

КОНЦЕПЦИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ В РАССЕЙАНИИ НЕЙТРИНО И АНТИНЕЙТРИНО НА ЯДРАХ

В. А. Бедняков, Д. В. Наумов

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Обсуждается представление о когерентности в процессе рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядрах. Мотивированный результатами эксперимента COHERENT, предложен новый взгляд на когерентность в этих процессах, который позволил описать единым образом упругие (когерентные) и неупругие (некогерентные) вклады в полное сечение рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядрах при энергиях (анти)нейтрино в диапазоне менее 100 МэВ. Кратко обсуждаются эксперименты и физические задачи для когерентного рассеяния (анти)нейтрино на ядрах. В расширенном приложении с педагогической подробностью рассматриваются основные детали и выводы предложенного подхода.

The concept of coherence in the scattering of neutrinos and antineutrinos off nuclei is discussed. Motivated by the results of the COHERENT experiment, a new approach to coherence in these processes is proposed, which allows a unified description of the elastic (coherent) and inelastic (incoherent) contributions to the total cross section for neutrino and antineutrino scattering off nuclei at energies below 100 MeV. Experiments and physical problems for coherent scattering of (anti)neutrinos off nuclei are briefly discussed. The extended appendix covers the main points and conclusions of the proposed approach in pedagogical detail.

PACS: 13.15.+g; 30.Pt

1. ВВЕДЕНИЕ. ЕСТЬ ЛИ КОГЕРЕНТНОСТЬ В ЭКСПЕРИМЕНТЕ COHERENT?

Так называемое когерентное рассеяние нейтрино на сложных составных системах (ядрах и атомах) уже значительное время считается важным источником информации о физике нейтрино, в том числе лежащей за рамками современной Стандартной модели. Главным притягательным свойством этого явления является весьма заметное (на уровне нескольких порядков) усиление вероятности его протекания по сравнению с аналогичной вероятностью в случае простой точечной мишени. Особенно интересным представлялся тот факт, что нейтрино могут когерентно рассеиваться не только на нуклонах внутри ядер [1–3], но и на целых атомах, включая орбитальные электроны [4–6].

Решающим фактором здесь являлся квантово-динамический принцип, суть которого в данном случае состояла в том, что если индивидуальные амплитуды нейтрино-нуклонного рассеяния суммируются с одинаковой фазой (т. е. когерентно), в результате возникает весьма существенное увеличение вероятности такого процесса, пропорциональное, грубо говоря, квадрату составляющих ядро нуклонов. Общеизвестным квантово-механическим условием когерентности является неравенство

$$qR \ll 1, \quad (1.1)$$

где q — это импульс, переданный нейтрино ядру, характерный размер которого определяется радиусом R . Грубо говоря, длина волны падающего нейтрино $1/q$ заметно превышает размер препятствия R на его пути, поэтому нейтрино не способно «разглядеть» детали структуры этого препятствия и «чувствует ядро целиком».

Поскольку характерный размер ядер не сильно выходит за пределы области от 1/25 до 1/150 МэВ, то отмеченное выше условие когерентности весьма хорошо выполняется для значительного числа доступных источников нейтрино (и антинейтрино), таких как реакторные антинейтрино, солнечные нейтрино, (анти)нейтрино от взрывов сверхновых звезд, а также нейтрино от ускорителей [7]. Это обстоятельство придавало особую значимость когерентному рассеянию нейтрино на ядрах. Подробнее о спектре физических задач, решение которых может дать тщательное изучение когерентного рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядрах, говорится в разд. 8.

Тем не менее нейтрино с энергией порядка 40 МэВ вызывает лишь ничтожную энергию отдачи ядра (в области килоэлектронвольт), которая представляет собой единственную наблюдаемую величину когерентного рассеяния и до сих пор недоступна прямому измерению. Однако в 2017 г. в эксперименте COHERENT «обошли эту проблему со стороны» — путем использования потока (анти)нейтрино больших энергий.

Напомним, что главной целью коллаборации COHERENT была регистрация и изучение упругого когерентного рассеяния нейтрино на ядре (английская аббревиатура CE ν NS). Это предполагалось сделать с помощью мощного импульсного пучка нейтрино с энергией в области 10–55 МэВ, который производился на основе Spallation Neutron Source (SNS) Окриджской национальной лаборатории. В 2017 г. коллаборация COHERENT [8] объявила о первом наблюдении CE ν NS (рис. 1) с помощью 14,6-кг CsI[Na] сцинтилляционного детектора [9]. Подробнее о результатах коллаборации COHERENT и ее планах можно узнать из [8, 10–18]. Обсуждая постановку задачи, авторы эксперимента COHERENT [8] прекрасно понимали, что «... coherent interactions between neutrinos and all nucleons present in an atomic nucleus would exist only as long as the momentum exchanged remained *significantly smaller* than the inverse of the nuclear size...». Однако простые оценки показывают,

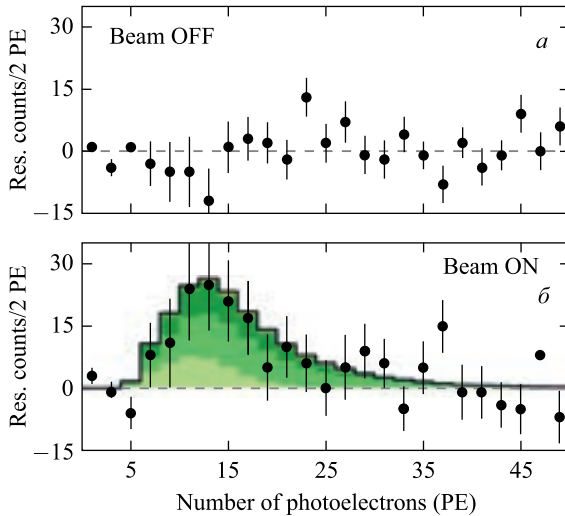


Рис. 1. Наблюдение когерентного упругого нейтрино-ядерного рассеяния (CE ν NS) в эксперименте COHERENT [8]. Экспериментальные точки (θ) — разность отсчетов CsI[Na]-детекторов на выключенном и включенном нейтринном пучке как функция энергии (числа фотоэлектронов). Рисунок из [8]

что полученные в эксперименте COHERENT данные, послужившие основой утверждения о регистрации когерентного рассеяния, не удовлетворяют условию (1.1).

Действительно, кинетическая энергия рассеянного ядра дается выражением $T_A \simeq q^2/2M_A$, где M_A — масса ядра A . С учетом того, что масса ядра цезия-133 в натуральных единицах равна $M = 123,7$ ГэВ, для переданного импульса имеем

$$q = 15,7 \text{ МэВ} \left(\frac{T_A}{\text{кэВ}} \right)^{1/2} = 14,5 \text{ МэВ} N_{\text{p.e}}^{1/2}, \quad (1.2)$$

где второе равенство учитывает, что энергии отдачи ядра цезия $T_A = 1$ кэВ отвечает приблизительно 1,17 фотоэлектронов (р.е.) [8]. Поскольку радиус ядра с атомным номером A может быть выражен как $R_A \simeq 1,2A^{1/3}$, то для ^{133}Cs получаем

$$R \simeq 6,13 \text{ фм} = 0,031 \text{ МэВ}^{-1}. \quad (1.3)$$

Поэтому из (1.2) и (1.3) имеем

$$qR(N_{\text{p.e}}) = 0,45 N_{\text{p.e}}^{1/2}. \quad (1.4)$$

На рис. 1 из [8] показан измеренный спектр, послуживший основой регистрации когерентного нейтрино-ядерного рассеяния, как функция зарегистриро-

ванных фотоэлектронов. Он начинается с $N_{p,e} = 5$, достигает максимума при $N_{p,e} \simeq 14$ и полностью исчезает при $N_{p,e} \simeq 35$. Откуда согласно (1.4) получается

$$qR(N_{p,e} = 5) = 1, \quad qR(N_{p,e} = 14) = 1,69, \quad qR(N_{p,e} = 35) = 2,66 \quad (1.5)$$

и видно, что условие (1.1) не выполняется для всех данных эксперимента COHERENT. Каков результат этой наивной оценки?

Хотя согласно (1.5) условие (1.1) явно не выполнено в эксперименте COHERENT [8] и переданный импульс вовсе не (значительно) меньше обратного размера ядра, тем не менее нельзя утверждать, что эта коллаборация не смогла увидеть когерентное упругое нейтрино-ядерное рассеяние. Что в действительности она «видела»?

И ответ таков — эта коллаборация видела события взаимодействия нейтрино в канале слабых нейтральных токов с ядром в области МэВ-ных энергий, что само по себе очень важное достижение. Однако полученные данные нельзя однозначно отнести к разряду чисто $CE\nu NS$, как это хотели бы представить авторы [8]. В этих данных заметный вклад (10–20 %) был от неупругих (анти)нейтрино-ядерных взаимодействий, которые никак нельзя отличить от $CE\nu NS$, поскольку регистрируется только энергия отдачи ядра [19,20].

Не будь эксперимента COHERENT, мы бы, вероятно, не узнали, как когерентный режим рассеяния нейтрино на сложной системе плавно и естественно переходит в некогерентный. Поиск количественного ответа на этот вопрос послужил стимулом к той работе, что воплотилась в данный обзор.

2. ЭВОЛЮЦИЯ КОНЦЕПЦИИ КОГЕРЕНТНОСТИ В РАССЕЙНИИ НЕЙТРИНО

2.1. Когерентное упругое рассеяние нейтрино на ядрах по Фридману.

Считается, что впервые обсуждение вопроса о когерентном рассеянии нейтрино на составленной из нуклонов системе (ядре) было выполнено в работах Фридмана [1, 3]. В малоизвестной работе В.Б. Копелиовича и Л.Л. Франкфурта [2] также обсуждался вопрос о когерентном эффекте при рассеянии нейтрино на ядре.

Следуя Фридману, напомним кратко логику его рассуждений по поводу когерентного эффекта при рассеянии нейтрино на ядрах [1, 3]. В работе [3] было отмечено, что заметное увеличение сечения процесса $\nu + A \rightarrow \nu + A$ (рис. 2, *a*) является следствием основного принципа квантовой механики. В том смысле, что это явление имеет место всегда, когда бесструктурная налетающая частица (нейтрино) упруго рассеивается на составной системе (ядре), которая предполагается состоящей из A независимых друг от друга рассеивающих центров (нуклонов), каждый из которых располагается

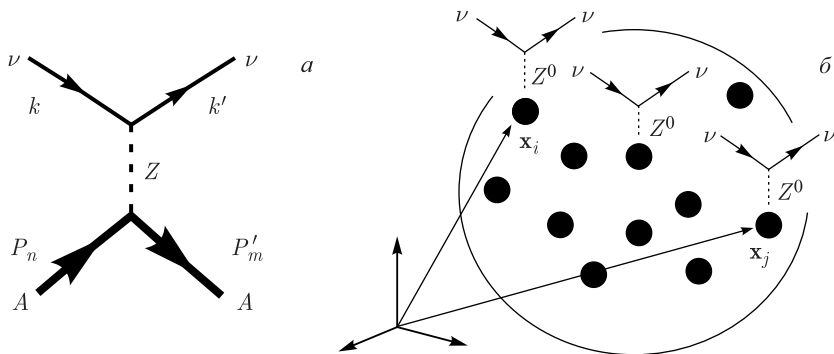


Рис. 2. а) «Внешний вид» когерентного (упругого) νA -рассеяния посредством обмена нейтрального Z^0 -бозона. б) Индивидуальные (независимые) рассеивающие центры, которые расположены в фиксированных точках \mathbf{x}_j внутри составной мишени А. Именно эта пространственная «раздельность» согласно [3] приводит к возникновению фазового множителя $e^{i\mathbf{q}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}$, который является решающим в вопросе наличия или отсутствия когерентности

в некоторой вполне *фиксированной точке* пространства \mathbf{x}_i , где $i = 1, \dots, A$ (рис. 2, б).

По квантово-механическому принципу суперпозиции полная амплитуда рассеяния нейтрино на составном объекте $M(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, где \mathbf{k} и \mathbf{k}' — начальный и конечный импульсы нейтрино (рис. 2, а), представляет собой сумму индивидуальных амплитуд рассеяния нейтрино на независимых рассеивателях внутри составного объекта $f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k})$, взятых с фазовым фактором $e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\mathbf{x}_j}$, который учитывает (относительное) изменение фазы падающей (нейтринной) волны при ее рассеянии на индивидуальных рассеивателях, расположенных в разных пространственных точках \mathbf{x}_j (рис. 2, б):

$$M(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \sum_{j=1}^A f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \exp i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}_j = \sum_{j=1}^A f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}_j}. \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ — переданный составному объекту или потерянный нейтрино импульс [3]. В силу малости индивидуальных амплитуд ν -рассеяния $f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ (слабое взаимодействие) в (2.1) опущены члены, отвечающие возможному (последовательному) рассеянию на нескольких рассеивателях типа $\propto f_i(\mathbf{k}', \mathbf{k})f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k})$.

Благодаря наличию фазовых множителей $e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i)}$ величина дифференциального сечения

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |M(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 = \sum_{j=1}^A |f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2 + \sum_{j \neq i}^A \sum_{i=1}^A f_i(\mathbf{k}', \mathbf{k}) f_j^\dagger(\mathbf{k}', \mathbf{k}) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \quad (2.2)$$

существенным образом зависит от соотношения величины переданного импульса \mathbf{q} ($q = |\mathbf{q}| = 2|\mathbf{k}|\sin\theta/2$, где θ — угол рассеяния нейтрино) и размера системы рассеивателей $R = \max_{ij} |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$.

Согласно [3], если безразмерная величина $qR \simeq 1$ (или $qR \geq 1$), то все независимые рассеивающие центры (нуклоны) слишком далеко пространственно отделены друг от друга и относительные фазовые факторы важны (поскольку различны). В результате имеет место значительное взаимное сокращение членов во втором (недиагональном) $A(A-1)$ -слагаемом, и оно фактически не дает вклад в сечение (2.2), которое оказывается малым в силу малости самих амплитуд $f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ и (всего лишь) пропорционально A .

С другой стороны [3], когда $qR \ll 1$ (т. е. q значительно меньше обратного размера мишени), все фазовые множители $e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)} \approx 1$ (т. е. относительные фазы не важны, поскольку они практически равны друг другу), и вклады всех независимых рассеивателей складываются когерентно во второй сумме формулы (2.2). В результате полное сечение (называемое *когерентным* в [3]) оказывается усиленным множителем A^2 :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq A^2 |\bar{f}(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2, \quad \text{где} \quad \bar{f}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \equiv \frac{1}{A} \sum_j f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k}). \quad (2.3)$$

Если все рассеиватели одинаковые, то $\bar{f}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ и когерентное сечение действительно в A^2 раз превышает сечение рассеяния на отдельно взятом рассеивателе ($\propto |f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k})|^2$). В этом состоит основная идея понятия когерентности в процессе рассеяния нейтрино на ядре по Фридману [3].

Отметим уже здесь, что ответ на вопрос, как правильно считать сечение рассеяния нейтрино на ядре — брать только первое слагаемое в выражении (2.2) или по формуле (2.3), зависит от предварительного выяснения того, как безразмерная величина qR соотносится с единицей ($qR \ll 1$ или $qR \gg 1$), т. е. от того, какой из этих двух предельных случаев реализуется. Выяснение этого вопроса на *качественном уровне* предшествует процедуре вычисления сечения. Если $qR \gg 1$, то одна процедура, если наоборот, то другая. Иными словами, начиная с работы [3], во всех последующих за ней статьях по данному вопросу практически всегда сначала на качественном уровне определялось (или предполагалось, декларировалось), что условие когерентности имеет место (т. е. $qR \ll 1$) и можно применять формулу типа (2.3).

Далее автор [3] пишет буквально следующее: «... мы предполагали, что индивидуальные рассеиватели локализованы в определенных точках \mathbf{x}_j внутри составной мишени. Это ограничение не является существенным, и наше обсуждение может быть обобщено на случай, когда мишень рассматривается как квантово-механическая система. Имеет место, однако, один принципиальный момент, касающийся различия в квантовых состояниях, таких как заряд и проекция спина, индивидуальных рассеивателей внутри составной

системы. А именно, правило суммирования амплитуд индивидуальных рассеивателей в формуле (2.1) следует из принципа суперпозиции только, если не происходит изменения квантовых состояний. Формулу (2.1) нельзя применять в случае spin-flip и charge-exchange процессов, и сечения этих процессов не получают A^2 -фактора усиления за счет составной мишени». Однако все эти утверждения приводятся на качественном уровне, т. е. без доказательств. Более того, в ряде современных работ, как обсуждается ниже в разд. 8, просто игнорируются.

Для полноты картины продолжим изложение логики работы Фридмана [3]. Если предположить, что все рассеиватели одинаковы ($f_j(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$) и точечные, а также что для них пространственная плотность имеет вид $\rho(\mathbf{x}) = \sum_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)$, т. е. что они «притянуты» в определенных точках внутри составной мишени, то можно в формуле (2.1) снять суммирование по j и получить выражение

$$M(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \int d^3\mathbf{x} \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) = f(\mathbf{k}', \mathbf{k}) F(\mathbf{q}). \quad (2.4)$$

Поэтому имеет место утверждение, что когерентное рассеяние «измеряет» формфактор составной мишени

$$F(\mathbf{q}) \equiv \rho(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}), \quad (2.5)$$

который представляет собой фурье-образ распределения плотности (вещества) внутри этой мишени. Для сферически-симметричной ядерной гауссовой плотности с $R = r_0 A^{1/3}$ и $r_0 \simeq 10^{-13}$ см

$$\rho(r) = A(4\pi R^2)^{-3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{4R^2}\right) \text{ имеется } F(q) = \rho(q) = A \exp(-q^2 R^2).$$

В результате на качественном уровне поведение сечения можно описать следующим образом. Поскольку при импульсе пучка k максимальный переданный импульс равен $q_{\max} = 2k$, то для промежуточных или больших энергий ($2kR \leq 1$) сечение $d\sigma/d\Omega$ (2.3) имеет ярко выраженный пик вперед и в силу формфактора $F(\mathbf{q})$ быстро падает с увеличением угла вылета θ (или q). При этих условиях полное упругое сечение

$$\sigma_{\text{el}} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \sim A^{4/3} \quad (2.6)$$

имеет «невыдающееся» $A^{4/3}$ -поведение. Однако при низких энергиях, $2kR \ll 1$, условие когерентности удовлетворяется для всех углов рассеяния и благодаря $F(\mathbf{q}) \simeq \text{const}$ вся угловая зависимость сечения полностью определяется индивидуальной амплитудой $f(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ в (2.4). В полной мере эффект

когерентности проявляется при низких энергиях и $\sigma_{el} \propto A^2$. Это заключение в значительной мере не зависит от природы падающей частицы [3].

Отказ от некоторых упрощающих предположений проведенного обсуждения в действительности позволяет шире применять концепцию когерентного рассеяния. Так, в кристаллах и сложных молекулах максимум сечения (2.1) проявляется не при нулевых значениях переданного импульса, что является следствием регулярности в расположении индивидуальных рассеивателей. Пример — пик Брэгга в случае рассеяния рентгеновских лучей на биологических объектах и кристаллах [3]. Рассеяние электронов на ядрах [21] — хорошо изученное применение формализма когерентного рассеяния.

Если отдельные рассеиватели различны, как это имеет место для протонов и нейтронов с различными проекциями спина в ядре, то возможно заметное сокращение вкладов в формуле (2.3). Без детального знания характеристик индивидуальных амплитуд невозможно заранее предсказать величину когерентного сечения. Однако, игнорируя экстремальные сокращения, имеет смысл ожидать, что сечение когерентного рассеяния приблизительно в A^2 раз усилено по сравнению с сечением рассеяния на одном отдельно взятом рассеивающем центре [3]. В [3] обсуждается роль когерентного рассеяния нейтрино на ядерной среде при эволюции сверхновых звезд. Приводятся формулы для полной амплитуды когерентного рассеяния на бесспиновых ($J = 0$) ядрах с $Z = N$,

$$M(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \sim GA e^{-q^2 R^2} (-\sin^2 \theta_W) \bar{u}_l(\nu') \gamma^0 u_\nu(\nu), \quad (2.7)$$

и формулы для дифференциальных и полных сечений

$$\frac{d\sigma_A}{d\cos\theta} \simeq \frac{\sigma_0}{8} (-\sin^2 \theta_W)^2 A^2 \omega^2 (1 + \cos\theta), \quad \sigma_A \simeq \frac{\sigma_0}{4} (-\sin^2 \theta_W)^2 A^2 \omega^2.$$

При этом предполагается, что энергия нейтрино $\omega \ll m_A$ (ядро — точечное). Если $J \neq 0$ и $Z \neq N$, то необходимо суммировать по отдельным нуклонам в виде

$$M(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \sim G e^{-q^2 R^2} \left[-\sin^2 \theta_W (Z + N) + \frac{1 - 2 \sin^2 \theta_W}{2} (Z - N) - \right. \\ \left. - \frac{g_V}{2} (Z_\uparrow - Z_\downarrow) + \frac{g_A}{2} (N_\uparrow - N_\downarrow) \right] \bar{u}(\nu') \gamma^0 u(\nu),$$

где стрелка указывает на нуклоны со спинами вверх и вниз. Для всех (за исключением очень легких) ядер наиболее важный член в $M(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ пропорционален $(-\sin^2 \theta_W)(Z+N)$, поэтому, как правило, соотношение (2.7) верно. Для бесспиновых ($J = 0$) ядер с $Z \neq N$ имеется связь с ядерным изоспином

$I_3 = (1/2)(Z - N)$ в виде

$$\frac{d\sigma_A^{J=0}}{d\cos\theta} \simeq \frac{\sigma_0}{8} A^2 \sin^4 \theta_W \left[1 + \frac{1 - 2 \sin^2 \theta_W}{-\sin^2 \theta_W} \frac{I_3}{A} \right]^2 \omega^2 (1 + \cos \theta),$$

$$\sigma_A^{J=0} \simeq \frac{\sigma_0}{4} \sin^4 \theta_W A^2 [1 + \dots]^2 \omega^2.$$

Основные идеи работы [3] получили дальнейшее развитие. Например, в работе [22] когерентное дифференциальное сечение (2.2) для бесспиновых ядер $J = 0$ дано уже в современном виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\phi d(\cos\theta)} = \frac{G_F^2 E_\nu^2}{4(2\pi)^2} (1 + \cos\theta) [(1 - 4 \sin^2 \theta_W)Z - N]^2. \quad (2.8)$$

Угол упругого рассеяния θ связан с энергией отдачи ядра T , поэтому распределение по кинетической энергии отдачи ядра имеет вид

$$\frac{d\sigma}{dy} = \frac{G_F^2}{2\pi} \frac{M(M + 2E_\nu)^2}{[M + 2E_\nu(1 - y)]^3} E_\nu^2 (1 - y) [(1 - 4 \sin^2 \theta_W)Z - N]^2, \quad (2.9)$$

где G_F — постоянная Ферми; E_ν — энергия нейтрино; T — энергия отдачи ядра, $y = T/T_{\max} \in [0, 1]$, $T_{\max} = 2E_\nu^2/(M + 2E_\nu)$; M — масса ядра. Для $2E_\nu \ll M$ $T_{\max} \simeq 2E_\nu^2/M$, и считается, что очень хорошим приближением формулы (2.9) будет выражение [22]

$$\frac{d\sigma}{dy} \simeq \frac{G_F^2}{2\pi} E_\nu^2 (1 - y) [(1 - 4 \sin^2 \theta_W)Z - N]^2 \simeq \frac{G_F^2}{2\pi} E_\nu^2 (1 - y) N^2. \quad (2.10)$$

Правая часть выражения (2.10) — наиболее известная формула когерентного рассеяния нейтрино на ядрах, когда (как правило) вклад протонов подавлен малой величиной $(1 - 4 \sin^2 \theta_W)$ и «когерентное» усиление обеспечивается квадратом от числа нейтронов в ядре. Более того, выражение (2.10) предполагает, что условие когерентности (1.1) выполняется на все 100% и влияние ядра полностью отсутствует.

Однако этот «экстремально чистый» случай вряд ли достижим практически, и идеальная форма (2.10) для сечения когерентного рассеяния нейтрино на ядре должна быть модифицирована наличием зависимости от структуры ядра, т. е. ядерным формфактором, как это имело место при рассеянии электронов на ядрах (см., например, [21]). С другой стороны, включение формфакторов явно или не явно означает отклонение от чистой когерентности.

В качестве примера учета формфакторов на основе фридмановского принципа суперпозиции сложения амплитуд [3] в работе [7] было получено сечение нейтрино-ядерного рассеяния для ядер с $J = 0$ в виде

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{G_F^2}{2\pi} M \left[2 - \frac{2T}{E_\nu} + \left(\frac{T}{E_\nu} \right)^2 - \frac{MT}{E_\nu^2} \right] \frac{Q_W^2}{4} F^2(q^2), \quad (2.11)$$

где $Q_W = N - Z(1 - 4 \sin^2 \theta_W)$ — слабый заряд ядра; $q^2 = 2E_\nu^2 T M / (E_\nu^2 - E_\nu T)$ — переданный импульс; $F(q^2)$ — формфактор ядра. С использованием выражения типа (2.11), например в работе [23], было предложено измерять нейтронный ядерный формфактор посредством изучения нейтрино-ядерного упругого рассеяния. Действительно, если имеются нейтронная и протонная ядерные плотности $\rho_{n,p}(r)$, то формфактор в работе [24] дается в виде

$$F(q^2) = \frac{1}{Q_W} \int [\rho_n(r) - (1 - 4 \sin^2 \theta_w) \rho_p(r)] \frac{\sin(qr)}{qr} r^2 dr. \quad (2.12)$$

Поскольку $(1 - 4 \sin^2 \theta_W)$ мало, нейтрино упруго рассеивается на бесспиновом ядре, главным образом на нейтронах, и измерение сечения этого процесса дает доступ именно к нейтронному формфактору. С использованием аналитических формул [25], в основе которых заложено представление о том, что нуклоны обладают внутри ядра с радиусом R постоянной плотностью, а толщина поверхности ядра равна s , для фурие-образа этой плотности — формфактора — получается выражение [25]

$$F(q^2) = \frac{3j_1(qR_0)}{qR_0} \exp\left(-\frac{(qs)^2}{2}\right), \quad (2.13)$$

где $R_0^2 = R^2 - 5s^2$. В работе [24] полный формфактор

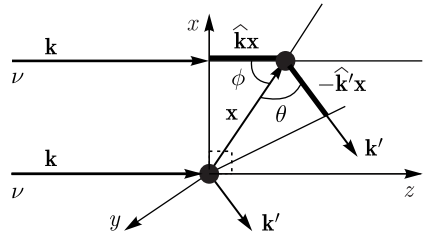
$$F(q^2) = \frac{1}{Q_W} [N F_n(q^2) - Z(1 - 4 \sin^2 \theta_W) F_p(q^2)] \quad (2.14)$$

был выражен через $F_n(q^2)$ и $F_p(q^2)$ — нейтронный и протонный формфакторы. Формула (2.13) была использована для оценки радиусов нейтрона R_n и протона R_p в [26].

Подведем итог обсуждения «когерентности по Фридману». Результат нейтрино-ядерного взаимодействия является следствием рассеяния нейтрино на отдельных нуклонах. Каждый акт рассеяния на k -м нуклоне описывается, грубо говоря, амплитудой A^k . Если предполагается, что эти нуклоны обладают фиксированными координатами (внутри ядра) \mathbf{x}_k , то A^k приобретает дополнительный множитель $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$ и полная амплитуда A равна $\sum_{k=1}^A A^k e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$.

В работе [21], посвященной, в частности, рассмотрению когерентного рассеяния электронов, для иллюстрации появления множителя $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}$ было сделано предположение о том, что упругое рассеяние электронов высоких энергий на распределенном заряде (ядре) происходит так же, как фраунгоферовская дифракция в оптике (рис. 3). Как известно, две (оптические) волны считаются когерентными, если они имеют одинаковую частоту и форму, а также

Рис. 3. Разность фаз (пропорциональная разности хода) между лучом, проходящим через точку \mathbf{x} , и лучом, проходящим через точку $\mathbf{x} = 0$, равна $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)(l_1 + l_2)$, где $l_1 = |\mathbf{x}| \cos \phi = (\hat{\mathbf{k}}\mathbf{x})$ и $l_2 = |\mathbf{x}| \cos \theta = -(\hat{\mathbf{k}}'\mathbf{x}) \equiv |\mathbf{x}| \cos(\pi - \theta)$. Поэтому $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)[\hat{\mathbf{k}}\mathbf{x} - \hat{\mathbf{k}}'\mathbf{x}] \equiv \mathbf{q}\mathbf{x}$, где $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ — переданный импульс



постоянную разность фаз. Такая когерентность приводит к конструктивной или деструктивной интерференции. Итак, амплитуды A^k когерентны, если все фазовые факторы $\mathbf{q}\mathbf{x}_k$ практически одинаковы. Это условие когерентности (1.1) выполняется, когда $|\mathbf{q}R_A| \ll 1$, т. е. когда размер (ядра), в котором предполагается, что расположены нуклоны, значительно меньше длины волны падающей частицы.

По поводу использованной в [21] аналогии с рассеянием света заметим, что при фраунгоферовской дифракции (световой волны, светового потока, луча) положение рассеивающих центров действительно строго фиксировано, т. е. дифракционная решетка — макроскопический объект с хорошо определенными в пространстве геометрическими характеристиками (положением и величиной щелей и т. п.). Однако для ядра как микроскопической, квантовой сложносвязанной системы невозможно в принципе точно фиксировать положения рассеивателей, и, строго говоря, такая логика неправомерна. Используемая аналогия (базирующаяся на волновой природе элементарных частиц) может служить только для качественного понимания причин возникновения экспоненциального фазового фактора. Сама же волновая природа элементарных частиц в значительной степени обусловлена статистической основой нашего описания их взаимодействия, которое неизбежно и фундаментально опирается на обязательное наличие потока (макроскопически большого числа) частиц.

2.2. О макроскопической когерентности в рассеянии нейтрино. Соотношение когерентного рассеяния и макроскопической когерентности рассматривалось в работе [27], где авторы задались вопросом о том, может ли когерентное рассеяние нейтрино иметь место на мишенях макроскопического масштаба, следствием чего было бы еще более значительное увеличение сечения взаимодействия нейтрино.

Изучался процесс радиационного рассеяния нейтрино на атомных электронах (или свободных электронах в проводнике), сопровождающийся излучением фотонов. Этот процесс может быть когерентным, когда суммарный импульс отдачи электрона, т. е. разность между потерянном нейтрино импульсом и импульсом испущенного фотона, достаточно мал [27]. Такие радиационные процессы выглядят привлекательно, поскольку энергия испущенных

фотонов может быть столь же большой, как и переданный системе электронов импульс, и, следовательно, проблема детектирования крайне малой энергии отдачи может быть обойдена.

Требование макроскопической когерентности в очень сильной степени ограничивает доступный фазовый объем для рассеянной частицы и испущенного фотона. Авторы [27] показали, что в том случае, когда рассеяние осуществляется за счет обычных слабых нейтрального и заряженного токов, это требование приводит к сильному подавлению элементарных (или индивидуальных) сечений, и по этой причине требование макроскопической когерентности приводит к уменьшению, а не к усилению полного сечения. Однако, если νe -рассеяние осуществляется за счет нейтринного магнитного момента или электрического дипольного момента нейтрино, то когерентные эффекты способны увеличить выход детектируемых частиц (фотонов). Эти эффекты макроскопической когерентности позволяли бы детектировать нейтрино с энергией 0,1–3,0 кэВ, которые в настоящее время недоступны для эксперимента. Авторы утверждают, что аналогичный механизм когерентного усиления может работать также для релятивистских частиц из «темного сектора», однако не для обычно рассматриваемых нерелятивистских массивных частиц темной материи.

Проблема регистрации когерентного рассеяния нейтрино на атомах заключается в том, что энергия отдачи атома очень мала и практически не детектируема (см., например, работы Ю. В. Гапонова [4, 28]). Действительно, согласно [27] *когерентность требует*, чтобы переданный рассеивателю импульс $|\mathbf{q}|$ был меньше, чем обратный радиус этого рассеивателя. Только при этом условии будет невозможно определить, на которой из составляющих мишень частице произошло рассеяние нейтрино, и нейтринные волны, рассеянные на различных составляющих, будут находиться в (одной) фазе друг с другом, что является необходимым условием для когерентного рассеяния. Для рассеяния нейтрино на атоме это означает, что $|\mathbf{q}| \lesssim 1/(1-3a) \sim 1$ кэВ, где $a \simeq 0,53 \text{ \AA}$ — радиус ядра Бора. Для атома с номером $A \sim 100$ энергия отдачи будет $E_{\text{гес}} \simeq \mathbf{q}^2/(2m_A) \sim 10^{-5}$ эВ, что примерно на 8 порядков величины ниже современной экспериментальной чувствительности [27].

Один из результатов работы [27] таков, что макроскопическая когерентность возможна и сечение становится очень большим только для нейтрино, рассеивающихся на очень малый угол вперед, который соответствует неизмеримо малым значениям энергии отдачи ядер мишени. Тем не менее известно, что макроскопическая когерентность легко достижима в процессе рассеяния света, X-лучей или нейтронов на макроскопических мишенях, поскольку в этих случаях регистрируются рассеянные частицы, а не энергия отдачи мишени.

В работе [27] была показана несостоятельность предложения эксперимента Вебера [29–31] по рассеянию нейтрино на кристалле. Отсутствие от-

дачи индивидуальных атомов (в кристалле), что лежало в основе предложения, является необходимым условием макроскопической когерентности, но недостаточным. Помимо этого требуется, чтобы нейтринные волны, рассеивающиеся на различных центрах, были в одной фазе друг с другом. Амплитуды рассеяния падающей частицы на группе рассеивающих центров, в отличие от рассеяния на одном центре, должны содержать соответствующие структурные факторы, которые описывают относительные фазы у амплитуд, соответствующих различным рассеивателям. Для упругого рассеяния нейтрино этот структурный фактор дается уже известным выражением

$$F(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = \sum_{i=1}^N e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}_i},$$

где \mathbf{k} и \mathbf{k}' — импульсы начальных и конечных нейтрино; \mathbf{r}_i — координата i -го рассеивателя; N — полное число рассеивателей в мишени. Вводя плотность числа рассеивателей $\rho(\mathbf{r}) = \sum_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$, можно записать этот структурный фактор в виде стандартного формфактора $F(\mathbf{q}) = \int d^3r e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \rho(\mathbf{r})$, где $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ — переданный мишени импульс. Как уже отмечалось выше, эти структурные факторы критичны в вопросе о когерентности процесса рассеяния, т. е. от них зависит ответ — следует ли амплитуды рассеяния нейтрино на различных частицах мишени складывать когерентно или нет [27]. Хотя точная форма этих факторов зависит от используемой в эксперименте специфики мишени, чисто когерентный и/или некогерентный режимы можно исследовать в достаточно общем виде. Действительно, квадрат модуля амплитуды перехода содержит множитель

$$|F(\mathbf{q})|^2 = \sum_{i,j=1}^N e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}. \quad (2.15)$$

Если переданный импульс \mathbf{q} удовлетворяет условию $\max_{i,j} \{|\mathbf{q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)|\} \simeq |\mathbf{q}|L \ll 1$, где L — линейный размер мишени, то можно заменить все фазовые множители в приведенной выше сумме на единицу и получить $|F(\mathbf{q})|^2 = N^2$. Это означает, что нейтрино, рассеянные на различных составляющих мишени, находятся в одной фазе друг с другом. В противоположном пределе, когда $|\mathbf{q}|L \gg 1$, выживают только диагональные ($i = j$) слагаемые суммы, и получается, что $|F(\mathbf{q})|^2 \simeq N$, т. е. имеется обычная зависимость полного сечения от числа частиц мишени. Это некогерентное рассеяние [27].

В случае рассеяния на кристаллах имеет место возможность получить эффект макроскопической когерентности, когда разность фаз $\mathbf{q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$ в выражении (2.15) кратна 2π . Это ведет к известному условию Брэгга для дифракции на кристалле:

$$2d \sin \vartheta = n\lambda, \quad (2.16)$$

где d — расстояние между плоскостями в кристалле; ϑ — угол между импульсом нейтрино и атомной плоскостью (угол рассеяния $\theta = 2\vartheta$); $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ и n — целые числа. Так же как в случае дифракции X -лучей в кристалле, интенсивность рассеянной волны нейтрино в направлении максимума Брэгга пропорциональна N^2 . Она заметно отличается от нуля в узких конусах вокруг брэгговских направлений с углами $\Delta\Omega \propto N^{-2/3}$ и практически нулевая вне этих конусов. При этом интенсивность рассеянной нейтринной волны вокруг максимума Брэгга пропорциональна $N^{4/3}$ [32]. Поскольку рассеянные нейтрино не поддаются детектированию, то только импульс отдачи всего кристалла и может быть в принципе измерен экспериментально или та сила, что действует на весь кристалл [27].

Для фиксированного направления импульса нейтрино относительно атомных плоскостей кристалла и $n \neq 0$ выражение (2.16) «отбирает» те энергии нейтрино, которые удовлетворяют условию Брэгга. Поскольку максимумы Брэгга имеют конечные ширины, то нейтрино в этих конечных энергетических интервалах $\Delta\omega$ действительно будут подвержены дифракции Брэгга, однако эти интервалы очень малы и пропорциональны $1/L \propto N^{-1/3}$. В результате полный переданный кристаллу импульс будет пропорционален $N^{4/3} \times N^{-1/3} = N$, в точности как для аморфного тела [32]. Поэтому в экспериментах Вебера макроскопическая когерентность не может быть получена [27].

Итак, авторы [27] придерживаются фридмановского взгляда на то, когда можно применять формулы для когерентного рассеяния нейтрино на составной сложной системе.

2.3. Подход Ю. В. Гапонова к когерентному рассеянию нейтрино на атоме. Напомним о работах Ю. В. Гапонова и В. Н. Тихонова 1975 г. [4, 28], в которых исследовалось упругое рассеяние нейтрино низких энергий на составных атомных системах. По мнению авторов, в случае только векторного варианта слабого взаимодействия рассеяние нейтрино происходит когерентно на всей атомной системе как целом (электронах, протонах и нейтронах). В случае аксиал-векторного варианта слабого взаимодействия рассеяние нейтрино происходит когерентно по отдельности на двух атомных подсистемах — на электронах оболочки и на нуклонах ядра. Авторы показали, что при энергиях нейтрино меньше или порядка 10 кэВ (что ниже порога неупругих процессов *) существует область когерентно-оптических нейтронных явлений (новая область нейтринной физики — нейтринная оптика, как назвали ее авторы [4, 28]), где основную роль играют процессы упругого рассеяния нейтрино на атоме в целом.

*Пожалуй, впервые в этих работах явно обращено внимание на роль неупругих процессов в когерентном рассеянии нейтрино. Можно считать, что в работе [19] эта роль оформлена количественно.

Для дальнейшего рассмотрения представляется поучительным, что в [4, 28] используются волновые функции атомной системы в квантово-полевом подходе. Полная амплитуда из [4] слабого взаимодействия (анти)нейтрино на сложной атомной системе (протоны, нейтроны и электрон атомных оболочек) может быть переписана на современный лад в виде

$$M(\mathbf{q}) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\alpha(\mathbf{q}) \bar{\nu}(\mathbf{k}') \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu(\mathbf{k}). \quad (2.17)$$

Здесь $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ — переданный от нейтрино ядру импульс, $q = |\mathbf{q}| = (2E_\nu)/c \sin \theta/2$ и θ — угол рассеяния нейтрино. Полный атомный (нуклоны и электроны) ток [4], переписанный в современных обозначениях, имеет вид

$$\begin{aligned} J_\alpha(\mathbf{q}) &= \int \prod_k^{Z_e + Z_A + N} d\mathbf{r}_k \bar{\Psi}(\mathbf{r}_k) \left[\sum_{i=e,p,n} \sum_{k_i}^{Z_e, Z_A, N} (V_\alpha^{k_i} + A_\alpha^{k_i}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_{k_i}} \right] \Psi(\mathbf{r}_k) = \\ &= \int \prod_k^{Z_e + Z_A + N} d\mathbf{r}_k \sum_{i=e,p,n} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_{k_i}} \sum_{k_i}^{Z_e, Z_A, N} \bar{\Psi}(\mathbf{r}_k) H_\alpha^{k_i} \Psi(\mathbf{r}_k), \end{aligned}$$

где $V_\alpha^{k_i} = g_V^i \gamma_\alpha^{k_i}$ ($A_\alpha^{k_i} = g_A^i \gamma_\alpha^{k_i} \gamma_5^{k_i}$) — векторный (аксиальный) оператор, описывающий слабое взаимодействие нейтрино с k_i -й частицей атома*, и $H_\alpha^{k_i} \equiv \gamma_\alpha^{k_i} (g_V^i + g_A^i \gamma_5^{k_i})$. Вектор \mathbf{r}_{k_i} дает пространственную координату k_i -й частицы в атоме (типа \mathbf{x}_i на рис. 2, б). Волновая функция составной системы (в пренебрежении спин-спиновым электрон-ядерным взаимодействием) имеет вид двух независимых подсистем

$$\Psi(\mathbf{r}_k) = \Psi_e(\mathbf{r}_{e_i}) \Psi_A(\mathbf{r}_{A_i}) = \Psi(\mathbf{r}_{e1}, \dots, \mathbf{r}_{eZ_e}) \Psi(\mathbf{r}_{p1}, \dots, \mathbf{r}_{pZ_A}; \mathbf{r}_{n1}, \dots, \mathbf{r}_{nN}).$$

Каждая из них имеет свой фиксированный спин, однако система в целом определенного спина не имеет, как утверждают авторы [4]. По их мнению, этот факт приводит к исчезновению когерентности в части, связанной с аксиально-векторным вариантом слабого взаимодействия. Соответствующее сечение упругого рассеяния нейтрино на произвольной сложной атомной системе распадается на два слагаемых. Одно описывает когерентное ν -рассеяние в целом на всей системе за счет векторного νe - и νN -взаимодействия, а второе — рассеяние на Z_e электронах и A нуклонах по отдельности (в этом смысле некогерентное). Тем не менее в каждой из подсистем рассеяние когерентно как для векторного случая, так и для аксиал-векторного, поскольку состояние подсистем не меняется [4].

* В Стандартной модели $g_V^e = 1/2 + 2 \sin^2 \theta_W$, $g_V^p = 1/2 - 2 \sin^2 \theta_W$, $g_V^n = -1/2$, $g_A^e = 1/2$, $g_A^p = g_A/2$, $g_A^n = -g_A/2$.

Сечение упругого рассеяния с матричным элементом (2.17) получается, как пишут авторы [4], по стандартной схеме*. Оно зависит от энергии и угла рассеяния нейтрино θ в лабораторной системе [4]:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \sum |M(\mathbf{q})|^2 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{G_F E_\nu}{c^2 \hbar^2} \right)^2 \times \\ \times \left\{ [g_V^e F_e + g_V^0 F_N + g_V^1 F_N(\tau_z)]^2 (1 + \cos\theta) + \right. \\ \left. + \sum_{m_z} \left[\frac{(g_A^e)^2}{2J_e + 1} F_e^2(\sigma_z) + \frac{[g_A^0 F_N(\sigma_z) + g_A^1 F_N(Y_z)]^2}{2J_A + 1} \right] (3 - \cos\theta) \right\}, \quad (2.18) \end{aligned}$$

где $g_V^0 = -\sin^2 \theta_W$, $g_V^1 = -1/2 + \sin^2 \theta_W$, $g_A^0 = 0$, $g_A^1 = -g_A/2$. Эта формула содержит как полностью когерентный векторный член (верхняя строка), так и два некогерентных между собой (нижняя строка), однако когерентных внутри себя (электронный и нуклонный) аксиал-векторных слагаемых. По мнению авторов [4], наиболее простой вид имеют сечения рассеяния нейтрино низких энергий в приближении «терминологии бета-распада» (когда $qR \ll 1$, где R — размер системы), при $E_\nu < \alpha m_e c^2$ для атомной системы или $E_\nu < m_\pi c^2$ для чисто ядерной.

Наиболее интересными для дальнейшего изложения величинами из [4] являются зависящие от переданного импульса q формфакторы электронной и нуклонной подсистем, которые определяются через волновые функции всей составной системы:

$$\begin{aligned} F_e(q) &= \int dV_e \Psi_e^+ \left(\sum_{k=1}^{Z_e} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_k} \right) \Psi_e = \\ &= \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int dV_e \Psi_e^+ \sum_{k=1}^{Z_e} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \Psi_e = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} n_e(\mathbf{r}) = n_e(q); \\ F_N(q) &= \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^A e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_k} \right) \Psi_A = \\ &= \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int dV_A \Psi_A^+ \sum_{k=1}^A \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \Psi_A = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} n_A(\mathbf{r}) = n_A(q); \end{aligned}$$

*То есть путем усреднения по начальным проекциям спина и суммированию по всем конечным проекциям спина ядра, как это явно видно из формулы (2.18). К сожалению, при этом ничего не упоминается о неизменности конечного состояния ядра, что необходимо для выполнения условия когерентности. Подробнее эта проблема обсуждается в п. 8.1.

$$\begin{aligned}
 F_N(\tau_z) &= \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^A e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_k} \tau_z^k \right) \Psi_A = \\
 &= \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^A \tau_z^k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right) \Psi_A = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \times \\
 &\times \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^{Z_A} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) - \sum_{k=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right) \Psi_A = n_p(q) - n_n(q), \\
 F_e(\sigma_z) &= \int dV_e \Psi_e^+ \left(\sum_{k=1}^{Z_e} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_k} \sigma_z^k \right) \Psi_e = \\
 &= \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int dV_e \Psi_e^+ \left(\sum_{k=1}^{Z_e} \sigma_z^k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right) \Psi_e = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int dV_e \Psi_e^+ \times \\
 &\times \left(\sum_{k=1}^{Z_e \cap (\sigma_z^k=1)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) - \sum_{k=1}^{Z_e \cap (\sigma_z^k=-1)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right) \Psi_e = n_e^\uparrow(q) - n_e^\downarrow(q),
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
 F_N(\sigma_z) &= \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^A e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_k} \sigma_z^k \right) \Psi_A = \\
 &= \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^A \sigma_z^k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right) \Psi_A = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int dV_A \Psi_A^+ \times \\
 &\times \left(\sum_{k=1}^{A \cap (\sigma_z^k=1)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) - \sum_{k=1}^{A \cap (\sigma_z^k=-1)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right) \Psi_A = n_A^\uparrow(q) - n_A^\downarrow(q),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_N(Y_z) &= \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^A e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_k} \sigma_z^k \tau_z^k \right) \Psi_A = \\
 &= \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^A \sigma_z^k \tau_z^k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right) \Psi_A = \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \times \\
 &\times \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^Z \sigma_z^k \tau_z^k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) + \sum_{k=1}^N \sigma_z^k \tau_z^k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right) \Psi_A = \\
 &= \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^{Z \cap (\sigma_z^k=1)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) - \sum_{k=1}^{Z \cap (\sigma_z^k=-1)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right) \Psi_A - \\
 &- \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \int dV_A \Psi_A^+ \left(\sum_{k=1}^{N \cap (\sigma_z^k=1)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) - \sum_{k=1}^{N \cap (\sigma_z^k=-1)} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \right) \Psi_A = \\
 &= [n_Z^\uparrow(q) - n_Z^\downarrow(q)] - [n_N^\uparrow(q) - n_N^\downarrow(q)].
 \end{aligned}$$

Здесь операторы спина σ_z и изоспина τ_z имеют вид матрицы Паули $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

В пределе $q \rightarrow 0$ видно, что формфакторы имеют простой физический смысл: полного числа атомных электронов Z_e , полного числа нуклонов A , разности протонов и нейтронов $Z - N$, полного спина электронной оболочки S_z^e и полного спина ядра S_z^A , а также разности полных спинов протонов и нейтронов $S_z^Z - S_z^N$:

$$F_e(q) = n_e(q) \equiv Z_e \frac{n_e(q)}{n_e(0)} \rightarrow F_e(q \rightarrow 0) = Z_e,$$

$$F_N(q) = n_A(q) \equiv A \frac{n_A(q)}{n_A(0)} \rightarrow F_N(q \rightarrow 0) = A,$$

$$F_N(\tau_z) = n_p(q) - n_n(q) \equiv Z \frac{n_Z(q)}{n_Z(0)} - N \frac{n_N(q)}{n_N(0)} \rightarrow \\ \rightarrow F_N(\tau_z)(q \rightarrow 0) = Z - N, x,$$

$$F_e(\sigma_z) = n_e^\uparrow(q) - n_e^\downarrow(q) \equiv Z_e^\uparrow \frac{n_e^\uparrow(q)}{n_e^\uparrow(0)} - Z_e^\downarrow \frac{n_e^\downarrow(q)}{n_e^\downarrow(0)} \rightarrow F_e(\sigma_z)(q \rightarrow 0) = 2S_z^e,$$

$$F_N(\sigma_z) = n_A^\uparrow(q) - n_A^\downarrow(q) \equiv A^\uparrow \frac{n_A^\uparrow(q)}{n_A^\uparrow(0)} - A^\downarrow \frac{n_A^\downarrow(q)}{n_A^\downarrow(0)} \rightarrow F_N(\sigma_z)(q \rightarrow 0) = 2S_z^A,$$

$$F_N(Y_z) = Z^\uparrow \frac{n_Z^\uparrow(q)}{n_Z^\uparrow(0)} - Z^\downarrow \frac{n_Z^\downarrow(q)}{n_Z^\downarrow(0)} - N^\uparrow \frac{n_N^\uparrow(q)}{n_N^\uparrow(0)} + N^\downarrow \frac{n_N^\downarrow(q)}{n_N^\downarrow(0)} \rightarrow \\ \rightarrow F_N(Y_z)(q \rightarrow 0) = 2S_z^Z - 2S_z^N.$$

Здесь $S_z^{(A,Z,N)}$ — проекция полного спина электронной оболочки (всего ядра, всех протонов и всех нейтронов) на z -ось.

В атомных системах, пишут авторы [4], в случае спин-орбитальной связи суммарный спин электронов определяется спином незаполненной атомной оболочки. В ядерной системе вследствие jj -связи и спаривания нуклонов суммарный спин нуклонов ядра S^A по существу определяется спином последних неспаренных нуклонов и поэтому $S^A \leq 1$. Таким образом, аксиальные формфакторы дают максимальный вклад в сечение для атомов с незаполненными электронными оболочками и большим спином, ядерные аксиальные формфакторы отличны от нуля для ядер с нечетным числом нейтронов и протонов, однако их общий вклад невелик [4].

С точки зрения эффекта когерентного усиления сечения наибольший интерес представляет когерентный эффект от векторных формфакторов, определяемый величиной

$$K = [g_V^e F_e + g_V^0 F_N + g_V^1 F_N(\tau_z)]^2 \sim (g_V^e Z_e + g_V^0 (Z_A + N) + g_V^1 (Z_A - N))^2.$$

Ядерные формфакторы F_N и $F_N(\tau_z)$ постоянны до $q \sim p_F \sim 200$ МэВ/с, что соответствует $E_\nu \leq 100$ МэВ [4]. Атомный формфактор $F_e = Z_e$ при

$q \leq 1$ кэВ/с и убывает вдвое при $q \sim 1,8\sqrt{Z}$ кэВ/с. Поэтому его вклад максимален для θ (в радианах), когда $E_\nu \sim (qc)/\theta \sim 1/\theta$ кэВ [4].

Далее делается заключение, что при θ , равном примерно несколько градусов, имеется область $E_\nu \leq 10$ кэВ, для которой когерентное рассеяние на электронах и нуклонах одновременно весьма существенно. Для процессов рассеяния на малые углы этот эффект будет сказываться вплоть до $E_\nu \leq 100$ кэВ. При более высоких энергиях до $E_\nu \leq 100$ МэВ будут давать вклад только ядерные формфакторы [4].

Для фактора когерентного усиления в [4] дается выражение

$$K_{\pm} = \left(\frac{1}{2}(Z_A \pm Z_e) - 2 \sin^2 \theta_W (Z_A \mp Z_e) - \frac{N}{2} \right)^2.$$

Здесь \pm отражает неопределенность относительного знака электронной и нуклонной констант связи. Когда отсутствует вклад атомного формфактора, получается результат Фридмана:

$$K_0 = \left(\frac{(Z_A - N)}{2} - 2 \sin^2 \theta_W Z_A \right)^2.$$

Численные оценки для ^{238}U и $E_\nu \sim 10$ кэВ имеют вид

$$K_+ = (Z - N/2)^2 \sim 4 \cdot 10^2, \quad K_- \simeq (1,4Z + N/2)^2 \sim 4 \cdot 10^4, \quad K_0 \sim 8 \cdot 10^3.$$

Поэтому для $E_\nu \sim 10$ кэВ при среднем сечении неупругих процессов порядка $2 \cdot 10^{-48}$ см² учет атомных формфакторов в упругом рассеянии нейтрино может дать сечение от $7 \cdot 10^{-46}$ до $7 \cdot 10^{-44}$ см² (без учета атомных формфакторов $1,4 \cdot 10^{-44}$ см²), что сопоставимо с сечением неупругих процессов при $E_\nu \sim 1$ МэВ [4].

В заключении авторы [4] отмечают, что можно говорить о новой области нейтринной физики — нейтринной оптике при $E_\nu \sim 10$ кэВ, для которой процессы упругого рассеяния нейтрино на атоме как целом играют основную роль. В этой области длина волны нейтрино больше или порядка атомных расстояний, и здесь несомненно возможны и другие когерентные оптические явления, например связанные с рассеянием нейтрино на упорядоченных, кристаллических системах. При этом будут возникать дополнительные факторы усиления, включающие число когерентно взаимодействующих атомов [4].

Похожий подход был изложен в работе [33], где обсуждались методы детектирования релятивистских нейтрино (солнечных с энергией в МэВ-диапазоне или «реликтовых» с $m < 10^{-4}$ эВ) и, в терминологии автора, нерелятивистских нейтрино (например галактических нейтрино с $1 < m < 10^2$ эВ). Для этих двух типов нейтрино были изучены принципиальные различия в зависимости амплитуды когерентного рассеяния от угла рассеяния, массы и направления спина нейтрино. Обсуждалось когерентное рассеяние как на отдельных ядрах, так и на протяженном объеме вещества, и для последнего

случая были расширены стандартные нерелятивистские соотношения между коэффициентом отражения и показателем преломления. Было отмечено, что когерентность можно исследовать также на комплексах ядер и на макроскопически протяженных фрагментах вещества, где более уместно описать взаимодействие падающих волн и материи в терминах показателя преломления или среднего потенциала взаимодействия [33].

2.4. Попытка понять, когда кончается когерентность. Впервые попытка на количественном уровне разобраться в вопросе о соотношении когерентного и некогерентного рассеяния нейтрино на ядрах была предпринята в работе [34]. Актуальность этого исследования была вызвана расширением экспериментальной программы по поиску и исследованию когерентного рассеяния нейтрино на ядрах в достаточно широком диапазоне энергий нейтрино, источников, мишеней и детекторных характеристик (порогов, эффективностей и т. п.). При этом уже не было очевидно, что условие когерентности всегда выполняется.

Действительно, некий универсальный масштаб для энергии $E_\nu < 50$ МэВ обычно считался (на качественном уровне) достаточным требованием для обеспечения когерентности в рассеянии нейтрино на ядрах. Авторы работы [34] поставили себе задачу дать количественную оценку того, когда можно говорить о когерентности, а когда уже нет. Им удалось предложить некий параметр α , который, по словам авторов, контролировал степень когерентности. Значение $\alpha = 1$ означало полную когерентность, а $\alpha = 0$ — полную некогерентность. Была исследована зависимость этого параметра от энергии нейтрино E_ν , порога регистрации энергии отдачи ядра мишени T_{\min} и типа самой ядерной мишени $A(Z, N)$. В частности, было показано, что неопределенности ядерной структуры, как и неопределенности в определении величины α , в значительной мере способны ограничить чувствительность «когерентных экспериментов» по поиску и исследованию проявлений физики за рамками Стандартной модели. С практической точки зрения был предложен более или менее условный критерий «еще сохранения когерентности» $\alpha > 0,95$ и были оценены максимальные энергии нейтрино, ему соответствующие. Ниже дается несколько более подробное изложение этой работы.

Дифференциальное сечение процесса $\nu + A \rightarrow \nu + A$ в работе [34] используется в виде (см., например, [35, 36])

$$\frac{d\sigma}{dq^2}(q^2, E_\nu) = \frac{1}{2} \frac{G_F^2}{4\pi} \left(1 - \frac{q^2}{4E_\nu^2}\right) [\varepsilon_Z F_Z(q^2) - N F_N(q^2)]^2, \quad (2.20)$$

$$\frac{d\sigma}{dT} = 2M \left[\frac{d\sigma}{dq^2} \right],$$

где $q \equiv |\mathbf{q}|$ — переданный импульс, $q^2 = 2MT + T^2 \simeq 2MT$, поскольку при обсуждении когерентности в упругом νA -процессе обычно энергия нейтрино

E_ν и измеряемая энергия отдачи ядра T заметно меньше, чем масса ядра мишени M , $\varepsilon \equiv (1 - 4 \sin^2 \theta_W) = 0,045$. Кинематика ограничивает максимальную энергию отдачи величиной $T_{\max} = 2E_\nu^2 / (M + 2E_\nu) \simeq 2E_\nu^2 / M$. Полное сечение, проинтегрированное от $q_{\min}^2 = 2MT_{\min}$ до $q_{\max}^2 = 4E_\nu^2 [M / (M + 2E_\nu)] \simeq 4E_\nu^2$, зависит от $E_\nu, T_{\min}; M, Z, N$:

$$\sigma(E_\nu, T_{\min}; M, Z, N) = \int_{q_{\min}^2}^{q_{\max}^2} \left[\frac{d\sigma}{dq^2}(q^2, E_\nu) \right] dq^2. \quad (2.21)$$

Для того чтобы иметь возможность детектировать нейтрино с энергией E_ν , необходимо иметь порог по энергии не выше $T_{\min} < 2E_\nu^2 / M$. Протонный $F_Z(q^2)$ и нейтронный $F_N(q^2)$ ядерные формфакторы ядра $A(Z, N)$ используются авторами в единой форме, заданной формулой (2.13) из [25]. Ядерные эффекты, характеризующие отклонением формфакторов от единицы с ростом переданного импульса, оказываются значительными для тяжелых ядер.

При $q^2 \rightarrow 0$ и $F(q^2) \simeq 1$ имеет место полная когерентность и сечение максимально, в частности для $T_{\min} = 0$:

$$\sigma(T_{\min} = 0) = \frac{G_F^2 E_\nu^2}{4\pi} [\varepsilon Z - N]^2, \quad (2.22)$$

т. е. экспериментальное свидетельство полной когерентности — это когда σ пропорционально $[\varepsilon Z - N]^2$. Помимо этого дифференциальное сечение при малых T также пропорционально $[\varepsilon Z - N]^2$ и не зависит от энергии E_ν :

$$\frac{d\sigma}{dT}(T \rightarrow 0) \simeq \frac{G_F^2 M}{4\pi} [\varepsilon Z - N]^2. \quad (2.23)$$

Поэтому потеря когерентности для полного сечения σ характеризуется отклонением от $[\varepsilon Z - N]^2$ скейлинга с ростом q^2 [34].

