_{3,5} + 1 \\ n_5 + 2, n_{1,2,3,5,5} + 1 \end{matrix} \middle| \bar{z} \right) - \bar{z}^\lambda {}_3f_2 \left( \begin{matrix} \lambda, n_2, n_3 \\ -n_5, n_{1,2,3,5} \end{matrix} \middle| \bar{z} \right) \right]. \quad (14)$$

Функция  ${}_3f_2$  — обобщенный гипергеометрический ряд в следующей нормировке:

$${}_p f_q \left( \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \middle| z \right) = \Gamma \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \right] {}_p F_q \left( \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{r \geq 0} \Gamma_r \left[ \begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \right] \frac{z^r}{r!}. \quad (15)$$

Ряд (13) обрывается при  $n_4 - 1$ , если  $n_4$  — натуральное число. Аналогичное упрощение в случае натурального  $n_1$  является следствием симметрии  $F(n_4, n_3, n_2, n_1, n_5; z; D) = F(\mathbf{n}; z; D)$ .

Другое упрощение имеет место, если индексы противоположных внешних ребер диаграммы равны друг другу,  $n_1 = n_4$  и  $n_2 = n_3$ , тогда интеграл «распадается» на произведение двух функций от различных комбинаций пе-

ременных Бьёркена, конформного отношения  $z$  и разности  $x - y$ :

$$\begin{aligned}
 G(n_1, n_2, n_2, n_1, n_5; x, y; D) &= \\
 &= \frac{\Gamma(n_{1, \bar{1}, 2, \bar{2}, 5})}{\Gamma^2(n_1)\Gamma^2(n_2)\Gamma(n_5)} |x - y|^{-n_5} \left(\frac{\bar{z}}{x - y}\right)^{2+n_{1, \bar{2}}} z^{-n_{\bar{1}}-1} \times \\
 &\quad \times [\Theta(\bar{z})F(n_1, n_2, n_2, n_1, n_5; z; D) + \\
 &\quad + \Theta(-\bar{z})F(n_2, n_1, n_1, n_2, n_5; 1/z; D)]. \quad (16)
 \end{aligned}$$

В частности, если все индексы внешних линий равны 1, получим

$$G(1, 1, 1, 1, n; x, y; D) = \frac{\hat{\mathbf{S}}f(n; z; D)}{|x - y|^{-\omega/2}}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 f(n; z; D) &= \Gamma \left[ \begin{matrix} 2 + \dot{n} - \lambda, \dot{n}, 1 - \dot{n} \\ n, \lambda \end{matrix} \right] z^{\lambda-1} \bar{z}^{2-\lambda} \times \\
 &\quad \times \left[ {}_3f_2 \left( \begin{matrix} 1, 1, \lambda \\ 1 - \dot{n}, \dot{n} + 2 \end{matrix} \middle| \bar{z} \right) - \bar{z}^{\dot{n}} {}_2f_1 \left( \begin{matrix} n, \dot{n} + 1 \\ 2(\dot{n} + 1) \end{matrix} \middle| \bar{z} \right) \right] \Theta(\bar{z}), \quad (18)
 \end{aligned}$$

где  $\omega = 2(D - 4 - n)$ ,  $\dot{n} = n - \lambda$  и  $\hat{\mathbf{S}}T(x, y) = T(x, y) + T(\bar{x}, \bar{y})$ , т. е.  $\hat{\mathbf{S}}f(z) = f(z) + f(1/z)$ . Случай (17) важен для расчета двухпетлевых и (части) трехпетлевых радиационных КХД-поправок в двухточечный коррелятор.

При  $n = 1$  уравнения (17) и (18) дают простой двухпетлевой интеграл

$$G(1, 1, 1, 1, 1; x, y; D) = \frac{\hat{\mathbf{S}}f(1; z; D)}{|x - y|^{5-D}}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 f(1; z; D) &= \Gamma(3 - 2\lambda)\Gamma(\lambda - 1)\Gamma(1 - \lambda) \times \\
 &\quad \times \Theta(\bar{z})[I_{\bar{z}}(2 - \lambda, \lambda - 1) - I_{\bar{z}}(3 - 2\lambda, \lambda - 1)], \quad (20)
 \end{aligned}$$