Полная амплитуда \mathcal{A} процесса $\nu A \rightarrow \nu A$ в работе [34] была представлена в виде суммы по протонам и нейтронам

$$\mathcal{A} = \sum_{j=1}^Z e^{i\theta_j} \mathcal{X}_j + \sum_{k=1}^N e^{i\theta_k} \mathcal{Y}_k, \quad (2.24)$$

где $\mathcal{X}_j (\mathcal{Y}_k)$ обозначает константу связи, а $e^{i\theta_j} (e^{i\theta_k})$ — фазу для протонов (нейтронов). В результате сечение распадается на $(N + Z)^2$ слагаемых:

$$\begin{aligned} \sigma \propto \mathcal{A} \mathcal{A}^\dagger = & \sum_{j=1}^Z \mathcal{X}_j^2 + \sum_{k=1}^N \mathcal{Y}_k^2 + \sum_{j=l+1}^Z \sum_{l=1}^{Z-1} \left[e^{i(\theta_j - \theta_l)} + e^{-i(\theta_j - \theta_l)} \right] \mathcal{X}_j \mathcal{X}_l + \\ & + \sum_{k=m+1}^N \sum_{m=1}^{N-1} \left[e^{i(\theta_k - \theta_m)} + e^{-i(\theta_k - \theta_m)} \right] \mathcal{Y}_k \mathcal{Y}_m + \\ & + \sum_{j=1}^Z \sum_{k=1}^N \left[e^{i(\theta_j - \theta_k)} + e^{-i(\theta_j - \theta_k)} \right] \mathcal{X}_j \mathcal{Y}_k. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Далее авторы [34] предполагают, что эффекты «потери когерентности» (декогерентности) между любыми парами нуклонов можно параметризовать в виде усредненного угла рассогласования фазы $\langle \phi \rangle \in [0, \pi/2]$, тогда можно записать

$$\left[e^{i(\theta_j - \theta_k)} + e^{-i(\theta_j - \theta_k)} \right] = 2 \cos(\theta_j - \theta_k) = 2 \cos \langle \phi \rangle \quad (2.26)$$

и так далее для других пар в (2.25) с $(j, k) \leftrightarrow (j, l)$ и (k, m) . Поэтому степень когерентности можно количественно охарактеризовать с помощью измеряемого параметра α , определяемого как $\alpha \equiv \cos \langle \phi \rangle \in [0, 1]$. Тогда отношение сечений на ядре $A(Z, N)$ и нейтроне $(0, 1)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(Z, N)}{\sigma(0, 1)} &= \{ \varepsilon^2 Z + N + \varepsilon^2 Z(Z - 1)\alpha + N(N - 1)\alpha - 2\varepsilon Z N \alpha \} = \\ &= \{ Z \varepsilon^2 [1 + \alpha(Z - 1)] + N [1 + \alpha(N - 1)] - 2\alpha \varepsilon Z N \}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Откуда при $\alpha = 1$ имеется полная когерентность и $\sigma \propto [\varepsilon Z - N]^2$, тогда как при $\alpha = 0$ получается полная декогерентность и $\sigma \propto [\varepsilon^2 Z + N]^*$. Из сравнения формул (2.27) и (2.20) видно, что решающее влияние на вариации параметра α с ростом q имеют формфакторы $F_Z(q^2)$ и $F_N(q^2)$. Как и следовало ожидать, все определяется q -зависимостью этих формфакторов.

В работе [34] показано, что уже при $E_\nu = 50$ МэВ (и $T_{\min} = 0$) имеет место значительная степень потери когерентности (табл. 1). С ростом порога регистрации детектора ($T_{\min} > 0$) когерентность теряется еще быстрее.

Таблица 1. Максимальная энергия отдачи, нижний предел $F(q^2)$, факторы когерентности α для $T_{\min} = 0$ при $E_\nu = 50$ МэВ. Видно, что α заметно отличается от 1. Из [34]

Параметр	n	Ag	Ge	Xe
T_{\max} , кэВ	4810	134	73,8	40,9
$F(q^2) >$	0,97	0,63	0,49	0,32
$\alpha >$	—	0,77	0,68	0,57

Согласно заключению работы [34] комбинированное измерение дифференциальных сечений в различных постановках и на различных мишенях позволит исследовать детально вопрос о переходе из когерентного режима рассеяния в некогерентный. В частности, низкоэнергетичные источники реакторных $\bar{\nu}_e$ - и солнечных ^8B ν_e -нейтрино способны исследовать область полной когерентности ($\alpha > 0,9$), тогда как источники нейтрино промежуточных энергий (π -распад в покое) дают возможность изучения переходной области ($0,9 > \alpha > 0,1$).

источники нейтрино промежуточных энергий (π -распад в покое) дают возможность изучения переходной области ($0,9 > \alpha > 0,1$).

*В [34] также используется другой параметр для характеристики (частичной) когерентности — относительное изменение сечения: $\xi \equiv \sigma(\alpha)/\sigma(\alpha=1) = \alpha + (1 - \alpha)(\varepsilon^2 Z + N)/(\varepsilon Z - N)^2$, который линейно зависит от α и они оба равны 1 в случае полной когерентности.

Как пишут авторы [34], поскольку цели исследования когерентного νA -рассеяния в значительной мере связаны с поиском Новой физики, и процедура этого поиска состоит в том, чтобы сравнить измеренные сечения с предсказаниями Стандартной модели по формулам (2.20) и (2.21), то чувствительность этой процедуры будет существенно ограничена неопределенностями формфакторов, описывающих ядерные эффекты. По этой причине предпочтительными представляются измерения в режиме $F(q^2) \simeq 1$. В частности, для этой цели в табл. 2 даны значения максимальных энергий нейтрино E_ν , при которых имеет место $F(q_{\max}^2) > 0,95$. Интересной сигнатурой Новой физики может быть то, что σ не будет иметь скейлинг типа $[\varepsilon Z - N]^2$ даже в режиме когерентности $\alpha \simeq 1$ [34]. Характерные черты такого отклонения могли бы пролить свет на природу Новой физики. Например, согласно [37] аномальные магнитные моменты нейтрино давали бы дополнительный вклад, пропорциональный Z^2 в (2.24), тогда как спин-независимое взаимодействие частиц темной материи приводило бы к вкладам, пропорциональным A^2 .

Трудно не согласиться с авторами [34] в том, что чувствительность измерений сечений когерентного рассеяния нейтрино на ядрах будет заметно ограничена, если они будут проводиться в области плохо контролируемого или частичного выполнения условия когерентности. Следует отметить, что в работе [34] впервые поставлен вопрос о количественной оценке области когерентности и сделана попытка его решить.

3. СМЕНА ПАРАДИГМЫ КОГЕРЕНТНОСТИ В νA -РАССЕЯНИИ

Напомним концепцию когерентности нейтрино-ядерного рассеяния по Фридману [3]. Как уже упоминалось (из оптики), две волны считаются когерентными, если они имеют одинаковую частоту и форму, а также постоянную разность фаз. Взаимодействие нейтрино с ядром (как составной системой) представляет собой результат рассеяния нейтрино на отдельных нуклонах ядра (в силу слабости слабого взаимодействия). Каждый акт рассеяния на k -м нуклоне может быть описан амплитудой A^k . Далее предполагается, что эти нуклоны обладают определенными координатами \mathbf{x}_k , поэтому вследствие трансляционной инвариантности амплитуда A^k приобретает дополнительный множитель $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$, и полная амплитуда процесса рассеяния нейтрино на со-

Таблица 2. Максимальная энергия E_ν , для которой еще имеет место когерентность, характеризуемая значениями параметров $F(q_{\max}^2)$ и $\alpha > 0,95$. Из [34]

Параметр $> 0,95$	E_ν^{\max} , МэВ		
	Ar	Ge	Xe
$F(q_{\max}^2) > 0,95$	17,2	14,1	11,6
$T_{\min} = 0, \alpha > 0,95$	21,1	17,4	14,3

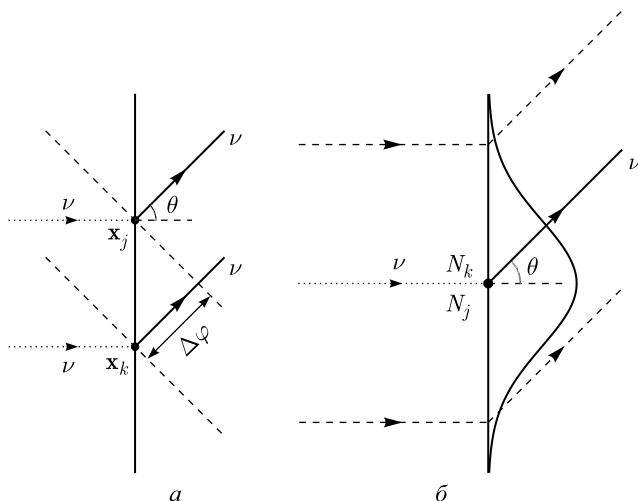


Рис. 4. а) Рассеяние фронта падающей нейтринной плоской волны (сплошная вертикальная линия) на нуклонах, расположенных на фиксированных пространственных позициях \mathbf{x}_j и \mathbf{x}_k . Благодаря ненулевому значению угла рассеяния θ возникает разность (хода) фаз $\Delta\varphi = \mathbf{q}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k)$ между двумя фронтами рассеянных плоских волн нейтрино (штриховые линии), вследствие чего теряется когерентность между этими (волнами) фронтами. б) Рассеяние нейтрино на N_k -м или N_j -м нуклоне, распределение которых внутри ядра описывается волновой функцией, изображенной условно в виде гауссоиды. Уходящая нейтринная волна представляет собой суперпозицию волн $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$, взвешенных с квадратом волновой функции $|\psi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A)|^2$

ставной системе имеет вид

$$\mathcal{A} = \sum_{k=1}^A \mathcal{A}^k e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}. \quad (3.1)$$

Согласно [3] все эти индивидуальные амплитуды считаются когерентными (складываются друг с другом конструктивно), если для любого k (любого нуклона) фазовые множители $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$ практически одинаковы (их можно вынести за знак суммирования как общий множитель). Это имеет место, когда условие когерентности (1.1) выполнено: $\mathbf{q}R \ll 1$, т. е. все индивидуальные фазовые множители практически равны $+1$ и, следовательно, друг другу. На рис. 4, а (аналогичном рис. 3) показан фрагмент рассеяния нейтрино на двух нуклонах, расположенных в некоторых фиксированных точках \mathbf{x}_j и \mathbf{x}_k , которые отделены пространственно друг от друга. Ненулевое значение угла рассеяния нейтрино $\theta > 0$ является причиной возникновения разности фаз между волнами, проходящими через эти точки пространства, и, как следствие, потери когерентности между этими волнами.

3.1. «Новая» когерентность на сложном квантовом объекте. Возникает вопрос, остается ли такое представление о когерентности приемлемым, когда снимается предположение о строго фиксированных пространственных положениях нуклонов?

Действительно, нельзя зафиксировать положение нуклона (внутри ядра), поскольку это как минимум противоречит принципу неопределенности. Возможно лишь утверждать, что отдельно взятый нуклон находится в ядре, т. е. неопределенность его пространственного положения не превышает размер ядра $\Delta \mathbf{x}_j < R$. Вероятность определенного положения нуклона (в ядре) задается волновой функцией многочастичной системы $|m\rangle = \psi_m(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A)$, где индексы m отвечают начальному или конечному квантовому состоянию ядра как сложной составной системы.

В этом случае полная амплитуда (3.1) перехода ядра из начального состояния $|n\rangle$ в конечное состояние $|m\rangle$ обобщается в виде

$$\mathcal{A}_{mn} = \langle m | \mathcal{A} | n \rangle = \sum_{k=1}^A \mathcal{A}_{mn}^k \langle m | e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k} | n \rangle = \sum_{k=1}^A \mathcal{A}_{mn}^k f_{mn}^k(\mathbf{q}). \quad (3.2)$$

Здесь *формально* считается, что одночастичная амплитуда рассеяния нейтрино на k -м нуклоне может потенциально зависеть от состояний ядра $|n\rangle$ или $|m\rangle$, т. е. $\mathcal{A}_{mn}^k \neq \mathcal{A}^k$. В выражении (3.2) введена величина, обобщающая фазовый фактор $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$ из формулы (3.1),

$$\begin{aligned} f_{mn}^k(\mathbf{q}) &\equiv \langle m | e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k} | n \rangle = \\ &= \int \left(\prod_{i=1}^A d\mathbf{x}_i \right) \psi_m^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k} \psi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A) = \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Она представляет собой переходный (из состояния $|n\rangle$ в состояние $|m\rangle$) матричный элемент оператора сдвига $e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k}$, где $\hat{\mathbf{X}}_k$ — оператор квантового положения k -го нуклона. Для упругого «перехода» из состояния $|n\rangle$ в (то же самое) состояние $|n\rangle$ из (3.2) получается

$$\mathcal{A}_{nn} = \sum_{k=1}^A \mathcal{A}_{nn}^k f_{nn}^k(\mathbf{q}). \quad (3.4)$$

«Диагональный» (упругий) вариант формулы (3.3) имеет вид

$$\begin{aligned} f_{nn}^k(\mathbf{q}) &= \int \left(\prod_{i=1}^A d\mathbf{x}_i \right) |\psi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A)|^2 e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k} = \\ &= \langle n | e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k} | n \rangle = \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

и определяет формфактор нуклона, когда ядро находится в состоянии $|n\rangle$. Величины (3.3) и (3.5) отличаются от экспоненциального множителя $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$ из формулы (3.1) в двух важных аспектах.

Во-первых, несмотря на явное присутствие индекса k , они не зависят от координаты k -го нуклона. По всем переменным, чувствительным к конкретному пространственному расположению отдельно взятого нуклона, в формулах (3.3) и (3.5) проведено интегрирование. Действительно, для любого произвольно взятого k величину $f_{mn}^k(\mathbf{q})$ можно представить в виде интеграла, явно выделив интегрирование по \mathbf{x}_k , т. е.

$$\int \left(\prod_{i \neq k}^{A-1} d\mathbf{x}_i \right) \psi_m^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_A) \times \\ \times \psi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_A) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k} d\mathbf{x}_k \neq f(\mathbf{x}_k),$$

который, очевидно, не зависит от \mathbf{x}_k .

Во-вторых, с точностью до различия между протонами и нейтронами $f_{nn}^k(\mathbf{q})$ и $f_{mn}^k(\mathbf{q})$ не зависят и от индекса k . Это утверждение может быть доказано путем замены переменных интегрирования и отражает свойства симметрии волновой функции при перестановке ее аргументов. Нужно, чтобы функции $\psi_m(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A)$ и $\psi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A)$ имели одинаковую симметрию (обе симметричны или обе антисимметричны) относительно перестановок номеров координат всех частиц.

Благодаря этим свойствам величины $f_{mn}^k(\mathbf{q})$ можно заключить, что фазы всех индивидуальных амплитуд рассеяния на отдельных нуклонах, входящих в полную амплитуду (3.2), равны друг другу. Более точно, они вообще не фигурируют в соответствующих выражениях (т. е. не имеют никакого значения), и все одночастичные амплитуды когерентны при любых \mathbf{q} , в отличие от общепринятого фридмановского случая (3.1).

Из этого заключения совсем не следует, что полная амплитуда перестает стремиться к нулю при достаточно больших \mathbf{q} . Такое поведение полной амплитуды сохраняется, поскольку с ростом \mathbf{q} все формфакторы $f_{nn}(\mathbf{q}) \rightarrow 0$. С математической точки зрения причиной такого поведения $f_{nn}(\mathbf{q})$ является сильно осциллирующий фактор $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$, зануляющий интеграл из (3.3). Физическая причина состоит в том, что происходит некогерентное (т. е. с совершенно произвольными относительными фазами) суммирование волн, принадлежащих волновой функции отдельных нуклонов, находящихся (в ряде случаев уже) вне ядра мишени. Другие аргументы будут представлены в п. 3.3.

Может показаться, что сделанное выше утверждение находится в противоречии с волновой функцией, соответствующей положению нуклонов на фиксированных пространственных позициях. Действительно, если считать, что

$$|\psi_n(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_A)|^2 \propto \prod_i \delta^3(\mathbf{y}_i - \mathbf{x}_i), \quad (3.6)$$

где y_i — это переменные, а x_i — параметры функции, то выражение (3.5) сводится к (3.1), в котором каждое слагаемое обладает собственной фазой, что находится в явном противоречии с нашим утверждением. Это противоречие возникает по той причине, что предположение (3.6) нарушает принцип идентичности одинаковых частиц, который требует, чтобы волновая функция многочастичной системы при перестановке своих аргументов была либо симметричная, либо антисимметричная.

В результате нет возможности утверждать, что, скажем, i -я частица (внутри составной системы) расположена в точке x_i , даже если известно, что все частицы занимают некоторые фиксированные пространственные положения внутри составной системы. Данная i -я частица может занимать любую из возможных позиций среди всех доступных фиксированных значений x_1, \dots, x_A . По этой причине рассмотрение выражения (3.5) с надлежащим образом симметризованной δ -подобной волновой функцией приводит естественным образом к выражению (3.1) для любого индекса k в полном согласии с нашим заключением. Это противоречие позволяет лучше понять тот факт, что сама форма выражения (3.1) игнорирует фундаментальный принцип квантовой механики — неразличимость одинаковых частиц. В качестве иллюстрации на рис. 4, б показана картина рассеяния, учитывающая волновую функцию нуклонов, представленную для простоты в гауссовой форме. Суммирование рассеянных индивидуальными нуклонами нейтринных волн, взвешенных согласно $|\psi_n(x_1, \dots, x_A)|^2$, дает единую, финальную рассеянную нейтринную волну.

Таким образом, согласно изложенному выше нет основания считать диагональные (т. е. где $k = j$) слагаемые в разложении типа квадрата выражения (3.4)

$$|\mathcal{A}_{nn}|^2 = |f_{nn}(\mathbf{q})|^2 \sum_{k,j} \mathcal{A}_{nn}^k \mathcal{A}_{nn}^{j*} = |f_{nn}(\mathbf{q})|^2 \left(\sum_k |\mathcal{A}_{nn}^k|^2 + \sum_{k \neq j} \mathcal{A}_{nn}^k \mathcal{A}_{nn}^{j*} \right)$$

происходящими из-за некогерентного (т. е. «разнофазного») взаимодействия нейтрино с нуклонами. Оба слагаемых, диагональное (первое) и недиагональное (второе), дают одинаковый вклад в $|\mathcal{A}_{nn}|^2$, причем с одной и той же зависимостью от переданного импульса \mathbf{q} .

Завершая данный пункт, можно подчеркнуть, что традиционный (Фридмановский) когерентный эффект в рассеянии нейтрино на составной системе лучше назвать эффектом *конструктивной интерференции* всех индивидуальных (и всегда когерентных) амплитуд рассеяния нейтрино на отдельных элементах составной системы.

Возникает вопрос, что тогда считать *некогерентным* (по Фридману) взаимодействием? Ответ состоит в том, что такое некогерентное взаимодействие будет определяться процессами, в которых изменяется внутреннее квантовое состояние ядра, т. е. $n \neq m$.

3.2. Что теперь когерентно, а что некогерентно? Приведенные ниже качественные рассуждения отвечают на этот вопрос. Пусть ядро изначально находится в квантовом состоянии n . Если экспериментально нельзя выделить конкретное конечное квантовое состояние ядра m , то необходимо принять во внимание все возможные конечные состояния ядра, т. е. по всем по ним просуммировать. Подчеркнем, что этот момент имеет ключевое значение для всего дальнейшего рассмотрения. В отличие от практически всех предыдущих работ, где явно или неявно предполагалось, что конечное состояние совпадает с начальным (см. обсуждение в разд. 8), здесь на равных основаниях допускаются все иные (т. е. неупругие) возможности, даже если таких минимальное число. Именно это позволяет описать плавный переход от когерентного режима рассеяния нейтрино на ядре к некогерентному.

В результате суммирования по всем допустимым конечным состояниям ядра квадрат полной амплитуды рассеяния, заданной в виде суммы (3.2), можно записать (формально) как

$$|\mathcal{A}|^2 = \sum_m |\mathcal{A}_{mn}|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} \sum_m f_{mn}^k f_{mn}^{j*}, \quad (3.7)$$

где для простоты и наглядности опущена зависимость индивидуальных амплитуд от спина, типа нуклона и индекса k , т. е. считается, что $\mathcal{A}_{mn}^k = \mathcal{A}_0$. С использованием разложения единичного оператора по полному набору состояний

$$\sum_m |m\rangle\langle m| = \hat{I} \quad (3.8)$$

и формального определения $f_{mn}^k = \langle m|e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle$ выражение (3.7) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|^2 &= |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} \langle n|e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} \sum_m |m\rangle\langle m|e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle = \\ &= |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} \langle n|e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Если в матричном элементе $\langle n|e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k}|n\rangle$ положить $k = j$, т. е. нейтрино-ядерное взаимодействие происходит на одном и том же нуклоне (рис. 5, а), то

$$\begin{aligned} \langle n|e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_{k=j}}|n\rangle &= 1 \quad \text{и} \quad |\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} \langle n|e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j}|n\rangle = \\ &= |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} 1 = |\mathcal{A}_0|^2 A^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

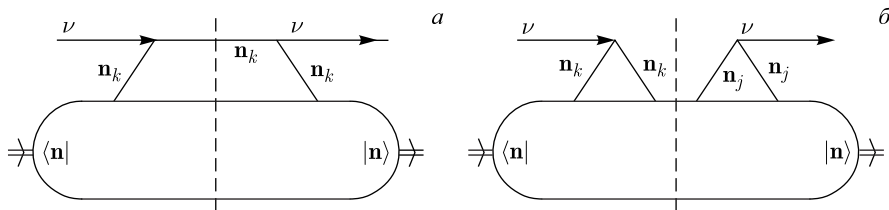


Рис. 5. а) Упругое нейтрино-ядерное рассеяние за счет взаимодействия нейтрино с одним и тем же, k -м, нуклоном ядра. б) Рассеяние за счет взаимодействия нейтрино с разными, k -м и j -м, нуклонами ядра

Если $k \neq j$ в $\langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle$, то нейтрино-ядерное взаимодействие происходит на двух различных нуклонах (рис. 5, б). Тогда выражение (3.9) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{A}|^2}{|\mathcal{A}_0|^2} &\equiv \sum_{k,j} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle = \\ &= \sum_{k=j}^A \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle + \sum_{j,k \neq j}^A \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle = \\ &= \sum_{k=j}^A 1 + G(\mathbf{q}) \sum_{j,k \neq j}^A 1 = A + A(A-1)G(\mathbf{q}) = A^2G(\mathbf{q}) + A(1-G(\mathbf{q})). \end{aligned}$$

Здесь введена двухчастичная корреляционная функция

$$G_{nn}(\mathbf{q}) \equiv G(\mathbf{q}) = \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle, \quad (3.11)$$

которая $G(\mathbf{q}) = 1$, если $k = j$, а если $k \neq j$, то $G(\mathbf{q})$ (как и $f_{mn}^k(\mathbf{q})$) не зависит от значений индексов k, j , однако здесь важно, что индексы k и j различны. Иными словами, стартуя с выражения для полной амплитуды вероятности в виде (3.2) и ее квадрата в виде (3.7) с учетом корреляционной функции (3.11), приходим к окончательному выражению для квадрата амплитуды вероятности

$$|\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 [A + G(\mathbf{q})A(A-1)] = |\mathcal{A}_0|^2 [A^2G(\mathbf{q}) + A(1-G(\mathbf{q}))], \quad (3.12)$$

где A — число нуклонов. Таким образом, квадрат полной амплитуды $|\mathcal{A}|^2$ в формуле (3.12) включает два слагаемых, первое квадратично по A и одновременно пропорционально $G(\mathbf{q})$, а второе линейно зависит от A и пропорционально множителю $[1 - G(\mathbf{q})]$. Уже здесь видно, что наличие этих

двух слагаемых в одной формуле позволяет иметь плавный переход между когерентным (по Фридману, т. е. пропорциональным A^2) и некогерентным (т. е. пропорциональным A) режимами рассеяния нейтрино на ядре. Если ядерная многочастичная волновая функция составлена как антисимметризованное произведение одночастичных волновых функций, то $G(\mathbf{q})$ может быть представлено в виде $|F(\mathbf{q})|^2$, где $F(\mathbf{q})$ — одночастичный нуклонный формфактор ядра.

Вид соотношения (3.12) не позволяет увидеть, что именно является источниками квадратного и линейного по A слагаемых. Покажем, что в полном соответствии с общими представлениями когерентный и некогерентный члены действительно обеспечены процессами, в которых ядро либо остается в первоначальном квантовом состоянии ($n = m$), либо конечное квантовое состояние ядра изменяется ($n \neq m$). С этой целью перепишем выражение для полной амплитуды (3.9) в виде двух слагаемых

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|^2 &\equiv |\mathcal{A}_0|^2 \sum_m \sum_{k,j} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | m \rangle \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle = \\ &= |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle + \\ &+ |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} \sum_{m \neq n} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | m \rangle \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где первое слагаемое отвечает случаю $m = n$ (упругое рассеяние), а второе — $m \neq n$ (неупругое рассеяние). Поскольку квадрат формфактора можно записать как

$$|F(\mathbf{q})|^2 = \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle,$$

то первое слагаемое в (3.13) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle &= \\ &= |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} |F_n(\mathbf{q})|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 A^2 |F(\mathbf{q})|^2, \end{aligned} \quad (3.14)$$

и соответствует вкладу когерентного ($\propto A^2$) слагаемого в квадрат полной амплитуды рассеяния (см., например, формулу (3.12)).

Второе «недиагональное» слагаемое в (3.13), где $m \neq n$, с помощью так называемой ковариации двух операторов сдвига, определенной формально как

$$\text{cov}(e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k}) \equiv \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle - \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle, \quad (3.15)$$

можно, добавив и вычтя «диагональное» слагаемое с $m = n$, представить следующим образом, временно опустив $|\mathcal{A}_0|^2$:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k,j} \sum_{m \neq n} \langle n | e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j} | m \rangle \langle m | e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle = \\
 & = \sum_{k,j} \left[\sum_m \langle n | e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j} | m \rangle \langle m | e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle - \sum_{m=n} \langle n | e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j} | m \rangle \langle m | e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \right] = \\
 & = \sum_{k,j} \left[\langle n | e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j} e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle - \langle n | e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \right] \equiv \\
 & \equiv \sum_{k,j} \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}).
 \end{aligned}$$

Поскольку при $k = j$ ковариация (3.15) превращается в «дополнение к форм-фактору»:

$$\begin{aligned}
 \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}) & = \langle n | e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_k} e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle - \langle n | e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \langle n | e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle = \\
 & = 1 - |F_n(\mathbf{q})|^2,
 \end{aligned}$$

то второе слагаемое из (3.13), имеющее вид суммы ковариаций, можно преобразовать, выделив явно суммирование по совпадающему индексу $k = j$, т. е. имеем

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k,j} \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}) = \\
 & = \sum_{k=j} \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_j}) + \sum_{k \neq j} \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}) = \\
 & = \sum_{k=j} (1 - |F_n(\mathbf{q})|^2) + \sum_{k \neq j} \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}).
 \end{aligned}$$

В результате второе слагаемое в (3.13) может быть представлено как

$$|\mathcal{A}_0|^2 \left[A(1 - |F(\mathbf{q})|^2) + \sum_{k \neq j} \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}) \right].$$

Входящие в это выражение ковариационные слагаемые тождественно равны нулю, когда волновая функция многочастичной системы представляет собой произведение одночастичных волновых функций, и в этом частном случае (хорошо, тем не менее, иллюстрирующим суть дела) второе слагаемое

в (3.13) становится просто равным некогерентному ($\propto A$) слагаемому в формуле (3.12):

$$|\mathcal{A}_0|^2 A(1 - |F(\mathbf{q})|^2). \quad (3.16)$$

Итак, квадрат полной амплитуды рассеяния, заданный формулой (3.13), можно представить окончательно в виде *

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}|^2 &\equiv |\mathcal{A}_0|^2 \sum_m \sum_{k,j} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_j} | m \rangle \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle = \\ &= |\mathcal{A}_0|^2 \left[A^2 |F(\mathbf{q})|^2 + A(1 - |F(\mathbf{q})|^2) + \sum_{k \neq j} \text{cov}(e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_j}, e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k}) \right]. \quad (3.17) \end{aligned}$$

3.3. Кинематический парадокс традиционной когерентности. Считается общепринятым, что когерентное усиление вероятности процесса рассеяния падающей частицы (нейтрино) на сложной составной системе (ядре) отвечает тому случаю, когда эта система после взаимодействия остается в своем первоначальном квантовом состоянии. Однако это (очевидное с точки зрения основ квантовой механики) утверждение совершенно общего характера при ближайшем рассмотрении приводит к некому кинематическому парадоксу, который, с нашей точки зрения, никогда не обсуждался в литературе.

Действительно, если рассматривать ядро как сложную систему из нуклонов, с которыми только и происходит взаимодействие нейтрино, то в результате взаимодействия с нейтрино как нуклон, так и ядро (его содержащее) приобретают одинаковый переданный им нейтрино импульс \mathbf{q} . Нейтрино «отдало» этот импульс (в акте взаимодействия) и улетело дальше, нейтрино «не интересно» кто и как его получил и перераспределил и что вообще стало с ядром.

Если считать, что до взаимодействия с нейтрино как ядро, так и этот (активный) нуклон находятся в покое, то получается, что кинетическая энергия нуклона после взаимодействия с нейтрино $T_N = \mathbf{q}^2/2m_N$ на величину m_A/m_N превышает кинетическую энергию всего ядра $T_A = \mathbf{q}^2/2m_A$.

Однако поскольку считается, что ядро остается в том же квантовом состоянии с той же внутренней энергией (сохранение энергии и целостности ядра), то T_N и T_A должны быть равны одной и той же потерянной энергии нейтрино $E_\nu - E'_\nu$, т.е. эти величины должны быть равны друг другу. Физически понятно, что приобретенный нуклоном импульс перераспределяется между всеми остальными нуклонами (поскольку ядро сохраняет свою целостность) и в результате все ядро приобретет полный импульс, очевидно, равный \mathbf{q} .

*См. также вычисления в прил. П.1.

Тем не менее этот кинематический парадокс возникает из-за предположения, что «принимающий взаимодействие» нуклон находится в покое. Такое предположение обычно вполне применимо, когда импульс внутреннего движения нуклона в ядре (импульс Ферми) \mathbf{p} значительно меньше массы самого нуклона m_N . Однако в данном случае имеется кинематическое противоречие — требование целостности ядра и требование $T_N = T_A$ не могут удовлетворяться одновременно при любых импульсах \mathbf{p} внутреннего движения нуклона в ядре*.

Предполагая, что $T_N = [E_\nu - E'_\nu] = T_A$, и используя закон сохранения энергии (до и после взаимодействия) в виде

$$\frac{(\mathbf{p} + \mathbf{q})^2}{2m_N} - \frac{\mathbf{p}^2}{2m_N} = \frac{\mathbf{q}^2}{2m_A}, \quad (3.18)$$

можно найти подходящие значения \mathbf{p} для импульса внутреннего движения активного нуклона, принявшего на себя взаимодействие с нейтрино. Оно оказывается равным

$$\mathbf{p} = -\frac{\mathbf{q}}{2} \left(1 - \frac{m_N}{m_A} \right). \quad (3.19)$$

Таким образом, сохранение момента-импульса и требование неизменности квантового состояния ядра после взаимодействия дают качественную картину когерентного нейтрино-ядерного взаимодействия в виде, представленном символически на рис. 6. Из этой картины (см. рис. 6) следуют несколько важных, с нашей точки зрения, наблюдений, не обсуждавшихся в литературе,

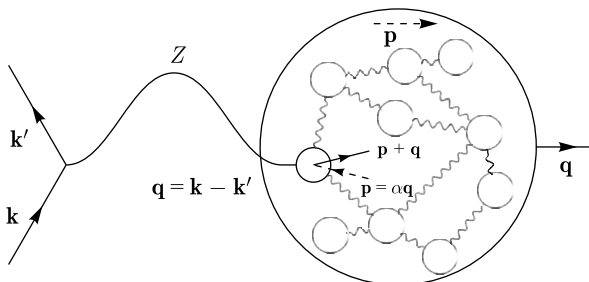


Рис. 6. Взаимодействие нейтрино с нуклоном, обладавшим импульсом $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{q}$ и равным (3.19). Поскольку ядро находилось в покое, все остальные нуклоны имели импульс $-\mathbf{p}$ (штриховые стрелки). Полученный нуклоном импульс $\mathbf{p} + \mathbf{q} = (1 + \alpha)\mathbf{q}$ направлен вдоль \mathbf{q} . На рисунке \mathbf{p} и $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ несколько разведены (для наглядности). Приобретенные нуклоном энергия и импульс \mathbf{q} далее передаются всему ядру, не изменяя при этом его квантового состояния

*Здесь предполагается, что ядро и находящийся в нем нуклон имеют определенные значения импульса.

по крайней мере в контексте когерентного рассеяния нейтрино на связанной составной системе (ядре).

Во-первых, не любой нуклон может взаимодействовать с нейтрино таким образом, что после взаимодействия нейтрино с ядром последнее оставалось бы в первоначальном (неизменном) квантовом состоянии. Только те нуклоны, которым «посчастливилось» иметь импульс (внутри ядра до взаимодействия), определяемый формулой (3.19), имеет такую возможность. Следует подчеркнуть, что в данном обсуждении слово нуклон, обычно означающее *просто* частицу, входящую в состав ядра, приобретает дополнительную нагрузку (или истинное значение) в том смысле, что здесь этот протон или нейтрон взаимодействует с нейтрино и одновременно «ощущает» на себе влияние других нуклонов ядра как связанной составной системы. Или, другими словами, для сохранения самоидентичности ядра после взаимодействия, в результате которого оно приобретает импульс \mathbf{q} , это ядро «должно как бы заранее внутри себя подготовить» нуклон с внутренним импульсом (3.19). Только тогда возможно (упругое) когерентное рассеяние, когда ядро сохраняет свое первоначальное квантовое состояние.

Во-вторых, поскольку распределение импульсов нуклонов в ядре определяется многочастичной волновой функцией связанной системы (ядра), локализованной в конфигурационном или импульсном пространствах, то, как правило, большие значения импульсов нуклонов (внутри ядра) значительно менее вероятны, чем малые. Отсюда понятно, почему для больших переданных импульсов \mathbf{q} фактор когерентного усиления срабатывает плохо (редко найдется подходящий импульс нуклона), в то время как для малых \mathbf{q} , наоборот, вероятность найти в ядре нуклон с подходящим импульсом значительно выше (ср. с условием (1.1)). Формально математически этот эффект регулируется квадратом ядерного формфактора $|F(\mathbf{q})|^2$.

Проведенное обсуждение можно распространить на случай некогерентного нейтрино-ядерного рассеяния, т. е. когда ядро в результате взаимодействия изменяет свое внутреннее квантовое состояние $|n\rangle \rightarrow |m\rangle$, где $n \neq m$. Условие (3.18) следует обобщить путем учета ненулевого значения разности энергетических уровней ядра $\Delta\varepsilon_{mn} \neq 0$, т. е.

$$E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - E_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{q}^2}{2m_A} + \Delta\varepsilon_{mn} \rightarrow \sqrt{E_{\mathbf{p}}^2 + 2\mathbf{p}\mathbf{q} + \mathbf{q}^2} - E_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{q}^2}{2m_A} + \Delta\varepsilon, \quad (3.20)$$

где $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{m_N^2 + \mathbf{p}^2}$. Выражение (3.20) содержит релятивистские формулы для энергии нуклонов, поскольку для малых \mathbf{q} импульс \mathbf{p} (решение (3.20)) может быть сравним с массой нуклона m_N .

С представлением \mathbf{p} в виде суммы продольного \mathbf{p}_L и поперечного импульсов \mathbf{p}_T для фиксированного переданного импульса \mathbf{q} точное решение

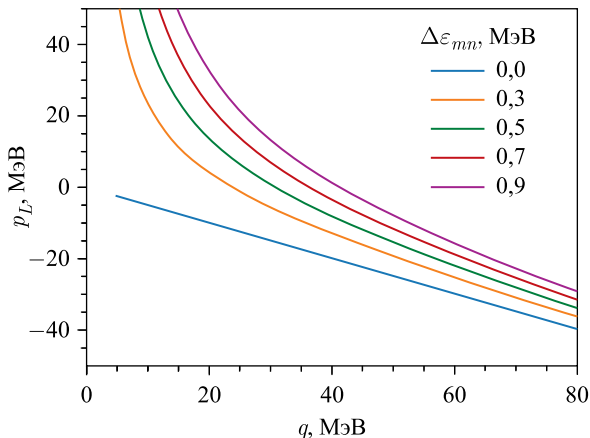


Рис. 7. Продольная компонента p_L внутреннего импульса (активного) нуклона, отвечающая закону сохранения энергии-импульса в нейтрино-ядерном рассеянии, как решение уравнения (3.21) при различных энергиях возбуждения ядра $\Delta\varepsilon_{mn}$

уравнения (3.20) имеет вид *

$$p_L = -\frac{|\mathbf{q}|}{2} \left(1 - \sqrt{\beta} \sqrt{1 + \frac{4m_{N,T}^2}{\mathbf{q}^2(1-\beta)}} \right), \quad (3.21)$$

где $\beta = E_{mn}^2/\mathbf{q}^2$, $E_{mn} = \mathbf{q}^2/(2m_A) + \Delta\varepsilon_{mn}$, $m_{N,T}^2 = m_N^2 + p_T^2$. На рис. 7 представлены решения (3.21) как функции $|\mathbf{q}|$.

В случае $\Delta\varepsilon_{mn} = 0$ решение на рис. 7 воспроизводит результат (3.19). Здесь значение β из (3.21) очень мало: $\beta = \mathbf{q}^2/(4m_A^2) = T_A/(2m_A) \ll 1$, и $p_L \simeq -|\mathbf{q}|/2 (1 - m_{N,T}/m_A)$ совпадает с (3.19) при $p_T = 0$.

Итак, из рис. 7 можно увидеть, что продольная компонента импульса «активного» нуклона, способного участвовать в нейтрино-ядерном когерентном рассеянии, всегда направлена против переданного ядру 3-импульса \mathbf{q} . Если же имеется неупругость с $\Delta\varepsilon_{mn} \neq 0$, то решение уравнения (3.20) существенным образом отличается в области малых переданных импульсов \mathbf{q} . Возможны несколько различных случаев.

Так, при $\mathbf{q} = 0$ уравнение (3.20) не имеет решения, что просто отвечает невозможности возбуждения ядра при нулевой передаче ему импульса. Далее при малых $|\mathbf{q}|$, чуть более превышающих минимально возможное значение $|\mathbf{q}_{\min}| = \Delta\varepsilon_{mn} + \Delta\varepsilon_{mn}^2/(2m_A)$, решение в виде формулы (3.21) расходится,

*См. прил. П.1.

т. е. $p_L \rightarrow \infty$, поэтому нерелятивистское приближение в уравнении (3.20) неприменимо при малых \mathbf{q} . Вероятность найти активный (в смысле участия в процессе рассеяния) нуклон в ядре с таким внутренним импульсом ничтожна. Поэтому для малых $|\mathbf{q}|$ некогерентное (точнее, неупругое) рассеяние практически невозможно, тогда как нет никаких ограничений для когерентного (точнее, упругого) рассеяния. С ростом $|\mathbf{q}|$ открывается реальная возможность ядерного перехода $|n\rangle \rightarrow |m\rangle$ с разностью энергетических уровней ядра $\Delta\varepsilon_{mn}$, при этом внутреннему импульсу активного нуклона $\mathbf{p} \approx 0$ отвечает минимальная степень подавления. Опять имеет место полностью обратная ситуация для когерентного (упругого) рассеяния. Приведенное кинематическое рассмотрение позволяет качественно понять зависимость нейтрино-ядерного рассеяния от переданного импульса \mathbf{q} , хотя, конечно, не дает полной его картины. При переходе $|n\rangle \rightarrow |m\rangle$ ($n \neq m$) матричный элемент $\langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}} | n \rangle$, где $\hat{\mathbf{X}}$ — оператор квантового положения, фактически определяет эту функциональную зависимость. Количественное рассмотрение этого вопроса дано в прил. П.3.

Механическая аналогия упругого и неупругого рассеяния. Рассмотренный выше кинематический парадокс традиционной когерентности имеет простой механический аналог. Для иллюстрации рассмотрим механическую систему, состоящую из двух шаров одинаковой массы m , соединенных безмассовой упругой пружиной.

Пусть в первом случае оба шара находятся в покое и один из них (например правый) приобретает (за счет удара извне) импульс \mathbf{q} и, соответственно, энергию $\mathbf{q}^2/2m$ (рис. 8, слева). После перераспределения этого импульса между шарами их центр масс движется с импульсом \mathbf{q} (закон сохранения импульса), однако их общая кинетическая энергия вдвое меньше — $\mathbf{q}^2/4m$, поскольку их масса $2m$. Оставшаяся половина кинетической энергии правого шара (рис. 8, справа) перешла в потенциальную энергию пружины и кинетическую энергию шаров. В приведенном случае — аналог неупру-

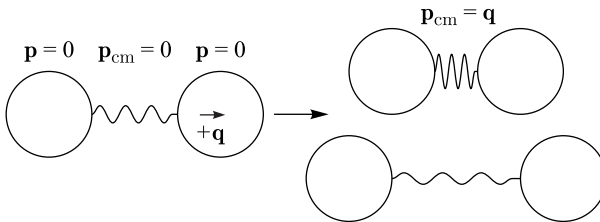


Рис. 8. Оба шара изначально находятся в покое. Затем правый приобретает импульс \mathbf{q} (слева). После некоторого времени их центр масс движется с импульсом \mathbf{q} и половина полученной извне энергии аккумулирована в потенциальной энергии пружины. Она сжимается и разжимается, как показано на этом рисунке справа

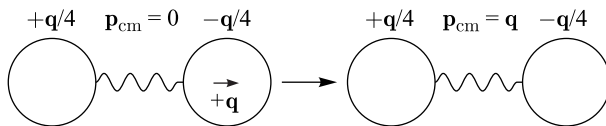


Рис. 9. Колебание шаров с максимальным импульсом $\pm q/4$. Центр масс в покое. Правый шар в момент, когда $-q/4$, приобретает дополнительно импульс q (слева). После этого центр масс движется с импульсом q , а пружина обладает изначальной потенциальной энергией, т. е. система сохранила свое внутреннее состояние неизменным. Шары продолжают двигаться с максимальным импульсом $\pm q/4$

гого взаимодействия — изначально основное состояние системы (пружина в покое) перешло в некоторое возбужденное состояние (пружина обладает внутренней энергией), и шары за счет этого совершают колебательные движения вокруг общего центра масс (рис. 8, справа).

Во втором случае шары (за счет сжатия и растяжения пружины) совершают периодическое движение навстречу друг другу и обратно, сохраняя при этом неподвижным их центр масс. Импульсы шаров в любой момент времени равны по величине и противоположно направлены. Система находится в некотором возбужденном состоянии. Пусть максимальный импульс шара, когда пружина обладает нулевой потенциальной энергией, равен $\pm q/4$ (рис. 9, слева). Один из этих импульсов согласно формуле (3.19) выбран равным $-q/4$. Полная энергия двух шаров равна $(q/4)^2/2m + (q/4)^2/2m = q^2/16m$. Сразу после того, как правый шар (см. рис. 9), импульс которого был равен $-q/4$, приобрел дополнительный импульс q , импульсы и энергии шаров стали $(+q/4, +3/4q)$ и $(q^2/32m, 9q^2/32m)$. Полная энергия системы теперь равна $5q^2/16m$. Поскольку кинетическая энергия центра масс $q^2/4m$, то потенциальная энергия, запасенная в пружине, оказывается неизменной и равной $q^2/16m$. Таким образом, эта система (из двух шаров, связанных пружинкой) остается после взаимодействия в своем первоначальном состоянии с той же самой внутренней потенциальной энергией (пружины). Изменение кинетической энергии подвергшегося удару шара в точности соответствует приобретенной кинетической энергии центра масс системы. Это пример упругого рассеяния.

3.4. Резюме по поводу смены парадигмы когерентного рассеяния.

1) При дифракции светового луча положение рассеивающих центров действительно строго фиксировано, т. е. дифракционная решетка — макроскопический объект с хорошо определенными в пространстве геометрическими характеристиками (положением и величиной щелей и т. п.). Однако для ядра как микроскопической, квантовой (сложной и связанной) системы невозможно в принципе точно фиксировать положение рассеивателей, и строго говоря, такая логика неправомерна.

2) Не любой нуклон может взаимодействовать с нейтрино таким образом, что после взаимодействия нейтрино с ядром последнее оставалось бы в первоначальном (неизменном) квантовом состоянии. Только те нуклоны, которым «посчастливилось» иметь импульс (внутри ядра до взаимодействия), определяемый формулой (3.19), имеют такую возможность. Или, другими словами, для сохранения самоидентичности ядра после взаимодействия, в результате которого ядро приобретает импульс \mathbf{q} , это ядро «должно как бы заранее внутри себя подготовить» нуклон с внутренним импульсом (3.19). Только тогда возможно (упругое) когерентное рассеяние, когда ядро сохраняет свое первоначальное квантовое состояние.

3) Когерентный (когда состояние ядра не изменяется), или, что в литературе терминологически эквивалентно, пропорциональный A^2 , вклад в сечение отвечает упругому рассеянию и имеет вид $|\mathcal{A}_0|^2 A^2 |F(\mathbf{q})|^2$. Некогерентный (когда ядро переходит в другое состояние), или, что терминологически эквивалентно, пропорциональный A , вклад в сечение отвечает всем допустимым неупругим процессам и имеет вид $|\mathcal{A}_0|^2 A(1 - |F(\mathbf{q})|^2)$.

4) То, что традиционно называлось когерентным эффектом в рассеянии нейтрино на составной системе, лучше называть эффектом конструктивной интерференции всех индивидуальных (и всегда когерентных) амплитуд рассеяния нейтрино на отдельных элементах составной системы. Для (анти)нейтрино с энергиями в области десятков мегаэлектронвольт оба слагаемых сечения являются когерентными в том смысле, что все нуклоны принимают участие в процессе рассеяния на уровне амплитуд рассеяния (а не сечений). Поэтому, строго говоря, в этой кинематической области правильнее использовать понятия «упругое» и «неупругое» рассеяние вместо «когерентное» и «некогерентное» [20].

4. КИНЕМАТИКА УПРУГОГО И НЕУПРУГОГО νA -РАССЕЯНИЯ

Обозначим 4-импульсы падающего и уходящего (анти)нейтрино соответственно как $k = (E_\nu, \mathbf{k})$ и $k' = (E'_\nu, \mathbf{k}')$, а 4-импульсы начального и конечного состояния ядра — в виде P_n и P'_m (см. рис. 2, а). Если (анти)нейтрино налетает вдоль z -оси на покоящееся ядро, то можно записать

$$k = (E_\nu, 0, 0, k_z = E_\nu), \quad k' = (E'_\nu, k'_x = E'_\nu \sin \theta, 0, k'_z = E'_\nu \cos \theta),$$

$$P_n = (P_n^0 = m_A + \varepsilon_n, 0, 0, 0),$$

$$P'_m = (P_m^0 = \varepsilon_m + \sqrt{m_A^2 + (P_m^x)^2 + (P_m^z)^2}, P_m^x, 0, P_m^z),$$

где ε_m — энергия возбуждения m -состояния.

Полная энергия ядерного состояния $|P_n\rangle$ равна $P_n^0 = E_p + \varepsilon_n$, где ε_n — внутренняя энергия данного квантового состояния ядра. В лабораторной системе отсчета (где ядро покоится) энергия рассеянного (анти)нейтрино $E'_\nu \equiv k'_0$ на ядре массой m_A зависит от угла θ между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' :

$$E'_\nu = \frac{m_A(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn}) - E_\nu\Delta\varepsilon_{mn} + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2}{m_A + E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}}, \quad (4.1)$$

где разность энергий ядерных $|m\rangle$ и $|n\rangle$ состояний обозначена как

$$\Delta\varepsilon_{mn} = \varepsilon_m - \varepsilon_n. \quad (4.2)$$

Переданный ядру 4-импульс $q = (q_0, \mathbf{q}) \equiv k - k'$ при условии безмассовости (анти)нейтрино $m'_\nu = 0$ следующим образом связан с кинетической энергией рассеянного ядра T_A и другими кинематическими переменными:

$$q^2 = (k - k')^2 = -2kk' = -2(E_\nu E'_\nu - |\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos\theta) = -2E'_\nu E_\nu(1 - \cos\theta),$$

$$q_0 = E_\nu - E'_\nu = P_m^0 - P_n^0 = \Delta\varepsilon_{mn} + T_A,$$

$$\mathbf{q}^2 = (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos\theta \simeq 2m_A T_A,$$

$$|\mathbf{q}| = (E_\nu^2 + E'^2_\nu - 2E_\nu E'_\nu \cos\theta)^{1/2} \simeq (2m_A T_A)^{1/2}.$$

В системе центра масс (анти)нейтрино и ядра (переменные отмечены знаком $*$) для переданного импульса имеется выражение

$$q^2 = -4E_{\nu,n}^* E_{\nu,m}^* \sin^2 \frac{\theta_*}{2}, \quad (4.3)$$

где $E_{\nu,n}^* = (s_{A,n} - m_{A,n}^2)/(2\sqrt{s_A})$ — энергия (анти)нейтрино, которое рассеивается на ядерном состоянии $|n\rangle$, здесь $s_{A,n} = (k + P_n)^2$ — квадрат полной (начальной) энергии и $m_{A,n} = m_A + \varepsilon_n$ — это, условно говоря, возбужденная масса ядра, учитывающая как внутреннюю энергию возбуждения ядра, так и внутреннюю энергию, запасенную в его массе.

Минимальное и максимальное значения переданного импульса q^2 , отвечающие $\sin^2 \theta_*/2 = 1$ и 0, соответственно равны

$$q_{\min}^2 = -4E_{\nu,n}^* E_{\nu,m}^* = \frac{-4E_\nu^2}{\sqrt{\left(1 + \frac{2E_\nu}{m_{A,n}}\right) \left(1 + \frac{2E_\nu}{m_{A,m}}\right)}}, \quad q_{\max}^2 = 0. \quad (4.4)$$

Для достаточно массивных ядер с $\Delta\varepsilon_{mn}$ порядка нескольких сотен килоэлектронвольт, а также когда экспериментально детектируемый сигнал определяется кинетической энергией отдачи ядра, переданный импульс q^2 можно также аппроксимировать выражением

$$q^2 \approx -\mathbf{q}^2 \simeq -2m_A T_A. \quad (4.5)$$

С учетом того, что ядро до взаимодействия с (анти)нейтрино находится в покое (в лабораторной системе отсчета), для кинетической энергии его отдачи имеет место выражение

$$T_A = \sqrt{m_A^2 + \mathbf{q}^2} - m_A \quad (4.6)$$

или $T_A = E_\nu - E'_\nu - \Delta\varepsilon_{mn}$. Откуда с использованием E'_ν из (4.1) для кинетической энергии (отдачи) ядра T_A получается точная формула

$$T_A = \frac{E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(1 - \cos\theta) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2}{m_A + E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}}. \quad (4.7)$$

Если ограничиться (реализуемым для когерентного рассеяния с хорошей точностью) случаем $m_A \gg E_\nu$ (а также, очевидно, $m_A \gg \Delta\varepsilon_{mn}$), то для кинетической энергии ядра имеется приближенное выражение*

$$T_A \approx \frac{E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(1 - \cos\theta) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2}{m_A}. \quad (4.8)$$

Рассмотрим три предельных случая выражения (4.8) для кинетической энергии отдачи.

1. Рассеянию (анти)нейтрино вперед отвечает нулевой угол $\theta = 0$, или $\cos\theta = 1$, чему соответствует минимальная кинетическая энергия ядра отдачи

$$T_A^{\min} = \lim_{\cos\theta \rightarrow 1} T_A \approx \frac{\Delta\varepsilon_{mn}^2}{2m_A}, \quad (4.9)$$

которая равна нулю, если $m = n$, поскольку в этом случае ни импульс, ни энергия не передаются ядру. При $m \neq n$ ядру передается энергия $q_0 = \Delta\varepsilon_{mn}$, а также 3-импульс \mathbf{q} , равный по величине q_0 (поскольку $\theta = 0$), в результате $T_A^{\min} = \mathbf{q}^2/2m_A$.

2. Рассеянию (анти)нейтрино назад отвечает угол $\theta = \pi$, или $\cos\theta = -1$, чему соответствует максимальная кинетическая энергия отдачи ядра

$$T_A^{\max} = \lim_{\cos\theta \rightarrow -1} T_A \approx \frac{(2E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})^2}{2m_A}. \quad (4.10)$$

* Действительно, $T_A = E_\nu - \frac{\Delta^2\varepsilon_{mn}/2 + E_\nu m_A - \Delta\varepsilon_{mn} m_A - \Delta\varepsilon_{mn} E_\nu}{m_A + E_\nu - E_\nu \cos\theta - \Delta\varepsilon_{mn}} - \Delta\varepsilon_{mn}$; приводя к общему знаменателю, раскрывая скобки и сокращая одинаковые слагаемые, получим

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{E_\nu^2 - E_\nu^2 \cos\theta - E_\nu \Delta\varepsilon_{mn} + \Delta\varepsilon_{mn} E_\nu \cos\theta + \Delta^2\varepsilon_{mn}/2}{m_A + E_\nu - E_\nu \cos\theta - \Delta\varepsilon_{mn}} = \\ &= \frac{E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(1 - \cos\theta) + \Delta^2\varepsilon_{mn}/2}{m_A + E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}}. \end{aligned}$$

Откуда с учетом $m_A \gg E_\nu, m_A \gg \Delta\varepsilon_{mn}$ следует формула (4.8).

Действительно, когда $m = n$ (упругое рассеяние), никакая энергия не уходит на изменение внутренней структуры (возбуждение) ядра, тогда как переданный 3-импульс вдвое превышает начальный импульс (и энергию) (анти)нейтрино (рассеяние назад). Поэтому $T_A^{\max} = (2E_\nu)^2/2m_A$. Когда же $m \neq n$, энергия, равная $\Delta\varepsilon_{mn}$, уходит на изменение внутренней структуры (возбуждение) ядра, на эту величину должна быть уменьшена энергия $2E_\nu$ (и импульс, поскольку $m_\nu = 0$) нейтрино, которая способна перейти в кинетическую энергию отдачи ядра, что и показано выражением (4.10).

3. В целом при одной и той же E_ν кинетическая энергия ядра отдачи меньше в случае, когда ядро изменяет свое квантовое состояние ($m \neq n$), по сравнению с ситуацией, когда ядро остается неизменным ($m = n$). С практической точки зрения это можно учесть путем уменьшения (начальной) энер-

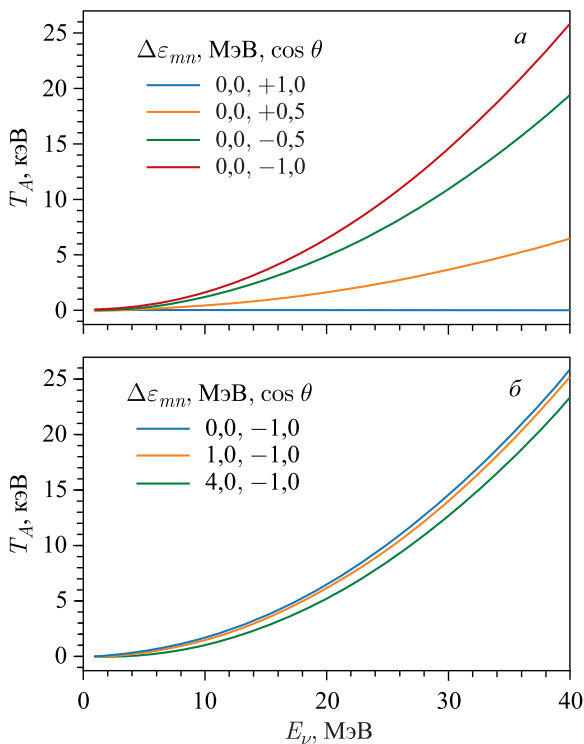


Рис. 10. Кинетическая энергия (отдачи) ядра цезия ^{133}Cs , ожидаемая в результате нейтрино-ядерного рассеяния, как функция энергии падающего нейтрино. Рис. а, соответствующий упругому рассеянию, когда не происходит возбуждения ядра, т.е. $\Delta\varepsilon_{mn} = 0$, представляет различные значения $\cos \theta$, где θ — угол рассеяния нейтрино. Рис. б соответствует неупругому рассеянию, когда происходит возбуждение ядра, т.е. $\Delta\varepsilon_{mn} \neq 0$, и описывает рассеяние назад $\cos \theta = -1$

гии нейтрино на величину $\Delta\varepsilon_{mn}$. Это уменьшение может быть значительным, когда энергия падающего (анти)нейтрино E_ν сравнима с энергией возбуждения ядра $\Delta\varepsilon_{mn}$.

Например, для тяжелых ядер, таких как цезий ^{133}Cs и/или йод ^{127}I , использованных в качестве мишени в эксперименте COHERENT [8], энергии первых уровней возбуждения имеют порядок 100 кэВ. Такие энергии возбуждения можно не принимать во внимание, поскольку энергия нейтринного пучка находится на уровне нескольких десятков мегаэлектронвольт. Поэтому кинетические энергии ядер отдачи имеют одинаковый порядок величины как для упругого, так и для неупругого нейтрино-ядерного рассеяния.

На рис. 10 показаны возможные значения кинетической энергии отдачи ядер цезия ^{133}Cs как функции энергии падающего (анти)нейтрино E_ν с учетом влияния энергии возбуждения ядра $\Delta\varepsilon_{mn}$ и угла рассеяния нейтрино $\cos\theta$. Из рис. 10, а видна сильная зависимость кинетической энергии отдачи ядра T_A от угла рассеяния (анти)нейтрино θ . Также имеет место зависимость от ненулевых значений энергии возбуждения ядра $\Delta\varepsilon_{mn}$ (рис. 10, б), однако эта зависимость заметно слабее угловой. Причиной такого ослабления зависимости от ненулевых значений $\Delta\varepsilon_{mn}$ является частичная компенсация за счет слагаемого $\Delta\varepsilon_{mn}^2/2$ в числителе выражения (4.8) при $E_\nu \simeq \Delta\varepsilon_{mn}$, а также практическая потеря зависимости от $\Delta\varepsilon_{mn}$, когда $E_\nu \gg \Delta\varepsilon_{mn}$.

5. АМПЛИТУДА РАССЕЙЯНИЯ (АНТИ)НЕЙТРИНО НА ЯДРЕ

Предлагаемое ниже микроскопическое описание рассеяния нейтрино (и антинейтрино) на ядре как составной связанной системе следует из первых принципов квантовой теории поля и опирается на фундаментальный процесс рассеяния (анти)нейтрино на нуклоне как базисном (бесструктурном) составляющем элементе ядра.

Начальное и конечное ядро мишени (см. рис. 2, а) будем считать фоковским состоянием $|P_l\rangle$, когда ядро имеет 4-импульс P_l и находится в некотором l -м внутреннем квантовом состоянии ($l = n, m$), представляя собой суперпозицию свободных нуклонов, взвешенных с их общей волновой функцией связанного состояния. Величина $|P_l\rangle$ представляет собой произведение двух волновых функций, описывающих внутреннюю структуру ядра и движение центра масс ядра как единой составной системы. Внутренняя волновая функция зависит от $A - 1$ штук 3-импульсов, поскольку один из 3-импульсов (точнее, одна комбинация из A штук 3-импульсов) используется для описания движения ядра в целом. В связи с этим удобно считать фоковское состояние $|n\rangle$ описывающим покоящееся ядро, находящееся в n -м внутреннем квантовом состоянии. Когда ядро имеет нулевой импульс, обе величины $|P_n\rangle$ и $|n\rangle$ описывают одно и то же квантовое состояние ядра, однако отличаются только нормировочными факторами (см. формулы (5.5) и (5.4)).