где  $I_{\bar{z}}(a, b)$  — неполная В-функция, нормированная на полную:

$$I_z(a, b) = \frac{\mathbf{B}_z(a, b)}{\mathbf{B}_1(a, b)}. \quad (21)$$

### 3. МЕЛЛИНОВСКИЕ МОМЕНТЫ КОРРЕЛЯТОРА

Будем обозначать меллиновские моменты, подчеркивая аргументы функций, как, например, в следующих равенствах:

$$G(\mathbf{n}; x, \underline{b}; D) = \int_0^1 dy y^b G(\mathbf{n}; x, y; D),$$

$$G(\mathbf{n}; \underline{a}, \underline{b}; D) = \int_0^1 dx x^a G(\mathbf{n}; x, \underline{b}; D).$$
(22)

В этом разделе мы лишь ограничиваем класс функций, через которые выражаются меллиновские моменты корреляторов; явный же вид массивов параметров  $\Gamma$ -функций и гипергеометрических рядов приведен в [1] (отметим только, что параметры являются функциями  $\mathbf{n}$ ,  $a$ ,  $b$  и  $D$ ):

$$G(\mathbf{n}; x, \underline{b}; D) = x^{b-n_{3,4,5}-1} \bar{x}^{-n_{1,2,5}-1} \Gamma[P_1] f_{2:1;0;0}^{0:3;3;2}(Q_1|1, 1, x) +$$

$$+ x^{-n_{2,3,5}-1} \bar{x}^{b-n_{1,4,5}-1} \Gamma[P_2] f_{2:1;0;0}^{0:3;3;2}(Q_2|1, 1, \bar{x})$$
(23)

и

$$G(\mathbf{n}; \underline{a}, \underline{b}; D) = \Gamma[P'_1] f_{2:1;0;1}^{0:3;3;3}(Q'_1|1, 1, 1) + \Gamma[P'_2] f_{2:1;0;1}^{0:3;3;3}(Q'_2|1, 1, 1).$$
(24)

Здесь  $f_{q_0:q_1, q_2, q_3}^{p_0:p_1, p_2, p_3}(Q|z_1, z_2, z_3)$  — это обобщенная функция Лауричеллы, определенная как

$$f_{q_0:q_1, q_2, q_3}^{p_0:p_1, p_2, p_3} \left( \begin{matrix} \mathbf{a}_0 : \mathbf{a}_1; \mathbf{a}_2; \mathbf{a}_3 \\ \mathbf{b}_0 : \mathbf{b}_1; \mathbf{b}_2; \mathbf{b}_3 \end{matrix} \middle| z_1, z_2, z_3 \right) =$$

$$= \sum_{r_1, r_2, r_3 \geq 0} \Gamma \left[ \begin{matrix} \mathbf{a}_0 + \rho \boldsymbol{\alpha} \\ \mathbf{b}_0 + \rho \boldsymbol{\beta} \end{matrix} \right] \prod_{i=1}^3 \Gamma_{r_i} \left[ \begin{matrix} \mathbf{a}_i \\ \mathbf{b}_i \end{matrix} \right] \frac{z_i^{r_i}}{r_i!},$$
(25)

$$[\boldsymbol{\rho}] = [r_1, r_2, r_3], \quad [\boldsymbol{\alpha}] = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_{p_0}^1 \\ \alpha_1^2 & \dots & \alpha_{p_0}^2 \\ \alpha_1^3 & \dots & \alpha_{p_0}^3 \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\beta}] = \begin{bmatrix} \beta_1^1 & \dots & \beta_{q_0}^1 \\ \beta_1^2 & \dots & \beta_{q_0}^2 \\ \beta_1^3 & \dots & \beta_{q_0}^3 \end{bmatrix},$$
(26)

где  $\alpha_i^k$  и  $\beta_i^k$  — целочисленные параметры, а алгебраические операции над массивами параметров выполняются так же, как над матрицами. Массивы параметров  $P_i$  и  $Q_i$ ,  $i = 1, 2$ , выписаны в приложении С статьи [1].

Для натуральных моментов приведенные выше выражения могут быть сведены к некоторой сумме функций КдФ. В частности, для  $(\underline{0}, y)$ - и  $(\underline{0}, \underline{b})$ -моментов мы можем выписать следующие выражения:

$$G(\mathbf{n}; \underline{0}, y; D) = \Gamma[\Xi_0] \left\{ \sum_{k=1}^6 (-)^k y^{\alpha_k-1} \bar{y}^{\beta_k-1} \Gamma[\Xi_k] f_{1:2;1}^{2:2;1}(\Phi_k | \bar{y}, y) + \sum_{k=7}^8 (-)^k y^{\alpha_k-1} \bar{y}^{\beta_k-1} \Gamma[\Xi_k] f_{2:0;1}^{1:2;3} \left( \Phi_k \left| y, -\frac{y}{\bar{y}} \right. \right) - \sum_{k=9}^{10} (-)^k y^{\alpha_k-1} \bar{y}^{\beta_k-1} \Gamma[\Xi_k] {}_3f_2(\Phi_k | y) \right\}, \quad (27)$$

$$G(\mathbf{n}; \underline{0}, \underline{b}; D) = \Gamma[\Xi'_0] \left\{ \sum_{k=1}^8 (-)^k \Gamma[\Xi'_k] f_{2:2;1}^{2:3;2}(\Phi'_k | 1, 1) - \sum_{k=9}^{10} (-)^k \Gamma[\Xi'_k] {}_4f_3(\Phi'_k | 1) \right\}. \quad (28)$$

Все массивы параметров  $\Xi_i, \Phi_i$  и т. д. выписаны в приложении С статьи [1].

В важном частном случае, когда индексы всех внешних ребер диаграммы равны 1, уравнения (23) и (24) всегда сводятся к комбинации функций КдФ:

$$G(1, 1, 1, 1, n; x, \underline{b}; D) = \sum_{i=1}^2 \{ x^{s_i-1} \bar{x}^{t_i-1} \Gamma[P_i] f_{1:0;2}^{1:1;3}(Q_i | x, 1) + x^{v_i-1} \bar{x}^{w_i-1} \Gamma[R_i] f_{1:0;2}^{1:1;3}(S_i | \bar{x}, 1) \}, \quad (29)$$

$$G(1, 1, 1, 1, n; \underline{a}, \underline{b}; D) = \sum_{i=1}^4 \Gamma[P'_i] f_{1:1;2}^{1:2;3}(Q'_i | 1, 1). \quad (30)$$

Явный вид массивов параметров  $P_i, Q_i$  и т. д. приведен в уравнениях (4.7) и (4.8) работы [1]. Некоторые из функций КдФ в уравнениях (29) и (30) могут быть выражены через более простые гипергеометрические функции одной переменной для любых  $a$  и  $b$ , и все они сводятся к  ${}_4f_3$  при натуральном  $b$ . Например,

$$G(1, 1, 1, 1, n; x, \underline{0}; D) = -\Gamma \left[ \begin{matrix} -\dot{n}, 1 + \dot{n} - \lambda \\ n \end{matrix} \right] (x\bar{x})^{\lambda-1} \times \left\{ \Gamma \left[ \begin{matrix} n, \dot{n}, \dot{n}, 1 - \dot{n}, 1 - \dot{n} \\ \lambda, 2\dot{n}, 1 - 2\dot{n} \end{matrix} \right] + \hat{\mathbf{S}} \left[ x^{-\dot{n}} {}_3f_2 \left( \begin{matrix} 1, \lambda, -\dot{n} \\ 1 - \dot{n}, \lambda - \dot{n} \end{matrix} \middle| x \right) \right] \right\}, \quad (31)$$



$$G(1, 1, 1, 1, n; \underline{a}, \underline{0}; D) = -\Gamma(-\dot{n}) \Gamma(1 + \dot{n} - \lambda) \times \\ \times \left\{ \Gamma \left[ \begin{matrix} \dot{n}, \dot{n}, a + \lambda \\ 1 + 2\dot{n}, -2\dot{n}, a + 2\lambda \end{matrix} \right] + \Gamma \left[ \begin{matrix} \lambda \\ n \end{matrix} \right] {}_4f_3 \left( \begin{matrix} 1, \lambda, -\dot{n}, a + \lambda - \dot{n} \\ 1 - \dot{n}, \lambda - \dot{n}, a + 2\lambda - \dot{n} \end{matrix} \middle| 1 \right) + \right. \\ \left. + \Gamma \left[ \begin{matrix} a + \lambda \\ n \end{matrix} \right] {}_3f_2 \left( \begin{matrix} 1, \lambda, -\dot{n} \\ 1 - \dot{n}, a + 2\lambda - \dot{n} \end{matrix} \middle| 1 \right) \right\}. \quad (32)$$