5.1. Волновая функция ядра как связанной составной системы. Для дальнейшего рассмотрения необходимо задать волновую функцию ядра. Будем считать (см. прил. П.2), что фоковское состояние $|P_n\rangle$, полностью описывающее ядро A , находящееся в n -м квантовом состоянии с 4-импульсом P_n (см. рис. 2, а), можно представить в виде произведения состояний свободных нуклонов $|\{p\}\rangle$, взвешенного с их общей волновой функцией связанного состояния $\tilde{\psi}'_n(\{p\})$. Последняя, в свою очередь, представляет собой произведение волновой функции $\tilde{\psi}_n(\{p^*\})$, описывающей внутреннюю структуру ядра в его системе центра масс (соответствующие импульсы отмечены индексом \star), и волновой функции $\Phi_n(p)$, описывающей движение ядра как целого, с импульсом $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i$ и проекцией спина ядра s :

$$\tilde{\psi}'_n(\{p\}) = \tilde{\psi}_n(\{p^*\})\Phi_n(p), \quad \text{где } p = (\mathbf{p}, s). \quad (5.1)$$

С учетом (5.1) для состояния $|P_n\rangle$, полностью описывающего ядро A , будем использовать выражение

$$|P_n\rangle = \int \left(\prod_i^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \Phi_n(p) |\{p^*\}\rangle, \quad (5.2)$$

где волновая функция

$$\Phi_n(p) = (2\pi)^3 \sqrt{2P_n^0} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}) \quad (5.3)$$

соответствует ядру с определенным значением 3-импульса \mathbf{P} и энергией $P_n^0 = E_{\mathbf{p}} + \varepsilon_n$, учитывающей энергию возбуждения ядра ε_n . В формуле (5.2) символ $\{p^*\}$ обозначает запись $\{p^*\} \equiv (p_1^* \cdots p_n^*)$, где p_i^* — 4-импульс i -го нуклона в системе центра масс (покоящегося) ядра, а также используется обозначение

$$d\tilde{\mathbf{p}}_i^* = \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}}.$$

Для ядерных состояний в системе центра масс ядра $|n\rangle$ принято условие нормировки

$$\langle m|n\rangle \equiv \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}) \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) = \delta_{mn}, \quad (5.4)$$

которое для ядерного состояния $|P_n\rangle$ из (5.2) дает простое нормировочное условие

$$\langle P'_m|P_n\rangle = (2\pi)^3 2P_n^0 \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta_{nm}. \quad (5.5)$$

Состояние $|n\rangle$, соответствующее нормировке (5.4), можно формально дать в виде

$$|n\rangle = \int \left(\prod_{i=1}^A d\mathbf{p}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \left[(2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) \right]^{1/2} |\{p^*\}. \quad (5.6)$$

5.2. Вычисление амплитуды рассеяния нейтрино на ядре. На основе волновой функции ядра как связанной системы, составленной из взаимодействующих друг с другом нуклонов (5.2), можно перейти к вычислению амплитуды рассеяния (анти)нейтрино на такой системе, имея в виду, что фундаментальные акты взаимодействия осуществляются между (анти)нейтрино и (бесструктурными) нуклонами. Это предположение допустимо, поскольку нейтрино и антинейтрино с энергиями в области не более сотен мегаэлектронвольт, как правило, не способны проникать внутрь нуклонов («не видят кварков»). Поэтому с достаточной точностью можно использовать эффективный лагранжиан взаимодействия Стандартной модели в 4-фермионном приближении

$$\mathcal{L}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} L_\mu(x) H^\mu(x), \quad (5.7)$$

где $L_\mu(x) =: \bar{\psi}_\nu(x) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \psi_\nu(x)$: и

$$H^\mu(x) = \sum_{f=n,p} : \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) \psi_f(x) : \quad (5.8)$$

представляют собой нейтринный и нуклонный операторы слабых токов, записанные в виде нормальных произведений. Квантово-полевые операторы $\psi_\nu(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$ соответствуют (анти)нейтрино и нуклонам.

С помощью \mathbb{S} -матрицы амплитуда вероятности $\langle P'_m, k' | \mathbb{S} | P_n, k \rangle$, описывающая переход ядра в результате взаимодействия с (анти)нейтрино из начального состояния $|P_n, k\rangle$ в конечное состояние $\langle P'_m, k'|$ (см. рис. 2, а), может быть представлена в стандартном виде (в первом порядке по константе Ферми G_F)

$$\begin{aligned} \langle P'_m, k' | \mathbb{S} | P_n, k \rangle &= (2\pi)^4 \delta^4(q + P_n - P'_m) i \mathcal{M}_{mn}, \\ i \mathcal{M}_{mn} &= i \frac{G_F}{\sqrt{2}} l_\mu H_{mn}^\mu, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где адронный ток (матричный элемент) записан как

$$H_{mn}^\mu(P_n, P'_m) = \langle P'_m | H^\mu(0) | P_n \rangle, \quad (5.10)$$

и, например, для нейтрино (спиральность $s = -1$) лептонный ток имеет вид

$$l_\mu(k, k') = \bar{u}(k', -1) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(k, -1). \quad (5.11)$$

Используя нормировку одночастичных состояний (П.10), ток (5.8) и антисимметричность волновой функции ядра, для адронного тока из (5.10) можно получить выражение

$$H_{mn}^{\mu}(P, P') = 2\sqrt{P_n^0 P_m^0} h_{mn}^{\mu}, \quad (5.12)$$

где адронный ток «в системе центра масс ядра» выражается формулой*

$$h_{mn}^{\mu} = \sum_{k=1}^A \int \left(\prod_{j=1}^A \frac{d\mathbf{p}_j^*}{(2\pi)^3} \right) \frac{\bar{u}(\mathbf{p}_k + \mathbf{q}, s_k) O_k^{\mu} u(\mathbf{p}_k, r_k)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k} 2E_{\mathbf{p}_k + \mathbf{q}}}} \times \\ \times (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{l=1}^A \mathbf{p}_l^* \right) \tilde{\psi}_m^* (\{p_{\star}^{(k)}\}) \tilde{\psi}_n (\{p_{\star}\}) \equiv \langle m | H^{\mu}(0) | n \rangle. \quad (5.13)$$

Здесь введено обозначение $O_k^{\mu} = \gamma^{\mu} (g_V^k - g_A^k \gamma_5) = \gamma^{\mu} (g_L^k (1 - \gamma_5) + g_R^k (1 + \gamma_5))$ и константы связи $g_{V,A}^k$ обозначают $g_{V,A}^{p/n}$ при $k = \text{протон/нейтрон}$. При этом левые и правые нуклонные киральные константы связи выражаются через векторные и аксиал-векторные в виде

$$g_L^{p/n} = \frac{1}{2} (g_V^{p/n} + g_A^{p/n}), \quad g_R^{p/n} = \frac{1}{2} (g_V^{p/n} - g_A^{p/n}). \quad (5.14)$$

Аргументами волновых функций (в системе покоя ядра) $\tilde{\psi}_m^* (\{p_{\star}^{(k)}\})$ и $\tilde{\psi}_n (\{p_{\star}\})$ являются выражения, определяемые как $\{p_{\star}\} = (p_1^* \cdots p_A^*)$, где i -й элемент представляет собой пару $p_i^* = (\mathbf{p}_i^*, r_i)$, а $\{p_{\star}^{(k)}\}$ совпадает с $\{p_{\star}\}$ за исключением k -го элемента, который равен $(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}, s_k)$. Импульс \mathbf{p}_k как аргумент дираковского спинора $u(\mathbf{p}_k)$ является 3-импульсом k -го нуклона.

Адронный слабый ток νA -рассеяния $h_{mn}^{\mu}(\mathbf{q})$, заданный формулой (5.13), представляет собой сумму слагаемых типа $\bar{u}(\mathbf{p}_k + \mathbf{q}, s_k) O_k^{\mu} u(\mathbf{p}_k, r_k)$, отвечающих рассеянию (анти)нейтрино на отдельно взятом k -м нуклоне, который до взаимодействия в (лабораторной) системе покоя ядра обладал 3-импульсом \mathbf{p}_k и проекцией спина на некоторое выделенное направление r_k . Амплитуда вероятности найти нуклон в начальном ядерном состоянии $|P_n\rangle$ именно с этими квантовыми числами определяется волновой функцией $\tilde{\psi}_n (\{p_{\star}\})$, заданной в импульсном представлении и зависящей от импульсов нуклонов в системе центра масс ядра.

Рассеянный нуклон в системе покоя ядра имеет 3-импульс, равный $\mathbf{p}_k + \mathbf{q}$, и, вообще говоря, уже произвольную проекцию спина на выделенное направление s_k . Соответствующая амплитуда вероятности найти нуклон в конечном ядре именно с такими квантовыми числами дается выражением $\tilde{\psi}_m^* (\{p_{\star}^{(k)}\})$.

* Вывод выражения (5.13) для адронного тока h_{mn}^{μ} из формулы (5.10) дан в прил. П.3.1.

Знаменатель $\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k} 2E_{\mathbf{p}_k + \mathbf{q}}}$ зависит от энергий начального и конечного нуклонов и учитывает условие нормировки дираковских спиноров, имеющее вид $u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s) = 2E_{\mathbf{p}}$ (прил. П.2). Все 3-импульсы остальных нуклонов-спектаторов (не участвовавших во взаимодействии с нейтрино) остаются неизменными и выпадают из рассмотрения за счет правил нормировки волновых функций начального и конечного состояний ядра (подробнее в прил. П.3.1).

Дальнейшие преобразования выражения для адронного тока (5.13) требуют некоторых упрощающих предположений.

Во-первых, будем считать, что одночастичная спинорная свертка $\bar{u}(\mathbf{p}_k + \mathbf{q}, s_k)O_k^\mu u(\mathbf{p}_k, r_k)$, взятая при эффективном значении 3-импульса нуклона $\bar{\mathbf{p}}_k$, которое есть решение уравнения на сохранение энергии-импульса (3.20), может быть вынесена из-под знака интегрирования.

Во-вторых, предположим, что спиновая и импульсная зависимости волновой функции $\tilde{\psi}_n$ не связаны друг с другом (независимы) и могут быть представлены в виде произведения пространственной (импульсной) $\tilde{\psi}_n$ и спиновых χ_n сомножителей:

$$\tilde{\psi}_n(\{p^*\}) = \tilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_*\})\chi_n(\{r\}), \quad (5.15)$$

которые, в свою очередь, зависят от переменных $\{\mathbf{p}_*\} = (\mathbf{p}_1^* \cdots \mathbf{p}_A^*)$ и $\{r\} = (r_1 \cdots r_A)$. Спиновые функции удобно нормировать условием

$$\chi_m^*(\{r\})\chi_n(\{r\}) = \delta_{nm}. \quad (5.16)$$

В результате выражение (5.13) переписывается в виде

$$h_{mn}^\mu(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^A \frac{\bar{u}(\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}, s_k)O_k^\mu u(\bar{\mathbf{p}}, r_k)}{\sqrt{2E_{\bar{\mathbf{p}}} 2E_{\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}}}} \chi_m^*(\{r^{(k)}\})\chi_n(\{r\}) \times \\ \times \int \left(\prod_{j=1}^A \frac{d\mathbf{p}_j^*}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{l=1}^A \mathbf{p}_l^* \right) \tilde{\psi}_m^*(\{\mathbf{p}_*^{(k)}\})\tilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_*\}), \quad (5.17)$$

где $\{r^{(k)}\}$ совпадает с $\{r\}$, за исключением k -го элемента, который равен s_k .

В-третьих, многомерный интеграл в формуле (5.17) для $h_{mn}^\mu(\mathbf{q})$ представим в виде матричного элемента 3-мерного оператора сдвига k -го нуклона $\hat{\mathbf{X}}_k$:

$$\int \left(\prod_{j=1}^A \frac{d\mathbf{p}_j^*}{(2\pi)^3} \right) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{l=1}^A \mathbf{p}_l^* \right) \tilde{\psi}_m^*(\{\mathbf{p}_*^{(k)}\})\tilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_*\}) = \\ = \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \equiv f_{mn}^k(\mathbf{q}). \quad (5.18)$$

Вывод формулы (5.18) дан в прил. П.3.2.

С использованием определения матричного элемента (5.9), вида адронного тока (5.10) и вида этого тока в системе покоя ядра (5.13), а также выражения (5.18) для матричного элемента (5.9) получается*

$$i\mathcal{M}_{mn} = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{P'_m P'_n}{E_{\bar{\mathbf{p}}} E_{\bar{\mathbf{p}}+\mathbf{q}}}} l_\mu(k, k') \times \\ \times \sum_{k=1}^A \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \chi_m^* (\{r^{(k)}\}) \chi_n (\{r\}) \bar{u}(\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}, s_k) O_k^\mu u(\bar{\mathbf{p}}, r_k). \quad (5.19)$$

Для удобства дальнейшего использования обозначим спиновую амплитуду ядра как

$$\chi_m^* (\{r^{(k)}\}) \chi_n (\{r\}) \equiv \lambda^{mn}(s, r). \quad (5.20)$$

В общем случае после взаимодействия с нейтрино спиновое состояние s конечного ядра может оказаться отличным от спинового состояния r начального ядра. Будем считать, что начальное и конечное состояния ядра представляют собой собственные состояния оператора спина (полного углового момента) с квантовыми числами (J, J_3) .

Можно заметить, что если $m = n$, то согласно (5.20) и условию нормировки спиновых волновых функций (5.16) амплитуда $\lambda^{mn}(s, r) = \delta_{sr}$. Если определить для случая $m \neq n$ эту амплитуду в виде λ_{sr}^{mn} , то при любых m, n можно записать

$$\lambda^{mn}(s, r) = \delta_{mn} \delta_{sr} + (1 - \delta_{mn}) \lambda_{sr}^{mn}. \quad (5.21)$$

Общий кинематический множитель в (5.19) можно переписать, выделив из него лидирующий фактор m_A/m_N , где m_N и m_A — массы нуклона и ядра, и введя поправку, величина которой порядка единицы $C_{1,mn} \sim O(1)$:

$$C_{1,mn}^{1/2} = \left(\frac{P'_n}{E_{\bar{\mathbf{p}}}} \frac{P'_m}{E_{\bar{\mathbf{p}}+\mathbf{q}}} \right)^{1/2} \frac{m_N}{m_A}. \quad (5.22)$$

Подставляя формулы (5.18), (5.20) и (5.22) в выражение для матричного элемента (5.19), получаем «окончательную» формулу данного раздела для амплитуды вероятности процесса $\nu A \rightarrow \nu A^{(*)}$ в лидирующем порядке по константе Ферми:

* Действительно: $i\mathcal{M}_{mn} = i(G_F/\sqrt{2}) l_\mu(k, k') H_{mn}^\mu(P_n, P'_m) = i(G_F/\sqrt{2}) l_\mu(k, k') \times \sqrt{2P'_n P'_m} h_{mn}^\mu = i(G_F/\sqrt{2}) l_\mu(k, k') \sqrt{(P'_n P'_m)/(E_{\bar{\mathbf{p}}} E_{\bar{\mathbf{p}}+\mathbf{q}})} \sum_{k=1}^A \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \chi_m^* (\{r^{(k)}\}) \times \chi_n (\{r\}) \bar{u}(\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}, s_k) O_k^\mu u(\bar{\mathbf{p}}, r_k)$.

$$i\mathcal{M}_{mn} = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{m_A}{m_N} C_{1,mn}^{1/2} \sum_{k=1}^A \sum_{sr} f_{mn}^k(\mathbf{q}) \lambda^{mn}(s, r)(l, h_{sr}^k), \quad (5.23)$$

где

$$(l, h_{sr}^k) \equiv l_\mu(k, k') \bar{u}(\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}, s_k) O_k^\mu u(\bar{\mathbf{p}}, r_k) \quad (5.24)$$

есть скалярное произведение лептонного и k -го нуклонного слабых нейтральных токов. В частности, для нейтрино

$$(l, h_{sr}^k) = \bar{u}(k', -1) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) u(k, -1) \bar{u}(\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}, s_k) O_k^\mu u(\bar{\mathbf{p}}, r_k).$$

Матричный элемент (5.23) представляет собой сумму лептон-нуклонных амплитуд, пропорциональных скалярному произведению токов (l, h_{sr}^k) , взвешенных с двумя множителями, каждый из которых не сильно отличается от единицы.

Как было отмечено выше (определения (5.15), (5.16) и (5.20)), множитель $\lambda^{mn}(s, r)$ представляет собой спиновую амплитуду перехода между $|n\rangle$ и $|m\rangle$ состояниями ядра и зависит от начального r и конечного s значений (удвоенной) проекции спина ядра на некоторое заранее выбранное направление. Второй множитель, заданный формулой (5.18), представляет собой выражение, определяющее нуклонный формфактор перехода ядра из n -состояния в m -состояние.

Исходя из определения $f_{mn}^k(\mathbf{q})$ в виде (5.18) и свойств симметрии ядерной волновой функции, можно заключить, что, как уже отмечалось выше, формфактор f_{mn}^k не зависит от значения числа k , а зависит только от того, протону или нейтрону соответствует это k (или, иными словами, от типа нуклона, на который указывает индекс k). Поэтому все амплитуды в формуле (5.23) имеют одну и ту же фазу и их можно считать когерентными в общепринятой терминологии.

Далее, выражение $f_{mn}^k(\mathbf{q}) = \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle$ представляет собой обобщение квантово-механического множителя $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$, использованного в данном вопросе Фридманом [1] (разд. 3). Тем не менее имеется фундаментальная разница между $\langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle$ и $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$. В случае, когда «работает» $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$, явно считается, что k -й нуклон имеет вполне определенное положение в ядре («прибит»), заданное координатой \mathbf{x}_k . Это предположение справедливо для рассеяния нейтрино на свободной частице, описываемого плоской волной. Однако такое рассеяние на одном свободном нуклоне не может привести к тому, что все ядро будет двигаться как единое целое, поскольку нуклоны должны быть связаны друг с другом, иначе ядро не будет единым целым. Подход на основе плоских волн не дает правильного описания ситуации, когда нуклоны должны быть связаны друг с другом, сохраняя целостность ядра. В противоположность этому случаю волновые функции связанного состояния не опираются на наличие (не имеют) фиксированных пространственных положений нуклонов в

ядре, и по этой причине матричный элемент $\langle m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle$ не зависит от числа k (разд. 3). Матричный элемент $\langle m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle$ не зависит и от координаты (k -го нуклона), она исчезает в процессе интегрирования.

Именно величина $f_{mn}^k(\mathbf{q}) = \langle m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle$, заданная формулой (5.18), является ключевой для установления взаимосвязи когерентного и некогерентного режимов в (анти)нейтрино-ядерном упругом и неупругом рассеянии, а также для понимания механизма возникновения квадратичной и линейной зависимостей наблюдаемых сечений от числа нуклонов ядра.

При упругом рассеянии $\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \langle n | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \rightarrow 1$ и согласно (5.23) возникает квадратичная зависимость сечения от числа нуклонов. Когда $\mathbf{q} \rightarrow \infty$, этот матричный элемент исчезает, $\lim_{\mathbf{q} \rightarrow \infty} \langle n | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \rightarrow 0$, а вместе с ним и все упругое сечение. Поэтому упругое рассеяние получило название когерентного в терминологии Фридмана. В случае неупругого рассеяния в силу условия нормировки $\langle m | n \rangle = 0$ для $n \neq m$ (5.4) при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ получается $\lim_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \langle m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \rightarrow 0$. То есть неупругое сечение равно нулю. При $\mathbf{q} \neq 0$ матричный элемент, как правило, $\langle m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \neq 0$ и, как показано в разд. 6, сечение представляет собой линейную функцию числа нейтронов в ядре (когда все возможные начальные и конечные состояния приняты во внимание). Поскольку такой результат может быть получен путем суммирования абсолютных значений квадратов амплитуд, его можно назвать некогерентным рассеянием.

6. СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ (АНТИ)НЕЙТРИНО НА ЯДРЕ

6.1. От общего определения сечения к сечению $\nu A \rightarrow \nu A^*$ -рассеяния.

Как известно (см., например, [38, 39]), вероятность перехода из начального состояния $|p\rangle$, содержащего s частиц с 4-импульсами $p_i = (E_i, \mathbf{p}_i)$, в конечное состояние $|p'\rangle$, содержащее r частиц с 4-импульсами $p'_j = (E'_j, \mathbf{p}'_j)$, за единицу времени и в единичном пространственном объеме равна

$$dw = (2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum_{i=1}^s p_i - \sum_{j=1}^r p'_j \right) \frac{n_1 \cdots n_s}{2E_1 \cdots 2E_s} |\mathcal{M}|^2 \prod_{j=1}^r \frac{d\mathbf{p}'_j}{(2\pi)^3 2E'_j}, \quad (6.1)$$

где $d\mathbf{p} = |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d\Omega = |\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| \sin \theta d\theta d\phi = -|\mathbf{p}|^2 d|\mathbf{p}| d\cos \theta d\phi$, θ и ϕ — углы вылета соответствующей частицы; n_i — плотности пучков начальных частиц. Далее амплитуда процесса \mathcal{M} задается соотношением

$$\langle \text{out} | S - 1 | \text{in} \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4 \left(\sum p - \sum p' \right) \mathcal{M}, \quad (6.2)$$

где начальное $|\text{in}\rangle$ и конечное $\langle \text{out}|$ состояния нормированы релятивистски инвариантным образом (см. прил. П.2):

$$|\text{in}\rangle = (2\pi)^{3s/2} \sqrt{2E_1 \cdots 2E_s} a^+(\mathbf{p}_1) \cdots a^+(\mathbf{p}_s)|0\rangle,$$

что обеспечивает релятивистскую инвариантность амплитуде (6.2).

Для процесса рассеяния $a + b \rightarrow X$, когда в начальном состоянии имеются только две частицы, удобно ввести инвариантное сечение $d\sigma$, которое определяется выражением

$$dw = d\sigma \frac{n_1 n_2}{E_1 E_2} I, \quad \text{где} \quad I = \sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}.$$

В случае рассеяния $2 \rightarrow 2$ типа $\nu(p_1) + A(p_2) \rightarrow \nu(p'_1) + A^{(*)}(p'_2)$ после интегрирования по углу $d\phi$ и по $d\mathbf{p}'_2$ с помощью дельта-функции из вышеприведенной формулы для дифференциальной вероятности dw и (6.1) получается выражение для сечения*

$$d\sigma \equiv \frac{dw E_1 E_2}{n_1 n_2 I} = -2\pi \frac{\delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1| d\cos\theta}{64\pi^2 I E'_1 E'_2}, \quad (6.3)$$

из которого с учетом безмассовости (анти)нейтрино (т.е. $|\mathbf{p}'_1| = E'_1$, и $I = E_1 p_2^0$) получается формула для дифференциального сечения рассеяния (анти)нейтрино на ядре

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dE'_1 d\cos\theta} &= -\frac{\delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |\mathcal{M}|^2 (E'_1)^2}{32\pi (E_1 p_2^0) E'_1 E'_2} = \\ &= -\frac{E'_1}{E_1} \frac{|\mathcal{M}|^2}{32\pi p_2^0 E'_2} \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2(E'_1)). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Принимая во внимание то, что в лабораторной системе отсчета ядро до взаимодействия считается покоящимся и находящимся в некотором внутреннем квантовом состоянии n , для кинематических переменных в формуле (6.4) имеем

$$\begin{aligned} E_1 &= E_\nu, \quad E'_1 = E'_\nu, \quad p_2^0 = E_A = m_A + \varepsilon_n, \\ E'_2 &= E'_A = m_A + \varepsilon_m + T_A, \quad E_A - E'_A = \varepsilon_n - \varepsilon_m - T_A. \end{aligned}$$

Тогда, если учесть, что согласно (4.2) $\Delta\varepsilon_{mn} = \varepsilon_m - \varepsilon_n$, то выражение (6.4) с матричным элементом (5.9) принимает вид

$$\frac{d^2\sigma_{mn}}{dE'_\nu d\cos\theta} = -\frac{E'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5 \pi E_\nu (m_A + \varepsilon_n)} \frac{\delta(E_\nu - E'_\nu - T_A(E'_\nu) - \Delta\varepsilon_{mn})}{m_A + T_A + \varepsilon_m}, \quad (6.5)$$

* Квадрат матричного элемента $|i\mathcal{M}_{mn}|^2$ не зависит от азимутального угла ϕ (см. прил. П.5 или формулы из п. 6.3), поэтому по нему проведено интегрирование.

где E'_ν дано формулой (4.1). Далее, поскольку кинетическая энергия отдачи ядра T_A (4.6):

$$T_A = \sqrt{m_A^2 + \mathbf{q}^2} - m_A = \sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos \theta} - m_A, \quad (6.6)$$

зависит от энергии, унесенной нейтрино E'_ν , то интегрирование дельта-функции в выражении (6.5) должно быть проведено аккуратно в виде

$$\delta(f(E'_\nu)) = \frac{\delta(E'_\nu - \tilde{E}'_\nu)}{|df(\tilde{E}'_\nu)/dE'_\nu|} = \frac{\delta(E'_\nu - \tilde{E}'_\nu)}{|-1 - dT_A(\tilde{E}'_\nu)/dE'_\nu|}. \quad (6.7)$$

Здесь \tilde{E}'_ν — решение уравнения $f(E'_\nu) \equiv E_\nu - \tilde{E}'_\nu - T_A(\tilde{E}'_\nu) - \Delta\varepsilon_{mn} = 0$. Для производной кинетической энергии ядра по энергии нейтрино имеет место

$$\frac{dT_A(E'_\nu)}{dE'_\nu} = \frac{E'_\nu - E_\nu \cos \theta}{\sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos \theta}} = \frac{E'_\nu - E_\nu \cos \theta}{T_A(E'_\nu) + m_A}.$$

В последнем равенстве корень в знаменателе заменен на $T_A(E'_\nu) + m_A$ в силу условия (6.6). Поскольку $f(\tilde{E}'_\nu) = 0$, то вместо \tilde{E}'_ν можно подставить $E_\nu - T_A(\tilde{E}'_\nu) - \Delta\varepsilon_{mn}$, и для $(dT_A(\tilde{E}'_\nu))/(dE'_\nu) + 1$ из (6.7) получается

$$\begin{aligned} \frac{dT_A(\tilde{E}'_\nu)}{dE'_\nu} + 1 &= \frac{E_\nu - T_A(\tilde{E}'_\nu) - \Delta\varepsilon_{mn} - E_\nu \cos \theta + T_A + m_A}{T_A + m_A} = \\ &= \frac{m_A + E_\nu(1 - \cos \theta) - \Delta\varepsilon_{mn}}{T_A + m_A}. \end{aligned}$$

С учетом выражения (4.7) из разд. 4 для T_A в виде

$$T_A = \frac{E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(1 - \cos \theta) + \Delta^2\varepsilon_{mn}/2}{m_A + E_\nu(1 - \cos \theta) - \Delta\varepsilon_{mn}} \quad (6.8)$$

получается также, что

$$\begin{aligned} \tilde{E}'_\nu &= E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn} - T_A(\tilde{E}'_\nu) = \\ &= E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn} - \frac{E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(1 - \cos \theta) + \Delta^2\varepsilon_{mn}/2}{m_A + E_\nu(1 - \cos \theta) - \Delta\varepsilon_{mn}}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

В результате сечение (6.5) можно переписать в виде интеграла по E'_ν :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{mn}}{d\cos \theta} &= \int dE'_\nu \frac{(-1)E'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu(m_A + \varepsilon_n)} \frac{\delta(E_\nu - E'_\nu - T_A(E'_\nu) - \Delta\varepsilon_{mn})}{m_A + T_A + \varepsilon_m} = \\ &= \int dE'_\nu \frac{(-1)E'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu(m_A + \varepsilon_n)} \frac{1}{m_A + T_A + \varepsilon_m} \frac{\delta(E'_\nu - \tilde{E}'_\nu)}{[1 + dT_A(\tilde{E}'_\nu)/dE'_\nu]} = \\ &= \int dE'_\nu \frac{(-1)E'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu(m_A + \varepsilon_n)} \frac{\delta(E'_\nu - \tilde{E}'_\nu)}{m_A + T_A + \varepsilon_m} \frac{T_A + m_A}{m_A + E_\nu(1 - \cos \theta) - \Delta\varepsilon_{mn}}. \end{aligned}$$

Интегрирование легко выполняется за счет $\delta(E'_\nu - \tilde{E}'_\nu)$ -функции, т. е. дифференциальное сечение, зависящее от начальной энергии E_ν и угла рассеяния нейтрино θ , равно

$$\frac{d\sigma_{mn}}{d\cos\theta} = -\frac{\tilde{E}'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu(m_A + \varepsilon_n)} \frac{1}{(m_A + T_A + \varepsilon_m)} \times \\ \times \frac{(m_A + T_A)}{m_A + E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}}. \quad (6.10)$$

Здесь T_A и \tilde{E}'_ν определяются выражениями (6.8) и (6.9) через E_ν и $\cos\theta$ (а также m_A и $\Delta\varepsilon_{mn}$).

Формулу (6.10) можно упростить, пренебрегая $E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}$ по сравнению с m_A , т. е. считая $m_A \gg E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}$ в формуле для кинетической энергии ядра

$$T_A = \frac{E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(1 - \cos\theta) + \Delta^2\varepsilon_{mn}/2}{m_A + E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}} \simeq \\ \simeq \frac{2E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(1 - \cos\theta) + \Delta^2\varepsilon_{mn}}{2m_A}. \quad (6.11)$$

В результате для дифференциального сечения (по энергии отдачи ядра) с учетом перехода от $d\cos\theta$ к dT_A в виде $E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})d\cos\theta = -m_A dT_A$ (6.11) получается выражение

$$\frac{d\sigma_{mn}}{dT_A} = \frac{d\sigma_{mn}}{d\cos\theta} \frac{d\cos\theta}{dT_A} = \frac{d\sigma_{mn}}{d\cos\theta} \frac{m_A}{E_\nu} \frac{-1}{E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn}} = \\ = \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu(m_A + \varepsilon_n)} \frac{\tilde{E}'_\nu}{(m_A + T_A + \varepsilon_m)} \times \\ \times \frac{(m_A + T_A)}{m_A + E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}} \frac{m_A}{E_\nu} \frac{1}{E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn}},$$

которое можно записать в компактном виде

$$\frac{d\sigma_{mn}}{dT_A} = \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu^2 m_A} C_{2,mn}(T_A), \quad (6.12)$$

введя коэффициент (порядка единицы) *

$$C_{2,mn} = \frac{E'_\nu}{E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn}} \frac{\left(1 + \frac{T_A}{m_A}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon_n}{m_A}\right)^{-1}}{\left(1 + \frac{T_A + \varepsilon_m}{m_A}\right)} \times \\ \times \left(1 + \frac{E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}}{m_A}\right)^{-1}. \quad (6.13)$$

Для полноты картины приведем выражение для дифференциального сечения (6.10) без использования (упрощающего) приближения для кинетической энергии отдачи ядра в виде (6.11). В этом случае сечения (6.10) также можно привести к виду (6.12):

$$\frac{d\sigma_{mn}}{dT_A} = \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu^2 m_A} \tilde{C}_{2,mn}(T_A), \quad (6.14)$$

но уже с несколько другим $O(1)$ -коэффициентом **

$$\tilde{C}_{2,mn} = \left[1 + \frac{\varepsilon_n}{m_A}\right]^{-1} \left[1 + \frac{T_A}{m_A}\right] \left[1 + \frac{T_A + \varepsilon_m}{m_A}\right]^{-1}. \quad (6.15)$$

Результатом данного пункта является выражение для дифференциального сечения процесса

$$\nu(p_1) + A(p_2) \rightarrow \nu(p'_1) + A^{(*)}(p'_2),$$

определяемое соотношением (6.12), где коэффициент $C_{2,mn}$ задан формулой (6.13). Или в более общем виде формулами (6.14) и (6.15) соответственно.

6.2. Когерентный и некогерентный вклады в сечение $\nu A \rightarrow \nu A^*$ -рассеяния. В этом разделе проведенное ранее качественное обсуждение (см. разд. 3) взаимосвязи когерентного и некогерентного вкладов в процесс рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядре будет обращено в количественную форму, т. е. для дифференциального сечения (6.12):

$$\frac{d\sigma_{mn}}{dT_A} = \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu^2 m_A} C_{2,mn}, \quad (6.16)$$

*Или в другом виде: $C_{2,mn} = \frac{m_A^2}{(m_A + \varepsilon_n)} \frac{\tilde{E}'_\nu}{(m_A + T_A + \varepsilon_m)} \frac{(m_A + T_A)}{m_A + E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}} \times$
 $\times \frac{1}{E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn}} = \frac{\tilde{E}'_\nu}{E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn}} \frac{(m_A + T_A)}{(m_A + \varepsilon_n)} \frac{m_A}{(m_A + T_A + \varepsilon_m)} \frac{m_A}{m_A + E_\nu(1 - \cos\theta) - \Delta\varepsilon_{mn}}.$

**Подробности в приложении П.4.

будет получено выражение, одновременно учитывающее когерентный и некогерентный вклады.

Наблюдаемое дифференциальное сечение процессов $\nu A \rightarrow \nu A^{(*)}$ и $\bar{\nu} A \rightarrow \bar{\nu} A^{(*)}$ можно получить, усреднив по всем возможным начальным состояниям ядра-мишени $|n\rangle$ и просуммировав по всем допустимым конечным (внутренним) состояниям ядра-отдачи $|m\rangle$:

$$\frac{d\sigma}{dT_A} = \sum_{n,m} \omega_n \frac{d\sigma_{mn}}{dT_A}, \quad (6.17)$$

где символом ω_n обозначен статистический вес (вероятность) найти ядро-мишень в начальном внутреннем квантовом состоянии $|n\rangle$ при нормальных условиях эксперимента. В дальнейшем рассмотрении нет прямой необходимости в явных выражениях для величин ω_n , важно только, что они нормированы условием (полноты вероятности)

$$\sum_n \omega_n = 1. \quad (6.18)$$

Итак, подставив в формулу для наблюдаемого дифференциального сечения (6.17) выражения (5.23) для матричного элемента и (6.12) для дифференциального сечения, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dT_A} &= \sum_{m,n} \omega_n \frac{d\sigma_{mn}}{dT_A} = \sum_{m,n} \omega_n \frac{|i\mathcal{M}_{mn}(\mathbf{q})|^2}{2^5 \pi E_\nu^2 m_A} C_{2,mn}(\mathbf{q}) \equiv \\ &\equiv \frac{G_F^2 m_A}{2^6 \pi m_N^2 E_\nu^2} [T_{m=n} + T_{m \neq n}], \end{aligned} \quad (6.19)$$

где для простоты временно опущена зависимость от \mathbf{q} и введены обозначения

$$T_{m=n} = \sum_{k,j}^A \sum_n \omega_n \left[C_{1,nn} C_{2,nn} f_{nm}^k f_{nn}^{j*} \sum_r (l, h_{rr}^k) \sum_s (l, h_{ss}^j)^\dagger \right], \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} T_{m \neq n} &= \sum_{k,j}^A \sum_n \omega_n \left[\sum_{m \neq n} C_{1,mn} C_{2,mn} f_{mn}^k f_{mn}^{j*} \sum_{sr} \lambda_{sr}^{mn}(l, h_{sr}^k) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sum_{s'r'} \lambda_{s'r'}^{mn}(l, h_{s'r'}^j) \right)^\dagger \right]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Здесь отдельным слагаемым, $T_{m=n}$, обозначен вклад, отвечающий сохранению ядром его первоначального состояния, т.е. $n = m$, при этом проекция спина взаимодействующего (активного) нуклона не меняется, поскольку

спиновые амплитуды при $m = n$ дают дельта-функцию $\lambda_{s,r}^{nn} = \delta_{sr}$ (5.21) и выпадают из дальнейшего рассмотрения.

Ключевую роль в выражении (6.19) играют скалярные произведения 4-векторов слабых лептонных и нуклонных токов $(l, h_{sr}^{p/n})$, где компоненты лептонного тока $l^\mu(k, k')$, например для нейтрино, заданы выражением (5.11), а нуклонный ток имеет вид

$$(h_{sr}^{p/n})_\mu \bar{u}(\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}, s) O_\mu^{p/n} u(\bar{\mathbf{p}}, r), \quad (6.22)$$

где $\bar{\mathbf{p}}$ является решением уравнения на сохранение энергии-импульса ядра (3.20), т. е.

$$\sqrt{m_N^2 + \bar{\mathbf{p}}^2 + 2\bar{\mathbf{p}}\mathbf{q} + \mathbf{q}^2} - \sqrt{m_N^2 + \bar{\mathbf{p}}^2} = \frac{\mathbf{q}^2}{2m_A} + \Delta\varepsilon_{mn}.$$

Забегая несколько вперед, отметим, что каждый из квадратов скалярных произведений $|(l, h_{sr}^{p/n})|^2$ из прил. П.5 (см. также п. 6.3) содержит общий множитель $64(s - m_N^2)^2$, где $s = (p + k)^2$ — квадрат полной энергии нейтрино и нуклона в их общей системе центра масс и m_N — масса нуклона. В лидирующем (нерелятивистском) приближении этот множитель может быть аппроксимирован формулой $2^8 m_N^2 E_\nu^2$. Для достижения точного соответствия между этими выражениями введем поправочный множитель $C_{3,mn}$, отражающий тот факт, что нуклон в начальном состоянии обладает ненулевым 3-импульсом (согласно решению (3.20)), т. е. будем считать, что

$$(s - m_N^2)^2 = 4m_N^2 E_\nu^2 C_{3,mn}. \quad (6.23)$$

В дальнейшем все поправочные множители обозначим одним символом g^{mn} :

$$g^{mn} = C_{1,mn} C_{2,mn} C_{3,mn}. \quad (6.24)$$

Этот множитель также не сильно отличается от единицы, однако он имеет разные значения для первого (когерентного) и второго (некогерентного) слагаемых в формуле (6.19). Вынесем эти множители из-под знака двойного суммирования в (6.19), считая, что для когерентного члена эффективное значение такого поправочного коэффициента равно $g_{\text{coh}} = g_c$, а для некогерентного, соответственно, равно $g_{\text{inc}} = g_i$.

Далее можно заметить, что суммирование по индексу n в первом слагаемом выражения (6.19), т. е. в формуле (6.20), ведет к возникновению форм-факторов, усредненных по всем возможным начальным состояниям ядра, т. е.

$$\sum_n \omega_n f_{nn}^k f_{nn}^{j*} = \begin{cases} |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2, & \text{когда } (k, j) \text{ равны либо } pp, \text{ либо } nn; \\ F_p(\mathbf{q}) F_n^*(\mathbf{q}), & \text{когда } (k, j) \text{ равны } pn; \\ F_n(\mathbf{q}) F_p^*(\mathbf{q}), & \text{когда } (k, j) \text{ равны } np. \end{cases} \quad (6.25)$$

Иными словами, левая часть этого соотношения равна квадрату модуля ядерного протонного или нейтронного формфактора $|F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$, если индексы суммирования k и j соответствуют либо паре протонов, либо паре нейтронов. Если же эти индексы не соответствуют одновременно паре одинаковых нуклонов, то имеет место произведение ядерных формфакторов протона и нейтрона в виде $F_p(\mathbf{q})F_n^*(\mathbf{q})$ или $F_n(\mathbf{q})F_p^*(\mathbf{q})$. По этой причине выражение (6.20) пропорционально квадрату модуля суммы вкладов протонов и нейтронов

$$T_{m=n} \propto \left| \sum_{k=1}^Z \sum_r (l, h_{rr}^p) F_p + \sum_{k=1}^N \sum_r (l, h_{rr}^n) F_n \right|^2. \quad (6.26)$$

Или более подробно это слагаемое преобразуется как

$$\begin{aligned} T_{m=n}(\mathbf{q}) &= \left| \sum_k^Z \sqrt{g_{\text{coh}}^p} \sum_r (l, h_{rr}^p(\mathbf{q})) F_p(\mathbf{q}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_k^N \sqrt{g_{\text{coh}}^n} \sum_r (l, h_{rr}^n(\mathbf{q})) F_n(\mathbf{q}) \right|^2 = \\ &= \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} \sum_{k=1}^{A_f} \sum_r (l, h_{rr}^f(\mathbf{q})) F_f(\mathbf{q}) \right|^2. \quad (6.27) \end{aligned}$$

Здесь введены поправочные коэффициенты $g_{\text{coh}}^{p/n} = C_{1,nn}^{p/n} C_{2,nn}^{p/n}$ для когерентного слагаемого в формуле (6.19), а также A_f , обозначающее полное число нуклонов типа $f = p, n$ в ядре.

Обратимся к рассмотрению выражения (6.21), $T_{m \neq n}$, т. е. некогерентного слагаемого в формуле для наблюдаемого сечения (6.19), содержащего суммирование по индексам m, n . Это суммирование не может быть выполнено без каких-либо модельных предположений о поведении спиновых амплитуд λ_{sr}^{mn} из (5.21), которые определяют вероятность для активного нуклона ядра поменять направление спина с r на s при переходе ядра из $|n\rangle$ -состояния в $|m\rangle$ -состояние.

Если предположить, например, что в рассматриваемых процессах амплитуды λ_{sr}^{mn} не зависят от индексов m и n (внутреннего состояния ядра), то это суммирование по m, n можно провести следующим образом.

Рассмотрим сначала простой случай, когда k и j «указывают» на один и тот же тип нуклона, скажем, на протон. Тогда, если $k = j$, то с учетом

условия полноты ядерных состояний $\sum_m |m\rangle\langle m| = \hat{I}$, условия сохранения вероятностей (6.18): $\sum_n \omega_n = 1$, условия нормировки ядерных состояний (5.4): $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, определения (5.18) для $f_{mn}^k(\mathbf{q}) = \langle m|e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}|n\rangle$ и соотношений для их квадратов (6.25), можно выполнить все суммирования и получить, что

$$\begin{aligned} \sum_n \omega_n \sum_{m \neq n} f_{mn}^k f_{mn}^{k*} &= \sum_n \omega_n \left[\sum_m f_{mn}^k f_{mn}^{k*} - f_{nn}^k f_{nn}^{k*} \right] = \\ &= \sum_n \omega_n \left[\langle n|e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} \sum_m |m\rangle\langle m|e^{-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}|n\rangle \right] - \\ &\quad - |F_p(\mathbf{q})|^2 = 1 - |F_p(\mathbf{q})|^2. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Если $k \neq j$, то с учетом все тех же условий, как и в случае с выводом выражения (6.28), для протонов (индекс p) имеет место

$$\sum_n \omega_n \sum_{m \neq n} f_{mn}^k f_{mn}^{j*} = \langle \text{cov}(e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}, e^{-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_j}) \rangle_p. \quad (6.29)$$

В правой части формулы (6.29) введен оператор ковариации квантовых операторов сдвига $e^{-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_j}$ и $e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}$ по состоянию $|n\rangle$ в виде

$$\begin{aligned} \text{cov}_{nn}(e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}, e^{-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_j}) &\equiv \\ &\equiv \langle n|e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} e^{-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_j}|n\rangle - \langle n|e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}|n\rangle \langle n|e^{-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_j}|n\rangle. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Здесь и в (6.28) был использован тот факт, что «неполную» сумму по m , $\sum_{m \neq n} f_{mn}^k f_{mn}^{j*}$, можно «дополнить до полной» и представить как $\sum_m f_{mn}^k f_{mn}^{j*} - \sum_{m=n} f_{mn}^k f_{mn}^{j*}$ и, воспользовавшись условием полноты $\sum_m |m\rangle\langle m| = \hat{I}$, получить выражение (6.30):

$$\begin{aligned} \sum_{m \neq n} f_{mn}^k f_{mn}^{j*} &= \sum_m \langle n|e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}|m\rangle \langle m|e^{-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_j}|n\rangle - \\ &\quad - \sum_{m=n} \langle n|e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}|m\rangle \langle m|e^{-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_j}|n\rangle = \\ &\quad = \langle n|e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} e^{-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_j}|n\rangle - \langle n|e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}|n\rangle \langle n|e^{-i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_j}|n\rangle. \end{aligned}$$

Символ усреднения $\langle \dots \rangle$ в формуле (6.29) задается следующим образом:

$$\langle \text{cov} (e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k} e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}) \rangle_p \equiv \sum_n \omega_n \text{cov}_{nn} (e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}). \quad (6.31)$$

Выражение (6.31) обращается в нуль как при малых переданных импульсах, $q \rightarrow 0$, так и при больших, $q \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} \langle \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}) \rangle_p &= 0, \\ \lim_{q \rightarrow \infty} \langle \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}) \rangle_p &= 0. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Считается, что когда корреляции между нуклонами в ядре достаточно слабые, ковариационными функциями типа (6.29) можно пренебрегать. Так, например, в моделях ядерных оболочек, где многочастичные волновые функции ядер конструируются в виде произведения одночастичных волновых функций, ковариация (6.29) обращается тождественно в нуль. В пользу малости ковариации (6.29) говорит тот факт, что неупругое сечение рассеяния с хорошей точностью можно аппроксимировать линейной зависимостью от числа рассеивателей-нуклонов.

Аналогичное рассмотрение легко проходит для нейтронов. Не представляет особого труда обобщить это рассмотрение и на совместный случай протонов и нейтронов. Пусть, например, k отвечает протону, а j — нейтрону, при этом автоматически $k \neq j$. Тогда

$$\sum_n \omega_n \sum_{m \neq n} f_{mn}^k f_{mn}^{j*} = \langle \text{cov} (e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}) \rangle_{pn}. \quad (6.33)$$

На основе предыдущего обсуждения ясно, что этот вклад в наблюдаемое сечение $d\sigma/dT_A$ (формула (6.19)) также пренебрежимо мал.

В дальнейшем рассмотрении ковариационными вкладами типа (6.29) и (6.33) пренебрегается. Или, другими словами, все эти ковариационные вклады взяты равными нулю.

Как уже упоминалось, для дальнейшего преобразования некогерентного слагаемого $T_{m \neq n}$ (6.21) необходимо сделать определенные предположения по поводу неизвестного поведения спиновых амплитуд λ_{sr}^{mn} . Будем считать, что «в первом приближении» эти амплитуды соответственно равны средним их значениям для протонов и нейтронов и не зависят от внутреннего состояния ядра, т. е.

$$\lambda_{sr}^{mn} \simeq \lambda_{sr}^{p/n}. \quad (6.34)$$

С учетом этого упрощающего предположения и пренебрежения вкладами типа (6.29) и (6.33) некогерентное слагаемое (6.21) можно преобразовать

зовать к виду

$$\begin{aligned}
 T_{m \neq n}(\mathbf{q}) &\equiv \sum_{k,j}^A \sum_n \omega_n C_{1,mn} C_{2,mn} \sum_{m \neq n} f_{mn}^k f_{mn}^{j*} \sum_{s,r} \lambda_{sr}^{mn}(l, h_{sr}^k) \times \\
 &\times \left(\sum_{s',r'} \lambda_{s'r'}^{mn}(l, h_{s'r'}^j) \right)^\dagger = g_{\text{inc}}^p \sum_{k=1}^Z \sum_{s,r} |\lambda_{sr}^p|^2 |(l, h_{sr}^p)|^2 [1 - |F_p|^2] + \\
 &+ g_{\text{inc}}^n \sum_{k=1}^N \sum_{s,r} |\lambda_{sr}^n|^2 |(l, h_{sr}^n)|^2 [1 - |F_n|^2] \equiv \\
 &\equiv \sum_{f=p,n} g_{\text{inc}}^f \sum_{k=1}^{A_f} \sum_{s,r} |\lambda_{sr}^f|^2 |(l, h_{sr}^f(\mathbf{q}))|^2 [1 - |F_f(\mathbf{q})|^2]. \quad (6.35)
 \end{aligned}$$

Здесь введены «некогерентные» поправочные коэффициенты $g_{\text{inc}}^{p/n} = C_{1,mn}^{p/n} C_{2,mn}^{p/n}$.

Итак, принимая во внимание приближение (6.23), выражение для дифференциального сечения (6.19) можно записать в виде двух принципиально отличающихся друг от друга слагаемых:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{dT_A} = \frac{4G_F^2 m_A}{\pi} \left\{ g_c \left| \sum_{f=n,p} \sum_{k=1}^{A_f} \sum_r (l, h_{rr}^f) F_f \right|^2 + \right. \\
 \left. + g_i \sum_{f=n,p} \sum_{k=1}^{A_f} \sum_{s,r} |\lambda_{sr}^f|^2 |(l, h_{sr}^f)|^2 [1 - |F_f|^2] \right\}, \quad (6.36)
 \end{aligned}$$

где $|\lambda_{sr}^{p/n}|^2$, равное согласно (6.34) $|\lambda_{sr}^{mn}|^2$, и $g_{i/c}$ определены путем факторизации из-под двойного суммирования \sum_{nm} в выражении (6.19). Далее $|\lambda_{sr}^{mn}|^2$ задано формулой (5.21) и g^{mn} определено выражением (6.24). Как уже упоминалось, кинематические поправочные функции $g_{i/c}$ несильно отличаются от единицы. Квадраты ядерных формфакторов $|F_{p/n}|^2$ для протонов и нейтронов определены соотношением (5.18).

Подводя итог данному пункту, отметим, что выражение (6.36) для наблюдаемого дифференциального сечения процесса рассеяния (анти)нейтрино на ядре представляет собой главный результат. Напомним, что при получении формулы (6.36) было сделано важное упрощающее предположение о возможности пренебрежения всеми корреляционными вкладами типа (6.29) и (6.33). Далее подчеркнем, что первое и второе слагаемые в формулах (6.19) и (6.36) отвечают соответственно упругому и неупругому взаимодействию (анти)нейтрино с ядром. Первое слагаемое (когда $\sum_{n=m}$) содержит оба индекса k и j , что приводит к квадратичной зависимости сечения от числа

нуклонов в ядре. Второе слагаемое (когда $\sum_{n \neq m}$) в хорошем приближении пропорционально δ_{kj} , что автоматически приводит к линейной зависимости сечения от числа нуклонов в ядре. В терминологии Фридмана первое слагаемое отвечает когерентному рассеянию, а второе — некогерентному.

Более того, суммирование на уровне амплитуд рассеяния на индивидуальных нуклонах (что традиционно связывается с понятием когерентности) явно прослеживается в первом слагаемом выражения (6.36). Здесь каждый нуклон (протон и нейтрон) входит в сумму взвешенным с соответствующим ему ядерным формфактором $F_{p/n}(\mathbf{q})$. Также важно, что это слагаемое отвечает случаю, когда ядро не изменяет свое спиновое состояние (проекцию спина на некоторое заданное направление), что видно из характера суммирования по проекциям спинов нуклонов, участвующих во взаимодействии, т. е. $\sum_r (l, h_{rr}^{p/n})$. Все активные нуклоны сохраняют ориентацию спина после взаимодействия ($r' \equiv r$).

Второе слагаемое в выражении (6.36), традиционно ассоциируемое с некогерентным вкладом в сечение, зависит от спиновых амплитуд $|\lambda_{sr}^{p/n}|^2$, которые отвечают (усредненным по n и просуммированным по m) вероятностям изменить нуклону свой спиновый индекс с r на s в процессах типа $|n\rangle \rightarrow |m\rangle$. Хотя для вычисления $|\lambda_{sr}^{p/n}|^2$ необходимо иметь ядерную модель волновых функций, в данной работе* используется простое приближение, что все они равны единице, т. е. $|\lambda_{sr}^{p/n}|^2 \rightarrow 1$, или, что для любой начальной ориентации спина активного нуклона (индекс r) с одинаковой вероятностью возможна любая конечная ориентация спина этого нуклона (индекс s).

Для выполнения последнего этапа вывода формулы $d\sigma/dT_A$ для наблюдаемого дифференциального сечения согласно (6.36) необходимо иметь выражения для скалярных произведений $(l, h_{sr}^{p/n})$ слабых лептонных и нуклонных токов.

Эти величины как для ν -нуклонного, так и для $\bar{\nu}$ -нуклонного упругого рассеяния получены в прил. П.5 в рамках базиса киральности и σ_3 -базиса. Последний базис отвечает ситуации, когда проекция спина нуклона рассматривается относительно фиксированной оси, совпадающей с направлением импульса налетающего (анти)нейтрино. Хотя, как показано в (П.152), финальный результат не зависит от выбора базиса, тем не менее оказывается удобным использовать базис киральности (выражения (П.122) и (П.126)) для вычисления некогерентного вклада в сечение и σ_3 -базис (выражения (П.144) и (П.145)) для вычисления когерентного вклада.

*Это приближение может представлять предмет для отдельного обсуждения в дальнейшем.

6.3. Скалярные произведения токов и соотношения между ними. Процедура вычисления скалярных произведений токов для нейтрино-нуклонного $(l_\nu, h_{r,r}^f)$ и антинейтрино-нуклонного $(l_{\bar{\nu}}, h_{r',r'}^f)$ упругого рассеяния подробно изложена в прил. П.5. Ниже приведены все необходимые для дальнейшего рассмотрения выражения для этих величин и соотношения между ними. Итак, в σ_3 -базисе (обозначенном индексом η) имеются следующие выражения для всех необходимых скалярных произведений (первый индекс отвечает спину конечного нуклона, второй — начального):

$$(l_\nu, h_{--}^\eta) = 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{g}_R \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\bar{\nu}}, h_{++}^\eta) = 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{g}_L \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_\nu, h_{-+}^\eta) = [e^{+i\phi}] 8(s - m^2) \sin \frac{\theta}{2} \times \\ \times \left(\mathbf{g}_L - \mathbf{g}_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \right),$$

$$(l_{\bar{\nu}}, h_{+-}^\eta) = [-e^{-i\phi}] 8(s - m^2) \sin \frac{\theta}{2} \times \\ \times \left(\mathbf{g}_R - \mathbf{g}_L \frac{m}{\sqrt{s}} \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \right),$$

$$(l_\nu, h_{+-}^\eta) = [-e^{-i\phi}] 8(s - m^2) \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{g}_R \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right),$$

$$(l_{\bar{\nu}}, h_{-+}^\eta) = [e^{+i\phi}] 8(s - m^2) \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} \mathbf{g}_L \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right),$$

$$(l_\nu, h_{++}^\eta) = 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} \left[\mathbf{g}_L + \mathbf{g}_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

$$(l_{\bar{\nu}}, h_{--}^\eta) = 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} \left[\mathbf{g}_R + \mathbf{g}_L \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right].$$

Для наглядности здесь и ниже жирным шрифтом выделены различия в подобных формулах, отвечающих нейтрино и антинейтрино.

Квадраты матричных элементов $|(l_{\bar{\nu}/\nu}, h_{s',s}^{\eta,f})|^2$, деленные на множитель $[8^2(s - m^2)^2]$, согласно принятому в формуле (6.23) приближению, с обозна-

чениями $a = \sin^2 \theta/2$ и $b = m/\sqrt{s}$ выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 |(l_\nu \cdot h_{--}^\eta)|^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} g_R^2 \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2 = \\
 &= (1-a) \mathbf{g}_R^2 [1 - (1-b)a]^2, \\
 |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{++}^\eta)|^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} g_L^2 \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2 = \\
 &= (1-a) \mathbf{g}_L^2 [1 - (1-b)a]^2, \\
 |(l_\nu \cdot h_{-+}^\eta)|^2 &= \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(g_L - g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \right)^2 = \\
 &= a (\mathbf{g}_L - \mathbf{g}_R b [1 - (1-b)a])^2, \\
 |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{+-}^\eta)|^2 &= \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(g_R - g_L \frac{m}{\sqrt{s}} \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \right)^2 = \\
 &= a (\mathbf{g}_R - \mathbf{g}_L b [1 - (1-b)a])^2, \\
 |(l_\nu \cdot h_{+-}^\eta)|^2 &= \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} g_R^2 \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right)^2 = a(1-a)^2 \mathbf{g}_R^2 (1-b)^2, \\
 |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{-+}^\eta)|^2 &= \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} g_L^2 \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right)^2 = a(1-a)^2 \mathbf{g}_L^2 (1-b)^2, \\
 |(l_\nu \cdot h_{++}^\eta)|^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[g_L + g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2 = \\
 &= (1-a) [\mathbf{g}_L + \mathbf{g}_R b (1-b)a]^2, \\
 |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{--}^\eta)|^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[g_R + g_L \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right]^2 = \\
 &= (1-a) [\mathbf{g}_R + \mathbf{g}_L b (1-b)a]^2.
 \end{aligned}$$

Как показано в прил. П.5 (формулы (П.152)), имеется связь между квадратами этих скаляров в разных базисах:

$$\begin{aligned}
 |(l_\nu, h_{++}^\eta)|^2 + |(l_\nu, h_{-+}^\eta)|^2 &= |(l_\nu, h_{+-}^\chi)|^2 + |(l_\nu, h_{--}^\chi)|^2, \\
 |(l_\nu, h_{+-}^\eta)|^2 + |(l_\nu, h_{--}^\eta)|^2 &= |(l_\nu, h_{++}^\chi)|^2 + |(l_\nu, h_{-+}^\chi)|^2.
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

При переходе от нейтрино к антинейтрино, т.е. $l_\nu \rightarrow l_{\bar{\nu}}$, верхняя строка в (6.37) переходит в нижнюю. Обобщение соотношений (6.37) на случай полного суммирования по всем возможным проекциям спина начального и

конечного нуклонов (см. (П.155)) дает равенство

$$\sum_{r',r=\pm} |(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{r'r}^{\chi,f})|^2 = \sum_{s',s=\pm} |(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{s's}^{\eta,f})|^2, \quad (6.38)$$

которое позволяет использовать в дальнейшем только приведенные выше квадраты скалярных произведений, полученные в σ_3 -базисе.