При  $a = b = 0$  последнее выражение может быть записано в форме, справедливой для всех  $D$  и  $n$ , которую несложно сопоставить с рядом из известных в литературе результатов, полученных для этого частного случая:

$$G(1, 1, 1, 1, n; \underline{0}, \underline{0}; D) = -2\Gamma(-\dot{n}) \Gamma(1 - \lambda + \dot{n}) \Gamma(\lambda) \times \\ \times \left\{ \Theta(2\lambda - n - 1) \left( \frac{1}{\Gamma(n)} {}_3f_2 \left( \begin{matrix} 1, \lambda, -\dot{n} \\ 1 - \dot{n}, 2\lambda - \dot{n} \end{matrix} \middle| 1 \right) + \frac{\pi}{\Gamma(2\lambda)} \cot(\pi\dot{n}) \right) + \right. \\ \left. + \Theta(1 - 2\lambda + n) \left( \Gamma \left[ \begin{matrix} \lambda \\ 2\lambda, 2\lambda - \dot{n} - 1 \end{matrix} \right] {}_3f_2 \left( \begin{matrix} 1, 2\lambda, 1 + \dot{n} \\ 1 + n, 2 + \dot{n} \end{matrix} \middle| 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{\pi}{\Gamma(2\lambda)} \cot[\pi(\lambda - \dot{n})] \right) \right\}. \quad (33)$$

Поскольку ряд для  ${}_3f_2(\dots|1)$  сходится тогда и только тогда, когда разность сумм всех нижних и всех верхних параметров положительна, первая из  ${}_3f_2$  в уравнении выше конечна при  $n < D - 2$ , а последняя — при  $n > D - 3$ . Оба представления, сопровождающие свои ступенчатые функции, существуют и равны в полосе  $D - 3 < n < D - 2$ . За пределами этой полосы они представляют собой аналитическое продолжение друг для друга. Фактор перед  $\theta$ -функцией от  $1 - 2\lambda + n$  в точности совпадает с результатом А. Котикова из [5], а вторую половину уравнения (33) несложно привести к одному из представлений, найденных Д. Бродхарстом с соавторами [6].

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вычислен наиболее общий двухпетлевой коррелятор двух составных вершин, результат выражен через функции Кампе де Ферье. Его меллиновские моменты выражаются в виде обобщенных функций Лауричеллы. Найдена цепочка редукций к более простым функциям в частных случаях, важных для практических расчетов.

**Благодарности.** Работа С. Михайлова была поддержана грантом BelRFFR–JINR F18D-002. Работа Н. Волчанского была поддержана Российским научным фондом, грант № 18-12-00213.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mikhailov S. V., Volchanskiy N.* Two-Loop Kite Master Integral for a Correlator of Two Composite Vertices // JHEP. 2019. V. 01, No. 01. P. 202; arXiv:1812.02164.
2. *Braun V. M., Manashov A. N., Moch S., Strohmaier M.* Three-Loop Evolution Equation for Flavor-Nonsinglet Operators in Off-Forward Kinematics // JHEP. 2017. V. 2017, No. 6. P. 37; arXiv:1703.09532.
3. *Srivastava H. M., Karlsson P. W.* Multiple Gaussian Hypergeometric Series. Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications. Ellis Horwood, 1985.
4. *Exton H.* Handbook of Hypergeometric Integrals: Theory, Applications, Tables, Computer Programs. Ellis Horwood Series in Mathematics and Its Applications. Ellis Horwood, 1978.
5. *Kotikov A. V.* The Gegenbauer Polynomial Technique: The Evaluation of a Class of Feynman Diagrams // Phys. Lett. B. 1996. V. 375. P. 240–248; hep-ph/9512270.
6. *Broadhurst D. J., Gracey J. A., Kreimer D.* Beyond the Triangle and Uniqueness Relations: Nonzeta Counterterms at Large  $N$  from Positive Knots // Z. Phys. C. 1997. V. 75. P. 559–574; arXiv:hep-th/9607174.