6.4. Сечения $\nu A \rightarrow \nu A^*$ и $\bar{\nu} A \rightarrow \bar{\nu} A^*$ рассеяния. Как следует из выражения (6.36), наблюдаемые сечения рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядре представимы в виде суммы когерентного и некогерентного слагаемых, которые можно записать в единой для нейтрино и антинейтрино форме

$$\frac{d\sigma^{\bar{\nu},\nu}}{dT_A} = \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\bar{\nu},\nu}}{dT_A} + \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\bar{\nu},\nu}}{dT_A} \equiv \frac{4G_F^2 m_A}{\pi} \left(\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\bar{\nu},\nu}}{dT_A} + \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\bar{\nu},\nu}}{dT_A} \right), \quad (6.39)$$

где некогерентное слагаемое (при условии $|\lambda_{sr}^f|^2 = 1$) выражается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\bar{\nu},\nu}}{dT_A} &= \sum_{f=p,n} g_{\text{inc}}^f [1 - |F_f|^2] \sum_{k=1}^{A_f} \sum_{r',r} |(l_{\bar{\nu},\nu}, h_{r'r}^{\eta,f})|^2 = \\ &= \sum_{f=p,n} g_{\text{inc}}^f [1 - |F_f|^2] \sum_{k=1}^{A_f} \left[\sum_{r'=\pm}^{\text{out}} |(l_{\bar{\nu},\nu}, h_{r'-}^{\eta,f})|^2 + \sum_{r'=\pm}^{\text{out}} |(l_{\bar{\nu},\nu}, h_{r'+}^{\eta,f})|^2 \right]. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Согласно (6.38) в (6.40) использованы только квадраты скалярных произведений $|(l_{\bar{\nu},\nu}, h_{r'r}^{\eta,f})|^2$, вычисленные в σ_3 -базисе. Когерентное сечение из (6.39), где проекция спина рассеянного нуклона на выделенное направление остается неизменной, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\bar{\nu},\nu}}{dT_A} &= \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \sum_{k=1}^{A_f} \sum_r (l_{\bar{\nu},\nu}, h_{rr}^{\eta,f}(\mathbf{q})) \right|^2 = \\ &= \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \sum_{k=1}^{A_f} [(l_{\bar{\nu},\nu}, h_{++}^{\eta,f}) + (l_{\bar{\nu},\nu}, h_{--}^{\eta,f})] \right|^2. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Дальнейшее преобразование выражений для когерентного (6.41) и некогерентного (6.40) вкладов в полное сечение (антинейтрино-ядерного рассеяния (6.39) сопряжено с учетом выражений для входящих в них скалярных произведений слабых лептон-нуклонных токов $(l_{\bar{\nu},\nu}, h_{r'r}^{\eta,f})$. Эта процедура подробно рассмотрена в прил. П.6. Откуда следует полный набор формул для сечений рассеяния нейтрино $\nu(k) + A \rightarrow \nu(k') + A^{(*)}$ и антинейтрино $\bar{\nu}(k) + A \rightarrow \bar{\nu}(k') + A^{(*)}$ на ядерной мишени [19, 20], которые представляют собой суммы когерентного и некогерентного слагаемых, зависящих от энергии отдачи ядра T_A :

$$\frac{d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \frac{d\sigma_{\text{incoh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} + \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A}. \quad (6.42)$$

Здесь и далее левые и верхние индексы указывают на нейтрино, а правые и нижние, соответственно, на антинейтрино. В терминах A_{\pm}^f , т. е. числа нуклонов f -типа, имеющих проекцию спина $\pm 1/2$ на направление импульса падающего лептона, когерентное и некогерентное слагаемые из (6.42) таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} &= \frac{4G_F^2 m_A}{\pi} \sum_{f=p,n} g_{\text{inc}}^f (1 - |F_f(q^2)|^2) \times \\ &\quad \times \left[\mathbf{A}^f_{\mp} (g_{R/L}^f)^2 \frac{s(1-y)^2 - m^2(1-y)}{s - m^2} + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{A}^f_{\pm} \left\{ \left(g_{L/R}^f - g_{R/L}^f \frac{ym^2}{s - m^2} \right)^2 + (g_{R/L}^f)^2 \frac{ym^2[s(1-y) - m^2]}{(s - m^2)^2} \right\} \right], \quad (6.43) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} &= \frac{4G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}} \right) \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f(q^2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ \mathbf{A}^f_{\pm} \left[g_{L/R}^f + g_{R/L}^f \frac{my}{\sqrt{s} + m} \right] + \mathbf{A}^f_{\mp} g_{R/L}^f \left[1 - \frac{\sqrt{sy}}{\sqrt{s} + m} \right] \right\} \right|^2. \quad (6.44) \end{aligned}$$

В терминах $A^f = A_+^f + A_-^f$ и $\Delta A^f = A_+^f - A_-^f$ эти слагаемые, соответственно, равны *

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} &= \frac{2G_F^2 m_A}{\pi} \sum_{f=p,n} g_{\text{inc}}^f (1 - |F_f(q^2)|^2) \times \\ &\quad \times \left\{ \mathbf{A}^f \left[(g_{L/R}^f)^2 + (g_{R/L}^f)^2 (1-y)^2 - g_L^f g_R^f \frac{2m^2 y}{s - m^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (\pm \Delta \mathbf{A}^f) \left[g_{L/R}^f - g_{R/L}^f (1-y) \right] \left[g_{L/R}^f + g_{R/L}^f \left(1 - y \frac{s + m^2}{s - m^2} \right) \right] \right\}, \quad (6.45) \end{aligned}$$

* В явном виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\nu}}{dT_A} &= \frac{2G_F^2 m_A}{\pi} \sum_{f=p,n} \hat{F}_f \left\{ \mathbf{A}^f \left[(g_L^f)^2 + (g_R^f)^2 (1-y)^2 - g_L^f g_R^f \frac{2m^2 y}{s - m^2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \Delta \mathbf{A}^f \left[g_L^f - g_R^f (1-y) \right] \left[g_L^f + g_R^f \left(1 - y \frac{s + m^2}{s - m^2} \right) \right] \right\}, \\ \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} &= \frac{2G_F^2 m_A}{\pi} \sum_{f=p,n} \hat{F}_f \left\{ \mathbf{A}^f \left[(g_R^f)^2 + (g_L^f)^2 (1-y)^2 - g_L^f g_R^f \frac{2m^2 y}{s - m^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \Delta \mathbf{A}^f \left[g_R^f - g_L^f (1-y) \right] \left[g_R^f + g_L^f \left(1 - y \frac{s + m^2}{s - m^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}\right) \left|G_V^{\nu/\bar{\nu}}(q^2) + G_A^{\nu/\bar{\nu}}(q^2)\right|^2,$$

где

$$G_V^{\nu/\bar{\nu}}(q^2) = \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f(q^2) g_V^f \left[\mathbf{A}^f \left(1 - \frac{y\tau}{2}\right) + \frac{y}{2} (\pm \Delta \mathbf{A}^f) \right], \quad (6.46)$$

$$G_A^{\nu/\bar{\nu}}(q^2) = \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f(q^2) (\pm g_A^f) \left[\mathbf{A}^f \frac{y\tau}{2} + \left(1 - \frac{y}{2}\right) (\pm \Delta \mathbf{A}^f) \right].$$

Напомним, что $g_{L/R}^f = (1/2)(g_V^f \pm g_A^f)$ или $g_V^f = g_L^f + g_R^f$, $g_A^f = g_L^f - g_R^f$, и кинематические переменные даются выражениями

$$q^2 = (k - k')^2, \quad y = \frac{(p, q)}{(p, k)} = \frac{s - m^2}{s} \frac{q^2}{q_{\text{max}}^2} \simeq \frac{s - m^2}{s} \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}},$$

$$E_\nu = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} \quad \text{и} \quad \tau = \frac{\sqrt{s} - m}{\sqrt{s} + m}.$$

Здесь $s = (p + k)^2$ — полный квадрат энергии нейтрино и нуклона, где k — 4-импульс начального лептона, а p — эффективный 4-импульс *рассеивающего* нуклона, являющийся решением уравнения на сохранение энергии-импульса ядра (3.20). Переменные y и s полностью определяются кинематикой системы нейтрино–нуклон.

Далее, $A_p = Z$, $A_n = N$, $\Delta A_p \equiv \Delta Z = Z_+ - Z_-$, $\Delta A_n \equiv \Delta N = N_+ - N_-$, где Z_\pm , N_\pm — число протонов и нейтронов, имеющих проекцию спина на направление начального нейтрино, равную $\pm 1/2$. Поправочные функции $g_i^{p/n}$ несильно отличаются от единицы и обсуждались ранее в (6.24).

Если ядра мишени не поляризованы, то слагаемые, пропорциональные $\Delta \mathbf{A}^f$ в (6.45), исчезают из наблюдаемого сечения после усреднения, которое приобретает (хорошо известный) вид

$$\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \frac{2G_F^2 m_A}{\pi} g_i \sum_{f=n,p} [1 - |F_f(q^2)|^2] A^f \times$$

$$\times \left\{ (g_{L/R}^f)^2 + (g_{R/L}^f)^2 (1 - y)^2 - g_L^f g_R^f \frac{2ym^2}{s - m^2} \right\}, \quad (6.47)$$

модифицированный ядерно-структурным множителем $1 - |F_f(q^2)|^2$.

Усреднение по спину в выражении для когерентного сечения зануляет вклады, пропорциональные $\Delta \mathbf{A}_f$, и формула (6.46) после раскрытия квадрата

модуля приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = & \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}\right) g_c \sum_{f,f'} F_f F_{f'}^* \times \\ & \times \left\{ g_V^f g_V^{f'} \left[A_f A_{f'} \left(1 - \frac{y\tau}{2}\right)^2 + \Delta A_f \Delta A_{f'} \left(\frac{y}{2}\right)^2 \right] + \right. \\ & + g_A^f g_A^{f'} \left[A_f A_{f'} \left(\frac{y\tau}{2}\right)^2 + \Delta A_f \Delta A_{f'} \left(1 - \frac{y}{2}\right)^2 \right] + \\ & \left. + 2g_V^f (\pm g_A^{f'}) \left[A_f A_{f'} \left(1 - \frac{y\tau}{2}\right) \frac{y\tau}{2} + \Delta A_f \Delta A_{f'} \frac{y}{2} \left(1 - \frac{y}{2}\right) \right] \right\}. \quad (6.48) \end{aligned}$$

Наконец, выражения (6.47) и (6.48) можно заметно упростить, если принять следующие приближения. Во-первых, опустить члены, пропорциональные (малому значению переменной) $y \approx 3\% E_\nu / (30 \text{ МэВ})$ и пропорциональные $\Delta A_f \Delta A_{f'}$. Последнее вполне справедливо для бесспиновых ядер или для тяжелых ядер с $\Delta A \ll A$. Во-вторых, пренебречь ролью кинематических поправок, положив $g_{c/i} \rightarrow 1$. В результате для когерентного и некогерентного сечений получаются достаточно простые формулы

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}}{dT_A} = & \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}\right) \sum_{f=n,p} A_f^2 |F_f|^2 (g_V^f)^2, \\ \frac{d\sigma_{\text{incoh}}}{dT_A} = & \frac{2G_F^2 m_A}{\pi} \sum_{f=n,p} A_f [1 - |F_f|^2] [(g_L^f)^2 + (g_R^f)^2], \end{aligned} \quad (6.49)$$

из которых видно, что (в упомянутом выше приближении) сечения $\nu A \rightarrow \nu A^{(*)}$ и $\bar{\nu} A \rightarrow \bar{\nu} A^{(*)}$ неразличимы.

Кроме того, можно также опустить слагаемые, пропорциональные g_V^p , поскольку в Стандартной модели $g_V^p \ll 1$, что переводит формулу (6.48) в хорошо известный результат для сечения когерентного рассеяния нейтрино на ядре [1, 7, 33, 35, 40–47], пропорциональный квадрату числа нейтронов в ядре:

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}}{dT_A} \approx \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}\right) |F_n|^2 (g_V^n)^2 N^2. \quad (6.50)$$

Роль поправок к этой формуле обсуждается ниже в п. 7.3.

Итак, завершая данный пункт, подчеркнем, что получен новый и оригинальный результат [19,20], представленный в формулах (6.42) и (6.43), (6.44) или (6.45), (6.46), суть которого состоит в «плавном» переходе сечения (анти)нейтрино-ядерного рассеяния от когерентного режима (6.46) к некогерентному (6.45).

Действительно, упругие (когерентные в стандартной терминологии) взаимодействия, которые сохраняют ядро в первоначальном квантовом состоянии, приводят к квадратичному в терминах числа нуклонов усилению ($\propto A_f^2$) наблюдаемого сечения и одновременно к зависимости этого сечения от квадрата нормированных на единицу ядерных протонного и нейтронного формфакторов $|F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$.

С другой стороны, сечение неупругих (или некогерентных в стандартной терминологии) процессов, когда квантовое состояние ядра-мишени изменяется, обладает линейной зависимостью от числа нуклонов ($\propto A_f$) и одновременно пропорционально выражению $[1 - |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2]$. При этом оба слагаемых (6.45) и (6.46) полного сечения (6.42) зависят от одних и тех же ядерных формфакторов $F_{p/n}(\mathbf{q})$.

Если $\mathbf{q} \rightarrow 0$, то формфакторы $F_{p/n}(\mathbf{q}) \rightarrow 1$, и вклад некогерентного слагаемого (6.45) в полное сечение обращается в нуль, в то время как когерентное слагаемое (6.46) полностью определяет наблюдаемое сечение (6.42). В противоположном случае больших значений переданного 3-импульса \mathbf{q} , формфакторы $F_{p/n}(\mathbf{q}) \rightarrow 0$, и когерентное сечение (6.46) не дает вклада, тогда как некогерентное сечение (6.45) полностью определяет величину наблюдаемого полного сечения (6.42). Очевидно, что в промежуточной области значений переданного ядру 3-импульса \mathbf{q} когерентный и некогерентный вклады в полное сечение должны рассматриваться одновременно. Вопрос о доминировании того или иного слагаемого можно грубо оценить (см., например, (6.49)) из сравнения множителей типа $A_{p/n}(1 - |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2)$ и $A_{p/n}^2|F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$. В практической плоскости этот вопрос обсуждается ниже в п. 7.1.

7. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

На примере нескольких типичных ядер-мишеней, используемых для низкороговых измерений, в частности для детектирования и исследования когерентного нейтрино-ядерного рассеяния, обсудим в данном разделе полученные выше результаты и численно оценим относительную важность вкладов когерентных и некогерентных процессов в полное сечение рассеяния (анти)нейтрино на этих ядрах.

Три типичных детектора и ядерные формфакторы. С практической точки зрения удобно иметь дело с сечением исследуемого процесса, проинтегрированным по допустимому интервалу кинетической энергии отдачи ядра,

$$\sigma(E_{\nu/\bar{\nu}}, T_A^{\min}) = \int_{T_A^{\min}}^{T_A^{\max}} \frac{d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} dT_A. \quad (7.1)$$

Это интегральное сечение в значительной степени зависит от порога T_A^{\min} регистрации кинетической энергии ядра отдачи (минимально доступной регистрации энергии отдачи) каждого отдельно взятого детектора.

Для проведения данного анализа рассмотрим (в качестве примера) три экспериментальные установки, которые обладают лучшими в своем классе энергетическими порогами [19].

Итак, первая тестовая установка — это германиевый детектор, обычно используемый для регистрации потоков $\bar{\nu}_e$ от ядерных реакторов. Будем считать (для простоты), что его рабочим веществом являются только изотопы натурального германия ^{74}Ge . Ожидаемый порог регистрации энергии электронов (от взаимодействия с $\bar{\nu}_e$) в германиевых болометрических детекторах составляет 200 эВ [48], что согласно оценке коэффициента преобразования энергии (квенчинга) для германиевых детекторов [49] отвечает примерно 1 кэВ для кинетической энергии отдачи ядер ^{74}Ge . Конкретным примером использования такого типа детектора служит эксперимент νGEN , проводимый коллаборацией ОИЯИ–ИТЭФ на Калининской атомной станции [50]. Далее, дифференциальные сечения для этого детектора вычисляются ниже при энергии (анти)нейтрино $E_{\bar{\nu}} = 5$ и 8 МэВ, а полные сечения вычислены для интервала возможных энергий антинейтринного пучка $E_{\bar{\nu}} \in (1, 20)$ МэВ. В качестве оценки энергии низшего уровня возбуждения ядра ^{74}Ge взята величина $\Delta\varepsilon = 900$ кэВ.

Вторая тестовая установка — это сцинтилляционный CsI-детектор (калориметр), использованный коллаборацией COHERENT для регистрации нейтрино от источника нейтронов в Ок-Ридже [8]. Дифференциальные сечения для такой установки вычислены при заметно больших энергиях нейтрино: $E_{\nu} = 30$ и 50 МэВ. Оценка полных сечений дана в интервале $E_{\nu} \in (1, 150)$ МэВ. Предполагается, что энергия возбуждения ядра ^{133}Cs составляет примерно $\Delta\varepsilon = 100$ кэВ. Порог по энергии отдачи ядра ^{133}Cs равен, как и в эксперименте COHERENT, 5 кэВ.

Третья тестовая установка — это жидкоаргоновый детектор с беспрецедентно низким порогом регистрации энергии отдачи, равным 0,6 кэВ для ядер аргона ^{40}Ar , достигнутым в эксперименте DarkSide [51]. Дифференциальные и полные сечения для этой установки соответственно получены для энергии нейтрино $E_{\nu} = 15(20)$ МэВ и в интервале $E_{\nu} \in (1, 50)$ МэВ.

Для получения численных результатов были использованы два (для протонов и нейтронов) ядерных формфактора $F_{p/n}(\mathbf{q})$ и данные об уровнях энергии возбуждения рассматриваемых ядер-мишеней. Были рассмотрены два (наиболее популярных) типа параметризации ядерных формфакторов на базе симметризованного распределения Ферми [52] и ядерный формфактор Хельма (Helm) [53]. При условии выбора параметров этих моделей на основе требования равенства RMS радиусов протона и нейтрона для интересующих

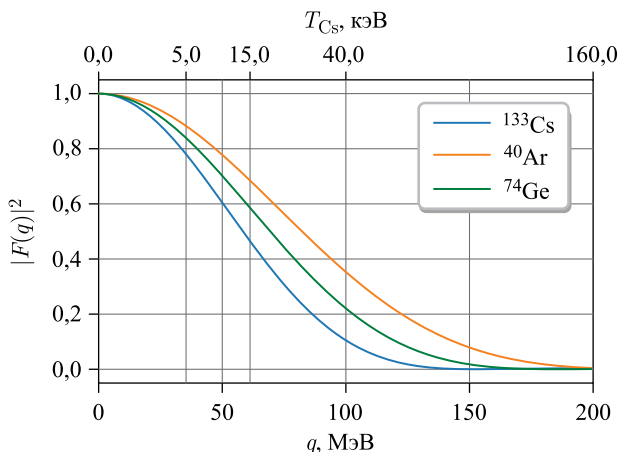


Рис. 11. Ядерный формфактор Хельма F^{Helm} [53] для трех ядер-мишеней как функция абсолютного значения переданного импульса $|\mathbf{q}|$ (нижняя горизонтальная ось). Верхняя горизонтальная ось — кинетическая энергия отдачи ядра ^{133}Cs , соответствующая данному $|\mathbf{q}|$

нас ядерных формфакторов были получены практически одинаковые результаты*.

В дальнейшем, как и в работах [19, 20], представлены результаты, полученные в предположении равенства RMS радиусов протона и нейтрона с использованием (для определенности) ядерных формфакторов Хельма. На рис. 11 для трех выбранных ядер показано поведение формфактора Хельма как функция переданного ядру 3-импульса $|\mathbf{q}|$. Видно, что для ядер цезия при кинетической энергии отдачи ядра $T_A \simeq 12\text{--}15$ кэВ, где расположен максимум наблюдаемого коллаборацией COHERENT сигнала, значение переданного импульса $|\mathbf{q}| \simeq 50\text{--}60$ МэВ/с и квадрат формфактора $|F(\mathbf{q})|^2 \simeq 0,6\text{--}0,5$, что явно указывает на заметное подавление чисто когерентного рассеяния и на наличие вклада от некогерентных процессов (возбуждения ядра).

7.1. Баланс между когерентным и некогерентным слагаемыми. Согласно заключению п. 6.4 наиболее важным (и новым) свойством полученного в работах [19, 20] и обсуждаемого здесь результата является плавный переход сечения (анти)нейтрино-ядерного рассеяния от когерентного режима к некогерентному, что явным образом представлено в формулах (6.42) и (6.45), (6.46) или в упрощенном виде в формулах (6.49). Фактическим «регулятором» такого перехода являются ядерные нуклонные формфакторы $F_{p/n}(\mathbf{q})$, определенные в общем виде выражениями (6.25) и представленные для иллюстрации

*Несколько подробнее про эти формфакторы можно узнать из разд. 8.

(в модели Хельма [53]) на рис. 11. Этот рисунок явным образом демонстрирует, что, как уже было показано из общих соображений выше в п. 6.4, при $\mathbf{q} \rightarrow 0$ формфактор $F(\mathbf{q}) \rightarrow 1$, в результате вклад некогерентного сечения исчезает и полностью доминирует когерентное слагаемое. С другой стороны, для больших значений \mathbf{q} формфактор $F(\mathbf{q}) \rightarrow 0$, и уже исчезает когерентное слагаемое, и полностью доминирует сечение некогерентного рассеяния.

Посмотрим, как это реализуется на практике. На рис. 12 и 13 показаны дифференциальные и полные (интегральные в смысле определения (7.1)) сечения когерентного и некогерентного рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядрах выбранных выше тестовых установок.

Из сравнения левых и правых фрагментов этих рисунков видно, что когерентное и некогерентное нейтрино-ядерное и антинейтрино-ядерное сечения, вычисленные по формулам (6.45) и (6.46), демонстрируют согласно формулам (6.49) практически одинаковое поведение как функции энергии отдачи T_A и энергии падающего (анти)нейтрино E_ν , с одним только незначительным отличием для тяжелого ядра ^{133}Cs , обладающего ненулевым значением полного спина. Далее, относительно баланса когерентного и некогерентного сечений имеются общие свойства для нейтринного и антинейтринного пучков.

Если энергия отдачи ядра стремится к нулю, $T_A \rightarrow 0$, то когерентное сечение доминирует и полностью определяет полное сечение νA - и $\bar{\nu} A$ -рассеяния (6.42), поскольку некогерентный вклад полностью отсутствует. Для отдельно взятого ядра величина дифференциального когерентного сечения в этом пределе (с точностью до незначительных поправок согласно (6.46)) не зависит от энергии (анти)нейтрино.

Если энергия отдачи ядра стремится к своему кинематическому пределу, $T_A \rightarrow T_A^{\max}$, то когерентное сечение довольно быстро спадает и полностью обращается в нуль, поскольку оно пропорционально множителю $1 - T_A/T_A^{\max}$, однако некогерентное сечение с ростом T_A постоянно растет. Отметим, что из-за возможности израсходовать приобретенную ядром энергию на возбуждение максимально достижимая кинетическая энергия ядра T_A в некогерентных процессах оказывается систематически меньше, чем максимально достижимая в когерентном случае энергия отдачи T_A^{\max} (см. формулу (4.10)). Поэтому на рис. 12 штриховые («некогерентные») кривые обрываются с ростом T_A всегда несколько раньше сплошных («когерентных»).

При малых значениях энергии $E_{\nu/\bar{\nu}}$ когерентное сечение всегда существенно превышает некогерентное сечение для любых значений кинетической энергии отдачи ядра T_A . При больших $E_{\nu/\bar{\nu}}$ уже могут появляться значения энергии отдачи T_A , выше которых некогерентное сечение начинает превышать когерентное сечение, как это можно увидеть для $E_{\nu/\bar{\nu}} = 50$ МэВ на графиках посередине рис. 12. В частности, это происходит на ядре ^{133}Cs при $T_A \gtrsim 30$ кэВ.

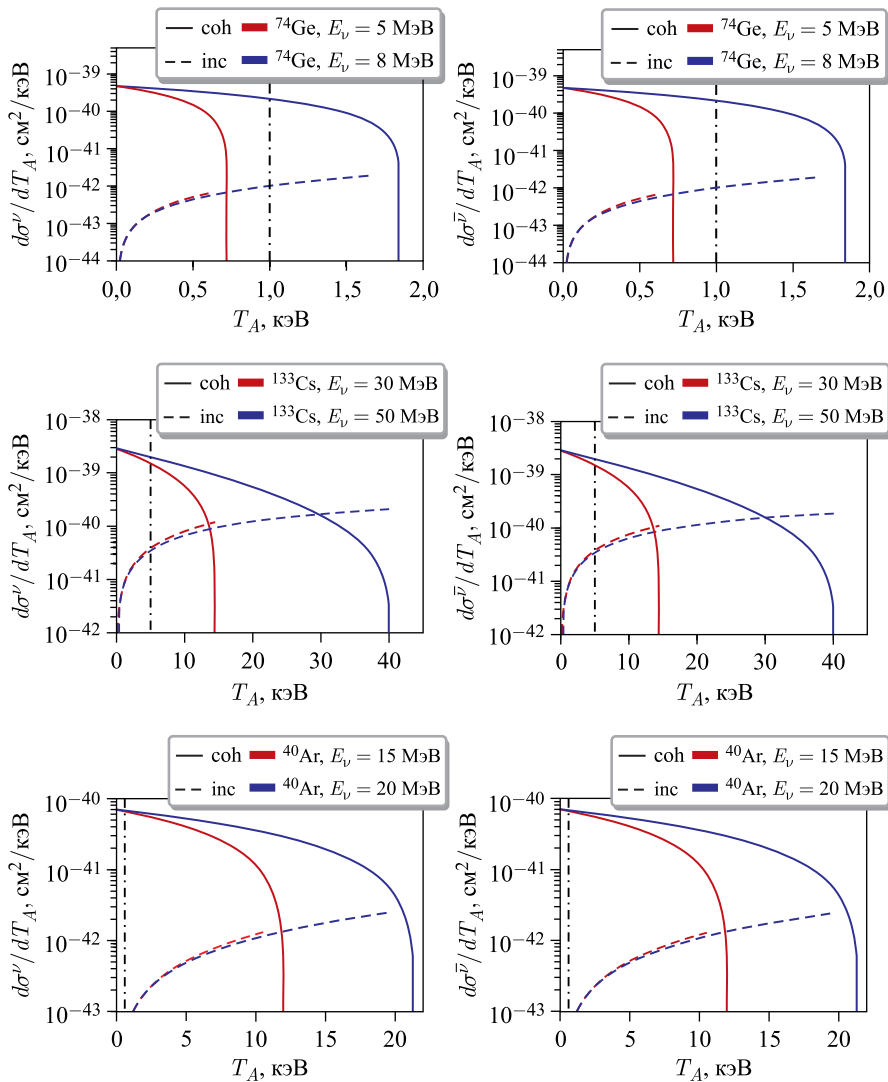


Рис. 12 (цветной в электронной версии). Дифференциальные сечения $d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}/dT_A$ как функции энергии отдачи ядра T_A для когерентного (сплошные линии) и некогерентного (штриховые) ν -ядерного (слева) и $\bar{\nu}$ -ядерного (справа) рассеяния для мишеней из ядер ^{74}Ge (вверху), ^{133}Cs (посередине) и ^{40}Ar (внизу) при различных энергиях начальных (анти)нейтрино. Вертикальные линии соответствуют экспериментальным энергетическим порогам для каждой из мишеней

При малых значениях энергии пучка $E_{\nu/\bar{\nu}}$ интегральное когерентное сечение (см. рис. 13) превышает некогерентное сечение по величине на несколько порядков, поскольку множители $[1 - |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2]$ сильно подавляют некогерентный вклад при малых значениях переданного 3-импульса \mathbf{q} . Однако с ростом энергии (анти)нейтрино это соотношение подавляющей доминантности когерентного вклада изменяется и при некоторых значениях $E_{\nu/\bar{\nu}}$ интегральное некогерентное сечение становится весьма существенным.

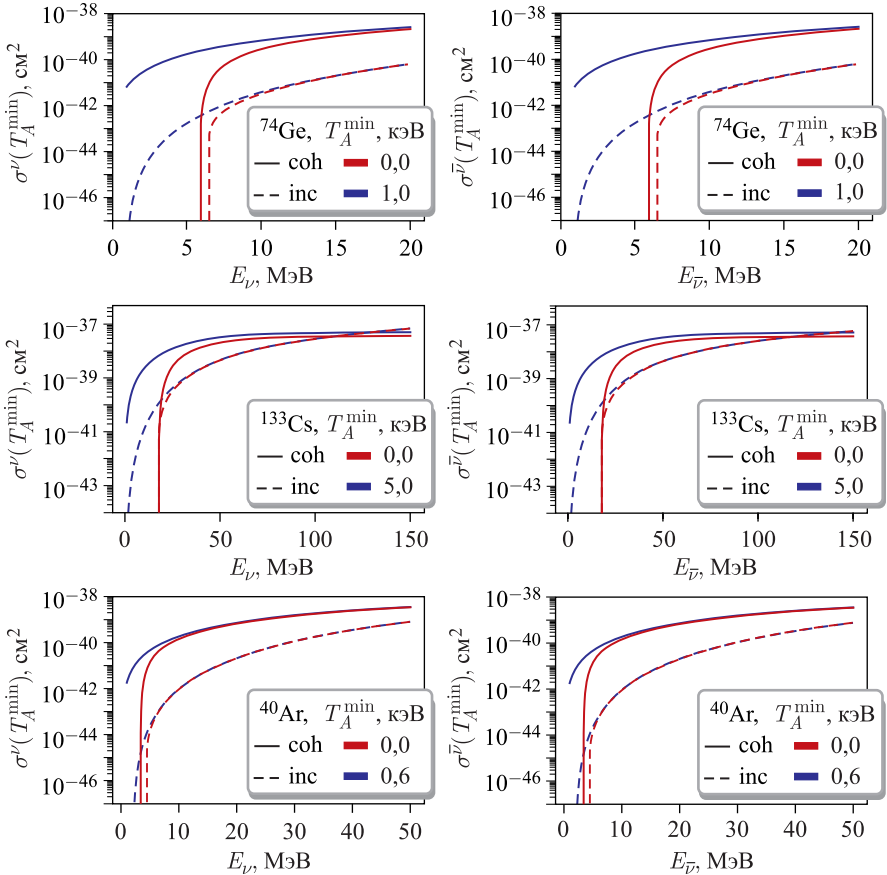


Рис. 13 (цветной в электронной версии). Интегральные сечения $\sigma^{\nu/\bar{\nu}}$ как функции энергии налетающего (анти)нейтрино для когерентного (сплошные линии) и некогерентного (штриховые) ν -ядерного (слева) и $\bar{\nu}$ -ядерного (справа) рассеяния для мишеней из ядер ^{74}Ge (вверху), ^{133}Cs (посередине) и ^{40}Ar (внизу). Сечения вычислены как для идеализированных экспериментальных установок с нулевым энергетическим порогом ($T_A^{\min} = 0$), так и для реальных установок с наилучшими для них энергетическими порогами T_A^{\min}

Далее, наличие реального экспериментального порога регистрации $T_A^{\min} > 0$ заметным образом уменьшает значения интегральных сечений, причем несколько слабее в случае некогерентного рассеяния. Ненулевой порог (вертикальные линии на рис. 12) фактически не учитывает значительную часть дифференциального сечения, причем в той области, где это сечение имеет максимальный вклад для когерентного рассеяния, как это видно из рис. 12.

Рис. 14 иллюстрирует это утверждение количественно. На нем для тяжелого ядра ^{133}Cs показано отношение интегральных сечений $\sigma_{\text{inc}}/\sigma_{\text{coh}}$, вычисленных согласно определению (7.1). Видно, что для νA -рассеяния (рис. 14, *a*) при энергии нейтрино $E_\nu \simeq 30(60)$ МэВ это отношение равно примерно 7(20)%, когда $T_A^{\min} = 0$, и достигает 15(30)% в случае реального энергетического порога $T_A^{\min} = 5$ кэВ. В этом случае некогерентный вклад становится равным когерентному, когда энергия падающего нейтрино $E_\nu \simeq 110$ МэВ. Очевидно, что роль некогерентных взаимодействий существенно увеличивается с ростом энергии взаимодействия (налетающего нейтрино).

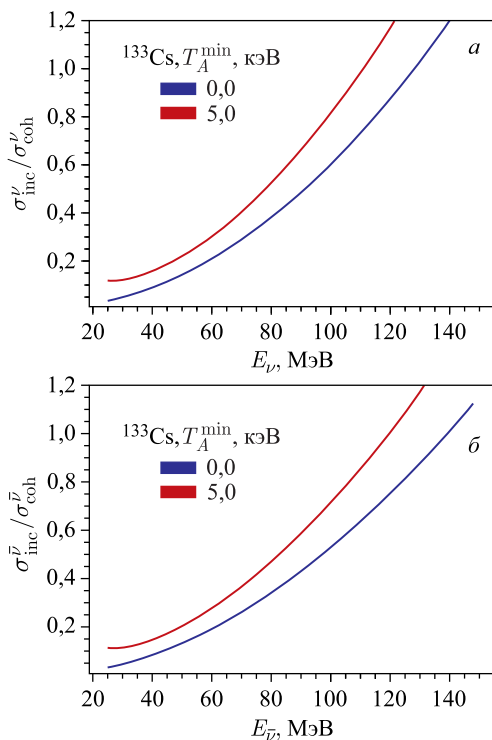


Рис. 14. Отношение $\sigma_{\text{inc}}/\sigma_{\text{coh}}$ некогерентного сечения к когерентному на ядре ^{133}Cs как функция энергии $E_{\nu/\bar{\nu}}$ для ν Cs-рассеяния (*a*) и $\bar{\nu}$ Cs-рассеяния (*б*). Кривые соответствуют $T_A^{\min} = 0$ и реальному порогу регистрации (анти)нейтрино в 5 кэВ

Когерентные и некогерентные сечения при $g_A^p = 1/2$ и $g_A^p = 1,27$. В данном пункте собраны вспомогательные рисунки, содержащие сравнение окончательных результатов для когерентного и некогерентного нейтрино-ядерного рассеяния, полученные при различных значениях аксиальной константы связи нуклонов в ядре $g_A^p = 1/2$ и $g_A^p = 1,27$, в частности в работе [19]. На рис. 15

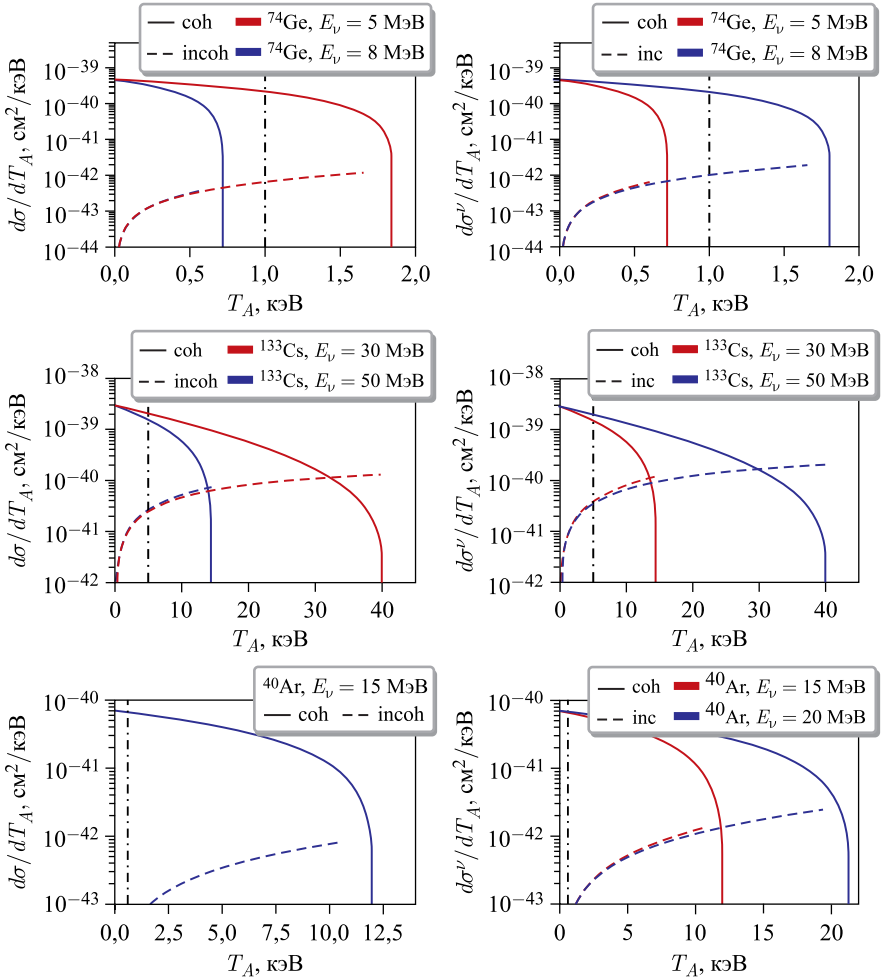


Рис. 15. Дифференциальные сечения $d\sigma/dT_A$ когерентного (сплошные линии) и некогерентного (штриховые) νA -рассеяния на ядрах ^{74}Ge (вверху), ^{133}Cs (посередине) и ^{40}Ar (внизу) при различных энергиях нейтрино. Вертикальные линии отвечают экспериментальным порогам. Рисунки слева получены при $g_A^p = 1/2$, справа — при $g_A^p = 1,27$

и 16 даны соответственно дифференциальные и интегральные сечения когерентного и некогерентного рассеяния нейтрино на рассматриваемых ядрах. В целом за счет перехода от $g_A^p = 1/2$ к $g_A^p = 1,27$ полученное отличие в кривых для сечений оказывается практически незаметным, если рассматривать достаточно легкие ядра, такие как ^{74}Ge (вверху) и ^{40}Ar (внизу).

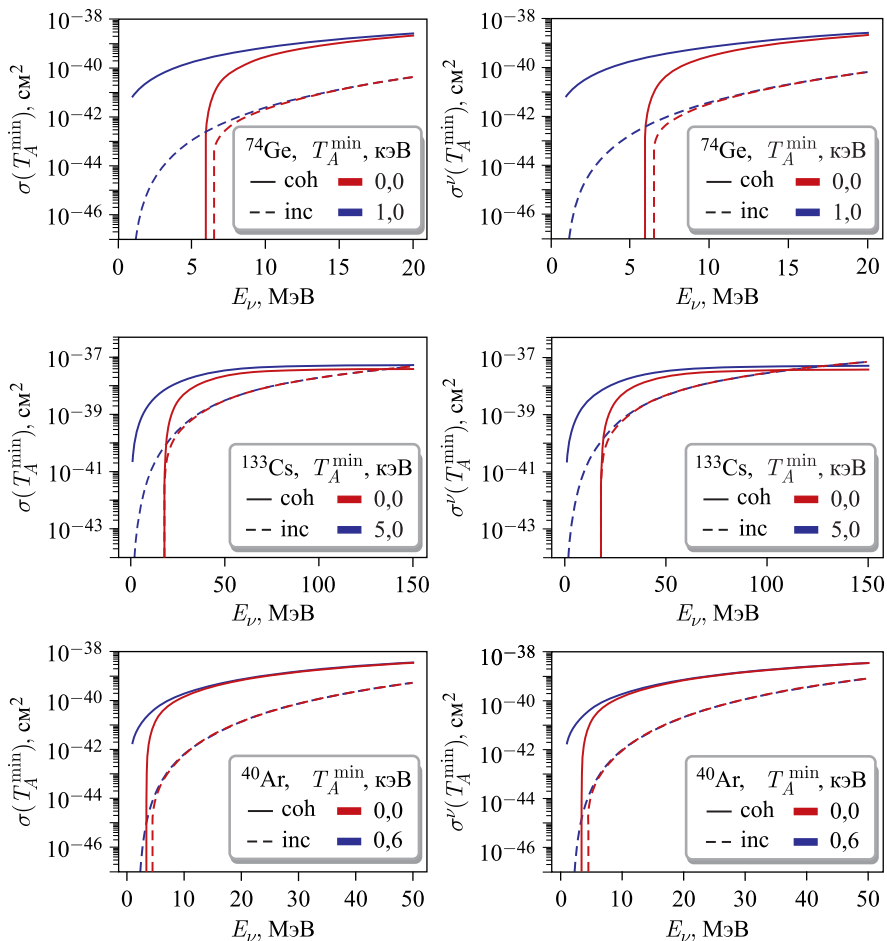


Рис. 16. Интегральные сечения σ когерентного (сплошные линии) и некогерентного (штриховые) νA -рассеяния на ядрах ^{74}Ge (вверху), ^{133}Cs (посередине) и ^{40}Ar (внизу) как функции энергии нейтрино. Сечения вычислены как для идеализированных экспериментальных установок с нулевым энергетическим порогом ($T_A^{\min} = 0$), так и для реальных установок с наилучшими для них энергетическими порогами T_A^{\min} . Рисунок слева получен при $g_A^p = 1/2$, справа — при $g_A^p = 1,27$

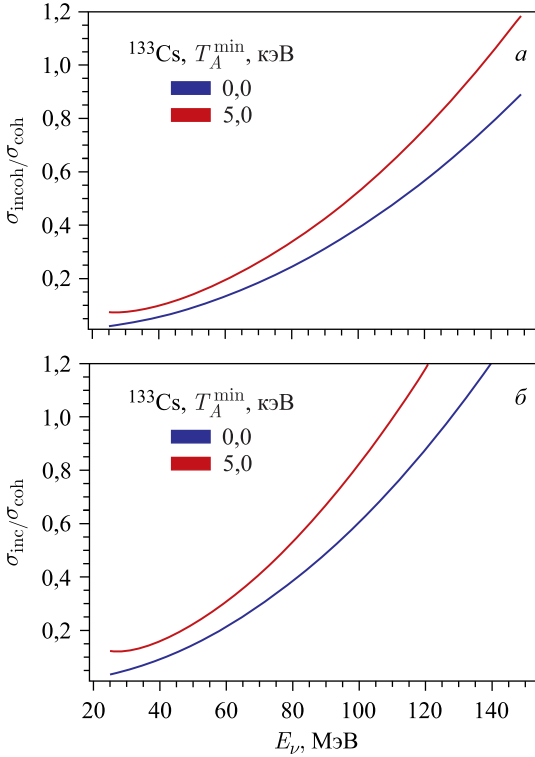


Рис. 17. Отношение $\sigma_{\text{inc}}/\sigma_{\text{coh}}$ некогерентного νCs -сечения к когерентному νCs -сечению как функция энергии E_ν . Кривые соответствуют $T_A^{\text{min}} = 0$ и реальному порогу регистрации нейтрино в 5 кэВ. Рис. а получен при $g_A^p = 1/2$, рис. б — при $g_A^p = 1,27$

Рис. 17 на примере ядра ^{133}Cs дает представление о влиянии значения аксиальной нуклонной константы связи g_A^p на отношение некогерентного сечения к когерентному. Видно, что вычисления с более реалистической аксиальной нуклонной константой связи $g_A^p = 1,27$ приводят к увеличению роли некогерентного вклада с ростом энергии нейтрино для достаточно тяжелого ядра ^{133}Cs , обладающего к тому же ненулевым полным спином.

7.2. Некогерентное взаимодействие — источник γ -квантов больших энергий. Ясно, что после взаимодействия с нейтрино или антинейтрино обсуждаемых в данном обзоре энергий у ядра имеются только две возможности. Либо ядро остается в том же квантовом состоянии (упругое рассеяние), либо его внутреннее квантовое состояние меняется (неупругое рассеяние). Однако если экспериментальная установка способна измерять только кинетическую энергию отдачи ядра, то практически невозможно определить, осталось ли

ядро после взаимодействия в своем первоначальном состоянии или произошел переход ядра на возбужденный уровень (состояние ядра изменилось).

Если переход на возбужденное состояние ядра энергетически возможен, то произошедшее благодаря ему неупругое взаимодействие должно сопровождаться испусканием фотонов, возникающих благодаря снятию возбуждения и возвращению ядра в исходное состояние. Энергия этих фотонов будет определяться конкретной разницей энергетических уровней данного ядра [21]. Так, например, временной масштаб испускания таких гамма-квантов для ядра ^{133}Cs лежит в области от пикосекунд до наносекунд, и их энергии находятся в районе нескольких сотен килоэлектронвольт. Понятно, что эти фотоны (от снятия ядерного возбуждения ядра-мишени) должны производить в сцинтилляционном детекторе-калориметре вполне детектируемый сигнал, который, вообще говоря, должен быть скоррелирован со временем облучения мишени нейтринным пучком от ускорителя.

Скорость счета таких γ -квантов определяется отношением $N_{\text{inc}}/N_{\text{coh}}$, где

$$N_{\text{inc/coh}} = \int dE_\nu \Phi(E_\nu) \int_{dT_A^{\min}}^{dT_A^{\max}} dT_A \frac{d\sigma_{\text{inc/coh}}}{dT_A} \varepsilon(T_A)$$

и $\varepsilon(T_A)$ — эффективность детектора. Согласно рис. 14 представляется вполне реальной перспектива регистрации заметного числа событий с γ -квантами от некогерентного взаимодействия (анти)нейтрино с ядром цезия (возбуждение этого ядра).

Рис. 14 весьма поучителен. Из него можно заключить, что в эксперименте COHERENT (с мишенью из ^{133}Cs) действительно наблюдалась весьма заметная часть когерентного упругого рассеяния нейтрино на ядре (Coherent Elastic Neutrino Nucleus Scattering — CE ν NS), однако с 15–20%-й неопределенностью, которая обусловлена как высокой энергией пучка (анти)нейтрино, так и высоким энергетическим порогом установки в 5 кэВ. Рис. 14 показывает, что неупругая (некогерентная) примесь на уровне 15–20 % неизбежна в измеренных данных этого эксперимента, *если* γ -кванты от снятия возбуждения ядра не поддаются детектированию. Поэтому, очевидно, что при любом достаточно аккуратном анализе данных эксперимента типа COHERENT (например в работах [54–64]) должен приниматься во внимание этот заметный вклад некогерентного рассеяния.

На наш взгляд, имеются два пути в направлении прецизионного изучения CE ν NS и его следствий. Первый основан на том, чтобы отделить «истинно когерентный и истинно упругий» сигнал от некогерентной примеси, основываясь на приведенной выше возможности наблюдения снимающих ядерное возбуждение фотонов, которая впервые упоминалась еще в 1975 г. [21, 65] и недавно, в контексте когерентного рассеяния нейтрино, в работах [19, 20].

Действительно, некогерентные (неупругие) процессы, будучи согласно рис. 14 относительно небольшим фоном к когерентным взаимодействиям (в рассматриваемой кинематической области), тем не менее, если имеется возможность зарегистрировать γ -кванты, испущенные возбужденным в результате взаимодействия ядром, дают в руки экспериментатора весьма важную информацию.

Для каждого конкретного ядра-мишени эти фотоны будут характеризоваться тремя важными параметрами. Во-первых, их энергия, как правило, заметно больше энергии сигнала ядра отдачи ($T_{Cs} \leq 40$ кэВ на рис. 12) и характеризуется разностью уровней возбуждения ядра (для ^{133}Cs до 900 кэВ). Во-вторых, испускание фотонов с энергией, определенной разностью уровней возбуждения ядра, будет сдвинуто по времени (относительно первоначального нейтринного пучка) на совершенно характерные для данного ядра времена снятия возбуждения данной энергии. И, в-третьих, скорость счета обсуждаемых фотонов будет определяться упомянутым выше отношением $N_{\text{inc}}/N_{\text{coh}}$.

Поэтому одновременное (точнее, скоррелированное) детектирование двух сигналов в виде энергии отдачи ядра и энергии фотонов от снятия возбуждения ядра представляет собой единственный способ отделения чистого $\text{CE}\nu\text{NS}$ от «побочных» неупругих процессов и, следовательно, прецизионного исследования на базе $\text{CE}\nu\text{NS}$ ядерной структуры и поиска сигналов новой физики, как это интенсивно обсуждается [54–64, 66–68].

Заметим, что если использовать пучки нейтрино и антинейтрино значительно меньших энергий (по сравнению с экспериментом COHERENT), например от ядерных реакторов или от Солнца, то имеется другой путь для изучения $\text{CE}\nu\text{NS}$. Он изначально, задолго до идей и результатов эксперимента COHERENT, рассматривался как единственный и был основан на стремлении создать и использовать детекторы (анти)нейтрино с крайне низкими порогами регистрации энергии отдачи ядер (менее сотни электронвольт). Сбор данных с их помощью предполагался в тех кинематических областях, где некогерентное (неупругое) взаимодействие практически не может иметь место (кинематически) или крайне подавлено, т. е. где формфакторы $|F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$ практически неотличимы от единицы. Сегодня работы в этом направлении продолжаются (см., например, [59]). С нашей точки зрения, благодаря крайне низким уже достигнутым энергетическим порогам наиболее перспективными выглядят проект ОИЯИ–ИТЭФ νGeN [48, 50] на Калининской атомной станции и, вероятно, в ближайшем будущем эксперимент DarkSide [51] в Гран-Сассо. Другие возможности обсуждаются, например, в работе [59] и кратко в разд. 8.

7.3. Неточности «общепринятого» выражения для когерентного сечения. Интересно сравнить полученные выражения для когерентного сечения нейтрино-ядерного рассеяния (6.46) и (6.48) с тем, что обычно используется

в литературе, например, в [10]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{\text{coh}}^0}{dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{2\pi} [(G_V + G_A)^2 + \\
 &+ (G_V - G_A)^2 (1 - y)^2 - (G_V^2 - G_A^2) \frac{m_A T_A}{E_\nu^2}] \approx \\
 &\approx \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left[G_V^2 \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}} \right) + G_A^2 \left(1 + \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}} \right) \right] \approx \\
 &\approx \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}} \right) |F_n|^2 (g_V^n)^2 N^2, \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

где $G_V = F_p Z g_V^p + F_n N g_V^n$ и $G_A = F_p \Delta Z g_A^p + F_n \Delta N g_A^n$. Первое приближенное равенство (вторая строка) в формуле (7.2) является результатом достаточно точного приближения $y = T_A/E_\nu \rightarrow 0$. Последняя строка — уже следствие дальнейших упрощений; во-первых, считается, что $g_V^p \rightarrow 0$, и, во-вторых, что ядро имеет нулевой полный спин.

После упомянутых выше приближений, казалось бы, третья строка выражений (7.2) полностью совпадает с полученной выше приближенной формулой для когерентного нейтрино-ядерного сечения (6.50). Однако вывод формулы (7.2), похоже, не имеет ничего общего с понятием когерентности. Поскольку, как обсуждалось выше, когерентное рассеяние отвечает тому случаю, когда после взаимодействия с нейтрино ядро (и, соответственно, нуклон, с которым произошло взаимодействие) остается в своем первоначальном квантовом состоянии.

Структура же первой строки в (7.2) очень напоминает полученное выше выражение для некогерентного сечения νA -рассеяния, когда ядро изменяет свое спиновое состояние (6.47):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{\text{inc}}^\nu}{dT_A} &= \frac{2G_F^2 m_A}{\pi} g_i \sum_{f=n,p} [1 - |F_f(q^2)|^2] A^f \times \\
 &\times \left\{ (g_L^f)^2 + (g_R^f)^2 (1 - y)^2 - 2g_L^f g_R^f \frac{ym^2}{s - m^2} \right\},
 \end{aligned}$$

после замены в последнем $g_{L/R} \rightarrow (1/2)(g_V \pm g_A)$ и $g_i [1 - |F_f|^2] \rightarrow |F_f|^2$. Совпадение становится просто «магическим», если $F_p = F_n$, $Z = N$ и $\Delta Z = \Delta N$, точнее, $Z = N = \Delta Z = \Delta N$.

Разрешение парадокса, почему «когерентное сечение» (7.2) совпадает с хорошей точностью с некогерентным (6.45) и далее с (6.47), объясняется использованием для вывода (7.2) нерелятивистского приближения и сумми-

рованием по всем проекциям спина активного нуклона в конечном состоянии (т. е. игнорированием условия когерентности)*.

Действительно, два слагаемых в матричном элементе, пропорциональных скалярным произведениям токов (l, h_{+-}^η) и (l, h_{-+}^η) , которые отвечают изменению проекции спина нуклона на выбранную ось, не должны давать вклад в когерентное сечение (поскольку изменяют спин ядра), однако они явно присутствуют в выражении (7.2). В нерелятивистском приближении первый скаляр (l, h_{+-}^η) равен нулю, тогда как второй скаляр (l, h_{-+}^η) пропорционален g_A и также зануляется для бесспиновых ядер, как это видно из (П.146). Последнее утверждение справедливо, если нуклоны в ядре находятся в покое (т. е. имеет место нерелятивистское приближение).

Для иллюстрации значимости эффектов, связанных с движением нуклона-мишени, и постоянства спина ядра при упругом нейтрино-ядерном рассеянии на рис. 18 для ядра ^{133}Cs показаны отношения дифференциальных когерентных сечений $d\sigma/dT_A$, вычисленных согласно (6.46) и согласно выражению (7.2), для трех возможных значений пучка нейтрино. Видно, что эти сечения совпадают при нулевой энергии отдачи ядра $T_A = 0$ и начинают различаться на уровне нескольких процентов с ростом T_A . Максимальное различие достигается на конце спектра допустимой кинетической энергии ядра и растет с энергией от 5% при $E_\nu = 30$ МэВ до 20% при $E_\nu = 100$ МэВ.

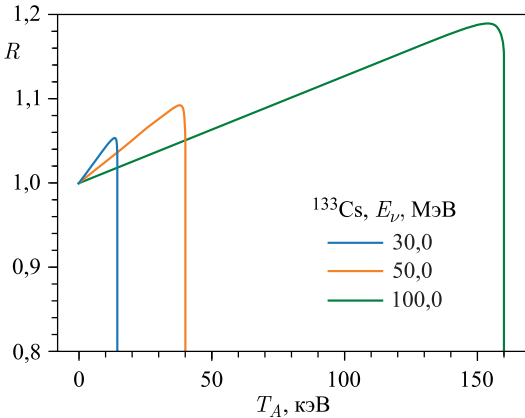


Рис. 18. Отношение R дифференциального когерентного сечения $d\sigma/dT_A$, вычисленного по формуле (6.46), к дифференциальному когерентному сечению, использованному коллаборацией COHERENT и представленному формулой (7.2). Оба сечения усреднены по спину ядра и отвечают рассеянию нейтрино на ядре ^{133}Cs . Отношение дано как функция кинетической энергии ядра отдачи T_A

Итак, имеются две основные причины такого различия. Во-первых, в случае когерентного взаимодействия полученные выше общие формулы опираются на учет только тех нуклонных матричных элементов, которые отвечают одному и тому же начальному и конечному спиновому состоянию нуклона (ядра), что находится в противоречии с каноническим выводом фор-

*Это суммирование обсуждается в п. 8.1.

мулы для когерентного рассеяния (использованной в [10]), когда явно учитываются также и вклады с переворотом спина нуклона. Во-вторых, нуклон мишени не предполагается находящимся в покое (внутри ядра), что приводит к поправкам в векторном и аксиальном формфакторах ядра.

Таким образом, использование приближенной формулы (7.2) для описания и анализа данных по $CE\nu NS$ в постановке эксперимента типа COHERENT чревато еще одной систематической ошибкой на уровне 5–15 %.

7.4. О возможности переворота спина нуклона при когерентном рассеянии. Подробно изложенный выше подход к единообразному описанию когерентного и некогерентного рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядре основан на работе [19] и исходит из первых принципов. Очевидно, что использование в работах [19,20] аналитических формул для описания рассеяния (анти)нейтрино на нуклоне, находящемся в составе сложносвязанной системы (ядро), было возможно только благодаря ряду упрощающих приближений и предположений.

В частности, наибольшей критике, видимо, подвержено сделанное в [19] предположение об отсутствии вклада в когерентное (или упругое) сечение тех амплитуд (или в нашем случае скалярных произведений), которые связаны с возможностью переворота спина нуклона в актах рассеяния на нем падающего (анти)нейтрино. Кажется более или менее понятным, что переворот спина на уровне нуклона вполне может быть «незаметен» на уровне ядра. Проекция спина ядра (на выделенное направление) при этом может и не измениться, поскольку нельзя отрицать возможности компенсации переворота спина одного нуклона соответствующим переворотом спина другого нуклона. Поэтому, вроде бы, переворот спина нуклона представляется возможным как для неупругого, так и для упругого рассеяния. При этом остается, однако, открытым вопрос о том, за какое характерное время «другой нуклон» успевает подстроиться под «первый нуклон» таким образом, чтобы ядро, их содержащее, снова оказалось в своем первоначальном состоянии, и как это время «восстановления спина ядра» соотносится с характерным для данного ядра временем снятия возбуждения за счет возвращения ядра с возбужденного уровня в первоначальное состояние.

Иными словами, вопрос состоит в том, сколько должно пройти времени с момента взаимодействия, для того чтобы считать процесс упругим (ядро осталось в исходном состоянии или вернулось в него так быстро, что никаких сигналов о возможной временной смене исходного состояния получено не было) или неупругим (ядро возвратилось в исходное состояние путем испускания фотонов от снятия возбуждения ядра)?

С другой стороны, вероятности таких переворотов спина определяются ядерной волновой функцией, которая в настоящее время вряд ли может быть получена из тех же первых принципов, которые лежали в основе подхода, использованного в работе [19].

Более того, любой переворот спина отдельно взятого нуклона из ядерной мишени, обладающей нулевым полным спином, должен с необходимостью (хотя бы на некоторое время) изменять полный спин ядра и, следовательно, вызывать возбуждение этого ядра. Конечно, это возбуждение рано или поздно снимается последующим «исчезновением наведенного» спина ядра и испусканием высвободившейся энергии. Поэтому, скорее всего, ядра, у которых значение суммарного спина нуклонов заметно меньше числа самих нуклонов, т. е. $A_{p/n} \gg \Delta A_{p/n}$, будут вести себя аналогичным бесспиновому ядру образом, т. е. любой переворот спина отдельно взятого нуклона из ядра мишени будет приводить к изменению энергетического состояния всего ядра мишени, а следовательно, к неупругому процессу возбуждения ядра. По этим причинам игнорирование вклада событий с переворотами спина нуклонов в сечение когерентного (анти)нейтрино-ядерного рассеяния, с нашей точки зрения, вполне соответствует уровню точности проведенного рассмотрения.

7.5. (Не)когерентное рассеяние или (не)упругое рассеяние? Согласно традиции, восходящей к пионерской работе Фридмана, слагаемые (6.45) и (6.46) полного сечения (анти)нейтрино-ядерного рассеяния (6.42) обозначены, соответственно, индексами «когерентное» и «некогерентное». Фактически эта терминология повсеместно использовалась и в данном тексте.

Тем не менее, как было показано выше, для энергий нейтрино и антинейтрино в области десятков мегаэлектронвольт оба этих слагаемых (6.45) и (6.46) являются *когерентными* в том смысле, что все нуклоны ядра вовлечены (практически) в равной степени в процесс взаимодействия на уровне амплитуд рассеяния [19]. Именно это свойство было использовано конструктивно для получения ключевых выражений для сечения (анти)нейтрино-ядерного рассеяния (6.42) и (6.45), (6.46). Поэтому, строго говоря, как минимум в обсуждаемой кинематической области более правильно использовать, соответственно, понятия (индексы) «упругое» и «неупругое» рассеяние/взаимодействие вместо «когерентное» и «некогерентное».

При значительно больших энергиях (десятки гигаэлектронвольт и далее), как минимум на качественном уровне, представляется разумной возможность обобщения понятия полноты уровней возбуждения ядра, использованных в данном рассмотрении для процесса $\nu A \rightarrow \nu A^*$, на случай, когда ядро-мишень полностью разрушается, т. е. $\nu A \rightarrow \nu X$ (глубоконеупругое рассеяние). Очевидно, что полное разрушение ядра означает, что теряет смысл также понятие его нуклонных формфакторов, что эквивалентно $F_{p/n}(\mathbf{q}) \equiv 0$. Поэтому неупругое (некогерентное) сечение рассеяния (анти)нейтрино на ядре в виде (6.45) становится очень похожим на основной результат партонной модели с ее знаменитой линейной зависимостью от полного числа нуклонов ядра A .

Одним из вариантов дальнейшего развития (обобщения) предложенного подхода может быть включение в рассмотрение помимо использованных ну-

клонных ядерных формфакторов $F_{p/n}(\mathbf{q})$ также протонных и нейтронных формфакторов $f_{p/n}(\mathbf{q})$, учитывающих внутреннюю структуру последних. Например, в виде замены киральных нуклонных слабых констант взаимодействия $g_{L/R}^{p/n}$ на выражения, зависящие от переданного импульса типа $g_{L/R}^{p/n} f_{p/n}(\mathbf{q})$.

Другой вариант обобщения рассмотренного подхода [19, 20] может быть связан с использованием для описания фермионов вместо плоских волн волновых пакетов (см., например, [69–71]). Это обобщение представляет особый интерес с точки зрения новых физических явлений в процессе рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядрах.

8. ФИЗИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ И ЭКСПЕРИМЕНТЫ $CE\nu NS$

8.1. Физические задачи для когерентного рассеяния нейтрино. В данном разделе дается краткий обзор решений ряда физических задач, в настоящее время связанных с исследованием когерентного упругого рассеяния нейтрино на ядрах ($CE\nu NS$).

8.1.1. Роль $CE\nu NS$ при взрыве сверхновой звезды. В первую очередь следует начать с работы Фридмана 1973 г. [1], где впервые обсуждалась роль значительного увеличения сечения $CE\nu NS$ в контексте объяснения взрыва сверхновой звезды. Далее в 1974 г. Вилсон в работе [72] предложил новый механизм коллапса звезды на основе «открытой» Фридманом когерентности и связанной с этим пропорциональности сечения рассеяния нейтрино на тяжелых ядрах (нейтральный ток) квадрату атомного веса. Согласно [72] коллапс звезды с железным ядром приводит к образованию горячей нейтронной звезды, окруженной тонким слоем железа. Нейтрино, образующиеся в горячем нейтронном коре, из-за большого сечения взаимодействия во внешнем (железном) слое способны своим давлением разогнать этот слой железа до скоростей отрыва и тем самым взорвать звезду.

В работе [73] приведены интересные аргументы в пользу того, что учет ядерной температуры звезды может оказаться также важным фактором увеличения сечений рассеяния нейтрино на возбужденные состояния ядер внутри самой звезды. На этой основе были выполнены соответствующие расчеты сечений нейтрино-ядерного рассеяния, относящихся к процессам в сверхновых звездах [73].

Согласно современным представлениям $CE\nu NS$ играет важную роль в эволюции сверхновой — $CE\nu NS$ ее «взрывает», т. е. мощный поток нейтрино из кора звезды с огромной силой срывает с нее внешний слой и выбрасывает его в космическое пространство, что собственно и наблюдается как взрыв сверхновой (SN).

Более того, современные моделирования эволюции SN-звезд включают этот процесс в качестве главного источника непрозрачности для нейтрино, что имеет особое значение во время фазы коллапса звезды перед собственно взрывом SN [74]. Во время коллапса ядро массивной звезды быстро делептонизируется, т. е. поглощает электроны с испусканием нейтрино, становясь более богатым нейтронами. По мере захвата этих нейтрино (за счет $CE\nu NS$) скорость делептонизации замедляется. В зависимости от величины $CE\nu NS$ момент, в который нейтрино становятся захваченными, изменяется. В частности, возрастание величины $CE\nu NS$ вызывает захват нейтрино при более высокой электронной фракции, в то время как уменьшение $CE\nu NS$ -величины приводит к тому, что нейтрино захватывается позднее при более низкой электронной фракции. В результате большее значение $CE\nu NS$ дает более массивное ядро, а меньшее значение $CE\nu NS$ — более легкое ядро. Далее, более тяжелое ядро вызывает ударную волну, которая сначала идет внутри звезды, но затем останавливается на относительно небольшом ее радиусе. Напротив, ударная волна в случае легкого ядра сначала идет достаточно медленно, но не останавливается на том же малом радиусе. С этим эффектом связано изменение светимости испущенных μ - и τ -нейтрино и антинейтрино. Так, например, изменение величины сечения $CE\nu NS$ в два раза приводит к изменению пиковой светимости ν_μ и ν_τ от взрыва сверхновой на 10% [74].

Уникальным является то, что этот же самый $CE\nu NS$ -эффект дает в руки экспериментаторов способ для регистрации и изучения потока «могучих» нейтрино от взрыва сверхновой и тем самым позволяет проверять модельные представления о механизме самого взрыва.

Действительно, обычный (не $CE\nu NS$) детектор для регистрации нейтрино от сверхновой имеет такой недостаток, что в нем наибольшее число событий от галактической сверхновой ожидается в канале заряженного тока, т. е. за счет реакции обратного β -распада: $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$. При этом цель измерения — спектр нейтрино разных ароматов, причем по возможности именно такой, какой был испущен нейтронной протозвездой из центра сверхновой. Однако эффекты нейтринных осцилляций в веществе, возможные эффекты самодействия нейтрино и т. п. будут смешивать спектры отдельных нейтринных ароматов на выходе нейтрино из сверхновых. Реакции нейтрального тока в виде $CE\nu NS$ нечувствительны к этому смешиванию, и скорость в этих реакциях определяется суммой нейтрино и антинейтрино всех трех ароматов. Их можно использовать совместно с сигналами заряженного тока, чтобы отделить эффекты преобразования аромата от исходного нейтринного сигнала. Это делает $CE\nu NS$ особенно важным механизмом обнаружения сверхновых и ключевой реакцией для измерения характера эволюции потока нейтрино от взрыва сверхновых.

Итак, обнаружение галактических нейтрино от взрывов сверхновых звезд представляет собой одну из важнейших современных задач нейтринной фи-

зики и астрофизики достаточно низких энергий. Ключевая роль в решении этой задачи принадлежит $CE\nu NS$ (см., например, [44, 75, 76]).

8.1.2. $CE\nu NS$ и структура ядра. Поскольку именно наличие достаточно сложной ядерной структуры придает $CE\nu NS$ особую значимость в ряде важнейших вопросов физики и астрофизики нейтрино, то совершенно очевидно, что адекватное знание этой структуры в виде моделей ядра и получение количественных предсказаний на их основе представляется ключевым моментом в задачах использования $CE\nu NS$ как для решения фундаментальных физических задач (детектирование взрывов сверхновых звезд и т. п.), так и в практической плоскости (мониторинг промышленных атомных реакторов и т. п.).

Пример такого сорта вычислений на базе современных ядерных моделей представлен в работах [47, 77]. Были вычислены как полные сечения, так и ожидаемые скорости счета событий, обусловленные когерентным и некогерентным рассеянием нейтрино (канал нейтрального тока) на изотопах ^{40}Ag и ^{132}Xe при энергиях нейтрино $E < 100$ МэВ. Когерентный канал описывался переходом $0_{gs}^+ \rightarrow 0_{gs}^+$, который существенным образом доминировал над некогерентным, которому отвечал ядерный переход $0_{gs}^+ \rightarrow J_f$. С использованием распределения Ферми–Дирака для энергетических спектров SN-нейтрино был вычислен ожидаемый отклик вышеуказанных изотопов на возможный нейтринный сигнал от SN-взрыва [47]. Аналогичные ядерно-модельные расчеты вероятностей детектирования нейтринного и антинейтринного сигналов от возможного взрыва сверхновой для других мишеней от ^4He до ^{208}Pb были представлены в работе [77]. Отметим, что в этих работах подразумевалось (без должного обоснования), что когерентное упругое рассеяние нейтрино и антинейтрино на ядрах описывается одними и теми же формулами.

Другой подход, основанный на теории ферми-жидкости, был применен в работе [78] для оценки сечений упругого и неупругого рассеяния нейтрино на нуклонах, находящихся в протяженной ядерной среде. Сечения были рассчитаны для рассеяния нейтрино на тяжелых ядрах при энергиях ниже 50 МэВ в терминах динамических формфакторов. Эти сечения согласуются с результатами других, гораздо более сложных ядерных моделей.

Тщательные ядерно-модельные вычисления дифференциальных и полных сечений рассеяния нейтрино (канал нейтрального тока) на наиболее распространенном изотопе ксенона были проведены в работе [79]. Эти расчеты были сделаны в модели ядерных оболочек для упругого рассеяния и в квазичастичном приближении случайных фаз (QRPA) как для упругого, так и для неупругого рассеяния. Были также оценены усредненные сечения для солнечных ^8B -нейтрино и нейтрино от сверхновых [79].

В работе [64] были изучены возможности эксперимента COHERENT в вопросе определения и исследования важной характеристики ядерной структуры — нейтронного ядерного формфактора. Ядерные формфакторы в [64] определены как фурье-преобразования плотностей зарядовых распределений

в ядре:

$$F_{n,p}(q^2) = \frac{1}{N_{n,p}} \int \rho_{p,n}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r}, \quad (8.1)$$

при этом не предполагается, что $F_p = F_n$. Эти ядерные формфакторы могут быть представлены в виде разложения по моментам распределений зарядовой плотности [41]

$$F_{p,n}(q^2) \approx 1 - \frac{q^2}{3!} \langle R_{p,n}^2 \rangle + \frac{q^4}{5!} \langle R_{p,n}^4 \rangle - \frac{q^6}{7!} \langle R_{p,n}^6 \rangle + \dots, \quad (8.2)$$

где k -й момент определяется как

$$\langle R_{p,n}^k \rangle = \frac{\int \rho_{p,n}(\mathbf{r}) |\mathbf{r}|^k d^3\mathbf{r}}{\int \rho_{p,n}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}. \quad (8.3)$$

Авторами [64] были проведены расчеты на основе современной модели деформированных ядерных оболочек (DSM). Для вычисления формфакторов ядер ^{127}I и ^{133}Cs было использовано эффективное взаимодействие [80] и пространство состояний сферических орбиталей $0g_{7/2}$, $1d_{5/2}$, $1d_{3/2}$, $2s_{1/2}$ и $0h_{11/2}$ на основе заполненного кора ^{100}Sn . Были учтены шесть внутренних конфигураций для ^{127}I и три — для ^{133}Cs . Этого оказалось достаточно для адекватного воспроизведения наиболее важных характеристик этих изотопов. Было проведено сравнение между расчетами в DSM-подходе и широко используемыми аппроксимациями формфакторов Хельма [81], симметризованного Ферми [82] и Кляйна–Нистранда [83].

Как известно, приближенный подход Хельма основан на свертке двух ядерных плотностей: одна — равномерная плотность с радиусом обрезания R_0 (дифракционный радиус), характеризующим внутреннюю структуру ядра, другая плотность ассоциирована с гауссовым спадом распределения на границе ядра и выражена в терминах толщины поверхности s ($s = 0,9$ следует из данных мюонной спектроскопии):

$$F_{\text{Helm}}(q^2) = 3 \frac{j_1(qR_0)}{qR_0} e^{-(qs)^2/2}, \quad (8.4)$$

где $j_1(x) = \sin(x)/x^2 - \cos(x)/x$ — сферическая функция Бесселя 1-го порядка. Первые три момента в этом случае можно выразить аналитически [52] как

$$\begin{aligned} \langle R_n^2 \rangle &= \frac{3}{5} R_0^2 + 3s^2, \\ \langle R_n^4 \rangle &= \frac{3}{7} R_0^4 + 6R_0^2 s^2 + 15s^4, \\ \langle R_n^6 \rangle &= \frac{1}{3} R_0^6 + 9R_0^4 s^2 + 63R_0^2 s^4 + 105s^6. \end{aligned} \quad (8.5)$$

На основе общепринятого распределения Ферми (или Саксона–Вудса) зарядовой плотности симметризованный формфактор Ферми (SF) согласно [82] имеет вид

$$F_{\text{SF}}(q^2) = \frac{3}{qc[(qc)^2 + (\pi qa)^2]} \left[\frac{\pi qa}{\sinh(\pi qa)} \right] \times \left[\frac{\pi qa \sin(qc)}{\tanh(\pi qa)} - qc \cos(qc) \right], \quad (8.6)$$

где параметры, выраженные в фемтометрах,

$$c = 1,23A^{1/3} - 0,60 \quad \text{и} \quad a = 0,52, \quad (8.7)$$

имеют смысл половины радиуса плотности и «размытости» (diffuseness). Толщина поверхности ядра в этом случае параметризуется в виде соотношения $t = 4a \ln 3$ [84]. Первые три момента, входящие в разложение (8.2), для SF-формфактора согласно [52] таковы:

$$\begin{aligned} \langle R_n^2 \rangle &= \frac{3}{5}c^2 + \frac{7}{5}(\pi a)^2, \\ \langle R_n^4 \rangle &= \frac{3}{7}c^4 + \frac{18}{7}(\pi a)^2c^2 + \frac{31}{7}(\pi a)^4, \\ \langle R_n^6 \rangle &= \frac{1}{3}c^6 + \frac{11}{3}(\pi a)^2c^4 + \frac{239}{15}(\pi a)^4c^2 + \frac{127}{5}(\pi a)^6. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Имеется также формфактор Кляйна–Нистранда (KN), который формально следует из свертки юкавского потенциала с размерным параметром $a = 0,7$ фм с распределением Саксона–Вудса, аппроксимированного жесткой сферой с радиусом R_A . В результате [83] получается

$$F_{\text{KN}}(q^2) = 3 \frac{j_1(qR_A)}{qR_A} \frac{1}{1 + (qa)^2}, \quad (8.9)$$

где соответствующий среднеквадратичный радиус выглядит так:

$$\langle R^2 \rangle_{\text{KN}} = \frac{3}{5}R_A^2 + 6a^2.$$

На рис. 19 из [64] показаны формфакторы, вычисленные в DSM-подходе, и параметризации формфакторов Хельма, SF и KN. Видно, что приближение $F_p = F_n$ не является, вообще говоря, всегда хорошим, поскольку как минимум экстремумы формфакторов протонов F_p и нейтронов F_n расположены при различных значениях переданного 3-импульса.

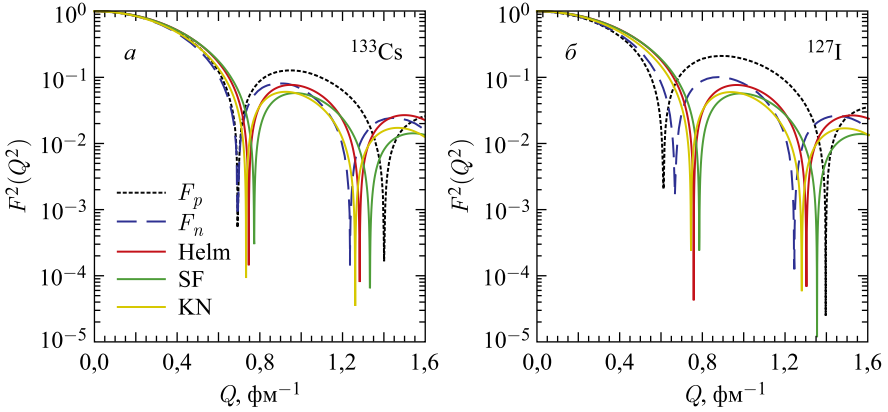


Рис. 19. Слабые протонные и нейтронные формфакторы ядер ^{133}Cs (а) и ^{127}I (б) как функции переданного импульса $q = Q$, вычисленные в DSM-подходе. Для сравнения показаны формфакторы Хельма, SF- и KN-формфакторы. Из работы [64]

В работе [64] показано, что проведенные вычисления, опирающиеся на учет деформаций рассмотренных ядер, заметно лучше соответствуют данным $\text{CE}\nu\text{NS}$, поскольку значительная порция теоретических неопределенностей обусловлена именно нейтронным ядерным формфактором. Уменьшение этой неопределенности крайне важно для надежного анализа данных и получения прецизионных результатов [64].

На важность когерентного нейтрино-ядерного упругого рассеяния в канале нейтральных токов для измерения и изучения электрослабых формфакторов для большого числа различных ядер и извлечения информации о распределении нейтронов внутри ядра и в целом нейтрон-ядерной структуры указывалось в литературе неоднократно (см., например, [26, 41, 85]).

Измерение распределения плотности нейтронов в ядрах представляет интерес с разных точек зрения. В частности, среднеквадратичный радиус нейтронов R_n и разность между R_n и среднеквадратичным радиусом протонов R_p (так называемая «нейтронная оболочка») являются важнейшими составляющими уравнения состояния ядерной материи (EOS). Последняя играет существенную роль в понимании ряда процессов, таких как свойства ядер в лабораторных экспериментах, особенности столкновений тяжелых ионов, свойства сверхтяжелых элементов, а также структура и эволюция компактных астрофизических объектов типа нейтронных звезд (см., например, [84] и ссылки там).

С использованием данных $\text{CE}\nu\text{NS}$ эксперимента COHERENT и симметризованных формфакторов Ферми и Хельма (см. (8.6) и (8.4)) в работе [84] были впервые определены среднеквадратичные радиусы распределения ней-

тронов в ядрах ^{133}Cs и ^{127}I . Практически не зависящее от моделей значение этого радиуса было получено равным $R_n = 5,5_{-1,0}^{+0,9}$ фм.

Напомним, что зарядовый среднеквадратичный (RMS) радиус распределения протона определяется (из рассеяния электронов на протонах) условием [86]

$$R^2 = -6 \frac{G(q^2)}{dq^2} \Big|_{q=0},$$

где $G(q^2)$ — электрический формфактор протона. Такое определение применимо и для ядерных формфакторов. Если формфактор параметризовать в виде ряда по q^2 (см., например, разложение (8.2)): $G(q^2) = 1 - (q^2 R^2/6) + O(q^4)$, то прецизионные данные при достаточно малых q^2 напрямую дают возможность определить $(q^2 R^2/6)$ -член, т. е. величину R .

Для ядерного нейтронного формфактора Хельма (8.4) среднеквадратичный нейтронный радиус дается верхней формулой (8.5). Другой важной величиной является разность среднеквадратичных ядерных радиусов протонов и нейтронов

$$\Delta R_{np} = R_n - R_p, \tag{8.10}$$

которая носит название «нейтронная оболочка». Информация об этой величине весьма востребована, потому что ΔR_{np} коррелирует с несколькими свойствами, характеризующими богатое нейтронами вещество (см. ссылки в [84]). Большая нейтронная оболочка предполагает больший радиус нейтронной звезды R_{NS} . Поскольку энергия связи нейтронной звезды обратно пропорциональна радиусу самой звезды R_{NS} , то чем больше R_{NS} , тем меньше энергия гравитационной связи, что может быть проверено путем наблюдения интенсивного нейтринного всплеска от взрыва сверхновой [84]. Нейтронная оболочка также связана с рядом других ядерных величин (см. обзор [87]).

В работе [84] для ядер ^{127}I и ^{133}Cs приведены значения протонных среднеквадратичных радиусов $R_p^{\text{Cs}} = \langle r_p^2 \rangle_{\text{Cs}}^{1/2} = 4,804$ фм и $R_p^{\text{I}} = \langle r_p^2 \rangle_{\text{I}}^{1/2} = 4,749$ фм, на основе которых получена оценка для нейтронной оболочки $\Delta R_{np} \simeq 0,7_{-1,1}^{+0,9}$ фм, не позволяющая утверждать факт отличия этой величины от нуля. Однако уже в 2018 г. с учетом дополнительной информации из области нарушения четности в атомных системах этим авторам [54] удалось получить более точный результат: $R_n = (5,42 \pm 0,31)$ фм. Это значение позволило впервые вычислить нейтронную оболочку цезия, $\Delta R_{np} = (0,62 \pm 0,31)$ фм, что уже отличается от нуля на 2σ -уровне [54].

Похожий анализ данных эксперимента COHERENT был проведен в работе [62], где для ядра цезия были получены несколько иные значения нейтронной оболочки: $\Delta R_{np} = 0,24$ фм совместно с величиной слабого угла Вайнберга $\sin^2 \theta_W^* = 0,21$, однако со значительной неопределенностью, которую авторы обсуждали с точки зрения возможных эффектов Новой физики [62].

Стоит особо отметить, что в работе [84] фактически впервые отмечено, что данные эксперимента COHERENT свидетельствуют о подавлении полной когерентности ядерной структуры на $2,3\sigma$ -уровне. Последующий анализ этих авторов [88], учитывающий более точное значение так называемого квенчинг-фактора из работы [66], увеличил значимость подавления полной когерентности до уровня $3,7\sigma$. Этот результат фактически однозначно подтверждает сделанное нами в [19] утверждение о важности некогерентной составляющей для анализа данных эксперимента COHERENT.

Как уже неоднократно упоминалось, сечение $CE\nu NS$ зависит от неопределенности формфактора ядра, которая в первом приближении обусловлена неточностью знания среднеквадратичного радиуса распределения плотности нейтронов в ядре. Эти неопределенности для детекторов из йодида цезия, германия, ксенона и аргона были тщательно изучены в работе [61]. Было показано, что они становятся весьма существенными, когда переданный ядру импульс достигает величины $q > 20$ МэВ/с, и практически не зависят от конкретной параметризации формфакторов этих ядер. Неопределенности больше для более легких элементов, например для аргона они составляют 11%. Авторами [61] показано, что неопределенности формфакторов не важны для $CE\nu NS$, вызванного реакторными или солнечными нейтрино (в силу более низких энергий). С учетом этих неопределенностей была сделана оценка их влияния на точность будущих измерений $CE\nu NS$ в эксперименте COHERENT, вызванных нейтрино от диффузного фона сверхновых звезд (DSNB) и атмосферных нейтрино с энергией менее гигаэлектронвольт. Было показано, что в зависимости от энергии отдачи и типа мишени относительные неопределенности в числе зарегистрированных событий могут составлять до 50%. Для DSNB и атмосферных потоков нейтрино неопределенности могут достигать значений до 7 и 16% соответственно. Было также показано, что результат поиска Новой физики с использованием данных $CE\nu NS$ весьма сильно зависит от неопределенностей ядерного формфактора распределения нейтронов, которые, если их неправильно учитывать, могут привести к ошибочной идентификации новых физических сигналов [61].

За время подготовки данного обзора были опубликованы новые работы в направлении тщательного учета ядерной структуры в процессах рассеяния нейтрино на ядрах [89,90].

8.1.3. $CE\nu NS$ и прямой поиск темной материи. В первую очередь связь между $CE\nu NS$ и наземными экспериментами, нацеленными на прямой поиск темной материи (DM), вызвана единым стремлением наблюдать сигнал, обусловленный выделением в детекторе энергии от отдачи ядра-мишени вследствие взаимодействия этого ядра с нейтрино или DM-частицей. По этой причине, если цель эксперимента — прямой поиск событий от взаимодействия частиц темной материи с веществом мишени низкопорогового высокочувствительного детектора (расположенного глубоко под землей), то любой физиче-

ский процесс, также вызывающий только отдачу ядра-мишени, становится неустранимым фоном. Действительно, в настоящее время поведение ядер отдачи от $CE\nu NS$ практически неотличимо от того, как будут вести себя ядра отдачи после их (ожидаемого) взаимодействия с массивными нейтральными частицами темной материи (WIMP).

Поскольку современная тенденция в направлении увеличения чувствительности экспериментов по прямому поиску темной материи в земных условиях связана с борьбой за понижение расположения так называемых кривых исключения (exclusion curves) в плоскости DM-сечение – DM-масса*, то, очевидно, очень скоро прогресс в этом направлении «наткнется» как раз на неизбежные сигналы (в виде отдачи ядер) от солнечных, атмосферных (земных, реакторных и т. п.) нейтрино (рис. 20).

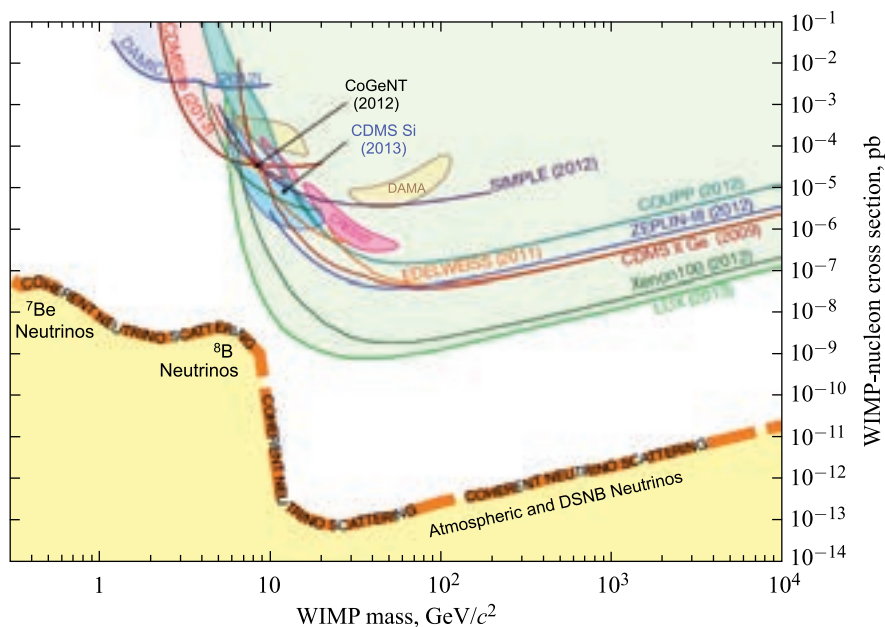


Рис. 20. Иллюстрация роли «нейтринной подложки» для перспектив прямого детектирования частиц темной материи. Из работы [93]

Поэтому без дополнительной информации, позволяющей в детекторе темной материи отделить фоновый нейтринный $CE\nu NS$ -сигнал от искомого (истинного) WIMP-сигнала, у прямого поиска темной материи, похоже, нет будущего. Или, более мягко, возникают заметные сложности при интерпретации

*За малым исключением в лице, например, коллаборации DAMA/LIBRA [91,92].

результатов таких экспериментов в терминах ограничений на массу и сечение WIMP-взаимодействия. Таким образом, $SE\nu NS$ — это предел чувствительности для будущего (традиционного) прямого поиска темной материи (см., например, [44, 93]).

Здесь следует, однако, заметить, что уже много лет длится соревнование на предмет получения наилучшей кривой исключения, в котором принимают участие практически все эксперименты, так или иначе нацеленные на прямой и косвенный поиск темной материи в наземных условиях. Однако это соревнование, к сожалению, имеет очень мало общего с реальной возможностью обнаружения DM-частиц. Настоящие частицы темной материи обладают эксклюзивной галактической сигнатурой — годовой модуляцией сигнала, которая сегодня достижима только в экспериментах по прямому DM-детектированию. Эту сигнатуру никак нельзя обнаружить с помощью коллайдера, ускорителя или в экспериментах по непрямому поиску темной материи. Поэтому для доказательства принадлежности обнаруженного (если такое случится) на коллайдере DM-кандидата к числу настоящих DM-частиц обязательно необходимо зарегистрировать его в эксперименте по прямому DM-детектированию и продемонстрировать его галактическую сущность [94]. Более того, эта эксклюзивная галактическая DM-сигнатура — годовая модуляция сигнала — становится неизбежной необходимостью любого DM-эксперимента, поскольку в настоящее время представляется единственной реальной возможностью разделения сигнала взаимодействия DM-частиц от нейтринного (фонового) $SE\nu NS$ -сигнала в любом наземном DM-детекторе [94].

Однако интересная возможность (хотя бы временно) обойти эту «угрозу» была предложена в работе [95], где было проведено тщательное моделирование ожидаемых DM- и $SE\nu NS$ -сигналов с учетом результатов анализа достигнутых энергетических разрешений и порогов, а также бета- и гамма-фонов. В результате авторы [95] утверждали, что за счет различия в поведении $SE\nu NS$ - и DM-спектра для масс DM-частиц, больших $15 \text{ ГэВ}/c^2$, и экспозиции в $10 \text{ кг} \cdot \text{лет}$ и более удастся найти возможность исследования WIMP-нуклонного взаимодействия ниже нейтринной $SE\nu NS$ -подложки. Наибольших успехов в таком направлении можно достичь, считают авторы [95], если надежно измерить $SE\nu NS$ -спектр от атмосферных и солнечных нейтрино (что потребует $50 \text{ кг} \cdot \text{лет}$ экспозиции) и рассматривать этот спектр как уже устранимый (вычитаемый) фон [95].

Вопрос о том, как высоко на самом деле может быть расположена обусловленная $SE\nu NS$ «нейтринная подложка», или нейтринное дно, крайне важен для перспектив прямого детектирования темной материи. Зависимость расположения этого нейтринного дна от современных моделей Новой физики в секторе нейтрино была изучена в работе [55]. Было, в частности, обнаружено, что в случае скалярных переносчиков взаимодействия (медиаторов)

Новой физики эта нейтринная подложка может подняться вверх как минимум на порядок в области малых масс темной материи (ниже $10 \text{ ГэВ}/c^2$). В случае векторных медиаторов Новой физики это увеличение возможно в два раза. Поэтому, как утверждают авторы [55], сигнал прямого обнаружения частиц темной материи в области малых масс требует особо тщательного анализа на предмет надежного превышения нейтринного фона.

Идея использования установок, изначально нацеленных на прямое детектирование частиц темной материи, для поиска $CE\nu NS$ рассматривалась ранее, например в работе [96]. Она базируется на том, что сигнатуры (по энергии отдачи ядер) когерентного упругого взаимодействия нейтрино и WIMP-ядра будут очень похожи. Были сделаны оценки того, как детектор темной материи следующего поколения может обнаружить нейтронно-ядерное когерентное рассеяние и т. п. [96].

Наоборот, в работе [97] были изучены возможности экспериментов, направленных изначально на обнаружение $CE\nu NS$, в вопросе детектирования и исследования новых легких слабовзаимодействующих состояний, таких как частицы темной материи с массой менее $\text{ГэВ}/c^2$ из различных расширений Стандартной модели. Было показано, что предлагаемые эксперименты по когерентному рассеянию нейтрино, такие как COHERENT в SNS и $CE\nu NS$ во FNAL, будут иметь чувствительность к такого сорта состояниям, заметно превышающую уже существующие пределы [97].

В работе [98] данные экспериментов TEXONO и COHERENT были использованы для получения новых ограничений на «фотонный портал», в котором темный фотон кинематически смешивается с обычным фотоном Стандартной модели. При этом анализировались события по энергии отдачи электронов в реакторном эксперименте TEXONO и события по энергии отдачи ядер в эксперименте COHERENT. В результате анализа было показано, что совместные ограничения дают предел на массу таких частиц темной материи менее $30 \text{ МэВ}/c^2$ [98].

Возможность рождения нового фермиона (с МэВ-ной массой) в когерентном упругом нейтрино-ядерном рассеянии была рассмотрена в работе [56]. Такой фермион мог бы быть частицей темной материи и/или иметь отношение к вопросу образования масс у легких нейтрино в Стандартной модели. Было рассчитано влияние учета этого эффекта на измеряемый спектр отдачи нуклона. Из данных эксперимента COHERENT были получены ограничения на массу и параметры связи такого фермиона с нейтрино и кварками [56].

8.1.4. Свойства нейтрино и $CE\nu NS$. Общепринято считать, что нейтрино являются нейтральными частицами, однако пока нет серьезных теоретических и экспериментальных запретов на то, что они могут иметь очень маленький электрический заряд и у них есть (электрические) зарядовые радиусы (см., например, [99]). В теории электромагнитных нейтринных взаимодействий зарядовые радиусы нейтрино определены для массовых состояний нейтрино [99].

Рассматриваются также эффективные зарядовые радиусы $\langle r_{\nu_\ell}^2 \rangle$ [57] для нейтрино фиксированного аромата ν_ℓ ($\ell = e, \mu, \tau$), вклад которых в упругое рассеяние ν_ℓ на заряженных частицах можно выразить в виде сдвига величины слабого угла смешивания Вайнберга θ_W . Этот сдвиг пропорционален квадрату массы W -бозона, m_W [37, 100]:

$$\sin^2 \theta_W \rightarrow \sin^2 \theta_W \left(1 + \frac{1}{3} m_W^2 \langle r_{\nu_\ell}^2 \rangle \right). \quad (8.11)$$

Согласно [57] в Стандартной модели имеются предсказания для эффективных зарядовых радиусов нейтрино, обусловленных вкладами петлевых диаграмм высшего порядка

$$\langle r_{\nu_\ell}^2 \rangle_{\text{SM}} = -\frac{G_F}{2\sqrt{2}\pi^2} \left[3 - 2 \ln \left(\frac{m_\ell^2}{m_W^2} \right) \right],$$

где m_ℓ — масса заряженного лептона. В численном виде [57] эти предсказания таковы:

$$\{ \langle r_{\nu_e}^2 \rangle, \langle r_{\nu_\mu}^2 \rangle, \langle r_{\nu_\tau}^2 \rangle \}_{\text{SM}} = -\{0,83, 0,48, 0,30\} \cdot 10^{-32} \text{ см}^2. \quad (8.12)$$

В работе [57] было исследовано влияние зарядовых радиусов нейтрино на величину сечения когерентного упругого нейтрино-ядерного рассеяния [46, 101], и на основе анализа данных эксперимента COHERENT [8, 11] были получены ограничения на величины этих нейтринных радиусов. В основе подхода [57] лежало выражение для дифференциального сечения процесса $\nu_\ell + A \rightarrow \sum_{\ell'} \nu_{\ell'} + A$ на бесспиновом ядре A в приближении малости кинетической энергии отдачи ядра, $T_A \ll E_\nu$:

$$\frac{d\sigma_{\nu_\ell A}}{dT_A}(E_\nu, T_A) \simeq \frac{G_F^2 M}{\pi} \left(1 - \frac{MT_A}{2E_\nu^2} \right) \left\{ [(g_V^p - \tilde{Q}_{\ell\ell})ZF_Z(q^2) + g_V^n NF_N(q^2)]^2 + Z^2 F_Z^2(q^2) \sum_{\ell' \neq \ell} |\tilde{Q}_{\ell'\ell}|^2 \right\}, \quad (8.13)$$

где величина $\tilde{Q}_{\ell\ell'} = (2/3) m_W^2 \sin^2 \theta_W \langle r_{\nu_{\ell\ell'}}^2 \rangle$ явно учитывает вклад недиагонального эффективного зарядового радиуса нейтрино $\langle r_{\nu_{\ell\ell'}}^2 \rangle$, T_A — кинетическая энергия отдачи ядра; E_ν — энергия нейтрино, $g_V^p = (1/2) - 2 \sin^2 \theta_W$, $g_V^n = -(1/2)$. В формуле (8.13) выделены диагональные зарядовые радиусы $\langle r_{\nu_\ell}^2 \rangle \equiv \langle r_{\nu_{\ell\ell}}^2 \rangle$, которые дают вклад путем добавки $\tilde{Q}_{\ell\ell}$ к слабой векторной константе связи g_V^p , что эквивалентно упомянутому выше сдвигу (8.11).

Путем тщательной подгонки данных эксперимента COHERENT (с учетом временной зависимости этих данных, неопределенностей распределения

нейтронов в ядра ^{133}Cs и ^{127}I и т. п.) в работе [57] были получены ограничения как для диагональных эффективных зарядовых радиусов нейтрино $\langle r_{\nu_e}^2 \rangle$ и $\langle r_{\nu_\mu}^2 \rangle$, так и для переходных зарядовых радиусов $\langle r_{\nu_{e\mu}}^2 \rangle$, $\langle r_{\nu_{e\tau}}^2 \rangle$ и $\langle r_{\nu_{\mu\tau}}^2 \rangle$. Так, например, для зарядового радиуса мюонного нейтрино было получено ограничение

$$-8 \cdot 10^{-32} < \langle r_{\nu_\mu}^2 \rangle < 11 \cdot 10^{-32} \text{ см}^2.$$

Впервые были получены ограничения (90%-й уровень достоверности) на переходные радиусы в виде

$$(|\langle r_{\nu_{e\mu}}^2 \rangle|, |\langle r_{\nu_{e\tau}}^2 \rangle|, |\langle r_{\nu_{\mu\tau}}^2 \rangle|) < (22, 38, 27) \cdot 10^{-32} \text{ см}^2.$$

Эта информация представляет интерес для проверки ряда моделей Новой физики, в которых имеются механизмы генерации переходных эффективных зарядовых радиусов нейтрино [102]. Похожие исследования были проведены в работе [101].

Легкие стерильные нейтрино были введены в качестве возможного объяснения нейтринных осцилляций на короткой базе при $\Delta m^2 \sim 1 \text{ эВ}^2$. В работе [103] был предложен эксперимент по прямому поиску осцилляций активных нейтрино в стерильные нейтрино на основе когерентного упругого рассеяния нейтрино на ядрах. Как известно, характер осцилляции нейтрино главным образом зависит от энергии нейтрино и пройденного расстояния. Поскольку энергии начальных нейтрино не могут быть реконструированы в результате $\text{CE}\nu\text{NS}$, то в основу регистрации упомянутых осцилляций (в моде исчезновения активных нейтрино) было предложено использовать явным образом зависимость от расстояния, которое хорошо определяется местоположением мишени относительно ускорительного (например, от SNS) источника нейтрино. По мнению авторов [103], такой эксперимент мог бы окончательно доказать существование стерильных нейтрино и установить ограничения на их параметры смешивания.

Поиск стерильных нейтрино в отмеченной выше области масс путем измерения скорости счета $\text{CE}\nu\text{NS}$ -событий от импульсного источника нейтрино (типа SNS) был предложен также в работе [60]. Поскольку $\text{CE}\nu\text{NS}$ является универсальным процессом для всех активных типов нейтрино, то таким путем возможно измерение общего нейтринного потока в Стандартной модели. Используя измерения на разных базовых расстояниях и учитывая временную информацию о событиях, можно значительно уменьшить систематические неопределенности и независимо измерять потоки ν_μ -, ν_e - или $\bar{\nu}_\mu$ -нейтрино. Авторами [60] было показано, что CsI-детектор массой 100 кг будет чувствителен к значительной области пространства параметров легкого стерильного нейтрино.

Возможности современных и будущих $\text{CE}\nu\text{NS}$ -экспериментов в исследовании электромагнитных взаимодействий нейтрино были изучены, например,

в работе [104]. Приведем некоторые полезные соотношения из этой работы. В простейшей $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ модели майорановский переходный (из массового состояния i в массовое состояние $j \neq i$) магнитный момент нейтрино имеет вид [99, 105]

$$\mu_{ij}^M = -\frac{3ieG_F}{16\pi^2\sqrt{2}}(m_{\nu i} + m_{\nu j}) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \text{Im} \left[U_{\alpha i}^* U_{\alpha j} \left(\frac{m_{l\alpha}}{M_W} \right)^2 \right], \quad (8.14)$$

где G_F — константа Ферми; $m_{\nu i}$ — масса массового состояния нейтрино ν_i ; $U_{\alpha i}$ — элемент матрицы смешивания; $m_{l\alpha}$ и M_W — массы заряженного лептона и W -бозона. Эффективный магнитный момент нейтрино, $(\mu_\nu^F)^2$, который в принципе может быть наблюдаем экспериментально, выражается через матрицу магнитных моментов нейтрино и амплитуды положительных и отрицательных состояний спиральности нейтрино [104].

Для реакторных экспериментов (с антинейтрино) имеется эффективный майорановский переходный момент (в базисе нейтринного аромата) [106], обозначенный в работе [104] как $(\mu_{\nu, \text{reactor}}^F)^2$. Он, вообще говоря, отличается от аналогичного параметра, измеряемого в ускорительной постановке, поскольку в последнем случае имеется возможность различить так называемые прямые и задержанные нейтринные потоки [57, 107]. Здесь авторы [104] предлагают использовать как прямые $(\mu_{\nu, \text{prompt}}^F)^2$, так и задержанные $(\mu_{\nu, \text{delayed}}^F)^2$ эффективные переходные моменты майорановских нейтрино.

Идея анализа основывалась на том, что в $SE\nu NS$ -эксперименте, обладающем достаточно низким порогом по энергии отдачи (ниже кэВ), вклад нестандартных электромагнитных взаимодействий нейтрино может не только быть заметным, но и доминировать [108], что, в свою очередь, должно приводить к искажению спектра отдачи ядер, ожидаемого в Стандартной модели. Поскольку стандартное слабое взаимодействие сохраняет спиральность, а электромагнитное взаимодействие идет с нарушением спиральности, то их вклады можно сложить на уровне сечений. Поэтому в анализе данных [104] была использована сумма сечений

$$\left(\frac{d\sigma}{dT_A} \right)_{\text{полное}} = \left(\frac{d\sigma}{dT_A} \right)_{\text{SM}} + \left(\frac{d\sigma}{dT_A} \right)_{\text{EM}}.$$

Далее для дифференциального $SE\nu NS$ -сечения рассеяния нейтрино с энергией E_ν на ядре (A, Z) была использована «стандартная» формула [1, 35, 79]:

$$\left(\frac{d\sigma}{dT_A} \right)_{\text{SM}} = \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left[G_V^2 \left(1 - \frac{m_A T_A}{2E_\nu^2} \right) + G_A^2 \left(1 + \frac{m_A T_A}{2E_\nu^2} \right) \right] F^2(q^2), \quad (8.15)$$

где T_A — кинетическая энергия отдачи ядра; m_A — масса ядра-мишени с Z протонами и $N = A - Z$ нейтронами. Векторные G_V и аксиал-векторные G_A вклады [109] были заданы формулами

$$G_V = [2(g_u^L + g_u^R) + (g_d^L + g_d^R)] Z + [(g_u^L + g_u^R) + 2(g_d^L + g_d^R)] N,$$

$$G_A = [2(g_u^L - g_u^R) + (g_d^L - g_d^R)] (\delta Z) + [(g_u^L - g_u^R) + 2(g_d^L - g_d^R)] (\delta N),$$

где $(\delta Z) = Z_+ - Z_-$ и $(\delta N) = N_+ - N_-$ и Z_+ (N_+), Z_- (N_-) — полное число протонов (нейтронов) со спином вверх и вниз [7]. В анализе [104] для ядерного формфактора $F(q^2)$ была использована симметризованная параметризация Ферми (8.6) [82], а левые и правые константы связи u - и d -кварков с Z -бозоном взяты с учетом радиационных поправок [110]. Электромагнитное сечение параметризовалось в работе [104] с помощью выражения

$$\left(\frac{d\sigma}{dT_{qA}} \right)_{\text{EM}} = \frac{\pi a_{\text{EM}}^2 \mu_\nu^2 Z^2}{m_e^2} \left(\frac{1 - T_A/E_\nu}{T_A} \right) F^2(q^2). \quad (8.16)$$

На основе тщательного статистического анализа имеющегося спектра данных с помощью формулы (8.16) и выражения (8.15) были получены ограничения на упомянутые выше эффективные майорановские переходные моменты и далее на более фундаментальные параметры теории. Конкретные детали можно найти в самой работе [104]. Было показано, что будущие эксперименты $\text{CE}\nu\text{NS}$ с низкороговыми детекторами могут заметно улучшить имеющиеся пределы на компоненты переходного магнитного момента майорановского нейтрино, полученные из данных Vorexino [104]. Роль $\text{CE}\nu\text{NS}$ в вопросе получения более точных ограничений на значение магнитного момента нейтрино обсуждалась также в работах [101, 111].

Интересная возможность использовать процесс когерентного тормозного излучения на ядре $\nu A \rightarrow A\nu + \gamma$ для оценки массы нейтрино путем экспериментального определения положения конца спектра фотонов была предложена в работе [58]. К сожалению, как показали авторы, большая требуемая мощность монохроматического источника нейтрино и/или большая требуемая масса детектора не позволяют этому методу конкурировать с традиционными измерениями конечной точки электронного спектра при ядерном бета-распаде. Интересно отметить, что согласно авторам [58] процесс $\nu A \rightarrow A\nu + \gamma$ чувствителен к природе нейтрино, т. е. он, в принципе, различается для дираковских и майорановских нейтрино. Однако принципиальное различие в спектрах фотонов для этих случаев имеет порядок m_ν/E_ν , что крайне мало, несмотря на то, что нейтрино в конечном состоянии оказывается практически в покое. Таким образом, «теорема о неразличимости Дирака–Майораны» остается неизменной, даже если условие «неразличимости» в виде $E_\nu \gg m_\nu$

применяется для начального состояния и может не выполняться в конечном состоянии ($E_\nu \simeq m_\nu \simeq 0$) [58].

Слабый угол смешивания Вайнберга $\sin^2 \theta_W$ является одним из основных параметров Стандартной модели, и он измерен с большой точностью на Z -полусе [110]. При очень низких переданных импульсах были также проведены измерения этой важной величины, хотя точность их заметно ниже [112]. Основные результаты в этом энергетическом диапазоне получены из измерений слабых зарядов ядер и нарушения четности в атомах. Процесс когерентного упругого рассеяния нейтрино на ядрах при низких энергиях дает новую независимую информацию для измерения слабого угла смешивания в этой области. В работе [113] показано, что эксперименты $CE\nu NS$ имеют заметный потенциал в направлении достижения высокой точности определения «низкоэнергетического» значения $\sin^2 \theta_W$ при условии снижения систематических неопределенностей. Аналогичное исследование выполнено в работах [63, 114].

Влияние данных эксперимента COHERENT на точность определения $\sin^2 \theta_W$ обсуждалось в работе [54], где, в частности, на основе этих данных и данных по нарушению атомной четности (APV) на ядрах цезия для процессов с низким переданным импульсом дается новый результат: $\sin^2 \theta_W = 0,239_{-0,007}^{+0,006}$, который вполне сравним с соответствующими предсказаниями Стандартной модели: $\sin^2 \theta_W = 0,23857(5)$.

8.1.5. Новая физика, или нестандартные нейтринные взаимодействия и $CE\nu NS$. Вопрос о нестандартных нейтринных взаимодействиях (NSI) обсуждается в литературе давно и широко. Одним из примеров постоянной активности в направлении глобального анализа нейтринных (в основном осцилляторных) данных с целью получения ограничений на NSI могут служить, например, работы [63, 101, 114, 115].

По существу NSI являются проявлением в секторе нейтрино (или, более общее, нейтральных лептонов) так называемой Новой физики — т. е. частиц и взаимодействий, которым нет места в рамках Стандартной модели. Обнаружение $CE\nu NS$ в эксперименте COHERENT только усилило интерес к NSI, поскольку фактически дало совершенно новый (хотя и ожидаемый) источник информации о нейтрино и их взаимодействии с веществом. Достаточно прецизионное измерение спектра $CE\nu NS$ в разумное время представляется вполне реальной перспективой. При этом очевидно, что наличие любых новых фундаментальных взаимодействий нейтрино с веществом может увеличивать, уменьшать или заметно искажать форму спектра и частоту регистрации событий $CE\nu NS$.

В работе [116] был исследован вопрос о взаимодополняемости ускорительных и реакторных экспериментов по $CE\nu NS$ с точки зрения получения значимых ограничений на нестандартные нейтринные взаимодействия. Было,

в частности, показано, что одновременный анализ результатов таких экспериментов, в каждом из которых использовались по меньшей мере два различных материала мишени, может дать существенное улучшение точности анализа и снять вырождение между диагональными по аромату нейтрино NSI, которые плохо поддаются ограничению в осцилляторных нейтринных экспериментах. Так, рассматривая четыре типа таких параметров, авторы утверждали, что все они могут быть измерены с достаточно высокой точностью в экспериментах следующего поколения [116].

В работе [117] исследованы имеющиеся ограничения и будущая чувствительность экспериментов по когерентному упругому нейтрино-ядерному рассеянию к различным расширениям Стандартной модели за счет введения дополнительного Z' -бозона (дополнительные нейтральные токи). Влияние Z' -бозона сводится к переопределению констант взаимодействия нейтрино с кварками, g_V и g_A , путем учета массы Z' -бозона и угла его смешивания с Z -бозоном Стандартной модели. Были проанализированы результаты нейтринных экспериментов на фиксированной мишени, с нарушением четности в атомах, экспериментов с солнечными нейтрино и др. Авторами было показано, что имеется значительная зависимость этих ограничений от не-универсальности связи Z' -бозона с частицами Стандартной модели, а также важность для такого типа анализа данных от $CE\nu NS$ [117].

Примерно такого же типа анализ, однако для малых (меньше 50 МэВ) и больших значений массы нового промежуточного Z' -бозона, был проведен в работе [118]. Результаты оказались достаточно чувствительными к массе этого бозона, и в случае больших масс наблюдалось вырождение между параметрами Новой физики, что сильно ослабляло значимость полученных ограничений [118].

В качестве примера оценки NSI из данных COHERENT остановимся несколько подробнее на работе [119]. Обычно для анализа $CE\nu NS$ -процессов на предмет присутствия Новой физики используется понятие нестандартных нейтринных взаимодействий (NSI), которое можно параметризовать в виде эффективного 4-фермионного лагранжиана взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{NSI}} = -\sqrt{2}G_F \sum_{q=u,d} \bar{\nu}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_j \bar{q} \left(\epsilon_{ij}^{qV} + \gamma_5 \epsilon_{ij}^{qA} \right) q. \quad (8.17)$$

Здесь $\epsilon_{ij}^{q(V,A)}$ — свободные параметры, которые обычно уже ограничены в той или иной степени данными по нейтринному рассеянию и нейтринным осцилляциям, $q = u, d$ (см., например, [120]). Эти параметры задают интенсивность новых нейтринных взаимодействий по отношению к G_F . В максимально общем виде NSI можно задать как совокупность всех лоренц-инвариантных взаимодействий нейтрино с кварками первого поколения без производных

(см., например, [121]):

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}^{\text{NSI}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_X \bar{\nu} \Gamma^X \nu \bar{q} \Gamma_X (C_X^q + i\gamma_5 D_X^q) q. \quad (8.18)$$

Здесь $\Gamma^X = \{\mathbb{I}, i\gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5, \sigma^{\mu\nu}\}$ — полный набор 4×4 -матриц, где $\sigma^{\mu\nu} = i[\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$.

Более или менее стандартная процедура перехода от нейтрино-кваркового лагранжиана взаимодействия к эффективному взаимодействию нейтрино с ядром начинается с перехода от кварков к нуклонам путем усреднения кварковых токов по нуклонным состояниям, а затем осуществляется переход от нуклонов к ядру путем усреднения нуклонных токов по ядерным состояниям и введения соответствующих ядерных формфакторов (подробнее см., например, [119, 122]). В итоге нейтрино-ядерный эффективный лагранжиан нестандартных взаимодействий из работы [119] принимает вид

$$\mathcal{L}_{\nu N} \sim \sum_{X=S,V,T} \bar{\nu} \Gamma_X \nu \bar{N} C_X \Gamma_X N + \sum_{(X,Y)=(P,S),(A,V)} \bar{\nu} \Gamma_X \nu \bar{N} i D_X \Gamma_Y N, \quad (8.19)$$

где коэффициенты C_X и D_X , параметризующие эффективное νN -взаимодействие, определены (кварковыми) параметрами C_X^q и D_X^q из формулы (8.18) и имеют вид

$$\begin{aligned} C_S &= Z \sum_{q=u,d} C_S^q \frac{m_p}{m_q} f_{T_q}^p + (A-Z) \sum_{q=u,d} C_S^q \frac{m_n}{m_q} f_{T_q}^n, \\ C_V &= Z (2C_V^u + C_V^d) + (A-Z) (C_V^u + 2C_V^d), \\ C_T &= Z (\delta_u^p C_T^u + \delta_d^p C_T^d) + (A-Z) (\delta_u^n C_T^u + \delta_d^n C_T^d). \end{aligned} \quad (8.20)$$

Численные значения структурных параметров из последней строки таковы [119]: $\delta_u^p = 0,54$, $\delta_d^p = -0,23$, $\delta_u^n = -0,23$, $\delta_d^n = 0,54$. Выражения для коэффициентов D_P получаются из C_S заменой C_S^q на D_P^q , тогда как для D_A из C_V — заменой C_V^q на D_A^q [119]. Соотношения (8.20) связывают эффективные параметры νN -взаимодействия с константами лагранжиана фундаментального взаимодействия (8.18). Далее эти параметры авторы [119] используют в выражении для дифференциального сечения $\text{CE}\nu\text{NS}$ на ядре-мишени типа a в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^a(q^2)}{dE_r} &= \frac{G_F^2}{4\pi} m_{N_a} N_a^2 F(q^2) \left[\frac{\xi_S^2 E_r}{E_r^{\text{max}}} + \xi_V^2 \left(1 - \frac{E_r}{E_r^{\text{max}}} - \frac{E_r}{E_\nu} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \xi_T^2 \left(1 - \frac{E_r}{2E_r^{\text{max}}} - \frac{E_r}{E_\nu} \right) - \frac{RE_r}{E_\nu} \right], \quad (8.21) \end{aligned}$$

где $E_T^{\max} \simeq (2E_V^2)/m_{N_a}$ — максимальная энергия отдачи ядра, и выражения

$$\xi_S^2 = \frac{C_S^2 + D_P^2}{N^2}, \quad \xi_V^2 = \frac{C_V^2 + D_A^2}{N^2}, \quad \xi_T^2 = 8 \frac{C_T^2}{N^2}, \quad R = 2 \frac{C_S C_T}{N^2}$$

также неявно зависят от типа ядра-мишени a . Формула (8.21) представляет собой упрощенное выражение (4.9) из работы [121]. Именно это выражение для сечения $CE\nu NS$ (при различного рода упрощающих предположениях об относительной значимости тех или иных параметров) авторы [119] сравнивали с данными эксперимента COHERENT и получили ограничения на все значимые параметры как в однопараметрическом фите, так и при одновременной подгонке данных с двумя параметрами. Результаты были представлены в виде набора корреляционных графиков, например, в плоскостях параметров $C_S^u - C_V^d$, $C_S^u - C_T^d$, $C_V^u - C_T^d$ и т. п. [119].

Завершая свой многоплановый и тщательный анализ, авторы утверждали, что полученные результаты представляют собой наиболее строгие оценки для эффективных обобщенных нейтрино-кварковых взаимодействий в случае, когда массы переносчиков этих взаимодействий порядка 1 ГэВ/ c^2 [119].

Пользуясь случаем, отметим, что в работе [119], в которой используются *приближенные* формулы из [121], на наш взгляд, впервые в явном виде был затронут вопрос о различии между когерентным упругим νA - и $\bar{\nu} A$ -рассеянием. Главный вывод о возможности пренебрежения этим различием при достаточно разумных предположениях, например, о малости аксиально-векторного вклада или об отсутствии одновременных вкладов скалярного и тензорного NSI выглядит вполне оправданным и согласуется с точными расчетами и выводами из [20] или формулами (6.49) и (6.50).

Однако обоснование этих приближенных формул в [121] весьма сомнительно, хотя сами формулы для *бесспинового ядра* выглядят вполне традиционно:

$$\frac{d\sigma}{dT} = \frac{\sigma_{s=0}^{\text{SM}}}{M} \left(1 - \frac{T}{T_{\max}} \right), \quad (8.22)$$

$$\sigma_{s=0}^{\text{SM}} \equiv \frac{G_F^2 [N - (1 - 4s_W^2)Z]^2 F^2(q^2) M^2}{4\pi}.$$

Главная проблема в том, что авторы [121] изначально просто декларируют, что они вычисляют сечения *когерентного* νA -рассеяния (и/или $\bar{\nu} A$ -рассеяния), никак не учитывая собственно условие когерентности для ядра (т. е. неизменность его квантового состояния).

Практически это сводится к тому, что их матричный элемент $i\mathcal{M}^{ss'}(\nu A \rightarrow \nu A)$ выглядит как матричный элемент рассеяния (анти)нейтрино на бесструктурной скалярной (поскольку $J = 0$) частице, умноженный на слабый заряд

ядра $Q_W = N - (1 - 4s_W^2)Z$ и формфактор $F(q^2)$, т. е.

$$i\mathcal{M}^{ss'}(\nu A \rightarrow \nu A) = i\frac{\sqrt{2}}{2}G_F Q_W F(q^2)g_L^\nu(p_2 + k_2)^\mu \bar{v}^s(p_1)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)v^{s'}(k_1),$$

где s, s' — спиральности (анти)нейтрино. Далее стандартным образом вычисляется квадрат матричного элемента

$$|i\mathcal{M}|^2 = \sum_{ss'} |i\mathcal{M}^{ss'}|^2 = 32G_F^2 Q_W^2 F^2(q^2)(g_L^\nu)^2 M_A^2 E_\nu^2 \left(1 - \frac{T_A}{E_\nu} - \frac{M_A T_A}{2E_\nu^2}\right), \quad (8.23)$$

где, как обычно, M_A — масса ядра-мишени; E_ν — энергия нейтрино и T_A — кинетическая энергия отдачи ядра. После небольших упрощений из (8.23) получается выражение (8.22).

Справедливости ради надо отметить, что авторы [121] обсуждают случай, когда ядро имеет отличный от нуля спин, а νA -рассеяние отличается от $\bar{\nu} A$ -рассеяния. Они считают, что наличие ненулевого спина ядра, $J \neq 0$, имеет весьма незначительное влияние на формулу для сечения, когда $J = 0$. Объясняют они это тем, что (тяжелое) ядро содержит много фермионов со спином $1/2$ (протонов и нейтронов), которые, образуя ядро, практически компенсируют спины друг друга. Если один протон перевернет свой спин, то спин ядра может измениться, например, с 0 на 1. Поскольку авторы считают, что когерентное νA -рассеяние нечувствительно к состоянию одного протона внутри ядра, то они делают вывод (в оригинале используется слово «подозревают»), что не должно быть значительной разницы между случаями с нулевым и ненулевым спинами при условии, что сам ядерный спин не очень велик.

Следуя этой логике, матричные элементы когерентного νA - и $\bar{\nu} A$ -рассеяния на ядре (как точечной частице) с $J = 1/2$ авторы [121] дают в виде

$$i\mathcal{M}^{r'rss'}(\nu A \rightarrow \nu A) = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}Q_W F(q^2)g_L^\nu \left[\bar{u}^{r'}(k_2)\gamma^\mu u^r(p_2)\right] \times \\ \times \left[\bar{u}^{s'}(k_1)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)u^s(p_1)\right], \quad (8.24)$$

$$i\mathcal{M}^{r'rss'}(\bar{\nu} A \rightarrow \bar{\nu} A) = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}Q_W F(q^2)g_L^\nu \left[\bar{u}^{r'}(k_2)\gamma^\mu u^r(p_2)\right] \times \\ \times \left[\bar{v}^s(p_1)\gamma^\mu(1 - \gamma^5)v^{s'}(k_1)\right]. \quad (8.25)$$

Здесь $\bar{u}^{r'}(k_2)$ и $u^r(p_2)$ — конечный и начальный дираковские спиноры точечного ядра со спином $1/2$. Вычисляя стандартным образом следы матриц

Дирака, авторы [121] получают для матричных элементов (8.24) и (8.25) квадраты в совершенно одинаковом виде

$$|\mathcal{M}|^2 = \sum_{ss'} \frac{1}{2} \sum_{rr'} |i\mathcal{M}^{r'r_{ss'}}|^2 =$$

$$= 32G_F^2 Q_W^2 F^2 (g_L^\nu)^2 M_A^2 E_\nu^2 \left(1 - \frac{T_A}{E_\nu} - \frac{M_A T_A}{2E_\nu^2} + \frac{T_A^2}{2E_\nu^2} \right). \quad (8.26)$$

Тогда и для сечений имеется одно и то же выражение

$$\left. \frac{d\sigma}{dT_A} \right|_{J=1/2} = \frac{G_F^2 (2g_L^\nu Q_W)^2 F^2 (q^2)}{4\pi} M_A \left(1 - \frac{T_A}{E_\nu} - \frac{M_A T_A}{2E_\nu^2} + \frac{T_A^2}{2E_\nu^2} \right). \quad (8.27)$$

Причина такого совпадения νA - и $\bar{\nu} A$ -сечений согласно [121] состоит в предположении о сохранении четности при взаимодействии ядра с Z -бозоном или учете только векторного тока. Очевидно, что учет аксиал-векторного тока, т. е. $\gamma^\mu \gamma^5$ между $\bar{u}^r(k_2)$ и $u^r(p_2)$, приводит к различию νA - и $\bar{\nu} A$ -сечений, которым авторы [121] пренебрегают.

Сечение (8.27) отличается «пренебрежимо малыми поправками», как утверждали авторы [121], от сечения (8.22) для ядра с $J = 0$. По этой причине они рассматривали только бесспиновые ядра с векторным характером слабого взаимодействия.

В связи с этим обратим особое внимание на то, что суммирование в (8.26) идет по всем возможным проекциям спина ядра, что неприемлемо в случае, когда ядро остается в своем первоначальном состоянии, т. е. взаимодействует когерентно. Буквально то же самое относится к выводу в работе [121] формулы (8.21) для случая экзотических нейтринных взаимодействий, заданных в виде лагранжиана (8.18). Здесь также амплитуда νA -рассеяния (формула (4.7) из [121]), следующая из выражения типа (8.19), квадратируется стандартным образом путем суммирования по конечным (r') и усреднения по начальным (r) проекциям спина ядра $|\mathcal{M}|^2 = \sum_{ss'} (1/2) \sum_{rr'} |\mathcal{M}^{s'sr'r}|^2$ (формула (4.8) из [121]), из которой следует формула (8.21).

Иными словами, обоснование выражений для сечений когерентного упругого (νA) $\bar{\nu} A$ -рассеяния в [121] выглядит слишком упрощенным и неубедительным, поскольку как минимум не учитывает неизменность состояния ядра после взаимодействия (когерентность), как это было сделано исходя из первых принципов в работе [20]. Поэтому даже самый тщательный и аккуратный анализ данных (например, проведенный в [119]) с использованием формул типа (8.21) из [121] вполне может привести к ошибочным результатам.

В работе [122] был исследован потенциал экспериментов COHERENT и CONUS [123] с точки зрения получения ограничений на другой, достаточно частный вариант нестандартных нейтринных взаимодействий, обусловленный дополнительной легкой скалярной частицей ϕ , взаимодействующей

как с нейтрино, так и с кварками. Авторы рассмотрели два варианта такого взаимодействия — с сохранением лептонного числа и с его нарушением. Оба они отвечают рассеянию с переворотом спина и поэтому дают аддитивный вклад в полное сечение (интерференция с амплитудой $CE\nu NS$ отсутствует). Было показано, что текущие (будущие) эксперименты чувствительны к массам этих скалярных частиц на уровне нескольких мегаэлектронвольт и константам связи масштаба $10^{-4}(10^{-6})$. Если массы этих скалярных частиц окажутся порядка энергии падающих нейтрино, то их можно будет увидеть с помощью характерного искажения формы спектра [122].

Однако, к сожалению, авторы этой работы, как и авторы работы [121], при выводе формул для когерентного νA -рассеяния путем обмена ϕ -частицей также суммируют по всем возможным состояниям спина ядра. Здесь опять когерентность декларируется, а не используется конструктивно при выводе формул для сечения.

В работе [111] также был исследован потенциал обнаружения Новой физики в процессе $CE\nu NS$ с помощью современных низкотемпературных болометров, расположенных поблизости от атомных реакторов. Были рассмотрены вклады в $CE\nu NS$ от присутствия нейтринного магнитного момента, нестандартных взаимодействий и упрощенных моделей, содержащих массивный скалярный или векторный промежуточный бозон. Были исследованы мишени из Ge, Zn, Si, $CaWO_4$ и Al_2O_3 . Показано, что при достижении точного измерения энергетического спектра $CE\nu NS$ на уровне нескольких процентов вплоть до энергии порядка нескольких десятков электронвольт в будущих экспериментах возможно получить улучшение на два порядка пределов как на нейтринный магнитный момент, так и на массы указанных промежуточных частиц [111].

Вопрос о том, как с помощью данных эксперимента COHERENT получить возможность наложить ограничения или даже исключить так называемые «большие NSI», обсуждался в работе [124]. Наличие такого сорта NSI может повлиять на характер интерпретации данных осцилляционных экспериментов. В частности, пока не противоречит этим данным (и вполне конкурентоспособно со стандартным описанием осцилляций нейтрино) решение, известное как «LMA–Dark», которое требует $\theta_{12} > \pi/4$, и определенный тип NSI с эффективной связью порядка G_F (отсюда «большие NSI»). Вопреки общепринятым ожиданиям существует класс моделей, которые могут привести к таким большим NSI. Авторы [124] утверждают, что эти модели в принципе могут быть проверены с помощью $CE\nu NS$ -экспериментов, таких как COHERENT и предстоящий эксперимент на реакторе CONUS [123].

Впервые вопрос о влиянии NSI с нарушением CP-четности на результаты измерения спектра $CE\nu NS$ в детекторах COHERENT из натрия-йода, жидкого аргона и германия был рассмотрен в работе [125]. Авторы идентифицировали область в пространстве параметров, для которой частота набора

событий всегда включает некий провал, и другую область, для которой этот провал никогда не имеет места. Показано, что наличие такого провала можно использовать для ограничения CP-нарушающих эффектов в NSI. В области, где нет провалов, параметры, нарушающие CP-четность, могут вполне выглядеть как предсказания $SE\nu NS$ Стандартной модели [125].

Перспективы получения информации, выходящей за рамки физики Стандартной модели, на основе одновременного анализа энергетического и временного распределений данных $SE\nu NS$ в эксперименте COHERENT были изучены в работе [107]. Так, например, рассмотрение достаточно легких промежуточных дополнительных бозонов с массами в области $10\text{--}1000 \text{ МэВ}/c^2$ показало, что объединенные данные по сравнению со Стандартной моделью лучше описываются с их учетом (различие на уровне 2σ). Такая синхронизация предоставляет возможность получить дополнительную информацию о распределении электронных и мюонных нейтрино, чего нельзя сделать на основе анализа только распределения энергий ядер отдачи. Поэтому открывается дополнительная возможность подавления фона, получения более точных данных о структуре ядра и более жестких ограничений на Новую физику [107].

Завершая обсуждение нестандартных нейтринных взаимодействий, следует остановиться на работе [59], где NSI подвергнуты полной формализации в рамках эффективной теории поля (ЭТП). Вклады NSI в сечения когерентного рассеяния (и глубоконеупругого рассеяния) от взаимодействия нейтрино с легкими кварками, лептонами, глюонами и фотонами были параметризованы в виде всех возможных операторов размерности 5, 6 и 7. В естественном предположении о доминировании только одного оператора такого типа из анализа данных коллабораций COHERENT и CHARM авторы получили ограничения на соответствующий выделенному оператору коэффициент Вильсона (или весовой множитель перед оператором). Был отмечен высокий потенциал будущих экспериментов $SE\nu NS$ в вопросе получения ограничений на пространства параметров возможных значений рассмотренных эффективных операторов [59]. Действительно, авторы проделали большую работу, однако, к сожалению, с нашей точки зрения, значимость этой работы невелика. Причина в слишком упрощенной трактовке когерентного рассеяния нейтрино на ядрах, похожей на то, что уже упоминалось выше (см. обсуждение работ [121] и [119]).

Так, например, с самого начала авторы [59] строят свои рассуждения, утверждая, что нейтроны и протоны внутри ядер являются нерелятивистскими, и их взаимодействия хорошо описываются киральной ЭТП с нерелятивистскими нуклонами. Считается, что переданный в $SE\nu NS$ импульс q мал, поэтому ядро остается целым, а нейтроны и протоны — нерелятивистские в течение всего рассеяния. Далее, поскольку в эксперименте COHERENT типичный q находится в области $30\text{--}70 \text{ МэВ}$, что намного ниже параметра

обрезания в киральной ЭТП, $\Lambda \sim \mathcal{O}(1 \text{ ГэВ})$, то эффективные взаимодействия нейтрино можно описывать в рамках киральной ЭТП [59]. Как было специально рассмотрено в разд. 3, такая трактовка как минимум не совместима с условием когерентности в рассеянии нейтрино на ядре. Далее отклик ядра на NSI в работе [59] дается выражением

$$\frac{d\sigma_A}{dE_R} = \frac{m_A}{\pi E_\nu^2} \overline{\mathcal{M}}^2,$$

где E_R — энергия отдачи ядра, и квадрат усредненной амплитуды рассеяния имеет вид

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{M}}^2 &= \frac{1}{2J_A + 1} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}|^2 = \\ &= \frac{4\pi}{2J_A + 1} \sum_{\tau, \tau'=0,1} \left(R_M^{\tau\tau'} W_M^{\tau\tau'} + R_{\Sigma''}^{\tau\tau'} W_{\Sigma''}^{\tau\tau'} + R_{\Sigma'}^{\tau\tau'} W_{\Sigma'}^{\tau\tau'} \right). \end{aligned} \quad (8.28)$$

Здесь J_A — спин ядра-мишени; $W_{M, \Sigma', \Sigma''}(q)$ — функции отклика ядра. Суммирование по изоспиновым индексам τ, τ' проводится с учетом кинематических множителей следующего вида:

$$\begin{aligned} R_M^{\tau\tau'} &= \text{Tr} (P_L \not{l}_{0, \tau} l_{0, \tau}^\dagger), \\ R_{\Sigma''}^{\tau\tau'} &= \text{Tr} (P_L \not{l}_{5, \tau}^j l_{5, \tau}^{j\dagger} \not{l}_{5, \tau}^i l_{5, \tau}^{i\dagger}) \hat{q}^i \hat{q}^j, \\ R_{\Sigma'}^{\tau\tau'} &= \text{Tr} (P_L \not{l}_{5, \tau}^j l_{5, \tau}^{j\dagger} \not{l}_{5, \tau}^i l_{5, \tau}^{i\dagger}) (\delta^{ij} - \hat{q}^i \hat{q}^j), \end{aligned}$$

которые с $\hat{q} \equiv \mathbf{q}/q$ аккумулируют в дираковские структуры l_0 и l_5 (см. формулы (34), (35) в [59]), входящие в эффективный нерелятивистский лагранжиан нейтрино-ядерного взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{NR}} = (\bar{\nu} l_0 P_L \nu) \bar{N}_\nu N_\nu + 2(\bar{\nu} l_5 P_L \nu) \bar{N}_\nu \mathbf{S}_N N_\nu.$$

Видно, что в формуле (8.28) идет суммирование по *всем* проекциям спина начального и конечного ядер, а также суммирование по проекциям начального и конечного изоспинов, что допускает возможность изменения спина и изоспина в результате взаимодействия. Как уже неоднократно отмечалось, такая процедура не имеет ничего общего с понятием когерентности.

Завершая краткий обзор физических задач для $\text{CE}\nu\text{NS}$ -экспериментов, следует отметить, что потенциал новизны этих задач действительно велик. Постоянно появляются новые работы в этом направлении, см., например, [126–136], а также [137–144].

Однако, к сожалению, проведенные анализы уже имеющихся данных не всегда достаточно аккуратно обоснованы физически. Как минимум отсутству-

ет четкое (аналитическое) обоснование применимости использованных формул для прецизионного анализа именно когерентного рассеяния (анти)нейтрино на ядрах. Часто наличие когерентности (или, что практически эквивалентно, пропорциональность сечения квадрату числа нейтронов) считается заданным априори просто потому, что переданный импульс сравним с обратным радиусом ядра-мишени. Возможно, до работ [19,20], где когерентный и некогерентный режимы в процессе рассеяния нейтрино на ядрах рассмотрены последовательно математически из первых принципов, это и было приемлемо.

8.2. Некоторые $CE\nu NS$ -эксперименты и их возможности. В этом пункте дана краткая информация о наиболее значимых (на конец 2019 г.) экспериментах, нацеленных на регистрацию и изучение $CE\nu NS$. Помимо уже обсуждавшегося эксперимента COHERENT, в котором используются пучки ускорительных (анти)нейтрино* от распада остановившихся пионов, произведенных на специальных нейтронных источниках путем так называемой реакции скалывания нейтронов на ядрах (Spallation Neutron Source, или кратко SNS), в приведенных ниже экспериментах в основном предполагается использовать пучки антинейтрино от ядерных реакторов или от естественных источников нейтрино, таких как Солнце или сверхновая. Информацию обзорного характера относительно современных нейтринных экспериментов с реакторными и ускорительными (анти)нейтрино можно найти, например, в [145–148]. Интерес к изучению $CE\nu NS$ был проявлен также в Европе на European Spallation Source [149].

Исследовательская программа коллаборации TEXONO традиционно весьма широка [150]. В частности, она была направлена на поиск и наблюдение $CE\nu NS$, вызванного (анти)нейтрино от атомных реакторов. В этом направлении коллаборацией для прототипа германиевого низкопорогового сверхчистого детектора было достигнуто значение порога для энергии отдачи ядра в области 100–200 эВ. Установку с таким низким порогом предполагалось также использовать для прямого поиска холодной темной материи в области малых масс, а также для повышения чувствительности поиска магнитных моментов нейтрино [151].

В 2012 г. был предложен новый (российский) проект под названием RED (Russian Emission Detector) — двухфазный эмиссионный детектор с использованием жидкого ксенона в качестве рабочего тела [152]. Среди нескольких задач этого проекта одной из первоначальных было обнаружение когерентного рассеяния нейтрино нейтрального тока на атомных ядрах. Ожидаемые сигналы и фон были оценены изначально для двух возможных локализа-

*В эксперименте COHERENT ядра-мишени имеют ненулевой спин, поэтому согласно формулам (6.45) и (6.46) $CE\nu NS$, вызванное антинейтрино, несколько отличается от $CE\nu NS$, обусловленного нейтрино.

ций детектора: Калининской атомной электростанции в Российской Федерации и источника нейтронов SNS Ок-Риджской национальной лаборатории в США [152]. После проведения соответствующих моделирований и R&D оба возможных расположения выглядели приемлемыми для проведения этого эксперимента, однако в последнее время обсуждалось возможное использование установки RED для изучения $CE\nu NS$ только на пучке от ядерного реактора [153]. Заметим, что команда, предложившая эксперимент RED, в значительной степени преуспела в эксперименте COHERENT.

В 2014 г. было предложено использовать газовый детектор — трехсекционный низкофонный пропорциональный счетчик — для регистрации реакторных антинейтрино на основе их когерентного рассеяния на ядрах [154]. В качестве рабочего вещества планировалось использовать аргон и ксенон. Было показано, что разделение сигнала по форме импульса позволяет достаточно эффективно подавлять фон от электромагнитных помех и микрофонных эффектов в диапазоне значений энергии от 20 до 100 эВ, где ожидается основное проявление эффекта $CE\nu NS$. На основе анализа нейтронного фона, генерируемого мюонами космических лучей, была представлена схема возможной экспериментальной установки [154]. После 2014 г. работ по этому предложению опубликовано не было.

Исходя из идеи использования $CE\nu NS$ в сочетании с моноэнергетическими источниками нейтрино для поиска Новой физики, например в виде регистрации легких стерильных нейтрино, в работе [155] было проведено специальное исследование возможности оптимизации криогенных твердотельных болометров с целью достижения чрезвычайно низких порогов регистрации кинетической энергии отдачи ядер на уровне 10 эВ. Была исследована чувствительность массива таких детекторов к возможности обнаружения осцилляции нейтрино в стерильные состояния, и показана перспективность их использования [155].

В 2013 г. было проведено исследование возможности и сделано предложение искать $CE\nu NS$ с помощью far-off-axis ($> 45^\circ$) нейтронного пучка от бустера FNAL с энергией менее 50 МэВ. При этом предлагалось использовать детектор, расположенный поперек мишени, в которой предполагалось образование пучка нейтрино высокой энергии. Такой детектор мог быть чувствителен к нейтрино низкой энергии, возникающим в результате распада пиона в покое. Были исследованы фон и чувствительность, и показано, что однофазный жидкоаргоновый детектор с 1 т рабочего вещества может обнаружить (на уровне $7,5\sigma$) $CE\nu NS$ при пороге детектора 25 кэВ по энергии отдачи ядра [156].

В эксперименте CONNIE (Coherent Neutrino-Nucleus Interaction Experiment) для регистрации малых энергий отдачи ядер кремния, вызванных реакторными антинейтрино, используются малозумящие CCD-приборы с зарядовой связью (Charge-Coupled Devices) [157]. Ожидается, что с помощью

такого типа приборов можно будет достичь рекордного порога регистрации энергии отдачи ядер в 28 эВ [158]. Несмотря на известные достижения эксперимента COHERENT, $CE\nu NS$ еще не наблюдалось при энергиях отдачи ниже нескольких килоэлектронвольт. В 2016 г. были получены первые результаты с набора детекторов с активной массой 73,2 г (12 CCD) на расстоянии 30 м от активной зоны ядерного реактора с тепловой мощностью 3,8 ГВт. Проводился поиск нейтринных событий путем сравнения данных, собранных с включенным реактором (2,1 кг в день) и выключенным реактором (1,6 кг в день). Избытка данных на включенном реакторе не было обнаружено. Тем не менее был достигнут рекордный уровень чувствительности вплоть до энергий отдачи около 1 кэВ (электрон-эквивалент 0,1 кэВ) [159].

В конце 2016 г. был предложен эксперимент RICOCHET, нацеленный на поиск $CE\nu NS$ с помощью низкотемпературных болометров на реакторном комплексе Chooz (Франция) в качестве источника реакторных (анти)нейтрино [160]. Была изучена потенциальная $CE\nu NS$ -чувствительность такого эксперимента, представляющего собой составной детектор (болометрическая матрица) из небольших германиевых и цинковых модулей с общей массой порядка 10 кг. Было показано, что использование для отделения фона от сигнала корреляции с работой реактора и с энергетическим порогом 100 эВ позволяет зарегистрировать сигнал от $CE\nu NS$ в течение одного года работы [160].

Задачей небольшого эксперимента ν -cleus (или NU-CLEUS) было обнаружение $CE\nu NS$ путем регистрации энергии отдачи ядер вплоть до 10 эВ [161]. Детектор состоял изборок низкопороговых калориметров на базе $CaWO_4$ и Al_2O_3 общей массой около 10 г и нескольких криогенных вето-детекторов, работающих при температурах в области нескольких милликельвин. Сегментация детектора обеспечивала активное распознавание фоновых γ -квантов, нейтронов и поверхностных эффектов. На первом прототипе из сапфира (Al_2O_3) в наземных условиях (без экранировки фона) был достигнут энергетический порог в 20 эВ. Исследование чувствительности к $CE\nu NS$ на пучках антинейтрино от атомных электростанций показало, что открытие $CE\nu NS$ (5σ) можно было бы сделать в течение 2 недель измерений. Показано, что с помощью этой технологии возможен мониторинг атомных электростанций в режиме реального времени [161]. Использование криогенных детекторов большого объема для поиска $CE\nu NS$ и регистрации нейтрино от сверхновых обсуждалось ранее в [162].

Исследование чувствительности пузырьковых камер типа PICO-500 для регистрации нейтрино от сверхновых посредством $CE\nu NS$ было проведено в работе [163]. Главная проблема в этой области состоит в обеспечении способности весьма крупномасштабных детекторов регистрировать низкие энергии отдачи порядка 10 кэВ, которые возникают за счет когерентного упругого рассеяния сверхновых нейтрино на ядрах мишени. Большие детекторы с перегретой жидкостью, такие как пузырьковая камера PICO-500, которая запол-

нена активной мишенью из 1 т C_3F_8 , должны увидеть $SE\nu NS$ -события в виде нескольких пузырьков, если детектор будет находиться в рабочем состоянии во время нейтринного импульса от взорвавшейся поблизости (10 кпк) сверхновой. Обсуждалась возможность использования таких пузырьков камер в качестве независимого метода изучения взрыва сверхновой, подобной SN 1987A, с особой чувствительностью к каналу с тяжелыми лептонами [163].

В ядерном центре Техасского университета с использованием низкопороговых криогенных германиевых и кремниевых детекторов проводится эксперимент MINER (Mitchell Institute Neutrino Experiment at Reactor) по поиску $SE\nu NS$ в непосредственной близости (около 2 м) от активной зоны ядерного реактора TRIGA мощностью 1 МВт. Проведенные в 2016 г. моделирования условий эксперимента с учетом когерентного усиления ожидаемого сечения, нейтронного, мюонного и гамма-фонов, а также предполагаемой близости детекторов к реактору для ожидаемого числа сигнальных событий была получена оценка в 5–20 событий/кг/день. При этом считалось, что поддающиеся измерению энергии отдачи ядер лежат в области от 10 до 1000 эВ [164]. Более поздних данных по этому эксперименту найти не удалось.

Как уже упоминалось ранее, обнаружение галактических нейтрино от взрывов сверхновых представляет собой одну из главных задач нейтринной физики и астрофизики низких энергий. В работах [75, 76] было предложено использовать для этой цели газовый сферический ТРС (времяпролетная камера) детектор небольшого размера, наполненный благородным газом. Идея детектирования нейтрино опиралась на эффект $SE\nu NS$. Оценки показывали, что в сфере радиусом 3 м, заполненной ксеноном при 10 атм, с порогом регистрации энергии отдачи 100 эВ можно ожидать 300–500 событий (в зависимости от иерархии нейтринных масс). Увеличение давления до 50 атм обещало, соответственно, 1500–2500 событий. Использование ^{40}Ag позволяло ожидать 150–200 событий при тех же условиях.

Вторая идея этих авторов состояла в том, чтобы расположить несколько таких простых в обслуживании и относительно дешевых детекторов (наполненных аргоном при относительно малых давлениях) в разных местах земного шара. Такую сеть газовых ТРС-детекторов (при работе на совпадение и с энергетическим порогом ниже 1 кэВ) предлагалось использовать для мониторинга космоса в нейтринном канале низких энергий. В ожидании сигнала от взрыва сверхновой эти детекторы можно эксплуатировать без особых трудностей (даже студентам) длительное время [75, 76].

Двухфазный газовый ТРС-детектор, способный измерять энергию отдачи ядер в области ниже 1 кэВ и регистрировать за счет $SE\nu NS$ антинейтрино от атомного реактора, был предложен на базе аргона также в работе [165]. Этот детектор предполагалось использовать сначала для измерения важного параметра — ядерного ионизационного квенчинг-фактора в еще не исследованном диапазоне энергий отдачи от нескольких килоэлектронвольт и ниже [165].

В 2016 г. группой из Института Макса Планка (Германия) был предложен реакторный эксперимент CONUS (COherent NeUtrino Scattering), направленный на обнаружение $CE\nu NS$ в полностью (как утверждают авторы) когерентном режиме с использованием особо чистых низкороговых (240 эВ) германиевых (Ge) детекторов [166]. В 2017 г. установка из четырех (по 1 кг) модулей начала набор данных на коммерческой атомной электростанции в Брокдорфе (Германия) на расстоянии 17 м от активной зоны реактора (поток антинейтрино ожидался более $10^{13} \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$). Для успешного проведения эксперимента требовалось хорошее понимание фоновых условий, вызванных нейтронами, поскольку сигналы отдачи ядер от ударов нейтронов полностью имитируют искомые $CE\nu NS$ -взаимодействия. Особенно неприятными для CONUS являются события, вызванные нейтронами, сопровождающими выработку тепловой энергии.

В 2019 г. были (впервые) представлены результаты измерений фоновых условий, проведенных на месте работы детектора. Было показано наличие высокотермизованного нейтронного поля, скоррелированного с тепловой мощностью реактора. Путем соответствующей защиты установки CONUS поток этих нейтронов, которые образуются в результате ядерного деления внутри активной зоны, по мнению авторов [123], удастся подавить примерно в 10^{20} раз. С помощью высокочистого Ge-детектора был исследован также γ -фон. В результате тщательного моделирования с учетом этих данных было показано, что ожидаемый $CE\nu NS$ -сигнал по крайней мере на один порядок превышает индуцированный реактором фон в области измерения [123].

Исходя из очевидного требования, что для поиска Новой физики в $CE\nu NS$ необходимо максимально точное знание потока и энергетического спектра нейтрино, в работе [167] была исследована интересная возможность проведения $CE\nu NS$ -эксперимента на основе ^{51}Cr -источника, спектр нейтрино которого известен и чья активность может контролироваться тепловым сенсором на уровне нескольких промилле. Было показано, что с источником активностью 5 мКи, расположенным на расстоянии 25 см от детектора, за примерно 55 дней экспозиции можно ожидать 3900 (900) отсчетов на мишени из германия (сапфир) объемом в 2 дм^3 с энергетическим порогом 8(20) эВ [167].

Следует отметить, что коллаборация EDELWEISS [168] на пути прямого поиска легких (с массами меньше $1 \text{ ГэВ}/c^2$) частиц темной материи достигла рекордных значений энергетического порога в 60 эВ для 33,4-г криогенного Ge-детектора. Такое значение для порога удалось получить путем измерения выделившейся в болометре энергии отдачи ядра с помощью специализированного (neutron-transmutation-doped) Ge-термодатчика с базовым разрешением тепловой энергии 17,7 эВ [169]. Благодаря этому, помимо наиболее строгих ограничений на спин-независимое взаимодействие частиц темной материи для масс выше $600 \text{ МэВ}/c^2$ и на спин-зависимые взаимодействия частиц темной материи с протонами и нейтронами для масс ниже $1,3 \text{ ГэВ}/c^2$,

в эксперименте EDELWEISS продемонстрированы уникальные возможности современных германиевых болометров в направлении уменьшения энергетического порога и, следовательно, дальнейшего их успешного использования для поиска и регистрации $SE\nu NS$ в наиболее перспективной области «максимально малых» энергий отдачи ядер, где условие когерентности выполняется наиболее точно. Этот опыт крайне важен для эксперимента νGEN [50], выполняемого российской частью коллаборации EDELWEISS на Калининской атомной электростанции.

Эксперимент νGeN — это новый эксперимент на Калининской АЭС, задача которого состоит в обнаружении когерентного упругого рассеяния нейтрино на ядрах германия. В нем используются низкороговые высокочистые Ge-детекторы (HPGe), разработанные в ОИЯИ (Дубна) в сотрудничестве с BSI (Baltic Scientific Instruments, Латвия). В качестве мощного источника нейтрино в эксперименте используются электронные антинейтрино от одного из энергоблоков КАЭС. $SE\nu NS$ предполагается наблюдать на основе дифференциального метода, в котором сравниваются спектры, измеренные при работе реактора и периодах его остановки, а также спектры, измеренные на разных расстояниях от активной зоны реактора во время его работы. Для установки с четырьмя HPGe-детекторами (400 г каждый), расположенной на расстоянии 10 м от центра активной зоны реактора и энергетическим порогом 350 эВ, ожидается до 10 событий $SE\nu NS$ в день. Чувствительность установки будет еще больше увеличена при использовании новых детекторов общей массой до 5 кг [50]. В 2018 г. в этом проекте уже был достигнут порог в 200 эВ [48].

В заключение этого раздела полезно упомянуть одно из первых предложений (1983 г.) по созданию [40] настоящей нейтринной обсерватории для обнаружения МэВ-ных нейтрино посредством их упругого когерентного рассеяния на ядрах и идентификации энергии отдачи с помощью достаточно компактного детектора. Такой детектор предлагалось реализовать на основе идеи «сверхпроводящего зерна», которая представлялась осуществимой при экстраполяции уже известных методов. Он мог бы измерять энергетический спектр нейтрино и был бы нечувствителен к осцилляциям нейтрино, поскольку регистрировал бы все типы нейтрино. Его предполагалось использовать для регистрации реакторных, сверхновых, солнечных и земных нейтрино, а также ускорительных нейтрино от распада остановившихся пионов [40].

В 1979 г. был также предложен «когерентный» детектор на базе полного отражения нейтрино низких энергий от плоской поверхности. В основе лежала идея когерентного взаимодействия таких нейтрино с детектором как целым (единым) объектом, и предлагалось регистрировать тот полный импульс, который приобретает этот детектор в результате отражения нейтринного пучка [170]. В недавней работе [27] была показана несостоятельность этой возможности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем основные обсуждавшиеся вопросы.

1. Подробно изложены все элементы нового теоретического подхода, разработанного в работе [19] для описания нейтрино-ядерного процесса $\nu A \rightarrow \nu A^{(*)}$, когда ядро-мишень A может переходить в возбужденное состояние $A^{(*)}$ с сохранением своей целостности. Подход основан на микроскопическом описании ядра как связанного состояния составляющих его нуклонов на базе многочастичной волновой функции ядра общего вида. Обобщение данного подхода на случай антинейтрино-ядерного $\bar{\nu} A \rightarrow \bar{\nu} A^{(*)}$ взаимодействия дано в [20]. В частности, впервые показано, что в рассматриваемых кинематических условиях достаточно хорошим приближением является равенство сечений $\nu A \rightarrow \nu A^{(*)}$ и $\bar{\nu} A \rightarrow \bar{\nu} A^{(*)}$.

2. Благодаря учету всех возможных начальных и конечных квантовых состояний ядра (условие полноты) в достаточно общем виде (т. е. независимо от деталей модели ядра) в рамках этого подхода удается получить единое описание упругих (когерентных) и неупругих (некогерентных) процессов рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядрах.

3. Показано, что упругое взаимодействие, сохраняющее изначально квантовое состояние ядра, приводит в квадратичному усилению соответствующего наблюдаемого сечения в терминах числа нуклонов. В то же время наблюдаемое сечение (всех возможных) неупругих процессов, когда квантовое состояние ядра изменяется, обладает линейной зависимостью от числа нуклонов. В терминологии Фридмана эти два класса процессов носят названия, соответственно, когерентного и некогерентного.

4. Впервые показано, что поведение упругого (когерентного) и неупругого (некогерентного) сечений соответственно определяется множителями $|F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$ и $(1 - |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2)$, где $F_{p/n}(\mathbf{q})$ — нормированный на единицу и усредненный по начальному состоянию ядра формфактор протона/нейтрона. Эти формфакторы регулируют плавный переход от режима упругого (когерентного) к режиму неупругого (некогерентного) (анти)нейтрино-ядерного рассеяния. В общем случае оба режима дают вклад в наблюдаемые величины. Вопрос о доминировании упругого (когерентного) или неупругого (некогерентного) слагаемого в наблюдаемом сечении определяется соотношением между зависящими от переданного ядру импульса \mathbf{q} величинами множителей $A_{p/n}^2 |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$ и $A_{p/n}(1 - |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2)$.

5. Обсуждавшиеся упругие и неупругие $\nu(\bar{\nu})A$ -процессы благодаря их общей природе, обусловленной слабыми нейтральными токами, оказываются экспериментально неразличимыми, когда единственной наблюдаемой величиной является энергия отдачи ядра мишени. Поэтому в экспериментах, нацеленных на изучение когерентного рассеяния нейтрино (при достаточно высоких энергиях) путем детектирования только энергии отдачи, может присут-

ствовать некогерентный фон, который неотличим от основного сигнала, если фотоны от снятия ядерного возбуждения не поддаются регистрации.

В частности, для ядра цезия ^{133}Cs и энергии нейтрино 30–50 МэВ некогерентное сечение может составлять 15–20% от когерентного. Поэтому если в эксперименте COHERENT (с ядром ^{133}Cs) не детектируются «некогерентные» γ -кванты от снятия ядерного возбуждения, то в данных этого эксперимента $\text{CE}\nu\text{NS}$ -события (т. е. искомые события когерентного упругого рассеяния нейтрино на ядрах) содержатся с неупругой примесью на уровне 15–20%. В прецизионном анализе данных эксперимента такого типа должна приниматься во внимание отмеченная примесь некогерентности.

6. С другой стороны, в рассматриваемой области энергий (анти)нейтрино этот некогерентный вклад может быть измерен (оценен) напрямую путем регистрации фотонов, испущенных возбужденными в результате неупругих процессов ядрами мишени. Эти фотоны должны коррелировать во времени с нейтринным пучком и иметь энергию, как правило, значительно больше кинематической энергии отдачи ядра, что делает их регистрацию достаточно простой; более того, число таких фотонов определяется отношением неупругого сечения к упругому.

7. Одновременное детектирование двух сигналов — энергии отдачи ядра и γ -квантов от снятия ядерного возбуждения — позволяет выделять чистый $\text{CE}\nu\text{NS}$ -вклад и, следовательно, проводить детальное изучение ядерной структуры и вести прецизионный поиск Новой физики в такого типа нейтринных процессах. Другой путь прецизионного изучения $\text{CE}\nu\text{NS}$ основан на использовании (анти)нейтринных пучков несколько меньших энергий и детекторов нового поколения с крайне низкими энергетическими порогами, что позволяет набирать и анализировать данные в области очень малых энергий отдачи, где неупругие процессы либо сильно подавлены, либо просто невозможны.

Авторы выражают глубокую благодарность Ю. Ефременко, А. Коновалову, В. Рубакову, В. Наумову, Е. Якушеву и В. Кузьмину за важные замечания и плодотворные обсуждения. В. А. Бедняков посвящает эту работу светлой памяти Ю. В. Гапонова, ушедшего от нас в 2009 г. (ровно 10 лет назад как первая версия обзора была подготовлена).

Приложения

ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ВЫВОДЫ ФОРМУЛ, ПОЯСНЕНИЯ

П.1. По поводу смены парадигмы когерентности. *Решение уравнения (3.20) на сохранение энергии и структурности ядра.* Это уравнение, имеющее вид

$$\sqrt{m_N^2 + \mathbf{p}^2 + 2\mathbf{p}\mathbf{q} + \mathbf{q}^2} - \sqrt{m_N^2 + \mathbf{p}^2} = \frac{\mathbf{q}^2}{2m_A} + \Delta\varepsilon_{mn},$$

можно решить аналитически, обозначив временно

$$E \equiv \sqrt{m^2 + p^2 + 2pq + q^2} - \sqrt{m^2 + p^2}, \quad \text{тогда}$$

$$m^2 + p^2 + 2pq + q^2 = (E + \sqrt{m^2 + p^2})^2 = E^2 + 2E\sqrt{m^2 + p^2} + m^2 + p^2,$$

откуда, сокращая одинаковые слагаемые справа и слева, имеем

$$2pq + q^2 = E^2 + 2E\sqrt{m^2 + p^2} \quad \text{или} \quad 2pq + d = 2E\sqrt{m^2 + p^2},$$

где введено обозначение $d = (q^2 - E^2)$. Далее, возводя в квадрат $4E^2(m^2 + p^2) = (2pq + d)^2 = 4p^2q^2 + 4dpq + d^2$ и преобразуя получившееся выражение к $4p^2(E^2 - q^2) - 4dpq + 4E^2m^2 - d^2 = 0$, приходим к квадратному уравнению

$$4dp^2 + 4dpq + d^2 - 4E^2m^2 = 0 \quad \text{или} \quad p^2 + pq + b = 0, \quad \text{где} \quad b = \frac{d^2 - 4E^2m^2}{4d}.$$

Это уравнение имеет два решения

$$p_{1,2} = -\frac{q}{2} \left(1 \pm \left[\frac{q^2 - 4b}{q^2} \right]^{1/2} \right).$$

Далее $q^2 - 4b = E^2 + 4E^2m^2/(q^2 - E^2) = q^2\beta(1 + (4m^2/q^2)(1/(1 - \beta)))$, где $\beta = E^2/q^2 \equiv (1/q^2)(\mathbf{q}^2/2m_A + \Delta\varepsilon_{mn})^2$.

В итоге одно физическое решение имеет вид

$$p = -\frac{q}{2} \left(1 - \sqrt{\beta} \sqrt{1 + \frac{4m^2}{q^2} \frac{1}{1 - \beta}} \right).$$

К вопросу об упругом и неупругом вкладах в полное сечение. Разложение полного сечения на упругое и неупругое слагаемые (помимо формулы (3.17)) можно проиллюстрировать по-иному. Стартуя с формулы для полного сечения

$$(3.9) : \quad \frac{d\sigma}{d\Omega} \propto |\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle,$$

можно получить другое выражение для квадрата амплитуды рассеяния типа (3.12), если определить функцию парных корреляций в *ином* виде:

$$\hat{G}(\mathbf{q}) \equiv A^{-1}(A - 1)^{-1} \sum_{k \neq j} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle. \quad (\text{П.1})$$

Эта функция описывает парные корреляции в случае как упругого, так и неупругого взаимодействия. Выделив из формулы (3.9) явно слагаемое, отвечающее $k = j$, сразу получим

$$|\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 \left[\sum_{k=j} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle + \sum_{k \neq j} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \right] =$$

$$= |\mathcal{A}_0|^2 [A + A(A-1)\hat{G}(\mathbf{q})]. \quad (\text{П.2})$$

Отсюда видно, что в пределе $\mathbf{q} \rightarrow \infty$ функция $\hat{G}(\mathbf{q}) \rightarrow 0$ и $|\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 A$, что не зависит от структуры ядра и ассоциируется с неупругим (некогерентным) вкладом. Чисто упругое рассеяние в силу определения формфактора ядра $|F(\mathbf{q})|^2 = \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle$ может быть приведено к виду

$$|\mathcal{A}_{nn}|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 \sum_{k,j} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \equiv |\mathcal{A}_0|^2 A^2 |F(\mathbf{q})|^2. \quad (\text{П.3})$$

Формально прибавляя и вычитая из формулы (П.2) выражение (П.3), получим окончательный аналог формулы (3.12):

$$|\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 \left\{ \underbrace{A^2 |F(\mathbf{q})|^2}_{\text{упругий}} + \underbrace{A^2 [\hat{G}(\mathbf{q}) - |F(\mathbf{q})|^2] + A[1 - \hat{G}(\mathbf{q})]}_{\text{неупругий}} \right\}. \quad (\text{П.4})$$

Примечательно, что в этом выражении неупругий вклад в сечение также имеет слагаемое, пропорциональное квадрату числа рассеивателей A^2 . Однако, как правило, $\hat{G}(\mathbf{q}) \simeq |F(\mathbf{q})|^2$, и формула принимает «знакомый» вид

$$|\mathcal{A}|^2 = |\mathcal{A}_0|^2 \left\{ \underbrace{A^2 |F(\mathbf{q})|^2}_{\text{упругий}} + \underbrace{A[1 - |F(\mathbf{q})|^2]}_{\text{неупругий}} \right\}.$$

Формулу (П.4) с учетом (П.1) в виде

$$\hat{G}(\mathbf{q})A(A-1) - \sum_{k \neq j} \underbrace{\langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle}_{|F_n(\mathbf{q})|^2} \equiv$$

$$\equiv \sum_{k \neq j} \underbrace{[\langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle - \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle]}_{\text{cov}(e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k})}$$

можно обосновать также следующим преобразованием:

$$\begin{aligned}
 \frac{|\mathcal{A}|^2}{|\mathcal{A}_0|^2} &= \sum_{k,j}^{(m=n)} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle + \\
 &\quad + \sum_{k,j} \sum_{m \neq n} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | m \rangle \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle = \\
 &= \sum_{k,j} |F_n(\mathbf{q})|^2 + \sum_{k,j} \left[\sum_m \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | m \rangle \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle - \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{m=n} \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | m \rangle \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \right] = \sum_{k,j} |F_n(\mathbf{q})|^2 + \\
 &\quad + \sum_{k,j} \left[\underbrace{\langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle - \langle n | e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle \langle n | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle}_{\equiv \text{cov}(e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k})} \right] = \\
 &= A^2 |F_n(\mathbf{q})|^2 + \sum_{k=j} \text{cov}(e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j}) + \sum_{k \neq j} \text{cov}(e^{-i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k}) = \\
 &= A^2 |F_n(\mathbf{q})|^2 + \sum_{k=j} (1 - |F_n(\mathbf{q})|^2) + A(A-1)[\hat{G}(\mathbf{q}) - |F_n(\mathbf{q})|^2].
 \end{aligned}$$

Заметим, что если в выражениях (3.2) и (3.4) положить $\mathcal{A}_{mn}^i = \mathcal{A}_{nn}^i \equiv \mathcal{A}^i$, то в силу независимости величин $f_{mn}^k(\mathbf{q})$ от индекса нуклона k (следствие симметрии волновых функций ядра) можно выполнить суммирование и получить, что амплитуды упругого (3.4) и неупругого (3.2) νA -взаимодействия имеют одинаковую зависимость от числа протонов и нейтронов:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{nn} &\equiv \langle n | \mathcal{A} | n \rangle = \sum_{k=1}^A \mathcal{A}^k f_{nn}^k(\mathbf{q}) = \sum_{i=p,n}^{A_i} \mathcal{A}_{nn}^i f_{nn}^i(\mathbf{q}) = \\
 &= Z \mathcal{A}^p f_{nn}^p(\mathbf{q}) + N \mathcal{A}^n f_{nn}^n(\mathbf{q}), \\
 \mathcal{A}_{mn} &\equiv \langle m | \mathcal{A} | n \rangle = \sum_{k=1}^A \mathcal{A}^k f_{mn}^k(\mathbf{q}) = \sum_{i=p,n}^{A_i} \mathcal{A}^i f_{mn}^i(\mathbf{q}) = \\
 &= Z \mathcal{A}^p f_{mn}^p(\mathbf{q}) + N \mathcal{A}^n f_{mn}^n(\mathbf{q}).
 \end{aligned} \tag{П.5}$$

В этом случае при квадрировании полной амплитуды теряется возможность контроля интерференции вкладов от различных рассеивателей. При этом как упругое, так и неупругое взаимодействия нейтрино происходят на одном нуклоне, «избранном» представителе ядра.

Если совсем пренебречь различием между протонами и нейтронами (т. е. $f_{mn}^n = f_{mn}^p = f_{mn}$), то из (П.5) сразу имеем одинаковую A^2 -зависимость для квадратов полных ядерных амплитуд как упругого, так и неупругого рассеяния:

$$|\mathcal{A}_{nn}|^2 = \left| \sum_{i=1}^{A_i} \mathcal{A}^i f_{nn}^i(\mathbf{q}) \right|^2 = A^2 |\mathcal{A}_0|^2 f_{nn}^2, \quad (\text{П.6})$$

$$|\mathcal{A}_{mn}|^2 = \left| \sum_i \mathcal{A}^i f_{mn}^i(\mathbf{q}) \right|^2 = A^2 |\mathcal{A}_0|^2 f_{mn}^2.$$

Это «противоречие» снимается тем, что упругий $f_{nn}(\mathbf{q})$ и неупругий $f_{mn}(\mathbf{q})$ ядерные формфакторы достаточно сильно различаются. Действительно, прямое вычисление матричного элемента $\langle \Psi_m | \hat{A} | \Psi_n \rangle$ одночастичного оператора

$$\hat{A} \equiv \sum_{k=1}^A a_k(\mathbf{q}, \mathbf{x}_k) = \sum_{k=1}^A a_k e^{i\mathbf{x}_k \mathbf{q}} \quad (\text{П.7})$$

с помощью полностью симметризованных волновых функций в случае двух и трех нуклонов позволяет заключить, что если ядерные волновые функции Ψ_m и Ψ_n могут быть представлены соответствующим образом (анти)симметризованным произведением A штук однонуклонных волновых функций (типа детерминанта Слэтера), то матричные элементы одночастичного оператора (П.7) при $a_k(\mathbf{q}, \mathbf{x}_k) = a(\mathbf{q}, \mathbf{x}_k)$ соотносятся следующим образом:

$$\langle \Psi_m | \hat{A} | \Psi_n \rangle = A f_{mn}(\mathbf{q}) = f_{mn}^1(\mathbf{q}),$$

где $f_{mn}(\mathbf{q}) \equiv \int a(\mathbf{q}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \cdots \Psi_m^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots) \Psi_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots),$

$$\langle \Psi_n | \hat{A} | \Psi_n \rangle = A f_{nn}(\mathbf{q}) = A f_{nn}^1(\mathbf{q}), \quad (\text{П.8})$$

где $f_{nn}(\mathbf{q}) \equiv \int a(\mathbf{q}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \cdots \Psi_n^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots) \Psi_n(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots).$

Здесь *одночастичные версии* неупругого и упругого формфакторов имеют вид

$$f_{mn}^1(\mathbf{q}) = \int a(\mathbf{q}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \psi_m^*(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}),$$

$$f_{nn}^1(\mathbf{q}) = \int a(\mathbf{q}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \psi_n^*(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}).$$

Иными словами, как и ожидается, в данной области энергий согласно (П.8) упругий матричный элемент примерно в A раз больше неупругого.

П.2. Построение n -частичной волновой функции ядра из одночастичных состояний. *Одночастичные фермионные квантовые состояния.* Некоторое фермионное (спин равен $1/2$) состояние с массой m , определенное

значением 3-импульса \mathbf{p} , энергией $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ и проекцией спина на некоторое направление s , находится через оператор рождения $a_s^+(\mathbf{p})$ согласно формуле [38]

$$|\mathbf{p}, s\rangle = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} a_s^+(\mathbf{p})|0\rangle, \quad (\text{П.9})$$

при этом имеет место вакуумная $\langle 0|0\rangle = 1$ и лоренц-инвариантная* нормировки [38]:

$$\langle \mathbf{k}, s|\mathbf{p}, r\rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \delta_{rs}. \quad (\text{П.10})$$

Фермионное состояние с определенным значением \mathbf{x} может быть задано выражением

$$\langle \mathbf{x}| = \langle 0|\hat{\psi}(\mathbf{x}), \quad (\text{П.11})$$

где $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ — полевой оператор свободной частицы в представлении Шредингера (нет зависимости от времени), определенный, например, в стандартном виде [38] через операторы рождения, $a_r^+(\mathbf{p})$, $b_s^+(\mathbf{p})$, и уничтожения, $a_s(\mathbf{p})$, $b_r(\mathbf{p})$, как

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{s=1,2} (e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} a_s(\mathbf{p}) u(\mathbf{p}, s) + e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} b_s^+(\mathbf{p}) v(\mathbf{p}, s)), \quad (\text{П.12})$$

$$\bar{\hat{\psi}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \sum_{r=1,2} (e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} b_r(\mathbf{p}) \bar{v}(\mathbf{p}, r) + e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}} a_r^+(\mathbf{p}) \bar{u}(\mathbf{p}, r)).$$

Спинорные функции $u(\mathbf{p}, s)$ и $v(\mathbf{p}, s)$ являются решениями уравнения Дирака

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) u(\mathbf{p}, s) = 0, \quad (\gamma^\mu p_\mu + m) v(\mathbf{p}, s) = 0, \quad (\text{П.13})$$

с учетом определения $\bar{u} \equiv [u^*]^T \gamma^0 = u^\dagger \gamma^0$ они нормированы следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u}(\mathbf{p}, s) u(\mathbf{p}, s') &= 2\delta_{ss'} m, \\ \bar{v}(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s') &= -2\delta_{ss'} m, \\ \bar{u}(\mathbf{p}, s) v(\mathbf{p}, s') &= 0. \end{aligned}$$

Решения уравнения (П.13) с помощью матриц Паули $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$ имеют явный вид

$$\begin{aligned} u(\mathbf{p}, s) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \chi_s \\ E+m \chi_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_+ \chi_s \\ \lambda_- \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \chi_s \end{pmatrix}, \\ v(\mathbf{p}, s) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \bar{\chi}_s \\ E+m \bar{\chi}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_- \frac{\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \bar{\chi}_s \\ \lambda_+ \bar{\chi}_s \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Поскольку $E_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = E_{\mathbf{p}^} \delta^3(\mathbf{p}^* - \mathbf{k}^*)$.

где $\lambda_{\pm} = \sqrt{E \pm m}$. Биспиноры χ_s (и/или $\bar{\chi}_s$) можно выбрать в виде двух ортогональных базисных векторов

$$\chi_{\uparrow} \equiv \chi_1 \equiv \chi_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \chi_{\downarrow} \equiv \chi_2 \equiv \chi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{П.15})$$

являющихся собственными векторами матрицы Паули $\sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ с собственными значениями $+1$ и -1 и ориентированными соответственно вдоль и против 3-й (z -оси).

Состояние (П.11) является дираковским спинором и нормировано согласно условию

$$\langle \mathbf{y} | \mathbf{x} \rangle = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{I}_{4 \times 4},$$

где выражение $\hat{I}_{4 \times 4}$ представляет собой единичную 4×4 -матрицу в спиновом пространстве.

Единичные операторы (операторы «1») в одночастичном базисе можно задать в виде

$$\begin{aligned} \hat{I}_{p,1} &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{p}, s\rangle \langle \mathbf{p}, s|}{2E_{\mathbf{p}}}, \\ \hat{I}_{x,1} &= \int d\mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}|. \end{aligned} \quad (\text{П.16})$$

Скалярное произведение состояний, определенных соотношениями (П.9) и (П.11),

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{p}, s \rangle = u(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \quad (\text{П.17})$$

позволяет выразить их друг через друга:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}, s | &= \int d\mathbf{x} u^{\dagger}(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \langle \mathbf{x} |, \\ \langle \mathbf{x} | &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{u(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{2E_{\mathbf{p}}} \langle \mathbf{p}, s |. \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

Можно заметить, что приведенное в (П.18) выражение для $\langle \mathbf{x} |$, заданное формулой (П.11), отличается (нормировочным множителем) от нерелятивистского выражения для бесспинового состояния

$$\langle \mathbf{x} | = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \langle \mathbf{p} |, \quad (\text{П.19})$$

где $\langle \mathbf{p} |$ задается аналогично формуле (П.9), однако для бесспиновой частицы.

Одночастичное состояние $|\psi\rangle$ можно выразить через $|\mathbf{p}, s\rangle$ и $|\mathbf{x}\rangle$ состояния, используя условие полноты в виде единичных операторов (П.16):

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\equiv \hat{I}_{\mathbf{p},1}|\psi\rangle = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{|\mathbf{p}, s\rangle\langle\mathbf{p}, s|\psi\rangle}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\mathbf{p}, s\rangle \frac{\tilde{\psi}(\mathbf{p}, s)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}, \\ |\psi\rangle &\equiv \hat{I}_{\mathbf{x},1}|\psi\rangle = \int d\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|\psi\rangle \equiv \int d\mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle\psi(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Здесь введены обозначения $\tilde{\psi}(\mathbf{p}, s) = \langle\mathbf{p}, s|\psi\rangle/\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}$ и $\psi(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{x}|\psi\rangle$.

Из условия нормировки состояний (П.20) в виде $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ для волновых функций $\tilde{\psi}(\mathbf{p}, s)$ и $\psi(\mathbf{x})$ получаются свои условия нормирования:

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\langle\psi|\mathbf{p}, s\rangle\langle\mathbf{p}, s|\psi\rangle}{2E_{\mathbf{p}}} = \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\tilde{\psi}(\mathbf{p}, s)|^2 = 1, \\ \langle\psi|\psi\rangle &= \int d\mathbf{x}\langle\psi|\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|\psi\rangle = \int d\mathbf{x}|\psi(\mathbf{x})|^2 = 1. \end{aligned}$$

Или

$$\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} |\tilde{\psi}(\mathbf{p}, s)|^2 = \int d\mathbf{x}|\psi(\mathbf{x})|^2 = 1. \quad (\text{П.21})$$

Скалярная функция $\tilde{\psi}(\mathbf{p}, s)$ и спинор Дирака $\psi(\mathbf{x})$ связаны друг с другом фурье-преобразованием*

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}) &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{\psi}(\mathbf{p}, s)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} u(\mathbf{p}, s) e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}, \\ \tilde{\psi}(\mathbf{p}, s) &= \frac{u^\dagger(\mathbf{p}, s)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int d\mathbf{x} \psi(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (\text{П.22})$$

*Для проверки правильности преобразования можно подставить верхнее выражение (П.22) в нижнее, учесть нормировку спиноров $u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s) = 2E_{\mathbf{p}}$, что $\int (d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{x}})/(2\pi)^3 = \delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})$, и получить тождество

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\mathbf{p}, s) &= \int d\mathbf{x} \frac{u^\dagger(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3} u(\mathbf{p}', s) \frac{e^{i\mathbf{p}'\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}', s) = \\ &= \int d\mathbf{p}' \int \frac{d\mathbf{x} e^{i(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\mathbf{x}}}{(2\pi)^3} \frac{u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}', s)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}\sqrt{2E_{\mathbf{p}'}}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}', s) = \frac{u^\dagger(\mathbf{p}, s)u(\mathbf{p}, s)}{2E_{\mathbf{p}}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}, s) = \tilde{\psi}(\mathbf{p}, s). \end{aligned}$$

Более подробно эти формулы можно пояснить как

$$\begin{aligned}\psi(\mathbf{x}) \equiv \langle \mathbf{x} | \psi \rangle &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} u(\mathbf{p}, s) \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \frac{\langle \mathbf{p}, s | \psi \rangle}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} = \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} u(\mathbf{p}, s) \frac{e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \tilde{\psi}(\mathbf{p}, s),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(\mathbf{p}, s) \equiv \frac{\langle \mathbf{p}, s | \psi \rangle}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} &= \int d\mathbf{x} \frac{u^\dagger(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \langle \mathbf{x} | \int d\mathbf{y} | \mathbf{y} \rangle \psi(\mathbf{y}) = \\ &= \int d\mathbf{x} d\mathbf{y} \frac{u^\dagger(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle \psi(\mathbf{y}) = \int d\mathbf{x} \frac{u^\dagger(\mathbf{p}, s) e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} \psi(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Действие оператора трансляции. В данном рассмотрении важную роль играет выражение для действия оператора сдвига на одночастичное состояние в \mathbf{p} -представлении

$$e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}} |\mathbf{p}\rangle = \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}} |\mathbf{p} + \mathbf{q}\rangle. \quad (\text{П.23})$$

В качестве пояснения его смысла заметим, что оператор пространственного сдвига (трансляции), определяемый условием $\hat{\mathbf{T}}_a |\mathbf{x}\rangle = |\mathbf{x} - \mathbf{a}\rangle$, дается выражением $\hat{\mathbf{T}}_a = e^{-i\mathbf{a}\hat{\mathbf{P}}}$, где $\hat{\mathbf{P}} = -i(\partial/\partial\mathbf{x})$ — оператор импульса. Аналогично оператор сдвига в импульсном пространстве, определяемый условием $\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{q}} |\mathbf{p}\rangle = |\mathbf{p} + \mathbf{q}\rangle$, дается выражением $\hat{\mathbf{T}}_{\mathbf{q}} = e^{+i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}}$. Здесь оператор $\hat{\mathbf{X}} = -i(\partial/\partial\mathbf{p})$ представляет собой оператор (3-мерной) координаты. Его действие на состояние $|\mathbf{x}\rangle$ с фиксированным значением координаты сводится к умножению этого состояния на величину этой координаты: $\hat{\mathbf{X}}|\mathbf{x}\rangle = \mathbf{x}|\mathbf{x}\rangle$. Поэтому оператор $e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}}$ переводит состояние с импульсом \mathbf{p} в состояние с импульсом $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, т. е. имеет место $e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}} |\mathbf{p}\rangle = C |\mathbf{p} + \mathbf{q}\rangle$, и остается показать, что нормировочная константа $C = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}}/\sqrt{2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}$.

Это, например, можно увидеть из нормировочных условий: $\langle \mathbf{p} | \mathbf{p}' \rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ и $\langle \mathbf{p} + \mathbf{q} | \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle = (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$, т. е. $\frac{\langle \mathbf{p} + \mathbf{q} | \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle}{2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}} = \frac{\langle \mathbf{p} | \mathbf{p} \rangle}{2E_{\mathbf{p}}}$, откуда $(\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}/\sqrt{2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}) |\mathbf{p} + \mathbf{q}\rangle = e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}} |\mathbf{p}\rangle$.

Другой вариант обоснования выражения (П.23) может быть основан на наблюдении, что если \mathbf{q} не зависит от \mathbf{p} , то $d\mathbf{p} = d(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ и, поскольку действие оператора координаты на функцию $e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}}$ имеет вид $\hat{\mathbf{X}} e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}} = -i(d/d\mathbf{p}) e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}} = \mathbf{x} e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}}$, то действие оператора сдвига $e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}}$ на эту функцию даст

$e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}} e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}} = e^{i\mathbf{x}(\mathbf{q}+\mathbf{p})}$. Далее, заменяя переменную интегрирования в формуле для нерелятивистского состояния (П.19), имеем

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}} \frac{\langle \mathbf{p} |}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}} &= \int \frac{d(\mathbf{p} + \mathbf{q})}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x}(\mathbf{p}+\mathbf{q})} \frac{\langle \mathbf{p} + \mathbf{q} |}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}} = \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{x}\mathbf{p}} \frac{\langle \mathbf{p} + \mathbf{q} | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}}. \end{aligned}$$

Совпадение подынтегральных функций обосновывает выражение (П.23).

Состояния, содержащие n частиц. Единичные операторы, определенные формулами (П.16), обобщаются на случай n -частичного состояния в виде

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\mathbf{p},n} &= \int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i}} \right) \frac{|\{p\}\rangle \langle \{p\}|}{n!}, \\ \hat{I}_{\mathbf{x},n} &= \int \left(\prod_{i=1}^n d\mathbf{x}_i \right) \frac{|\{x\}\rangle \langle \{x\}|}{n!}. \end{aligned} \quad (\text{П.24})$$

Здесь и далее символы $\{p\}$ и $\{x\}$ используются для компактной записи выражений $\{p\} \equiv (p_1, \dots, p_n)$ и $\{x\} \equiv (x_1, \dots, x_n)$. Так называемый многочастичный бра-вектор $\langle \{x\} |$ имеет вид

$$\langle \{x\} | = \langle 0 | \psi_{m_1}(\mathbf{x}_1), \dots, \psi_{m_n}(\mathbf{x}_n), \quad (\text{П.25})$$

где $x_i = (\mathbf{x}_i, m_i)$, и m_i нумеруют спинорные строки полей $\psi(\mathbf{x}_i)$. По аналогии с выражением (П.20) волновые функции в импульсном и координатном представлениях для состояния из n частиц $|\psi\rangle$ можно получить с помощью единичных операторов (П.24)

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &\equiv \hat{I}_{\mathbf{p},n} |\psi\rangle = \int \left(\prod_{i=1}^n d\tilde{\mathbf{p}}_i \right) \frac{\tilde{\psi}(\{p\})}{\sqrt{n!}} |\{p\}\rangle, \\ |\psi\rangle &\equiv \hat{I}_{\mathbf{x},n} |\psi\rangle = \int \left(\prod_{i=1}^n d\mathbf{x}_i \right) \frac{\psi(\{x\})}{\sqrt{n!}} |\{x\}\rangle, \end{aligned} \quad (\text{П.26})$$

$$\text{где } \tilde{\psi}(\{p\}) = \frac{\langle \{p\} | \psi \rangle}{\sqrt{n!} \prod_i \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}} = \frac{\langle \{p\} | \psi \rangle}{\sqrt{n!}} \left(\prod_i \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}} \right), \quad (\text{П.27})$$

$$\psi(\{x\}) = \frac{1}{\sqrt{n!}} \langle \{x\} | \psi \rangle$$

и для удобства введено обозначение

$$d\tilde{\mathbf{p}}_i \equiv \frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}}.$$

Многочастичные волновые функции $\tilde{\psi}(\{p\})$ и $\psi(\{x\})$ антисимметричны при перестановке всех n частиц, они также являются фурье-образами друг друга*:

$$\begin{aligned} \psi(\{x\}) &= \int \left(\prod_{i=1}^n d\tilde{\mathbf{p}}_i u_{m_i}(\mathbf{p}_i, s_i) e^{i\mathbf{p}_i \mathbf{x}_i} \right) \tilde{\psi}(\{p\}), \\ \tilde{\psi}(\{p\}) &= \int \left(\prod_{i=1}^n d\mathbf{x}_i \frac{u_{m_i}^\dagger(\mathbf{p}_i, s_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}} e^{-i\mathbf{p}_i \mathbf{x}_i} \right) \psi(\{x\}). \end{aligned} \quad (\text{П.28})$$

При получении выражений (П.28) использовались следующие условия нормировки:

$$\begin{aligned} \langle \{x\} | \{p\} \rangle &= n! \prod_j^n u_{m_j}(\mathbf{p}_j, s_j) e^{i\mathbf{p}_j \mathbf{x}_j}, \\ \langle \{p\} | \{x\} \rangle &= \langle \{x\} | \{p\} \rangle^\dagger = n! \prod_j^n u_{m_j}^\dagger(\mathbf{p}_j, s_j) e^{-i\mathbf{p}_j \mathbf{x}_j}. \end{aligned} \quad (\text{П.29})$$

С их учетом из определений (П.27) следует

$$\begin{aligned} \psi(\{x\}) &= \frac{\langle \{x\} | \hat{I}_{\mathbf{p}, n} | \psi \rangle}{\sqrt{n!}} = \frac{1}{n!} \int \prod_i^n d\tilde{\mathbf{p}}_i \tilde{\psi}_n(\{p\}) \langle \{x\} | \{p\} \rangle = \\ &= \int \prod_i^n d\tilde{\mathbf{p}}_i u_{m_i}(\mathbf{p}_i, s_i) e^{i\mathbf{p}_i \mathbf{x}_i} \tilde{\psi}(\{p\}), \\ \tilde{\psi}(\{p\}) &= \frac{\langle \{p\} | \hat{I}_{\mathbf{x}, n} | \psi \rangle}{\sqrt{n!}} \prod_i^n \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}} = \int \prod_i^n \frac{d\mathbf{x}_i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}} \frac{\psi(\{x\})}{n!} \langle \{p\} | \{x\} \rangle = \\ &= \int \prod_i^n d\mathbf{x}_i \frac{u_{m_i}^\dagger(\mathbf{p}_i, s_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}} e^{-i\mathbf{p}_i \mathbf{x}_i} \psi(\{x\}). \end{aligned} \quad (\text{П.30})$$

*Это проверяется прямой подстановкой $\psi(\{x\})$ в $\tilde{\psi}(\{p\})$ и применением условия нормировки спиноров.

Из условия нормировки многочастичных функций $\langle \psi | \psi \rangle = 1$ для волновых функций $\tilde{\psi}(\{p\})$ и $\psi(\{x\})$ следуют нормировочные условия в виде

$$\int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3} \right) |\tilde{\psi}(\{p\})|^2 = \int \left(\prod_{i=1}^n d\mathbf{x}_i \right) |\psi(\{x\})|^2 = 1. \quad (\text{П.31})$$

Действительно, это можно показать, используя определение волновых функций $|\psi\rangle$ согласно (П.26). Для их скалярного произведения в \mathbf{p} -представлении имеется

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \int \left(\prod_i^n d\tilde{\mathbf{p}}_i \right) \frac{\tilde{\psi}(\{p\})}{\sqrt{n!}} \langle \psi | \{p\} \rangle \equiv \\ &\equiv \int \left(\prod_i^n \frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}} \right) \frac{\tilde{\psi}(\{p\})}{\sqrt{n!}} \langle \psi | \{p\} \rangle. \end{aligned}$$

С учетом эрмитово-сопряженного к (П.27) выражения

$$[\tilde{\psi}(\{p\})]^\dagger \sqrt{n!} \left(\prod_i^n \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \right) = \langle \{p\} | \psi \rangle^\dagger = \langle \psi | \{p\} \rangle$$

для $\langle \psi | \psi \rangle$ из предыдущей формулы следует

$$\begin{aligned} \int \left(\prod_i^n \frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}} \right) \frac{\tilde{\psi}(\{p\})}{\sqrt{n!}} [\tilde{\psi}(\{p\})]^\dagger \sqrt{n!} \left(\prod_i^n \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}} \right) = \\ = \int \left(\prod_i^n \frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3} \right) |\tilde{\psi}(\{p\})|^2 = 1. \end{aligned}$$

С использованием определения функций $|\psi\rangle$ (П.26) для скалярного произведения в \mathbf{x} -представлении с учетом эрмитового сопряжения к (П.27) в виде $\langle \psi | \{x\} \rangle = \langle \{x\} | \psi \rangle^\dagger = \psi(\{x\})^\dagger \sqrt{n!}$ получается

$$\langle \psi | \psi \rangle = \int \left(\prod_{i=1}^n d\mathbf{x}_i \right) \frac{\psi(\{x\})}{\sqrt{n!}} \langle \psi | \{x\} \rangle = \int \left(\prod_i^n d\mathbf{x}_i \right) |\psi(\{x\})|^2 = 1. \quad (\text{П.32})$$

Для полноты картины покажем, что многочастичные состояния нормированы следующим образом:

$$\langle \{p\} | \{p'\} \rangle = n! \prod_i^n (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i} \delta^3(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}'_i) \delta_{r_i, r'_i}. \quad (\text{П.33})$$

Действительно, состояние

$$|\{p'\}\rangle \equiv \hat{I}_{\mathbf{p},n}|\{p'\}\rangle = \int \left(\prod_i^n \frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i}} \right) \frac{|\{p\}\rangle}{n!} \langle \{p\} | \{p'\} \rangle$$

должно быть эквивалентно (тождественно равно) состоянию $|\{p'\}\rangle$. Поэтому произведение $|\{p\}\rangle \langle \{p\} | \{p'\} \rangle$ тоже должно быть пропорционально $|\{p'\}\rangle$, однако такое возможно, только если $\langle \{p\} | \{p'\} \rangle = C\delta(\{p\} - \{p'\})$. Поэтому

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\mathbf{p},n}|\{p'\}\rangle &= \int \left(\prod_i^n \frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i}} \right) \frac{|\{p\}\rangle}{n!} C\delta(\{p\} - \{p'\}) = \\ &= |\{p'\}\rangle \left(\prod_i^n \frac{1}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}'_i}} \right) \frac{C}{n!} \end{aligned}$$

совпадает с $|\{p'\}\rangle$ при $C = n! \left(\prod_i^n (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}'_i} \right)$. Откуда следует выражение (П.33).

Волновая функция ядра как связанной составной системы. На основе формальных соотношений предыдущего раздела волновую функцию $|P_n\rangle$, которая полностью описывает ядро A , находящееся в n -м квантовом состоянии с 4-импульсом P_n (см. рис. 2, *a*), можно представить в виде произведения состояний A свободных нуклонов $|\{p\}\rangle$, взвешенного с волновой функцией связанного состояния, которую обозначим пока как $\tilde{\psi}'_n(\{p\})$. В (импульсном) p -представлении имеем

$$|P_n\rangle = \int \left(\prod_{i=1}^A d\tilde{\mathbf{p}}_i \right) \frac{\tilde{\psi}'_n(\{p\})}{\sqrt{A!}} |\{p\}\rangle. \quad (\text{П.34})$$

Волновая функция $\tilde{\psi}'_n(\{p\})$ призвана описывать всю специфику внутренней структуры ядра и его движения как целое с проекцией спина s и полным 3-импульсом

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i. \quad (\text{П.35})$$

Поскольку внутреннее квантовое состояние системы из A нуклонов не может зависеть от движения их общего центра масс, то волновая функция $\tilde{\psi}'_n(\{p\})$ может быть представлена в виде произведения волновой функции $\tilde{\psi}_n(\{p^*\})$, описывающей внутреннюю структуру ядра в его системе центра масс (соответствующие ей импульсы отмечены верхним индексом \star), и волновой функции

$\Phi_n(p)$, описывающей движение ядра как целого, с импульсом \mathbf{p} из (П.35) и проекцией спина ядра s :

$$\tilde{\psi}'_n(\{p\}) = \tilde{\psi}_n(\{p^*\})\Phi_n(p). \quad (\text{П.36})$$

Здесь обе глобальные переменные \mathbf{p} и s «спрятаны» в аргументе $p = (\mathbf{p}, s)$ функции $\Phi_n(p)$. Понятно, что факторизация (П.36) имеет смысл только для ядер с $A > 1$. В лабораторной системе отсчета (если она не совпадает с системой покоя ядра, т. е. $\mathbf{p} \neq 0$) 3-импульс i -го нуклона \mathbf{p}_i определяется соотношением

$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^* + \mathbf{p}/A, \quad (\text{П.37})$$

где \mathbf{p} — полный импульс ядра — задан формулой (П.35), а 3-импульс i -го нуклона в системе центра масс (покоя) ядра обозначен как \mathbf{p}_i^* .

С учетом выражения (П.36) фоковское состояние (П.34) можно переписать как *

$$\begin{aligned} |P_n\rangle &= \int \left(\prod_i^A d\tilde{\mathbf{p}}_i \right) \frac{\tilde{\psi}'_n(\{p\})}{\sqrt{A!}} |\{p\}\rangle = \\ &= \int \left(\prod_i^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \Phi_n(p) |\{p^*\}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.38})$$

Волновую функцию $\Phi_n(p)$ будем представлять в виде

$$\Phi_n(p) = (2\pi)^3 \sqrt{2P_n^0} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}) \delta_{sS}, \quad (\text{П.39})$$

который соответствует ядру с полным спином S , определенным значением 3-импульса \mathbf{P} и энергией $P_n^0 = E_{\mathbf{p}} + \varepsilon_n$, учитывающей энергию возбуждения ядра ε_n .

Выберем условия нормировки ядерных состояний $|P_n\rangle$ из (П.38) в том же виде, как это имеет место для одночастичных состояний $|\mathbf{p}, s\rangle$ в (П.10), т. е.

$$\langle P'_m | P_n \rangle = (2\pi)^3 2P_n^0 \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta_{nm}. \quad (\text{П.40})$$

Формально (П.38) выглядит, как будто $d\tilde{\mathbf{p}}_i \equiv d\mathbf{p}_i / ((2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}) = d\tilde{\mathbf{p}}_i^ \equiv d\mathbf{p}_i^* / ((2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}})$. Однако если $\mathbf{p} = \mathbf{P} \neq 0$ и фиксировано, то из (П.37) следует $d\mathbf{p}_i = d\mathbf{p}_i^*$. И тогда $d\tilde{\mathbf{p}}_i \neq d\tilde{\mathbf{p}}_i^*$ поскольку $E_{\mathbf{p}_i} \neq E_{\mathbf{p}_i^*}$. Тем не менее имеются лоренц-инварианты $E_{\mathbf{p}} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = E_{\mathbf{p}^*} \delta^3(\mathbf{p}^* - \mathbf{k}^*)$, $d\mathbf{p}^* / E_{\mathbf{p}^*} = d\mathbf{p} / E_{\mathbf{p}}$ и $\sqrt{E_{\mathbf{p}^*}} a_{\mathbf{p}^*}^s = \sqrt{E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^s$. Последнее следует из [38] (с. 74, (3.109) и (3.110)) и выглядит логично с точки зрения определения одночастичного инвариантного состояния (П.9). Тогда статус инварианта приобретает произведение $(d\mathbf{p}^* / E_{\mathbf{p}^*})(\sqrt{E_{\mathbf{p}^*}} a_{\mathbf{p}^*}^s) = (d\mathbf{p} / E_{\mathbf{p}})(\sqrt{E_{\mathbf{p}}} a_{\mathbf{p}}^s)$, откуда следует инвариантность $(d\mathbf{p}^* / \sqrt{E_{\mathbf{p}^*}}) a_{\mathbf{p}^*}^s = (d\mathbf{p} / \sqrt{E_{\mathbf{p}}}) a_{\mathbf{p}}^s$, поскольку именно вместе с соответствующим оператором рождения или уничтожения выражение $d\mathbf{p} / \sqrt{E_{\mathbf{p}}}$ входит в определения полевых операторов (П.12) и т. п.

Тогда для ядерных состояний $|n\rangle$, описывающих ядро в его системе центра масс, будет иметь место условие нормировки в виде

$$\langle m|n\rangle \equiv \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}) \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) = \delta_{mn}. \quad (\text{П.41})$$

Дельта-функция $\delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right)$ уменьшает число независимых импульсов в (П.41) на единицу. Отметим, что при $\mathbf{P} = 0$ волновые функции $|n\rangle$ и $|P_n\rangle$ описывают одно и то же состояние ядра, однако отличаются нормировочным условием. Соответствующее нормировке (П.41) явное выражение для $|n\rangle$ можно записать чисто формально в виде

$$|n\rangle = \int \left(\prod_{i=1}^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \left[(2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) \right]^{1/2} |\{p^*\}\rangle. \quad (\text{П.42})$$

Если явно учесть вид $d\tilde{\mathbf{p}}_i^*$, то

$$|n\rangle = \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \sqrt{(2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right)} |\{p^*\}\rangle.$$

Убедимся в правильности нормировки (П.40), т. е. вычислим скалярное произведение ядерных состояний $\langle P'_m|P_n\rangle$. Если $|P_n\rangle$ задано согласно (П.38), то с учетом переобозначения переменной интегрирования

$$\langle P'_m| = \int \left(\prod_j^A d\tilde{\mathbf{p}}_j^* \right) \frac{\tilde{\psi}_m^*(\{p'^*\})}{\sqrt{A!}} \Phi_m^*(p') \langle \{p'^*\} |. \quad (\text{П.43})$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle P'_m|P_n\rangle &= \int \left(\prod_j^A d\tilde{\mathbf{p}}_j^* \right) \frac{\tilde{\psi}_m^*(\{p'^*\})}{\sqrt{A!}} \Phi_m^*(p') \langle \{p'^*\} | \times \\ &\quad \times \int \left(\prod_i^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \Phi_n(p) |\{p^*\}\rangle = \\ &= \int \left(\prod_{j,i}^A \frac{d\mathbf{p}_j'^* d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_j'^*} 2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \right) \tilde{\psi}_m^*(\{p'^*\}) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}) \times \\ &\quad \times \Phi_m^*(p') \Phi_n(p) \frac{\langle \{p'^*\} | \{p^*\} \rangle}{A!}. \end{aligned}$$

Используя далее условие нормировки (П.33) для многочастичного состояния

$$\frac{\langle \{p'^*\} | \{p^*\} \rangle}{A!} = \prod_k (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_k^*} \delta^3(\mathbf{p}_k^* - \mathbf{p}'_k) \delta_{r_k, r'_k}$$

и определение (П.39) для функций $\Phi_m^*(p')$ и $\Phi_n(p)$, перейдем к выражению

$$\begin{aligned} \langle P'_m | P_n \rangle &= \int \left(\prod_{j,i} \frac{d\mathbf{p}'_j^* d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{\mathbf{p}'_j^*} 2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \right) \tilde{\psi}_m^*(\{p'^*\}) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}) \times \\ &\times \left[(2\pi)^6 \sqrt{2P_m^0 2P_n^0} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{P}'_m) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}_n) \right] \prod_k (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_k^*} \delta^3(\mathbf{p}_k^* - \mathbf{p}'_k). \end{aligned}$$

Снимая интегрирование по \mathbf{p}'_k с помощью дельта-функций, получим выражение

$$\begin{aligned} (2\pi)^6 \int \left(\prod_k (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_k^*} \right) \left(\prod_i \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^6 \sqrt{(2E_{\mathbf{p}_i^*})^2}} \right) \times \\ \times \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}) \left[2P_n^0 \delta^3(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m) \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) \right], \end{aligned}$$

которое окончательно переписывается в виде

$$\begin{aligned} \langle P'_m | P_n \rangle &= \left[(2\pi)^3 2P_n^0 \delta^3(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m) \right] \times \\ &\times \underbrace{\int \left(\prod_i \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right)}_{\langle m|n \rangle \equiv \delta_{mn}}, \end{aligned}$$

совпадающем с формулой (П.40). При этом было использовано равенство

$$\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{P}'_m) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}_n) \prod_k \delta^3(\mathbf{p}_k^* - \mathbf{p}'_k) = \delta^3(\mathbf{P}_n - \mathbf{P}_m) \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right),$$

вытекающее из $\prod_k \delta^3(\mathbf{p}_k^* - \mathbf{p}'_k) = \prod_k \delta^3(\mathbf{p}_k - \mathbf{p}'_k)$, на основе $\mathbf{p} = \sum_{j=1}^A \mathbf{p}_j$ и $\mathbf{p}' = \sum_{j=1}^A \mathbf{p}'_j$.

П.3. Пояснения к вычислению амплитуды рассеяния. П.3.1. Формула для адронного тока h_{mn}^μ . Получим выражение (5.13) для адронного тока h_{mn}^μ , начиная с формулы (5.10), т. е. $H_{mn}^\mu(P_n, P'_m) = \langle P'_m | H^\mu(0) | P_n \rangle$. Волновые функции ядра в конечном и начальном состояниях даются формулами (П.38) и (П.43):

$$\begin{aligned} \langle P'_m | &= \int \left(\prod_j^A d\tilde{\mathbf{p}}_j^* \right) \frac{\tilde{\psi}_m^* (\{p'^*\})}{\sqrt{A!}} \Phi_m^*(p') \langle \{p'^*\} |, \\ | P_n \rangle &= \int \left(\prod_i^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n (\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \Phi_n(p) | \{p^*\} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.44})$$

Согласно определению (П.39) или (5.3) произведение «внешних» волновых функций таково:

$$\Phi_m^*(p') \Phi_n(p) = (2\pi)^3 \sqrt{2P_m^0} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{P}'_m) (2\pi)^3 \sqrt{2P_n^0} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}_n),$$

где \mathbf{P}_n и \mathbf{P}'_m — 3-импульсы движения всего ядра как целого, а $\mathbf{p} = \sum_i^A \mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}' = \sum_i^A \mathbf{p}'_i$ — переменные аргументы волновых функций. Из определения $H^\mu(x)$ (5.8) имеем для $x = 0$:

$$\begin{aligned} H_{mn}^\mu(P_n, P'_m) &= \langle P'_m | H^\mu(0) | P_n \rangle \equiv \\ &\equiv \langle P'_m | \sum_k^A : \bar{\psi}_k(0) O_k^\mu \psi_k(0) : | P_n \rangle \times [\delta^4(q + P_n - P'_m)]. \end{aligned}$$

Наличие этой δ^4 -функции неявно подразумевается. Из определения одночастичных фермионных квантово-полевых операторов (П.12) имеем для нуклонов с нулевым аргументом

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{y}'}{\sqrt{2E_{\mathbf{y}'}}} \sum_{s=1,2} a_s^+(\mathbf{y}') \bar{u}(\mathbf{y}', s), \\ \hat{\psi}(0) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\mathbf{y}}{\sqrt{2E_{\mathbf{y}}}} \sum_{r=1,2} a_r(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}, r). \end{aligned}$$

Подставляя эти две формулы в адронный ток $H_{mn}^\mu(P_n, P'_m)$, получаем для него выражение

$$\langle P'_m | \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_k^A : \int \frac{d\mathbf{y}'_k}{\sqrt{2E_{\mathbf{y}'_k}}} \sum_{s=1,2} a_s^+(\mathbf{y}'_k) \bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu \int \frac{d\mathbf{y}_k}{\sqrt{2E_{\mathbf{y}_k}}} \times$$

$$\begin{aligned} \times \sum_{r=1,2} a_r(\mathbf{y}_k) u(\mathbf{y}_k, r_k) : |P_n\rangle = \sum_k^A \sum_{s_k, r_k}^{1,2} \int \frac{d\mathbf{y}'_k d\mathbf{y}_k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{y}'_k} 2E_{\mathbf{y}_k}}} \times \\ \times \langle P'_m | a_s^+(\mathbf{y}'_k) [\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k) a_r(\mathbf{y}_k)] | P_n \rangle. \end{aligned}$$

Откуда, учитывая явный вид $\langle P'_m |$ и $|P_n\rangle$ и введя обозначение $H_{mn}^\mu \equiv H_{mn}^\mu(P_n, P'_m)$, имеем

$$\begin{aligned} H_{mn}^\mu = \sum_k^A \sum_{s_k, r_k}^{1,2} \int \frac{d\mathbf{y}'_k d\mathbf{y}_k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{y}'_k} 2E_{\mathbf{y}_k}}} \times \\ \times \int \left(\prod_j^A d\tilde{\mathbf{p}}_j^{*\prime} \right) \frac{\tilde{\psi}_m^*(\{p^{*\prime}\})}{\sqrt{A!}} \Phi_m^*(p') \int \left(\prod_i^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \times \\ \times \Phi_n(p) \langle \{p^{*\prime}\} | a_s^+(\mathbf{y}'_k) [\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k)] a_r(\mathbf{y}_k) | \{p^*\} \rangle. \quad (\text{П.45}) \end{aligned}$$

Здесь необходимо вычислить матричный элемент одночастичного оператора слабого тока по многочастичному состоянию из A свободных нуклонов:

$$w_A^k \equiv \langle \{p^{*\prime}\} | a_s^+(\mathbf{y}'_k) [\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k)] a_r(\mathbf{y}_k) | \{p^*\} \rangle. \quad (\text{П.46})$$

Учитывая определение $\{p^*\}$, состояния $\langle \{p^{*\prime}\} |$ и $| \{p^*\} \rangle$ можно записать, выделив активный k -й нуклон, например, в виде

$$\begin{aligned} A \langle \{p^{*\prime}\} | &= \langle 0 | (\dots, p_k^{*\prime}, \dots); \dots, a_{s_{p'}}(\mathbf{p}_k^{*\prime}), \dots |, \\ | \{p^*\} \rangle_A &= | \dots, a_{r_p}^+(\mathbf{p}_k^*), \dots; (\dots, p_k^*, \dots) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Тогда w_A^k представляется как произведение нормировочного скалярного произведения для $(A-1)$ нуклонов (см. условие (П.33)):

$$\begin{aligned} A_{-1} \langle \{p^{*\prime}\} | | \{p^*\} \rangle_{A-1} &\equiv \langle 0 | \dots, p_{k-1}^{*\prime}, p_{k+1}^{*\prime}, \dots | \dots, p_{k-1}^*, p_{k+1}^*, \dots \rangle | 0 \rangle = \\ &= (A-1)! \left(\prod_{l \neq k}^{A-1} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_l^*} \delta^3(\mathbf{p}_l^* - \mathbf{p}_l^{*\prime}) \delta_{r_l, r_l'} \right) \end{aligned}$$

и матричного элемента слабого тока по однонуклонному k -му состоянию

$$w_1^k \equiv \langle \mathbf{p}_k^{*\prime}, s_{p'} | a_s^+(\mathbf{y}'_k) [\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k)] a_r(\mathbf{y}_k) | \mathbf{p}_k^*, r_p \rangle. \quad (\text{П.47})$$

То есть выражение (П.46) принимает вид

$$\begin{aligned}
 w_A^k &= \langle 0 | (\dots, p_k^*, \dots); \dots, a_{s_{p'}}(\mathbf{p}_k^*), \dots | a_s^+(\mathbf{y}'_k) [\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) \times \\
 &\quad \times O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k)] a_r(\mathbf{y}_k) | \dots, a_{r_p}^+(\mathbf{p}_k^*), \dots; (\dots, p_k^*, \dots) | 0 \rangle = \\
 &= A_{-1} \langle \{p^*\} | | \{p^*\} \rangle_{A-1} \times w_1^k. \quad (\text{П.48})
 \end{aligned}$$

Одночастичный матричный элемент w_1^k из (П.47) преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 w_1^k &= \langle \mathbf{p}_k^*, s_{p'} | a_s^+(\mathbf{y}'_k) [\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k)] a_r(\mathbf{y}_k) | \mathbf{p}_k^*, r_p \rangle = \\
 &= \underbrace{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{p_k^*} 2E_{p_{k'}^*}}}_{\text{нормировка}} \langle 0 | a_{s_{p'}}(\mathbf{p}_k^*) | a_s^+(\mathbf{y}'_k) [\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k)] \times \\
 &\quad \underbrace{\delta^3(\mathbf{p}_k^* - \mathbf{y}'_k)}_{\delta_{s, s_{p'}}} \underbrace{\delta^3(\mathbf{y}_k + \mathbf{q} - \mathbf{y}'_k)}_{?} \rangle \times \\
 &\quad \times \underbrace{a_r(\mathbf{y}_k) | \dots, a_{r_p}^+(\mathbf{p}_k^*) | 0 \rangle}_{\delta^3(\mathbf{p}_k^* - \mathbf{y}_k) \delta_{r, r_p}} = (2\pi)^3 \sqrt{2E_{p_k^*} 2E_{p_{k'}^*}} \delta^3(\mathbf{p}_k^* - \mathbf{y}'_k) \delta_{s, s_{p'}} \times \\
 &\quad \times \delta^3(\mathbf{p}_k^* - \mathbf{y}_k) \delta_{r, r_p} \underbrace{[\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k)]}_{\times \delta^3(\mathbf{y}_k + \mathbf{q} - \mathbf{y}'_k)} \underbrace{\langle 0 | 0 \rangle}_1.
 \end{aligned}$$

Фактор одночастичной нормировки k -й частицы должен иметь множитель $(2\pi)^{2 \cdot 3/2}$ для того, чтобы нормировочное условие (П.33) осталось справедливым также для A частиц (например, в том случае, когда оператор $O_k^\mu \equiv 1$). Дельта-функция $\delta^3(\mathbf{y}_k + \mathbf{q} - \mathbf{y}'_k)$ означает, что нейтрино взаимодействует именно с k -м нуклоном, изменяя его импульс с \mathbf{y}_k на $\mathbf{y}'_k = \mathbf{q} + \mathbf{y}_k$.

С учетом этого выражения для w_1^k матричный элемент слабого тока по состоянию из A свободных нуклонов (П.48) принимает вид

$$\begin{aligned}
 w_A^k &= (A-1)! \left(\prod_{l \neq k}^{A-1} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_l^*} \delta^3(\mathbf{p}_l^* - \mathbf{p}_{l'}^*) \delta_{r_l, r_{l'}} \right) \times \\
 &\quad \times [\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k)] \delta^3(\mathbf{y}_k + \mathbf{q} - \mathbf{y}'_k) \times \\
 &\quad \times (2\pi)^3 \sqrt{2E_{p_k^*} 2E_{p_{k'}^*}} \delta^3(\mathbf{p}_k^* - \mathbf{y}'_k) \delta_{s_k, s_{p'}} \delta^3(\mathbf{p}_k^* - \mathbf{y}_k) \delta_{r_k, r_p}.
 \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в формулу для адронного тока (П.45) и учитывая, что активный k -й нуклон может быть на любом из A мест в ядре, что дает

множитель A , получаем

$$\begin{aligned}
 H_{mn}^\mu &= \sum_k \sum_{s_k, r_k} \int \frac{d\mathbf{y}'_k d\mathbf{y}_k}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{y}'_k} 2E_{\mathbf{y}_k}}} \times \\
 &\times \int \left(\prod_{j,i}^A \frac{d\mathbf{p}'_j d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{\mathbf{p}'_j} 2E_{\mathbf{p}_i}}} \right) \frac{\tilde{\psi}_m^* (\{p'^*\}) \tilde{\psi}_n (\{p^*\})}{A!} \Phi_m^* (p') \Phi_n (p) \times \\
 &\times A(A-1)! \left(\prod_{l \neq k}^{A-1} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}'_l} \delta^3(\mathbf{p}'_l - \mathbf{p}'_l^*) \delta_{r_l, r'_l} \right) \times \\
 &\times [\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k)] \delta^3(\mathbf{y}_k + \mathbf{q} - \mathbf{y}'_k) \times \\
 &\times (2\pi)^3 \sqrt{2E_{p'_k} 2E_{p_k}} \delta^3(\mathbf{p}'_k - \mathbf{y}'_k) \delta_{s_{y'_k}, s_{p'_k}} \delta^3(\mathbf{p}'_k - \mathbf{y}_k) \delta_{s_{y_k}, s_{p_k}} = \\
 &= \sum_k^A \int \left(\prod_{j,i}^A \frac{d\mathbf{p}'_j d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}'_j} E_{\mathbf{p}_i}}} \right) \left[\prod_{l \neq k}^{A-1} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}'_l} \delta^3(\mathbf{p}'_l - \mathbf{p}'_l^*) \delta_{r_l, r'_l} \right] \times \\
 &\times \tilde{\psi}_m^* (\{p'^*\}) \tilde{\psi}_n (\{p^*\}) \Phi_m^* (p') \Phi_n (p) \int \frac{d\mathbf{y}'_k d\mathbf{y}_k \delta^3(\mathbf{p}'_k - \mathbf{y}'_k) \delta^3(\mathbf{p}'_k - \mathbf{y}_k)}{\sqrt{4E_{\mathbf{y}'_k} E_{\mathbf{y}_k}}} \times \\
 &\times \sqrt{4E_{p'_k} E_{p_k}} [\bar{u}(\mathbf{y}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{y}_k, r_k)] \delta^3(\mathbf{y}_k + \mathbf{q} - \mathbf{y}'_k).
 \end{aligned}$$

Интегрирование в этом выражении по $d\mathbf{y}'_k d\mathbf{y}_k$ (и учет $\sum_{s_k, r_k} \delta_{s_{y_k}, s_{p_k}}$) дает

$$\begin{aligned}
 H_{mn}^\mu &= \sum_k^A \int \left(\prod_{j,i}^A \frac{d\mathbf{p}'_j d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}'_j} E_{\mathbf{p}_i}}} \right) \times \\
 &\times \left[\prod_{l \neq k}^{A-1} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}'_l} \delta^3(\mathbf{p}'_l - \mathbf{p}'_l^*) \delta_{r_l, r'_l} \right] \tilde{\psi}_m^* (\{p'^*\}) \tilde{\psi}_n (\{p^*\}) \times \\
 &\times \frac{\sqrt{4E_{p'_k} E_{p_k}}}{\sqrt{4E_{p'_k} E_{p_k}}} [\bar{u}(\mathbf{p}'_k, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{p}_k, r_k)] \times \\
 &\times \delta^3(\mathbf{p}'_k + \mathbf{q} - \mathbf{p}'_k) [\Phi_m^* (p') \Phi_n (p)].
 \end{aligned}$$

Теперь можно провести интегрирование по $d\mathbf{p}'_j$ (кроме \mathbf{p}'_k), переписав H_{mn}^μ как

$$\begin{aligned}
 H_{mn}^\mu &= \sum_k \int \left(\prod_{j,i \neq k}^A \prod_{l \neq k}^{A-1} \frac{(2\pi)^3 d\mathbf{p}'_j d\mathbf{p}_i \delta^3(\mathbf{p}'_l - \mathbf{p}'_k)}{(2\pi)^6 \sqrt{E_{\mathbf{p}'_j} E_{\mathbf{p}_i}}} E_{\mathbf{p}'_k} \right) \times \\
 &\quad \times \frac{d\mathbf{p}'_k d\mathbf{p}_k \{\delta^3(\mathbf{p}'_k + \mathbf{q} - \mathbf{p}'_k)\}}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}'_k} E_{\mathbf{p}_k}}} \times \\
 &\quad \times \tilde{\psi}_m^* (\{p'\}) \tilde{\psi}_n (\{p^*\}) [\Phi_m^*(p') \Phi_n(p)] \left[\bar{u}(\mathbf{p}'_k, s_{p'_k}) O_k^\mu u(\mathbf{p}_k^*, r_{p_k}) \right] = \\
 &= \sum_k \int \left(\prod_{j,i \neq k}^A \frac{d\mathbf{p}'_j d\mathbf{p}_i \delta^3(\mathbf{p}'_i - \mathbf{p}'_k)}{(2\pi)^3 \sqrt{E_{\mathbf{p}'_j} E_{\mathbf{p}_i}}} E_{\mathbf{p}'_k} \right) \times \\
 &\quad \times \tilde{\psi}_m^* (\{p'\}) \tilde{\psi}_n (\{p^*\}) \left[\bar{u}(\mathbf{p}'_k, s_{p'_k}) O_k^\mu u(\mathbf{p}_k^*, r_{p_k}) \right] \times \\
 &\quad \times \left[(2\pi)^6 \sqrt{4P_m^0 P_n^0} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{P}'_m) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}_n) \right] \times \\
 &\quad \times \frac{d\mathbf{p}'_k d\mathbf{p}_k \{\delta^3(\mathbf{p}'_k + \mathbf{q} - \mathbf{p}'_k)\}}{(2\pi)^6 \sqrt{4E_{\mathbf{p}'_k} E_{\mathbf{p}_k}}},
 \end{aligned}$$

и после введения обозначения

$$\tilde{\psi}_m^* (\{p_\star^{(k)}\}) \equiv \tilde{\psi}_m^* (\{p^*\}, \mathbf{p}'_k \neq \mathbf{p}_k^*, s_{p'_k} \neq r_{p_k}),$$

где аргумент $\{p_\star^{(k)}\}$ совпадает с $\{p^*\}$, за исключением того, что на k -м месте в $\{p_\star^{(k)}\}$ стоит не пара $(\mathbf{p}_k^*, r_{p_k})$, а другая пара $(\mathbf{p}'_k, s_{p'_k}) \neq (\mathbf{p}_k^*, r_{p_k})$, получить

$$\begin{aligned}
 H_{mn}^\mu &= \sum_k \int \left(\prod_{i \neq k}^A \frac{E_{\mathbf{p}_i} d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 \sqrt{E_{\mathbf{p}_i} E_{\mathbf{p}_i}}} \right) \times \\
 &\quad \times \tilde{\psi}_m^* (\{p_\star^{(k)}\}) \tilde{\psi}_n (\{p^*\}) \left[\bar{u}(\mathbf{p}'_k, s_{p'_k}) O_k^\mu u(\mathbf{p}_k^*, r_{p_k}) \right] \times \\
 &\quad \times \left[\sqrt{4P_m^0 P_n^0} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{P}'_m) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}_n) \right] \frac{d\mathbf{p}'_k d\mathbf{p}_k \delta^3(\mathbf{p}'_k + \mathbf{q} - \mathbf{p}'_k)}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}'_k} E_{\mathbf{p}_k}}}.
 \end{aligned}$$

Замена $d\mathbf{p}_k^*$ на $(2\pi)^3(d\mathbf{p}_k^*/(2\pi)^3)$ и интегрирование с $\delta^3(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} - \mathbf{p}'_k)$ по $d\mathbf{p}_k^*$ дает следующее выражение для адронного тока (П.45):

$$H_{mn}^\mu(P'_m, P_n) = (2\pi)^3 \sum_k \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \times \\ \times \frac{\left[\bar{u}(\mathbf{p}_k^* = \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}, s_{p'_k}) O_k^\mu u(\mathbf{p}_k^*, r_{p_k}) \right]}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}_k^* = \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}} E_{\mathbf{p}_k^*}}} \tilde{\psi}_m^*(\{\mathbf{p}^{(k)}\}, \mathbf{P}_k^* = \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}) \times \\ \times \sqrt{4P'_m P_n} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{P}'_m) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}_n). \quad (\text{П.49})$$

Осталось разобраться с произведением $\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{P}'_m) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}_n)$, где $\mathbf{p} = \sum_i^A \mathbf{p}_i$ и $\mathbf{p}' = \sum_i^A \mathbf{p}'_i$, т.е. показать, что произведение «внешних» функций $\Phi_m^*(p') \Phi_n(p)$ можно записать как

$$\Phi_m^*(p') \Phi_n(p) = (2\pi)^6 2 \sqrt{P'_m P_n} \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{p}_n - \mathbf{p}'_m) \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right). \quad (\text{П.50})$$

Действительно, если нейтрино провзаимодействовало с k -м нуклоном (в системе центра масс ядра) и передало ему импульс \mathbf{q} , то $\mathbf{p}'_k = \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}$, с другой («внешней») стороны тот же переданный нейтрино импульс \mathbf{q} принимает в итоге все ядро, т.е. $\mathbf{q} = \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m$. Если ядро до взаимодействия находилось в покое ($\mathbf{P}_n = 0$), то $\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}_n)$ переходит в $\delta^3(\mathbf{p})$, давая $\mathbf{p} = 0$, но в системе покоя ядра, по определению, $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_i^*$, и тогда $\mathbf{p} \equiv \sum_i^A \mathbf{p}_i = \mathbf{p}^* \equiv \sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* = 0$, что эквивалентно наличию $\delta^3(\mathbf{p}^*) \equiv \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right)$. Далее ясно, что если $\mathbf{P}_n = 0$, то $\mathbf{q} = \mathbf{P}'_m$, чему отвечает $\delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{P}'_m)$. Обобщение этой дельта-функции на случай $\mathbf{P}_n > 0$ дает $\delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m)$. Иными словами, $\delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{P}'_m) \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}_n) = \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m)^*$.

Или $\delta^3 \left(\sum_{i=j}^A \mathbf{p}'_j - \mathbf{P}'_m \right) \delta^3 \left(\sum_{i=j}^A \mathbf{p}_j - \mathbf{P}_n \right) = \delta^3 \left(\underbrace{\sum_{i=j}^A \mathbf{p}'_j - \mathbf{P}'_m}_{\mathbf{p} + \mathbf{q}} \right) \delta^3 \left(\underbrace{\sum_j \mathbf{p}_j}_{\mathbf{p}} + \underbrace{\sum_j \mathbf{p}_j^ - \mathbf{P}_n}_0 \right) = \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m) \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right)$.

Поэтому окончательное выражение для адронного тока (П.49) принимает вид

$$H_{mn}^\mu(P'_m, P_n) = \langle P'_m | H^\mu(0) | P_n \rangle = 2\sqrt{P'_m{}^0 P_n{}^0} \times h_{mn}^\mu(\mathbf{q}) \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m), \quad (\text{П.51})$$

где в соответствии с выражением (5.13) для адронного тока в системе центра масс ядра имеем

$$h_{mn}^\mu = \sum_k^A \int \prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \frac{\bar{u}(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}, s_{p_k}) O_k^\mu u(\mathbf{p}_k^*, r_{p_k})}{\sqrt{4E_{\mathbf{p}_k^*} E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}} \times \tilde{\psi}_m^*(\{p_*^{(k)}\}, \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) \tilde{\psi}_n(\{p_*\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right). \quad (\text{П.52})$$

Аргументы спинорных функций \mathbf{p}_i^* взяты в системе покоя ядра. Отметим, что если в этом выражении положить $O_k^\mu \equiv 1$ и $\mathbf{q} = 0$, то h_{mn}^μ должен совпадать с формулой (П.41) для нормировки $\langle m|n \rangle$, поскольку $\bar{u}(\mathbf{p}_k + \mathbf{q}, s) u(\mathbf{p}_k, r) = \bar{u}(\mathbf{p}_k, s) u(\mathbf{p}_k, r) = 2E_{\mathbf{p}_k} \delta(\mathbf{p}_k + \mathbf{q} - \mathbf{p}_k) \delta_{sr}$.

П.3.2. Формула для адронной структуры f_{mn}^k . Для вывода формулы (5.18) для адронной структуры (формфактора) $f_{mn}^k = \langle m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle$ заметим, что оператор $e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}}$ увеличивает 3-импульс \mathbf{p} состояния $|\mathbf{p}\rangle$ на величину \mathbf{q} , переводя состояние $|\mathbf{p}\rangle$ в состояние $|\mathbf{p} + \mathbf{q}\rangle$ путем операции

$$e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}} |\mathbf{p}\rangle = \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}}} |\mathbf{p} + \mathbf{q}\rangle, \quad (\text{П.53})$$

обоснование которой дано в прил. П.2. С использованием выражений (П.53) и (П.42) ниже дано вычисление матричного элемента $\langle m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle$.

Вычислим сначала матричный элемент $\langle P'_m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | P_n \rangle$. С учетом начального $|P_n\rangle$ и конечного $\langle P'_m |$ ядерных состояний, заданных в виде (П.44), имеем

$$\begin{aligned} \langle P'_m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | P_n \rangle &= \int \left(\prod_j^A d\tilde{\mathbf{p}}_j^* \right) \frac{\tilde{\psi}_m^*(\{p_*'\})}{\sqrt{A!}} \Phi_m^*(p') \langle \{p_*'\} | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} \times \\ &\times \int \left(\prod_i^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p_*\})}{\sqrt{A!}} \Phi_n(p) | \{p_*\} \rangle = \int \left(\prod_{j,i}^A \frac{dp_j'^* dp_i^*}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{\mathbf{p}'_j^*} 2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \right) \times \\ &\times \frac{\tilde{\psi}_m^*(\{p_*'\}) \tilde{\psi}_n(\{p_*\})}{A!} \Phi_m^*(p') \Phi_n(p) \underbrace{\langle \{p_*'\} | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | \{p_*\} \rangle}_{Q_k}. \quad (\text{П.54}) \end{aligned}$$

Матричный элемент оператора сдвига k -го нуклона $e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}$ по многочастичному состоянию свободных нуклонов можно представить в виде произведения нормировки спектаторных нуклонов и матричного элемента от действия оператора $e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}$ на k -й нуклон:

$$Q_k \equiv \langle \{p'_\star\} | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | \{p_\star\} \rangle = \langle \dots, p'_{k^*}, \dots | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | \dots, p_{k^*}, \dots \rangle = \\ = \langle \dots, p'_{k-1}, p'_{k+1}, \dots | \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots \rangle \langle p'_{k^*} | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | p_{k^*} \rangle \delta_{r_k, r'_{k^*}}. \quad (\text{П.55})$$

Заметим, что если в (П.55) положить $\mathbf{q} = 0$, то $e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} = 1$, и матричный элемент $\langle \{p'_\star\} | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | \{p_\star\} \rangle$ превращается в условие нормировки (П.33) многочастичного состояния свободных нуклонов в системе покоя ядра: $\langle \{p'_\star\} | \{p_\star\} \rangle = A! \left(\prod_l^A (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_l^*} \delta^3(\mathbf{p}_l^* - \mathbf{p}'_{l^*}) \delta_{r_l, r'_{l^*}} \right)$. Поэтому при $\mathbf{q} = 0$ формула для Q_k должна принимать вид, переходящий именно в эту формулу, т.е. с учетом (П.53) и нормировки одночастичных состояний выражение (П.55) можно записать как

$$Q_k = A(A-1)! \left(\prod_{l \neq k}^{A-1} (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_l^*} \delta^3(\mathbf{p}_l^* - \mathbf{p}'_{l^*}) \delta_{r_l, r'_{l^*}} \right) \times \\ \times \delta_{r_k, r'_{k^*}} 2\sqrt{E_{\mathbf{p}_k^*} E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} - \mathbf{p}'_{k^*}), \quad (\text{П.56})$$

где принято во внимание, что k -й нуклон может находиться в любом из A возможных положений в A -ядре, что дает дополнительный перестановочный множитель A .

Подставив (П.56) в ядерный матричный элемент (П.54) (и опустив все $\delta_{r_l, r'_{l^*}}, \delta_{r_k, r'_{k^*}}$, поскольку оператор сдвига не влияет на спин), получим

$$\langle P'_m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | P_n \rangle = \int \left(\prod_{j, i}^A \frac{d\mathbf{p}'_j d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{\mathbf{p}'_j} 2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \right) \times \\ \times \left(\prod_{j \neq k}^A (2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_j^*} \delta^3(\mathbf{p}_j^* - \mathbf{p}'_j) \right) \sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^*} 2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}} (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} - \mathbf{p}'_{k^*}) \times \\ \times \tilde{\psi}_m^*(\{p'_\star\}) \tilde{\psi}_n(\{p_\star\}) [\Phi_m^*(p') \Phi_n(p)].$$

После интегрирования по $d\mathbf{p}'_j$ (без $d\mathbf{p}'_k$) и подстановки выражения (П.50) для $[\Phi_m^*(p')\Phi_n(p)]$ имеем

$$\begin{aligned} \langle P'_m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | P_n \rangle &= \int \left(\prod_{i \neq k}^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i^*}} \prod_{l \neq k}^A 2E_{\mathbf{p}_l^*} \right) \times \\ &\times \frac{(2\pi)^3 d\mathbf{p}_k^* \sqrt{E_{\mathbf{p}_k^*} E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}}{(2\pi)^6 \sqrt{E_{\mathbf{p}'_k^*} E_{\mathbf{p}_k^*}}} d\mathbf{p}'_k \delta^3(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} - \mathbf{p}'_k) \tilde{\psi}_m^*(\{p_\star\}), \\ &\mathbf{p}'_k \neq \mathbf{p}_k^* \tilde{\psi}_n(\{p_\star\}) \left[(2\pi)^6 2\sqrt{P_m^{0'} P_n^0} \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m) \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) \right]. \end{aligned}$$

Интегрирование по $d\mathbf{p}'_k$ благодаря дельта-функции $\delta^3(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} - \mathbf{p}'_k)$ заменяет \mathbf{p}'_k на $\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}$, и переводит множитель $\frac{d\mathbf{p}'_k \sqrt{E_{\mathbf{p}_k^*} E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}}{(2\pi)^3 \sqrt{E_{\mathbf{p}'_k^*} E_{\mathbf{p}_k^*}}}$ в $\frac{d\mathbf{p}_k^*}{(2\pi)^3}$. В итоге, принимая во внимание предположение о факторизации спиновой и импульсной зависимостей (5.15): $\tilde{\psi}_n(\{p_\star\}) = \tilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_\star\})\chi_n(\{r\})$, и диагональность по спину, т. е. $\chi_m^*(\{r\})\chi_n(\{r\}) = \delta_{mn}$, для матричного элемента (П.54) приходим к выражению

$$\begin{aligned} \langle P'_m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | P_n \rangle &= (2\pi)^6 2\sqrt{P_m^{0'} P_n^0} \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{P}_n - \mathbf{P}'_m) \times \\ &\times \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_m^*(\{\mathbf{p}_\star^{(k)}\}) \tilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_\star\}) \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right). \end{aligned}$$

Если считать, что

$$\langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \equiv \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_m^*(\{\mathbf{p}_\star^{(k)}\}) \tilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_\star\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right), \quad (\text{П.57})$$

то для матричного элемента (П.54) возникает выражение

$$\langle P'_m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | P_n \rangle = (2\pi)^3 \left[2\sqrt{P_m^{0'} P_n^0} \delta^3(\mathbf{P}_n + \mathbf{q} - \mathbf{P}'_m) \right] \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle,$$

связывающее ядерный матричный элемент оператора сдвига в системе центра масс ядра с его аналогом в другой системе отсчета, где начальный импульс ядра равен \mathbf{P}_n .

Вычислим матричный элемент (5.18) $f_{mn}^k \equiv \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle$. По определению он задан в системе покоя ядра, где

$$\mathbf{p} \equiv \sum_j^A \mathbf{p}_j = \sum_j^A \mathbf{p}_j^* = 0.$$

Для ядерных состояний $|n\rangle$, заданных в системе центра масс ядра, на основе формулы (П.42):

$$|n\rangle = \int \left(\prod_{i=1}^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \left[(2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) \right]^{1/2} |\{p^*\}\rangle,$$

будем (временно) считать, что конечное и начальное квантовые состояния ядра таковы:

$$\begin{aligned} \langle m| &= \int \phi_m^*(0) \left(\prod_j d\tilde{\mathbf{p}}_j^* \right) \frac{\tilde{\psi}_m^*(\{p'^*\})}{\sqrt{A!}} \langle \{p'^*\}|, \\ |n\rangle &= \int \phi_n(0) \left(\prod_i d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} |\{p^*\}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.58})$$

Тогда матричный элемент (5.18) принимает вид

$$\begin{aligned} f_{mn}^k &= \int \phi_m^*(0) \phi_n(0) \left(\prod_j d\tilde{\mathbf{p}}_j^* \right) \frac{\tilde{\psi}_m^*(\{p'^*\})}{\sqrt{A!}} \langle \{p'^*\}| \times \\ &\quad \times \int \left(\prod_i d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{x}}_k} \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} |\{p^*\}\rangle = \\ &= \int C \left(\prod_{j,i} \frac{d\mathbf{p}_j^* d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_j^*} 2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \right) \frac{\tilde{\psi}_m^*(\{p'^*\}) \tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{A!} Q_k, \end{aligned} \quad (\text{П.59})$$

где $C \equiv \phi_m^*(0)\phi_n(0)$ и $Q_k = \langle \{p'^*\}| e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{x}}_k} |\{p^*\}\rangle$ — матричный элемент оператора сдвига k -го нуклона $e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{x}}_k}$ по многочастичному состоянию свободных нуклонов (диагональный по спину ядра), явное выражение для которого дано формулой (П.56). Поэтому величина f_{mn}^k после аналогичных проделанным выше выкладкам получается в виде

$$\begin{aligned} f_{mn}^k &= \int C \left(\prod_{l,i \neq k} \frac{d\mathbf{p}_i^* 2E_{\mathbf{p}_i^*}}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i^*}} \right) \times \\ &\quad \times \left(\frac{d\mathbf{p}_k'^* d\mathbf{p}_k^* \sqrt{2E_{\mathbf{p}_k'^*} 2E_{\mathbf{p}_k^*} + \mathbf{q}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_k'^*} 2E_{\mathbf{p}_k^*}}} \delta^3(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} - \mathbf{p}_k'^*) \right) \tilde{\psi}_m^*(\{\mathbf{p}_k^{(k)}\}) \tilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_k^*\}). \end{aligned}$$

После интегрирования по $d\mathbf{p}_k^{f*}$ нормировочные множители сокращаются и происходит «сдвиг» аргумента волновой функции конечного состояния ядра ($\mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}$), т. е.

$$\begin{aligned} f_{mn}^k &= \int C \left(\prod_{i \neq k}^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \left(\frac{d\mathbf{p}_k^* \sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}} 2E_{\mathbf{p}_k^*}}}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^*} 2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}} \right) \tilde{\psi}_m^* (\{\mathbf{p}_\star^{(k)}\}) \tilde{\psi}_n (\{\mathbf{p}_\star\}) = \\ &= \int C \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_m^* (\{\mathbf{p}_\star^{(k)}\}) \tilde{\psi}_n (\{\mathbf{p}_\star\}). \quad (\text{П.60}) \end{aligned}$$

Если теперь считать, что $C \equiv (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_j^A \mathbf{p}_j^* \right)$, то использованные выше ядерные состояния (П.58) полностью соответствуют их определению согласно формуле (П.42) и ядерный матричный элемент в системе центра масс ядра (5.18) действительно имеет вид (\mathbf{p} -представление)

$$\begin{aligned} f_{mn}^k &= \langle m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle = \\ &= \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_m^* (\{\mathbf{p}_\star^{(k)}\}) \tilde{\psi}_n (\{\mathbf{p}_\star\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right). \quad (\text{П.61}) \end{aligned}$$

Заметим, что в системе покоя ядра (где в начальном состоянии было по определению $\sum_i^A \mathbf{p}_i^* = 0$) суммарный импульс всех нуклонов в конечном состоянии $\sum_i^A \mathbf{p}_i^{f*} = \sum_{i \neq k}^A \mathbf{p}_i^* + \mathbf{p}_k^{f*} = \sum_{i \neq k}^A \mathbf{p}_i^* + \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} = \mathbf{q}$. То есть этот суммарный импульс равен импульсу \mathbf{q} , переданному нейтрину ядру. Здесь создается впечатление, что матричный элемент $\langle m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle$ отвечает переходу ядра из покоящегося начального состояния $|n\rangle$ в конечное состояние $|m\rangle$, которое *движется* в лабораторной системе с импульсом \mathbf{q} . Ядро действительно движется после взаимодействия с импульсом \mathbf{q} в лабораторной системе. Однако последняя уже не совпадает с системой центра масс ядра, где внутреннее состояние ядра описывается именно функцией $\langle m |$.

Адронная структура f_{mn}^k . Вспомогательные вычисления. Проверим взаимосвязь между \mathbf{p} - и \mathbf{x} -представлениями матричного элемента $f_{mn}^k = \langle m | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | n \rangle$. Воспользуемся формулами из прил. П.2:

$$\begin{aligned} \langle \{x\} | \{p\} \rangle &= A! \prod_j^A u_{m_j}(\mathbf{p}_j, s_j) e^{i\mathbf{p}_j \mathbf{x}_j}, \\ \langle \{p\} | \{x\} \rangle &= A! \prod_j^A u_{m_j}^\dagger(\mathbf{p}_j, s_j) e^{-i\mathbf{p}_j \mathbf{x}_j}; \quad d\tilde{\mathbf{p}}_i \equiv \frac{d\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i}}}, \end{aligned}$$

а также определением волновых функций многочастичной системы в (координатном) x -представлении (П.27), (П.28) и (П.30) через функции в p -представлении. Если использовать выражения в p -представлении в *системе покоя ядра*, т. е. в p^* -представлении, то следует учесть различие в нормировках этих импульсных представлений для волновых функций, формально введя множитель \sqrt{C} . Тогда (П.30) можно записать как

$$\begin{aligned}
 |n\rangle_x \equiv \psi_n(\{x\}) &= \sqrt{C} \int \prod_i^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{A!} \langle \{x\} | \{p^*\} \rangle = \\
 &= \sqrt{C} \int \prod_i^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* u_{m_i}(\mathbf{p}_i^*, s_i) e^{i\mathbf{p}_i^* \mathbf{x}_i} \tilde{\psi}_n(\{p^*\}), \\
 \langle m|_x \equiv \psi_m^*(\{x\}) &= \sqrt{C} \int \prod_j^A d\tilde{\mathbf{p}}_j^* \frac{\tilde{\psi}_m^*(\{p^*\})}{A!} \langle \{p^*\} | \{x\} \rangle = \\
 &= \sqrt{C} \int \prod_j^A d\tilde{\mathbf{p}}_j^* u_{m_j}^\dagger(\mathbf{p}_j^*, s_j) e^{-i\mathbf{p}_j^* \mathbf{x}_j} \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}).
 \end{aligned} \tag{П.62}$$

С этими волновыми функциями $\langle m|_x$ и $|n\rangle_x$ вычислим матричный элемент

$$f_{mn}^k = \int \left(\prod_{i=1}^A dx_i \right) \psi_m^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k} \psi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A) = \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle_x$$

в системе покоя ядра. После сокращения всех спиновых индексов (поскольку оператор трансляции от них не зависит) имеем

$$\begin{aligned}
 f_{mn}^k &= \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle_x = \int \left(\prod_{i=1}^A dx_i \right) \psi_m^*(\{x\}) e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} \psi_n(\{x\}) = \\
 &= \int \left(\prod_{i=1}^A dx_i \right) \left(\prod_{j,l}^A \frac{d\mathbf{p}_j^* d\mathbf{p}_l^*}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_j^*} 2E_{\mathbf{p}_l^*}}} \right) \frac{C \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}_j) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}_l)}{(A!)^2} \times \\
 &\quad \times \langle \{p^*\}_j | \{x\}_i \rangle e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} \langle \{x\}_i | \{p^*\}_l \rangle.
 \end{aligned}$$

Поскольку оператор $e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k}$ действует в данном случае на импульсные переменные, то интегрирование по переменным x_i фактически приводит к возникновению многочастичного единичного оператора в x -представлении (П.24), т. е. $\hat{I}_{x,A} = \int \prod_{i=1}^A dx_i |\{x\}_i\rangle \langle \{x\}_i| / A!$, и, поменяв для удобства обозначения

переменных интегрирования и убрав этот единичный оператор, получаем

$$f_{mn}^k = \int \prod_{j,i}^A \frac{d\mathbf{p}'_j{}^* d\mathbf{p}_i{}^*}{(2\pi)^6 \sqrt{2E_{\mathbf{p}'_j{}^*} 2E_{\mathbf{p}_i{}^*}}} \times \\ \times \frac{C \tilde{\psi}_m^*(\{p'_*\}_j) \tilde{\psi}_n(\{p_*\}_l)}{A!} \underbrace{\langle \{p'_*\}_j | e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k} | \{p_*\}_l \rangle}_{Q_k}.$$

Это выражение для f_{mn}^k в точности совпадает с формулой (П.59), где используется матричный элемент оператора сдвига k -го нуклона $e^{i\mathbf{q}\tilde{\mathbf{X}}_k}$ по многочастичному состоянию свободных нуклонов Q_k (П.56). Поэтому с учетом $C = (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_j^A \mathbf{p}_j^* \right)$ получается формула (П.61):

$$f_{mn}^k = \int \left(\prod_l^A \frac{d\mathbf{p}_l^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_n^*(\{p_*\}, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) \tilde{\psi}_n(\{p_*\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_i^A \mathbf{p}_i^* \right).$$

Таким образом, начав с \mathbf{x} -представления для начального и конечного состояний (первые формулы в (П.62)), получили формулу для $f_{mn}^k(\mathbf{q})$ в \mathbf{p} -представлении.

Рассмотрим обратный случай, т. е. получим выражение для f_{mn}^k в \mathbf{x} -представлении, начиная с выражения для f_{mn}^k в \mathbf{p} -представлении.

По аналогии с аргументами, приведенными по поводу формул (П.62), из выражений для волновых функций многочастичных систем (П.27), (П.28) и (П.30) для начального и конечного состояний ядра в его системе центра масс, т. е. в \mathbf{p}^* -представлении, применим формулы с учетом различия в нормировках \mathbf{p} - и \mathbf{p}^* -представлений:

$$\tilde{\psi}_n(\{p^*\}) = \frac{1}{\sqrt{C}} \int \left(\prod_i^A \frac{dy_i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \right) \frac{\psi_n(\{y\})}{A!} \langle \{p^*\} | \{y\} \rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{C}} \int \left(\prod_i^A dy_i \frac{u_i^\dagger(\mathbf{p}_i^*, s_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} e^{-i\mathbf{p}_i^* \mathbf{y}_i} \right) \psi_n(\{y\}), \\ \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}) = \frac{1}{\sqrt{C}} \int \left(\prod_i^A \frac{dx_i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \right) \frac{\psi_m^*(\{x\})}{A!} \langle \{p^*\} | \{x\} \rangle^* = \\ = \frac{1}{\sqrt{C}} \int \left(\prod_i^A dx_i \frac{u_i(\mathbf{p}_i^*, s_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} e^{i\mathbf{p}_i^* \mathbf{x}_i} \right) \psi_m^*(\{x\}).$$

(П.63)

Тогда согласно первой формуле (из второй строки) в (П.63) для «сдвинутой» волновой функции конечного состояния, входящей в выражение (П.61) для

f_{mn}^k , можно записать

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_m^* (\{p^*\}, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) &= \int \left(\prod_{i \neq k}^A \frac{dz_i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \right) \times \\ &\times \frac{dz_k}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}} \frac{\psi_n^* (\{z\})}{\sqrt{C} A!} \langle \{z\} | \{p^*\}, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} \rangle. \quad (\text{П.64}) \end{aligned}$$

Будем считать, что «сдвинутое» скалярное произведение $\langle \{z\} | \{p^*\}, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} \rangle$ можно представить как

$$\begin{aligned} \langle \dots, z_k, \dots | \dots, p_{k-1}^*, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}, p_{k+1}^*, \dots \rangle &= \\ = \langle \dots, z_{k-1}, z_{k+1} \dots | \dots, p_{k-1}^*, p_{k+1}^*, \dots \rangle \langle z_k | \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} \rangle, \end{aligned}$$

тогда для него согласно (П.29) справедливо выражение

$$\langle \{z\} | \{p^*\}, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} \rangle = (A-1)! \prod_{j \neq k}^{A-1} u_j(\mathbf{p}_j^*, s_j) e^{i\mathbf{p}_j^* \mathbf{z}_j} \langle z_k | \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} \rangle.$$

Учитывая (П.53), т. е. $|\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}\rangle = e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} (\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}} / \sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^*}}) |\mathbf{p}_k^*\rangle$, и то, что $\langle z_k | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} = \langle z_k | e^{i\mathbf{q}\mathbf{z}_k}$, имеем

$$\begin{aligned} \langle z_k | \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} \rangle &= \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^*}}} \langle z_k | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{X}}_k} | \mathbf{p}_k^* \rangle = \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^*}}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{z}_k} \langle z_k | \mathbf{p}_k^* \rangle = \\ &= \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^*}}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{z}_k} u_k(\mathbf{p}_k^*, s_k) e^{i\mathbf{z}_k \mathbf{p}_k^*}. \quad (\text{П.65}) \end{aligned}$$

Тогда с учетом возможных A перестановок k -го нуклона для «сдвинутой» волновой функции конечного состояния (П.64) в координатном представлении получается выражение

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_m^* (\{p^*\}, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) &= \\ = \int \left(\prod_{i \neq k}^A \frac{dz_i}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \right) \frac{dz_k e^{i\mathbf{q}\mathbf{z}_k}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}} \frac{\psi_n^* (\{z\})}{A! \sqrt{C}} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^*}}} A! \prod_j^A u_j(\mathbf{p}_j^*, s_j) e^{i\mathbf{p}_j^* \mathbf{z}_j} = \\ = \frac{1}{\sqrt{C}} \int \left(\prod_i^A dz_i \frac{u_i(\mathbf{p}_i^*, s_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} e^{i\mathbf{p}_i^* \mathbf{z}_i} \right) e^{i\mathbf{q}\mathbf{z}_k} \psi_n^* (\{z\}). \quad (\text{П.66}) \end{aligned}$$

«Сдвинутую» волновую функцию (П.64) можно также записать сразу через спинорные функции $u_i(\mathbf{p}_i^*, r_i)$, т. е. используя вторую (из второй строки) формулу из (П.63), как

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) &= \frac{1}{\sqrt{C}} \int \left(\prod_{i \neq k}^{A-1} dz_i \frac{u_i(\mathbf{p}_i^*, r_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} e^{i\mathbf{p}_i^* \mathbf{z}_i} \right) \times \\ &\times \left(dz_k \frac{u_k(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}, r_k)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}} e^{i(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) \mathbf{z}_k} \right) \psi_m^*(\{z\}). \end{aligned}$$

Далее можно использовать определение скалярного произведения (П.17) $\langle \mathbf{z} | \mathbf{p}^* \rangle = u(\mathbf{p}^*, s_k) e^{i\mathbf{p}^* \mathbf{z}}$ в виде $\langle \mathbf{z}_k | \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q} \rangle = u_k(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}, s_k) e^{i(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) \mathbf{z}_k}$, условие (П.53) и действие оператора сдвига на \mathbf{z} -состояние $\langle \mathbf{z}_k | e^{i\mathbf{q} \hat{\mathbf{X}}_k} = e^{i\mathbf{q} \mathbf{z}_k} \langle \mathbf{z}_k |$. Тогда опять получается выражение (П.65):

$$\begin{aligned} u_k(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}, s_k) e^{i(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) \mathbf{z}_k} &= \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^*}}} e^{i\mathbf{q} \mathbf{z}_k} \langle \mathbf{z}_k | \mathbf{p}_k^* \rangle = \\ &= e^{i\mathbf{q} \mathbf{z}_k} \frac{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}}}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_k^*}}} u_k(\mathbf{p}_k^*, s_k) e^{i\mathbf{p}_k^* \mathbf{z}_k}. \end{aligned}$$

В результате «сдвинутая» волновая функция (П.64) приобретает вид, совпадающий с (П.66):

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{C}} \int \left(\prod_i^A dz_i \frac{u_i(\mathbf{p}_i^*, r_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} e^{i\mathbf{p}_i^* \mathbf{z}_i} \right) e^{i\mathbf{q} \mathbf{z}_k} \psi_m^*(\{z\}). \quad (\text{П.67}) \end{aligned}$$

Получим с помощью (П.67) выражения для $f_{mn}^k(\mathbf{q})$, заданного формулой (П.61):

$$f_{mn}^k(\mathbf{q}) = \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right).$$

Поскольку $\tilde{\psi}_m^*(\{p^*\})$ и $\tilde{\psi}_n(\{p^*\})$ — скалярные функции, то их можно переставить местами, т. е. $f_{mn}^k(\mathbf{q})$ записать в виде

$$f_{mn}^k(\mathbf{q}) = \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}) \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}, \mathbf{p}_k^* \rightarrow \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right).$$

Тогда, подставляя в это выражение формулы (П.63) и (П.67), имеем

$$f_{mn}^k(\mathbf{q}) = \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \frac{(2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right)}{C} \times \\ \times \int \left(\prod_l^A dy_l \frac{u_l^\dagger(\mathbf{p}_l^*, s_l)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_l^*}}} e^{-i\mathbf{p}_l^* \mathbf{y}_l} \right) \psi_n(\{y\}) \times \\ \times \int \left(\prod_i^A dz_i \frac{u_i(\mathbf{p}_i^*, r_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} e^{i\mathbf{p}_i^* \mathbf{z}_i} \right) e^{i\mathbf{qz}_k} \psi_m^*(\{z\}).$$

Если, как и прежде, нормировочный коэффициент $C = (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right)$ и по условию нормировки спиноров Дирака

$$\frac{u_l^\dagger(\mathbf{p}_l^*, s_l)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_l^*}}} \frac{u_i(\mathbf{p}_i^*, r_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} = \delta_{li} \delta_{s_l, r_i},$$

то $f_{mn}^k(\mathbf{q})$ приобретает вид многократного интеграла:

$$\int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \int \left(\prod_{i,l}^A dy_l dz_i \delta_{li} \delta_{s_l, r_i} e^{i\mathbf{p}_i^* (\mathbf{z}_i - \mathbf{y}_l)} \right) \psi_n(\{y\}) e^{i\mathbf{qz}_k} \psi_m^*(\{z\}),$$

$$\text{или } f_{mn}^k(\mathbf{q}) = \int \left(\prod_l^A \int dy_l dz_l \right) \times \\ \times \left[\prod_i^A \int \left(\frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) e^{i\mathbf{p}_i^* (\mathbf{z}_l - \mathbf{y}_l)} \right] \psi_n(\{y\}) e^{i\mathbf{qz}_k} \psi_m^*(\{z\}),$$

где A -кратное интегрирование по $d\mathbf{p}_i^*/(2\pi)^3$ дает A штук $\delta^3(\mathbf{z}_l - \mathbf{y}_l)$, которые снимают A интегрирований по dy_l , в результате чего получается окончательная формула для $f_{mn}^k(\mathbf{q})$ в координатном представлении:

$$f_{mn}^k(\mathbf{q}) = \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle_x = \int \prod_i^A dz_i \psi_m^*(\{z\}) e^{i\mathbf{qz}_k} \psi_n(\{z\}) = \\ \equiv \langle m | e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k} | n \rangle = \int \prod_{i=1}^A d\mathbf{x}_i \psi_m^*(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k} \psi_n(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_A). \quad (\text{П.68})$$

Можно заметить, что если в формуле (П.68) положить $\mathbf{q} = 0$, то она должна переходить в условие нормировки состояний $\langle m|n \rangle$ в координатном представлении, т. е. выражение (П.32), записанное в виде $\langle m|n \rangle_x = \delta_{mn}$. Прямая проверка выполнения этого условия будет означать правильность использования переходного (от \mathbf{p}^* - к \mathbf{p} -представлению) нормировочного множителя $C = (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right)$.

Действительно, получим выражения для условия нормировки ядерных состояний в системе покоя ядра (П.41) через волновые функции в координатном представлении, стартуя с формулы (П.41), заданной в импульсном представлении (в системе центра масс ядра):

$$\langle m|n \rangle = \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_n(\{p_\star\}) \tilde{\psi}_m^*(\{p_\star\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) = \delta_{mn}.$$

Для этого надо произведение $\tilde{\psi}_n(\{p_\star\}) \tilde{\psi}_m^*(\{p_\star\})$ выразить через x -переменные, т. е. воспользоваться вторыми формулами из соотношений (П.63):

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_n(\{p_\star\}) \tilde{\psi}_m^*(\{p_\star\}) &= \frac{1}{C} \int \left(\prod_i^A d\mathbf{y}_i \frac{u_i^\dagger(\mathbf{p}_i^*, s_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} e^{-i\mathbf{p}_i^* \mathbf{y}_i} \right) \psi_n(\{y\}) \times \\ &\quad \times \int \left(\prod_j^A d\mathbf{z}_j \frac{u_j(\mathbf{p}_j^*, s_j)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_j^*}}} e^{i\mathbf{p}_j^* \mathbf{z}_j} \right) \psi_m^*(\{z\}) = \\ &= \int \left(\prod_{i,j}^A d\mathbf{y}_i d\mathbf{z}_j \frac{u_i^\dagger(\mathbf{p}_i^*, s_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \frac{u_j(\mathbf{p}_j^*, s_j)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_j^*}}} e^{i\mathbf{p}_j^* \mathbf{z}_j - i\mathbf{p}_i^* \mathbf{y}_i} \right) \psi_n(\{y\}) \psi_m^*(\{z\}). \end{aligned}$$

Тогда $\langle m|n \rangle_x$ с учетом $C = (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \left(\prod_{i,j}^A d\mathbf{y}_i d\mathbf{z}_j \frac{u_i^\dagger(\mathbf{p}_i^*, s_i)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}} \frac{u_j(\mathbf{p}_j^*, s_j)}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_j^*}}} e^{i\mathbf{p}_j^* \mathbf{z}_j - i\mathbf{p}_i^* \mathbf{y}_i} \right) \times \\ \times \psi_n(\{y\}) \psi_m^*(\{z\}). \end{aligned}$$

Учитывая нормировку спиноров $u_i^\dagger(\mathbf{p}_i^*, s_i)u_j(\mathbf{p}_j^*, s_j) = 2E_{\mathbf{p}_i^*} \delta^3(\mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_j^*) \delta_{s_i, s_j} \delta_{ij}$, имеем

$$\int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \left(\prod_{i,j} dy_i dz_j \frac{E_{\mathbf{p}_i^*} \delta^3(\mathbf{p}_i^* - \mathbf{p}_j^*) \delta_{s_i, s_j} \delta_{ij}}{\sqrt{E_{\mathbf{p}_i^*}} \sqrt{E_{\mathbf{p}_j^*}}} e^{i\mathbf{p}_i^* \cdot (\mathbf{z}_j - \mathbf{y}_i)} \right) \times \\ \times \psi_n(\{y\}) \psi_m^*(\{z\}).$$

Учтя, что $\int \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}_i^* \cdot (\mathbf{z}_j - \mathbf{y}_i)} = \delta^3(\mathbf{z}_j - \mathbf{y}_i)$, можно проинтегрировать по \mathbf{p}_i^* выражение

$$\left(\prod_i^A \int \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p}_i^* \cdot (\mathbf{z}_j - \mathbf{y}_i)} \right) \int \left(\prod_{i,j} dy_i dz_j \right) \psi_n(\{y\}) \psi_m^*(\{z\})$$

и получить $\int \left(\prod_{i,j} dy_i dz_j \delta^3(\mathbf{z}_j - \mathbf{y}_i) \right) \psi_n(\{y\}) \psi_m^*(\{z\})$, откуда окончательно имеем

$$\langle m|n \rangle_x = \int \left(\prod_i^A dy_i \right) \psi_n(\{y\}) \psi_m^*(\{y\}) = \delta_{mn},$$

что совпадает с формулой (П.32) при $m = n$.

П.4. Преобразование сечения $\nu A \rightarrow \nu A^{(*)}$ -рассеяния с помощью дельта-функций. В разд. 6 для процесса $\nu(p_1) + A(p_2) \rightarrow \nu(p'_1) + A^{(*)}(p'_2)$ получено выражение (6.3):

$$d\sigma \equiv \frac{dw E_1 E_2}{n_1 n_2 I} = -2\pi \frac{\delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{p}'_1|^2 d|\mathbf{p}'_1| d \cos \theta}{64\pi^2 I E'_1 E'_2},$$

из которого с учетом безмассовости (анти)нейтрино (т.е. $|\mathbf{p}'_1| = E'_1$ и $I = E_1 E_2$) следует формула для дифференциального сечения рассеяния (анти)нейтрино на ядре:

$$\frac{d\sigma}{dE'_1 d \cos \theta} = - \frac{\delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2) |\mathcal{M}|^2 (E'_1)^2}{32\pi (E_1 E_2) E'_1 E'_2} = \\ = - \frac{E'_1}{E_1} \frac{|\mathcal{M}|^2 \delta(E_1 + E_2 - E'_1 - E'_2 (E'_1))}{32\pi E_2 E'_2}.$$

В лабораторной системе отсчета для кинематических переменных в этой формуле имеем

$$E_1 = E_\nu, \quad E'_1 = E'_\nu, \quad E_2 = E_A = m_A + \varepsilon_n, \\ E'_2 = E'_A = m_A + \varepsilon_m + T_A, \quad E_2 - E'_2 = \varepsilon_n - \varepsilon_m - T_A.$$

Тогда при $\Delta\varepsilon_{mn} = \varepsilon_m - \varepsilon_n$ получаем

$$\frac{d^2\sigma_{mn}}{dE'_\nu d\cos\theta} = -\frac{E'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu(m_A + \varepsilon_n)} \frac{\delta(E_\nu - E'_\nu - T_A(E'_\nu) - \Delta\varepsilon_{mn})}{m_A + T_A + \varepsilon_m}, \quad (\text{П.69})$$

где E'_ν и $\cos\theta$ — две независимые переменные. Поскольку кинетическая энергия отдачи ядра

$$T_A = \sqrt{m_A^2 + \mathbf{q}^2} - m_A = \sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos\theta} - m_A \quad (\text{П.70})$$

зависит от энергии нейтрино E'_ν , то интегрирование дельта-функции по переменной E'_ν в выражении (П.69) должно быть проведено с помощью формулы

$$\delta(f(E'_\nu)) = \frac{\delta(E'_\nu - \tilde{E}'_\nu)}{|df(\tilde{E}'_\nu)/dE'_\nu|} = \frac{\delta(E'_\nu - \tilde{E}'_\nu)}{|-1 - dT_A(\tilde{E}'_\nu)/dE'_\nu|}. \quad (\text{П.71})$$

Здесь

$$\tilde{E}'_\nu = \frac{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}}{m_A - \Delta\varepsilon_{mn} + E_\nu(1 - \cos\theta)} \quad (\text{П.72})$$

есть решение уравнения

$$f(\tilde{E}'_\nu) \equiv E_\nu - \tilde{E}'_\nu - T_A(\tilde{E}'_\nu) - \Delta\varepsilon_{mn} = 0, \quad (\text{П.73})$$

обращающего аргумент этой дельта-функции в нуль и, следовательно, обеспечивающего ей ненулевое значение. Действительно, с учетом (П.70) из соотношения

$$E_\nu - E'_\nu - \Delta\varepsilon_{mn} = \sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos\theta} - m_A$$

имеем $(E_\nu - E'_\nu - \Delta\varepsilon_{mn} + m_A)^2 = m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos\theta$, откуда с использованием разложения

$$(E_\nu - E'_\nu - \Delta\varepsilon_{mn} + m_A)^2 = m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 + \Delta\varepsilon_{mn}^2 - 2E_\nu E'_\nu - 2E_\nu \Delta\varepsilon_{mn} + 2E_\nu m_A + 2E'_\nu \Delta\varepsilon_{mn} - 2E'_\nu m_A - 2m_A \Delta\varepsilon_{mn} \quad (\text{П.74})$$

получается, что $\Delta\varepsilon_{mn}^2 - 2E_\nu E'_\nu - 2E_\nu \Delta\varepsilon_{mn} + 2E_\nu m_A + 2E'_\nu \Delta\varepsilon_{mn} - 2E'_\nu m_A - 2m_A \Delta\varepsilon_{mn} = -2E'_\nu E_\nu \cos\theta$. Тогда из $\Delta\varepsilon_{mn}^2 - 2m_A \Delta\varepsilon_{mn} + 2E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) = 2E'_\nu(E_\nu - E_\nu \cos\theta - \Delta\varepsilon_{mn} + m_A)$ следует формула (П.72). Решение (П.72) дает зависимость энергии рассеянного нейтрино от угла его рассеяния, следующее из условия сохранения энергии в виде (П.73).

Для производной кинетической энергии ядра по энергии рассеянного нейтрино (взятой в точке \tilde{E}'_ν) имеет место выражение

$$\frac{dT_A(\tilde{E}'_\nu)}{dE'_\nu} = \frac{\tilde{E}'_\nu - E_\nu \cos\theta}{\sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (\tilde{E}'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos\theta}} = \frac{\tilde{E}'_\nu - E_\nu \cos\theta}{T_A(\tilde{E}'_\nu) + m_A},$$

в котором $\cos \theta$ (все еще пока) считается независимой от E'_ν переменной, а также в последнем равенстве корень в знаменателе заменен на $T_A(\tilde{E}'_\nu) + m_A$ в силу определения самой кинетической энергии (П.70). Поскольку $f(\tilde{E}'_\nu) = 0$, то вместо \tilde{E}'_ν можно подставить $E_\nu - T_A(\tilde{E}'_\nu) - \Delta\varepsilon_{mn}$, т. е.

$$\tilde{E}'_\nu = E_\nu - T_A(\tilde{E}'_\nu) - \Delta\varepsilon_{mn}$$

и для производной $|df(\tilde{E}'_\nu)/dE'_\nu| = dT_A(\tilde{E}'_\nu)/dE'_\nu + 1$ из (П.71) получается

$$\begin{aligned} \left| \frac{df(\tilde{E}'_\nu)}{dE'_\nu} \right| &= \frac{E_\nu - T_A(\tilde{E}'_\nu) - \Delta\varepsilon_{mn} - E_\nu \cos \theta + T_A(\tilde{E}'_\nu) + m_A}{T_A(\tilde{E}'_\nu) + m_A} = \\ &= \frac{E_\nu(1 - \cos \theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}}{T_A(\tilde{E}'_\nu) + m_A}. \end{aligned}$$

С учетом выражений (П.72) и (П.73) для T_A (соответствующей \tilde{E}'_ν) имеется формула

$$T_A = \frac{E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(1 - \cos \theta) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2}{E_\nu(1 - \cos \theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}}, \quad (\text{П.75})$$

которая следует из небольшого преобразования комбинации формулы (П.73) с (П.72) в виде

$$\begin{aligned} T_A = E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn} - \tilde{E}'_\nu &= E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn} - \\ &- \frac{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}}{m_A - \Delta\varepsilon_{mn} + E_\nu(1 - \cos \theta)} = \\ &= \frac{(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(m_A - \Delta\varepsilon_{mn} + E_\nu(1 - \cos \theta))}{m_A - \Delta\varepsilon_{mn} + E_\nu(1 - \cos \theta)} - \\ &- \frac{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}}{m_A - \Delta\varepsilon_{mn} + E_\nu(1 - \cos \theta)}. \end{aligned}$$

Теперь сечение (П.69) можно проинтегрировать по E'_ν с помощью дельта-функции (П.71):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{mn}}{d\cos \theta} &= \int dE'_\nu \frac{(-1)E'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5 \pi E_\nu (m_A + \varepsilon_n)} \frac{1}{m_A + T_A + \varepsilon_m} \frac{\delta(E'_\nu - \tilde{E}'_\nu)}{\left| \frac{df(\tilde{E}'_\nu)}{dE'_\nu} \right|} = \\ &= \int dE'_\nu \frac{(-1)E'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5 \pi E_\nu (m_A + \varepsilon_n)} \frac{\delta(E'_\nu - \tilde{E}'_\nu)}{m_A + T_A + \varepsilon_m} \frac{T_A + m_A}{E_\nu(1 - \cos \theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}}. \end{aligned}$$

Интегрирование легко выполняется за счет $\delta(E'_\nu - \tilde{E}'_\nu)$ -функции, и дифференциальное сечение, зависящее от начальной энергии E_ν и угла рассеяния нейтрино θ , равно

$$\frac{d\sigma_{mn}}{d\cos\theta} = -\frac{\tilde{E}'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu(m_A + \varepsilon_n)} \times \\ \times \frac{1}{m_A + T_A(\tilde{E}'_\nu) + \varepsilon_m} \frac{m_A + T_A(\tilde{E}'_\nu)}{E_\nu(1 - \cos\theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}}. \quad (\text{П.76})$$

Здесь T_A и \tilde{E}'_ν определяются выражениями (П.75) и (П.72) через $\cos\theta$ (а также E_ν , m_A и $\Delta\varepsilon_{mn}$). Далее надо в дифференциальном сечении (П.76) перейти от $d\cos\theta$ к dT_A . Используем для этого выражение (П.75) для зависимости T_A от $\cos\theta$:

$$T_A = \frac{E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(1 - \cos\theta) + \Delta^2\varepsilon_{mn}/2}{E_\nu(1 - \cos\theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}} \equiv \frac{A(1 - \cos\theta) + B}{E(1 - \cos\theta) + C},$$

где $A = E_\nu(E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})$, $B = \Delta^2\varepsilon_{mn}/2$, $C = m_A - \Delta\varepsilon_{mn}$ и $E = E_\nu$, тогда якобиан перехода приобретает вид *

$$\frac{dT_A}{d\cos\theta} = \frac{BE - AC}{(E(1 - \cos\theta) + C)^2} = \\ = E_\nu \frac{\Delta^2\varepsilon_{mn}/2 - (E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(m_A - \Delta\varepsilon_{mn})}{[E_\nu(1 - \cos\theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}]^2} = \\ = -E_\nu \frac{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}}{[E_\nu(1 - \cos\theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}]^2}, \quad (\text{П.77})$$

где учтено, что $\Delta^2\varepsilon_{mn}/2 - (E_\nu - \Delta\varepsilon_{mn})(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) = \Delta^2\varepsilon_{mn}/2 - E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}m_A - \Delta\varepsilon_{mn}^2 = -[E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}]$.

*Использовано, что $-A[E(1 - \cos\theta) + C] + [A(1 - \cos\theta) + B]E = -AE(1 - \cos\theta) - AC + AE(1 - \cos\theta) + BE$.

Подставляя этот якобиан и выражение для \tilde{E}'_ν в сечение (П.76), получаем

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{mn}}{dT_A} &= \frac{d\sigma_{mn}}{d\cos\theta} \frac{d\cos\theta}{dT_A} = \\
 &= \frac{d\sigma_{mn}}{d\cos\theta} \frac{-1}{E_\nu} \frac{[E_\nu(1-\cos\theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}]^2}{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}} = \\
 &= \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu(m_A + \varepsilon_n)} \frac{1}{(m_A + T_A + \varepsilon_m)} \frac{(m_A + T_A)}{E_\nu(1-\cos\theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}} \tilde{E}'_\nu \times \\
 &\quad \times \frac{1}{E_\nu} \frac{[E_\nu(1-\cos\theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}]^2}{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}} = \\
 &= \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu^2(m_A + \varepsilon_n)} \frac{1}{(m_A + T_A + \varepsilon_m)} \frac{(m_A + T_A)}{E_\nu(1-\cos\theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}} \times \\
 &\quad \times \frac{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}}{m_A - \Delta\varepsilon_{mn} + E_\nu(1-\cos\theta)} \times \\
 &\quad \times \frac{[E_\nu(1-\cos\theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}]^2}{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}}.
 \end{aligned}$$

И далее после очевидных сокращений

$$\begin{aligned}
 &\frac{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}}{(m_A - \Delta\varepsilon_{mn} + E_\nu(1-\cos\theta))^2} \times \\
 &\quad \times \frac{[E_\nu(1-\cos\theta) + m_A - \Delta\varepsilon_{mn}]^2}{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2 - m_A\Delta\varepsilon_{mn}} = 1
 \end{aligned}$$

сечение принимает (простой) вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{mn}}{dT_A} &= \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu^2(m_A + \varepsilon_n)} \frac{(m_A + T_A)}{(m_A + T_A + \varepsilon_m)} \equiv \\
 &\equiv \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5\pi E_\nu^2 m_A} \tilde{C}_{2,mn}(T_A), \quad (\text{П.78})
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{C}_{2,mn}(T_A) &= \frac{m_A}{(m_A + \varepsilon_n)} \frac{(m_A + T_A)}{(m_A + T_A + \varepsilon_m)} \equiv \\
 &\equiv \frac{1}{\left[1 + \frac{\varepsilon_n}{m_A}\right]} \frac{\left[1 + \frac{T_A}{m_A}\right]}{\left[1 + \frac{T_A + \varepsilon_m}{m_A}\right]} = O(1).
 \end{aligned}$$

Это выражение для сечения получено путем интегрирования дельта-функции по E'_ν в начальной формуле для сечения (П.69).

С другой стороны, поскольку кинетическая энергия отдачи ядра (П.70) зависит как от энергии нейтрино E'_ν , так и от $\cos \theta$, то интегрирование дельта-функции в выражении (П.69) можно сначала провести по $\cos \theta$ с помощью соотношения

$$\delta(f(\cos \theta)) = \frac{\delta(\cos \theta - \cos \theta_i)}{|df(\cos \theta_i)/d \cos \theta|}, \quad (\text{П.79})$$

где

$$\begin{aligned} \cos \theta_i &= 1 - \frac{(E_\nu - E'_\nu)(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) - \Delta\varepsilon_{mn}(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}/2)}{E'_\nu E_\nu} = \\ &= 1 + \frac{(m_A - \Delta\varepsilon_{mn})}{E_\nu} - \frac{(m_A - \Delta\varepsilon_{mn})}{E'_\nu} + \frac{\Delta\varepsilon_{mn}m_A - \Delta\varepsilon_{mn}^2/2}{E'_\nu E_\nu} \end{aligned} \quad (\text{П.80})$$

представляет собой значение $\cos \theta$, обращающее в нуль аргумент дельта-функции при произвольном (еще пока) значении второй свободной переменной E'_ν , т. е. решение уравнения

$$f(\cos \theta) \equiv E_\nu - E'_\nu - T_A(\cos \theta) - \Delta\varepsilon_{mn} = 0. \quad (\text{П.81})$$

«Обращение» (П.80) дает уже известную формулу для зависимости E'_ν от $\cos \theta$ (П.72). Решение (П.80) можно найти, начиная с равенства (П.81), учтя явно формулу для T_A , т. е.

$$E_\nu - E'_\nu + m_A - \Delta\varepsilon_{mn} = \sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos \theta}.$$

Действительно, возводя это равенство в квадрат и используя разложение (П.74), имеем

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - (E_\nu - E'_\nu + m_A - \Delta\varepsilon_{mn})^2}{2E'_\nu E_\nu} = \\ &= \frac{-\Delta\varepsilon_{mn}^2 + 2E_\nu E'_\nu - 2E_\nu m_A + 2E_\nu \Delta\varepsilon_{mn} + 2E'_\nu m_A - 2E'_\nu \Delta\varepsilon_{mn} + 2m_A \Delta\varepsilon_{mn}}{2E'_\nu E_\nu} = \\ &= 1 + \frac{(m_A - \Delta\varepsilon_{mn})}{E_\nu} + \frac{-E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) + \Delta\varepsilon_{mn}(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}/2)}{E'_\nu E_\nu}. \end{aligned}$$

Откуда следует формула (П.80), из которой, в свою очередь, для производной имеем

$$\begin{aligned} \frac{dE'_\nu}{d \cos \theta} &= \frac{(E'_\nu)^2 E_\nu}{E_\nu(m_A - \Delta\varepsilon_{mn}) - \Delta\varepsilon_{mn}m_A + \Delta\varepsilon_{mn}^2/2} = \\ &= \frac{E'_\nu E_\nu}{E_\nu(1 - \cos \theta) + (m_A - \Delta\varepsilon_{mn})}. \end{aligned}$$

Поскольку до момента взятия интеграла с помощью дельта-функции (П.79) переменные E'_ν и $\cos \theta$ все еще остаются независимыми, то в функции $f(\cos \theta)$ из (П.81) вся зависимость от $\cos \theta$ входит только через T_A , и по этой причине производная в формуле (П.79) такова:

$$\begin{aligned} \frac{df(\cos \theta_i)}{d \cos \theta} &= -\frac{dT_A}{d \cos \theta} = -\frac{d\sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos \theta}}{d \cos \theta} = \\ &= \frac{E'_\nu E_\nu}{\sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos \theta}} = \frac{E'_\nu E_\nu}{T_A + m_A}. \end{aligned}$$

С учетом этой производной дельта-функция (П.79) принимает вид

$$\delta(f(\cos \theta)) = \delta(\cos \theta - \cos \theta_i) \frac{T_A(\cos \theta_i) + m_A}{E'_\nu E_\nu}.$$

Теперь сечение (П.69) можно проинтегрировать по $\cos \theta$ с этой дельта-функцией:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{mn}}{dE'_\nu} &= \int d \cos \theta \frac{(-1)E'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5 \pi E_\nu (m_A + \varepsilon_n)} \frac{\delta(E_\nu - E'_\nu - T_A(\cos \theta) - \Delta\varepsilon_{mn})}{m_A + T_A + \varepsilon_m} = \\ &= \int d \cos \theta \frac{(-1)E'_\nu |i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5 \pi E_\nu (m_A + \varepsilon_n)} \frac{\delta(\cos \theta - \cos \theta_i)}{m_A + T_A(\cos \theta_i) + \varepsilon_m} \frac{T_A(\cos \theta_i) + m_A}{E'_\nu E_\nu} = \\ &= \frac{(-1)|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^5 \pi E_\nu^2 (m_A + \varepsilon_n)} \frac{T_A + m_A}{m_A + T_A + \varepsilon_m}. \end{aligned}$$

Далее следует осуществить переход от переменной E'_ν к измеряемой T_A , при этом надо учесть, что $\cos \theta_i$, входящий в определение T_A , зависит также от E'_ν согласно (П.80). Итак,

$$\begin{aligned} \frac{dT_A(\cos \theta_i)}{dE'_\nu} &= \frac{d\sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos \theta}}{dE'_\nu} = \\ &= \frac{\frac{d(E'_\nu)^2}{dE'_\nu} - \frac{2d(E'_\nu E_\nu \cos \theta)}{dE'_\nu}}{2\sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos \theta}} = \\ &= \frac{E'_\nu - E_\nu \cos \theta - E'_\nu E_\nu \frac{d \cos \theta}{dE'_\nu}}{\sqrt{m_A^2 + E_\nu^2 + (E'_\nu)^2 - 2E'_\nu E_\nu \cos \theta}} = \frac{E'_\nu - E_\nu \cos \theta - E'_\nu E_\nu \frac{d \cos \theta}{dE'_\nu}}{T_A + m_A}. \end{aligned}$$

С учетом производной $\frac{d \cos \theta}{dE'_\nu} = \frac{E_\nu(1 - \cos \theta) + (m_A - \Delta \varepsilon_{mn})}{E'_\nu E_\nu}$, а также вспоминая, что из (П.81) следует, что $E'_\nu - E_\nu + \Delta \varepsilon_{mn} = -T_A$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dT_A(\cos \theta_i)}{dE'_\nu} &= \frac{E'_\nu - E_\nu \cos \theta - E'_\nu E_\nu \frac{E_\nu(1 - \cos \theta) + (m_A - \Delta \varepsilon_{mn})}{E'_\nu E_\nu}}{T_A + m_A} = \\ &= \frac{E'_\nu - E_\nu \cos \theta - E_\nu + E_\nu \cos \theta - m_A + \Delta \varepsilon_{mn}}{T_A + m_A} = \\ &= \frac{E'_\nu - E_\nu + \Delta \varepsilon_{mn} - m_A}{T_A + m_A} = -1. \end{aligned}$$

Эту «-1» можно получить также сразу путем дифференцирования выражения (П.81) для $\cos \theta_i$, т. е. из $-dE'_\nu - dT_A = 0$. В результате с учетом этой производной для сечения νA -рассеяния получается уже знакомая формула

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{mn}}{dT_A} &= \frac{d\sigma_{mn}}{dE'_\nu} \frac{dE'_\nu}{dT_A(\cos \theta_i)} = \\ &= \frac{(-1)|iM_{mn}|^2}{2^5 \pi E_\nu^2 (m_A + \varepsilon_n)} \frac{(-1)(T_A + m_A)}{m_A + T_A + \varepsilon_m} = \frac{|iM_{mn}|^2}{2^5 \pi E_\nu^2 m_A} C_{2,mn}, \quad (\text{П.82}) \end{aligned}$$

где $C_{2,mn} = \left[1 + \frac{\varepsilon_n}{m_A}\right]^{-1} \left[1 + \frac{T_A}{m_A}\right] \left[1 + \frac{T_A + \varepsilon_m}{m_A}\right]^{-1}$, что совпадает с выражением (П.78), полученным путем интегрирования дельта-функции по E'_ν в формуле для сечения (П.69).

Итак, показано, что интегрирование дельта-функции закона сохранения $\delta(E_\nu - E'_\nu - T_A(E'_\nu) - \Delta \varepsilon_{mn})$ в дифференциальном сечении νA -рассеяния (П.69) дает один и тот же результат независимо от того, по какой из двух основных переменных, E'_ν или $\cos \theta$, оно проводится.

П.5. Вычисление скалярных произведений токов. Дифференциальное сечение лептон-ядерного рассеяния (6.36) требует вычисления скалярных произведений двух токов, лептонного (нейтринного в данном случае), $\bar{u}(k', s') O^\mu u(k, s)$, и нуклонного, $\bar{u}(p', r') O'_\mu u(p, r)$, где O_μ, O'_μ — комбинации матриц Дирака. К сожалению, широко используемая стандартная процедура вычисления матричных элементов путем «взятия» следов γ -матриц за счет суммирования по спиновым индексам начальных, s, r , и конечных, s', r' , фермионов в данном случае мало пригодна. Причина состоит в том, что не удастся использовать известную формулу для спиноров Дирака

$$u(\mathbf{p}, r) \bar{u}(\mathbf{p}, r) = \frac{1}{2} (\not{p} + m) (1 + \gamma_5 \not{r}),$$

где s_r обозначает 4-вектор спина фермиона, поскольку как минимум для случая когерентного рассеяния необходимо четко контролировать значения проекции спина нуклона в начальном и конечном состояниях. Иными словами, необходимо иметь скалярные произведения для произвольных сочетаний конечных и начальных проекций спина фермионов.

Поэтому все скалярные произведения вычисляются «напрямую» (см., например, [38]), путем перемножения двух упомянутых выше 4-векторов токов.

Для упрощения промежуточных выкладок скалярные произведения лептонного и нуклонного токов будут получены в системе центра масс нейтрального лептона и нуклона, где энергии входящих и выходящих из процесса упругого рассеяния $\nu(k) + N(p) \rightarrow \nu(k') + N(p')$ фермионов равны. Соответственно для (анти)нейтрино и нуклона эти энергии таковы:

$$E_\nu = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}}, \quad E_N = E_p = \frac{s + m^2}{2\sqrt{s}},$$

где $s = (p + k)^2$; p и m — 4-импульс и масса нуклона; k — 4-импульс (анти)нейтрино. В дальнейшем все величины в данном разделе, зависящие от кинематических переменных, даны в системе центра масс (анти)нейтрино и нуклона. Кинематика упругого рассеяния (анти)нейтрино на нуклоне в системе их центра масс может быть построена на базе единичного 3-вектора, направленного по оси сталкивающихся частиц, которая может быть (без потери общности) выбрана вдоль координатной z -оси (рис. 21). Тогда направления движения всех участвующих в рассеянии частиц будут заданы единичными векторами

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_k &= (0, 0, 1), & \mathbf{n}_p &= -\mathbf{n}_k, \\ \mathbf{n}_{k'} &= (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta), & \mathbf{n}_{p'} &= -\mathbf{n}_{k'}. \end{aligned} \tag{П.83}$$

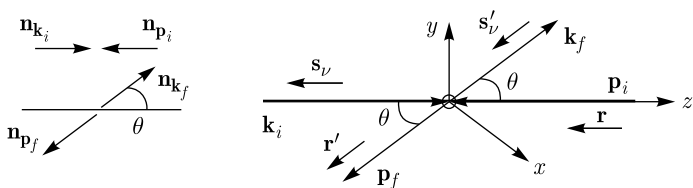


Рис. 21. Расположение единичных векторов в системе центра масс нейтрино и нуклона (слева). Спины частиц показаны справа. Для безмассовых нейтрино (антинейтрино) начальные и конечные проекции их спинов (s_ν и s'_ν) всегда антипараллельны (параллельны) их импульсам (\mathbf{k}_i и \mathbf{k}_f). Для массивных нуклонов 3-векторы их спинов (\mathbf{r} и \mathbf{r}'), вообще говоря, могут быть произвольно направлены по отношению к их 3-импульсам (\mathbf{p}_i и \mathbf{p}_f)

Здесь $\mathbf{n}_k \equiv \mathbf{n}_{k_i}$ и $\mathbf{n}_{k'} \equiv \mathbf{n}_{k_f}$ соответствуют начальному и конечному (анти-)нейтрину, а $\mathbf{n}_p \equiv \mathbf{n}_{p_i}$ и $\mathbf{n}_{p'} \equiv \mathbf{n}_{p_f}$ — начальному и конечному нуклону (протону или нейтрону). В явном виде они таковы:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}_{p_i} &= -\mathbf{n}_{k_i} = (0, 0, -1) \\ \mathbf{n}_{p_f} &= -\mathbf{n}_{k_f} = (-\cos \phi \sin \theta, -\sin \phi \sin \theta, -\cos \theta).\end{aligned}$$

Оказывается удобным проводить вычисления скалярных произведений в различных базисах двухкомпонентных спиноров χ_r . Так, например, суммирование по спиновым индексам r, r' в некогерентном слагаемом дифференциального сечения (6.36) легче проводить на основе спирального базиса, где r, r' — собственные значения оператора спиральности. Когерентное слагаемое сечения (6.36) требует рассмотрения нуклонного тока, сохраняющего проекцию спина нуклона на заданное направление. Для решения этой задачи наиболее удобен базис биспиноров χ_r , которые суть собственные состояния оператора $\sigma_3 = (\mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma})$. При этом очевидно, что физические наблюдаемые не должны зависеть от выбора базиса.

П.5.1. Базис спиральности. *Собственные векторы и компоненты токов.* Сначала определим базисные векторы оператора спиральности (анти-)нейтринно и нуклона $\hat{H}_{p_j/k_j} \equiv \mathbf{n}_{p_j/k_j} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, где стандартные матрицы Паули имеют вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3); \quad \sigma_1 = \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_2 = \sigma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Для этого надо решить задачу на собственные значения операторов спиральности

$$\hat{H}_{p_j/k_j} \chi_r(\mathbf{n}_{p_j/k_j}) = r \chi_r(\mathbf{n}_{p_j/k_j}). \quad (\text{П.84})$$

Как известно, двухкомпонентный спинор $\chi_r(\mathbf{n})$ является собственным вектором оператора такого сорта с собственным значением $r = \pm 1$, известным как спиральность или удвоенная проекция спина фермиона на его 3-импульс.

Действительно, согласно направлению движения начального лептона вдоль третьей (или z) оси (П.83) оператор спиральности имеет простой вид*:

$$\hat{H}_{k_i} = \mathbf{n}_{k_i} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

*Поскольку $\mathbf{n}_{k_i} \cdot \boldsymbol{\sigma} = (0, 0, 1) \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задача на собственные значения оператора спиральности начального лептона

$$\hat{H}_{k_i} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k_i}) \equiv \sigma_3 \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k_i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k_i}) = \mp \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k_i})$$

для собственных значений $r = -1$ и $r = +1$, когда спин антипараллелен ($\mathbf{s} \downarrow \uparrow \mathbf{k}_i$) и параллелен ($\mathbf{s} \uparrow \uparrow \mathbf{k}_i$) импульсу, имеет решения в виде

$$\begin{aligned} \chi_{-}(\mathbf{k}_i) &\equiv \chi_{-}(\mathbf{n}_{k_i}) = \chi_{-1}(\mathbf{n}_{k_i}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \chi_{+}(\mathbf{k}_i) &\equiv \chi_{+}(\mathbf{n}_{k_i}) = \chi_{+1}(\mathbf{n}_{k_i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.85})$$

Далее согласно (П.83) направление движения начального нуклона в системе центра масс строго противоположно направлению движения начального лептона, т. е. вдоль z -оси, поэтому оператор спиральности для начального нуклона

$$\hat{H}_{p_i} = \mathbf{n}_{p_i} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\sigma_3 = -\hat{H}_{k_i}.$$

Задача на собственные значения оператора спиральности начального нуклона

$$\hat{H}_{p_i} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{p_i}) \equiv [-\sigma_3] \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{p_i}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{p_i}) = \mp \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{p_i}) \quad (\text{П.86})$$

для собственных значений $r = -1$ и $r = +1$, отвечающих случаю, когда спин нуклона антипараллелен ($\mathbf{r} \downarrow \uparrow \mathbf{p}_i$) и параллелен ($\mathbf{r} \uparrow \uparrow \mathbf{p}_i$) его импульсу, имеет решение в виде*

$$\begin{aligned} \chi_{-}(\mathbf{p}_i) &\equiv \chi_{-}(\mathbf{n}_{p_i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \chi_{+}(\mathbf{p}_i) &\equiv \chi_{+}(\mathbf{n}_{p_i}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ или } \chi_{+}(\mathbf{n}_{p_i}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.87})$$

В последнем случае можно выбрать любой из эквивалентных вариантов, т. е. со знаком $+1$ или со знаком -1 .

Перейдем к нахождению собственных векторов операторов спиральности конечных фермионов. Согласно (П.83) оператор спиральности конечного лептона, улетающего в направлении \mathbf{n}_{k_f} , имеет вид

$$\hat{H}_{k_f} = \mathbf{n}_{k_f} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix},$$

*Поскольку теперь $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (\pm)1 \end{pmatrix} = + \begin{pmatrix} 0 \\ (\pm)1 \end{pmatrix}$.

что можно показать прямой выкладкой*:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_{k_f} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \times \\ &\times \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \sin \phi \sin \theta \\ i \sin \phi \sin \theta & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & -\cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда задача на собственные значения оператора спиральности конечного лептона

$$\hat{H}_{k_f} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k_f}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k_f}) = \mp \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{k_f})$$

для собственных значений $r = -1$ и $r = +1$, когда спин антипараллелен ($\mathbf{s}' \downarrow \uparrow \mathbf{k}_f$) и параллелен ($\mathbf{s}' \uparrow \uparrow \mathbf{k}_f$) импульсу лептона, имеет решения в виде

$$\begin{aligned} \chi_{-}(\mathbf{k}_f) &\equiv \chi_{-}(\mathbf{n}_{k_f}) = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \chi_{+}(\mathbf{k}_f) &\equiv \chi_{+}(\mathbf{n}_{k_f}) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.88})$$

Действительно, прямая подстановка с использованием соотношений из сноски (*) дает

$$\begin{aligned} \hat{H}_{k_f} \chi_{-}(\mathbf{n}_{k_f}) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cos \theta + e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \sin \theta - \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} [\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \cos \theta - \sin \theta] \\ -\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sin \theta - \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= (-1) \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} [\cos \theta - \sin \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}] \\ \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sin \theta + \cos \theta \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

*Здесь и далее используются тригонометрические соотношения: $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi \rightarrow -i \cos \phi + \sin \phi = -ie^{i\phi}$, $i \cos \phi + \sin \phi = ie^{-i\phi}$. $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$, $\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sin \theta + \cos \theta = 1$, $\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \sin \theta - \cos \theta = 1$.

$$\begin{aligned}
 \hat{H}_{k_f} \chi_+(\mathbf{n}_{k_f}) &= \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \theta e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} [\cos \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \sin \theta] \\ \sin \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \cos \theta \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} [\cos \theta + \sin \theta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}] \\ \sin \theta \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \cos \theta \end{pmatrix} = (+1) \chi_+(\mathbf{n}_{k_f}).
 \end{aligned}$$

Поскольку направление вылета конечного нуклона строго противоположно направлению вылета конечного лептона, то матрица оператора спиральности конечного нуклона $H_{p_f} = -H_{k_f}$. Решение соответствующей задачи на собственные значения для конечного нуклона

$$\hat{H}_{p_f} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{p_f}) \equiv \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{p_f}) = \mp \chi_{\mp}(\mathbf{n}_{p_f}) \quad (\text{П.89})$$

для $r = -1$ (когда $(\mathbf{r}' \downarrow \uparrow \mathbf{p}_f)$) и $r = +1$ (когда $(\mathbf{r}' \uparrow \uparrow \mathbf{p}_f)$) имеет вид

$$\begin{aligned}
 \chi_-(\mathbf{p}_f) \equiv \chi_-(\mathbf{n}_{p_f}) &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \\
 \chi_+(\mathbf{p}_f) \equiv \chi_+(\mathbf{n}_{p_f}) &= \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \quad (\text{П.90})$$

Выражения (П.85), (П.87), (П.88), (П.90) содержат полный набор собственных состояний операторов спиральности. При этом очевидно, что собственные состояния оператора спиральности начальных фермионов (П.85) и (П.87) уже нормированы на единицы, т. е. $|\chi_{\pm}(\mathbf{p}/\mathbf{k}_i)|^2 = 1$, в то время как собственные состояния операторов спиральности конечных фермионов в виде (П.88) и (П.90) таким свойством не обладают, т. е. $|\chi_{\pm}(\mathbf{p}/\mathbf{k}_f)|^2 \neq 1$. Действительно,

$$\begin{aligned}
 \chi_-^\dagger(\mathbf{k}_f) \chi_-(\mathbf{k}_f) &= \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} -e^{+i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \cos^{-2} \frac{\theta}{2}; \\
 \chi_+^\dagger(\mathbf{k}_f) \chi_+(\mathbf{k}_f) &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} + 1 = \sin^{-2} \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

Из постановки задачи на собственное значение видно, что если $\chi_+(\mathbf{p}_f)$ — собственный вектор оператора спиральности для собственного значения $+1$,

то $\tilde{\chi}_+(\mathbf{p}_f) = a \chi_+(\mathbf{p}_f)$ также собственный вектор для собственного значения $+1$, где a — произвольный множитель. Поэтому, учтя, что согласно (П.88) и (П.90) имеет место $\chi_-^\dagger(\mathbf{k}_f) \chi_-(\mathbf{k}_f) = \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f) \chi_+(\mathbf{p}_f)$ и $\chi_+^\dagger(\mathbf{k}_f) \chi_+(\mathbf{k}_f) = \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f) \chi_-(\mathbf{p}_f)$, а также переопределив 2-спиноры, например, в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_-(\mathbf{k}_f) &= \cos \frac{\theta}{2} \chi_-(\mathbf{k}_f), & \tilde{\chi}_+(\mathbf{k}_f) &= e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \chi_+(\mathbf{k}_f), \\ \tilde{\chi}_-(\mathbf{p}_f) &= \sin \frac{\theta}{2} \chi_-(\mathbf{p}_f), & \tilde{\chi}_+(\mathbf{p}_f) &= -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \chi_+(\mathbf{p}_f)\end{aligned}$$

и опустив знак тильды, получим их удовлетворяющими условию $|\chi_\pm(\mathbf{p}/\mathbf{k}_{i/f})|^2 = 1$.

Итак, нормированные на единицу собственные векторы (2-компонентные спиноры) операторов спиральности начальных и конечных (анти)нейтрино и нуклонов в системе их центра масс имеют вид

$$\begin{aligned}\chi_-(\mathbf{k}_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \chi_-(\mathbf{k}_f) &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_+(\mathbf{k}_i) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \chi_+(\mathbf{k}_f) &= e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_-(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \chi_-(\mathbf{p}_f) &= \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_+(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \chi_+(\mathbf{p}_f) &= -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{П.91}$$

В статье [19] биспинор начального нуклона $\chi_+(\mathbf{n}_\mathbf{p})$ определен с другим знаком:

$$\begin{aligned}\chi_+(\mathbf{n}_\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \chi_+(\mathbf{n}_{\mathbf{k}'}) &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_-(\mathbf{n}_\mathbf{k}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \chi_-(\mathbf{n}_{\mathbf{k}'}) &= \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_+(\mathbf{n}_\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & \chi_+(\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}) &= \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\ \chi_-(\mathbf{n}_\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \chi_-(\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}) &= \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{П.92}$$

Очевидно, что конечный результат не зависит от этого различия в формулах (П.91) и (П.92).

Компоненты токов. В базисе γ -матриц Дирака $\gamma^\mu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$, $\gamma_\mu = (\gamma_0, -\boldsymbol{\gamma}) = g_{\mu\nu}\gamma^\nu$, где

$$\gamma_0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix},$$

4-спинор с 3-импульсом \mathbf{p} и спиновым индексом $r = \pm 1$, являющийся решением уравнения Дирака, согласно выражению (П.14) для массивного фермиона (нуклона) имеет вид

$$u(\mathbf{p}, r) = \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{p}). \quad (\text{П.93})$$

Индекс r нумерует два линейно-независимых биспинора $\chi_r(\mathbf{p})$. Соответственно, 4-спинор с 3-импульсом \mathbf{k} и спиновым индексом $s = \pm 1$ согласно выражению (П.14) для массивного антифермиона имеет вид

$$v(\mathbf{k}, s) = \begin{pmatrix} \lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{k}} \\ \lambda_+ \end{pmatrix} \chi_s(\mathbf{k}), \quad (\text{П.94})$$

где $\lambda_\pm = \sqrt{E_N \pm m}$ и $\alpha_p = \mathbf{n}_{\mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_{\mathbf{p}_i} \cdot \boldsymbol{\sigma}$; $\alpha_k = \mathbf{n}_{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_{\mathbf{k}_i} \cdot \boldsymbol{\sigma}$. Далее будут необходимы комбинации биспиноров и матриц Паули, вытекающие из (П.93) и (П.94):

$$\begin{aligned} u^\dagger(\mathbf{p}', r') &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, \lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{p'}^\dagger), & v^\dagger(\mathbf{k}', s') &= \chi_{s'}^\dagger(\mathbf{k}')(\lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{k'}^\dagger, \lambda_+); \\ \bar{u}(\mathbf{p}', r') &= u^\dagger(\mathbf{p}', r')\gamma_0 = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, \lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{p'}^\dagger) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, -\lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{p'}^\dagger), \\ \bar{u}(\mathbf{p}', r')\gamma_0 &= u^\dagger(\mathbf{p}', r')\gamma_0^2 = u^\dagger(\mathbf{p}', r') = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, \lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{p'}^\dagger), & (\text{П.95}) \\ \bar{u}(\mathbf{p}', r')\boldsymbol{\gamma} &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, -\lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{p'}^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}, \lambda_+ \boldsymbol{\sigma}), \\ \bar{u}(\mathbf{p}', r')\gamma_0\gamma_5 &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+, \lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{p'}^\dagger) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{p'}^\dagger, \lambda_+), \\ \bar{u}(\mathbf{p}', r')\boldsymbol{\gamma}\gamma_5 &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}, \lambda_+ \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}')(\lambda_+ \boldsymbol{\sigma}, \lambda_- \boldsymbol{\alpha}_{p'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}). \end{aligned}$$

Здесь $\alpha_{k'/p'} = \mathbf{n}_{\mathbf{k}'/p'} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_{\mathbf{k}_f/p_f} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ и $\alpha_{k'/p'}^\dagger = \alpha_{k'/p'}$, поскольку $\boldsymbol{\sigma}^\dagger = \boldsymbol{\sigma}$.

С помощью выражений (П.95) все компоненты, отвечающие $\mu = 0, 1, 2, 3$, векторного и аксиал-векторного нуклонных токов, которые заданы формулами

$$\begin{aligned} V_{r'r}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, r), \\ A_{r'r}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^\mu \gamma^5 u(\mathbf{p}, r), \end{aligned} \quad (\text{П.96})$$

для всех значений спиральности и импульса начального ($r = \pm, \mathbf{p}$) и конечного ($r' = \pm, \mathbf{p}'$) нуклонов могут быть выражены через собственные состояния нуклонных операторов спиральности в виде

$$\begin{aligned} V_{r'r}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}) [\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \alpha_{\mathbf{p}'} \alpha_{\mathbf{p}}] \chi_r(\mathbf{n}_{\mathbf{p}}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{V}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}), \\ \mathbf{V}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}) \lambda_+ \lambda_- [\boldsymbol{\sigma} \alpha_{\mathbf{p}} + \alpha_{\mathbf{p}'} \boldsymbol{\sigma}] \chi_r(\mathbf{n}_{\mathbf{p}}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}), \\ A_{r'r}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}) \lambda_+ \lambda_- [\alpha_{\mathbf{p}'} + \alpha_{\mathbf{p}}] \chi_r(\mathbf{n}_{\mathbf{p}}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{A}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}), \\ \mathbf{A}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}) [\lambda_+^2 \boldsymbol{\sigma} + \lambda_-^2 \alpha_{\mathbf{p}'} \boldsymbol{\sigma} \alpha_{\mathbf{p}}] \chi_r(\mathbf{n}_{\mathbf{p}}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \chi_r(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (\text{П.97})$$

Здесь введены «токовые» матрицы

$$\begin{aligned} \hat{V}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger \alpha_{\mathbf{p}}, & \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \lambda_- \lambda_+ [\alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_{\mathbf{p}}], \\ \hat{A}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \lambda_+ \lambda_- [\alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger + \alpha_{\mathbf{p}}], & \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &\equiv \lambda_+^2 \boldsymbol{\sigma} + \lambda_-^2 \alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \alpha_{\mathbf{p}}. \end{aligned} \quad (\text{П.98})$$

Действительно, подставляя биспиноры (П.95) в токи (П.96), получаем формулы (П.97):

$$\begin{aligned} V_{r'r}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma_0 u(\mathbf{p}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') (\lambda_+, \lambda_- \alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger) \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_- \alpha_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{p}) = \\ &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') (\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger \alpha_{\mathbf{p}}) \chi_r(\mathbf{p}); \\ \mathbf{V}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', r') \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{p}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') (\lambda_- \alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}, \lambda_+ \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_- \alpha_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{p}) = \\ &= \lambda_- \lambda_+ \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') (\alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_{\mathbf{p}}) \chi_r(\mathbf{p}); \\ A_{r'r}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma_0 \gamma_5 u(\mathbf{p}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') (\lambda_- \alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger, \lambda_+) \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_- \alpha_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{p}) = \\ &= \lambda_+ \lambda_- \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') (\alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger + \alpha_{\mathbf{p}}) \chi_r(\mathbf{p}); \\ \mathbf{A}_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', r') \boldsymbol{\gamma} \gamma_5 u(\mathbf{p}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') (\lambda_+ \boldsymbol{\sigma}, \lambda_- \alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_- \alpha_{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{p}) = \\ &= \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') [\lambda_+^2 \boldsymbol{\sigma} + \lambda_-^2 \alpha_{\mathbf{p}'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \alpha_{\mathbf{p}}] \chi_r(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Если в формулах (П.93), (П.96) и (П.97) заменить \mathbf{p}, \mathbf{p}' на \mathbf{k}, \mathbf{k}' с учетом $\alpha_k = \mathbf{n}_k \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_{k_i} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ и $\alpha_{k'} = \mathbf{n}_{k'} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{n}_{k'_f} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, то можно получить аналог формул (П.97) для нейтрино:

$$\begin{aligned}
 V_{r'r}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', r') \gamma_0 u(\mathbf{k}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{V}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_r(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{V}_{r'r}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', r') \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{k}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_r(\mathbf{k}), \\
 A_{r'r}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', r') \gamma_0 \gamma_5 u(\mathbf{k}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{A}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_r(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{A}_{r'r}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', r') \boldsymbol{\gamma} \gamma_5 u(\mathbf{k}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_r(\mathbf{k}),
 \end{aligned} \tag{П.99}$$

где нейтринные токовые матрицы имеют вид

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \alpha_{k'}^\dagger \alpha_k, & \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \lambda_- \lambda_+ [\alpha_{k'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_k], \\
 \hat{A}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \lambda_+ \lambda_- [\alpha_{k'}^\dagger + \alpha_k], & \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \lambda_+^2 \boldsymbol{\sigma} + \lambda_-^2 \alpha_{k'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \alpha_k.
 \end{aligned}$$

Тем не менее важно получить напрямую компоненты токов нейтрино и антинейтрино. Для этого используются 4-спиноры частицы и античастицы — решения уравнения Дирака — (П.93) и (П.94) при $m = 0$ и, соответственно, $\lambda = \sqrt{E_\nu}$. Они имеют вид

$$\begin{aligned}
 u(\mathbf{k}, r) &= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_k \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{k}), & u^\dagger(\mathbf{k}', r') &= \lambda \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') (1, \alpha_{k'}^\dagger), \\
 \bar{u}(\mathbf{k}', r') &= \lambda \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') (1, -\alpha_{k'}^\dagger),
 \end{aligned} \tag{П.100}$$

$$\begin{aligned}
 v(\mathbf{k}, r) &= \lambda \begin{pmatrix} \alpha_k \\ 1 \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{k}), & v^\dagger(\mathbf{k}', r') &= \lambda \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') (\alpha_{k'}^\dagger, 1), \\
 \bar{v}(\mathbf{k}', r') &= \lambda \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') (\alpha_{k'}^\dagger, -1).
 \end{aligned} \tag{П.101}$$

Выражения для компонент векторного и аксиал-векторного токов нейтрино получаются из (П.99) без использования (П.100) заменой $\lambda_\pm \rightarrow \lambda$, т. е.

$$\begin{aligned}
 V_{r'r}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', r') \gamma_0 u(\mathbf{k}, r) = \lambda^2 \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') [1 + \alpha_{k'}^\dagger \alpha_k] \chi_r(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{V}_{r'r}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', r') \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{k}, r) = \lambda^2 \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') [\alpha_{k'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_k] \chi_r(\mathbf{k}), \\
 A_{r'r}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', r') \gamma_0 \gamma_5 u(\mathbf{k}, r) = \lambda^2 \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') [\alpha_{k'}^\dagger + \alpha_k] \chi_r(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{A}_{r'r}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', r') \boldsymbol{\gamma} \gamma_5 u(\mathbf{k}, r) = \lambda^2 \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}') [\boldsymbol{\sigma} + \alpha_{k'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \alpha_k] \chi_r(\mathbf{k}).
 \end{aligned} \tag{П.102}$$

По аналогии с формулами (П.95) для 4-спиноров частиц на базе 4-спинора (П.101) можно построить остальные необходимые комбинации биспи-

норов и матриц Паули для античастицы (антинейтрино). Они таковы:

$$\begin{aligned}
 \bar{v}(\mathbf{k}', r')\gamma_0 &= v^\dagger(\mathbf{k}', r')\gamma_0^2 = v^\dagger(\mathbf{k}', r') = \lambda\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(\alpha_{k'}^\dagger, 1), \\
 \bar{v}(\mathbf{k}', r')\boldsymbol{\gamma} &= \lambda\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(\alpha_{k'}^\dagger, -1) \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \lambda\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_{k'}^\dagger, \boldsymbol{\sigma}), \\
 \bar{v}(\mathbf{k}', r')\gamma_0\gamma_5 &= \lambda\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(\alpha_{k'}^\dagger, 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(1, \alpha_{k'}^\dagger), \\
 \bar{v}(\mathbf{k}', r')\boldsymbol{\gamma}\gamma_5 &= \lambda\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_{k'}^\dagger, \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(\alpha_{k'}^\dagger, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}).
 \end{aligned} \tag{П.103}$$

С использованием (П.103) компоненты токов для антинейтрино, аналогичные (П.102), получаются в виде

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_{r'r}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{v}(\mathbf{k}', r')\gamma_0 v(\mathbf{k}, r) = \\
 &= \lambda^2\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(\alpha_{k'}^\dagger, 1) \begin{pmatrix} \alpha_k \\ 1 \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{k}) = \lambda^2\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')[\alpha_{k'}^\dagger, \alpha_k + 1]\chi_r(\mathbf{k}), \\
 \bar{\mathbf{V}}_{r'r}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{v}(\mathbf{k}', r')\boldsymbol{\gamma} v(\mathbf{k}, r) = \\
 &= \lambda^2\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(\boldsymbol{\sigma}, \alpha_{k'}^\dagger, \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} \alpha_k \\ 1 \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{k}) = \lambda^2\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')[\boldsymbol{\sigma}\alpha_k + \alpha_{k'}^\dagger, \boldsymbol{\sigma}]\chi_r(\mathbf{k}), \\
 \bar{A}_{r'r}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{v}(\mathbf{k}', r')\gamma_0\gamma_5 v(\mathbf{k}, r) = \\
 &= \lambda^2\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(1, \alpha_{k'}^\dagger) \begin{pmatrix} \alpha_k \\ 1 \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{k}) = \lambda^2\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')[\alpha_k + \alpha_{k'}^\dagger]\chi_r(\mathbf{k}), \\
 \bar{\mathbf{A}}_{r'r}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{v}(\mathbf{k}', r')\boldsymbol{\gamma}\gamma_5 v(\mathbf{k}, r) = \\
 &= \lambda^2\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')(\alpha_{k'}^\dagger, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) \begin{pmatrix} \alpha_k \\ 1 \end{pmatrix} \chi_r(\mathbf{k}) = \lambda^2\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')[\alpha_{k'}^\dagger, \boldsymbol{\sigma}\alpha_k + \boldsymbol{\sigma}]\chi_r(\mathbf{k}).
 \end{aligned} \tag{П.104}$$

Сравнивая формулы (П.104) и (П.102), можно заметить, что в терминах биспиноров $\chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')$ и $\chi_r(\mathbf{k})$ эти выражения совпадают, поскольку под знаком суммы матрицы можно переставлять. Поэтому нейтринный и антинейтринный V - и A -токи записываются в единой форме:

$$\begin{aligned}
 V_{r'r}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{V}_{r'r}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')\hat{V}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k})\chi_r(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{V}_{r'r}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{\mathbf{V}}_{r'r}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{k}', \mathbf{k})\chi_r(\mathbf{k}), \\
 A_{r'r}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{A}_{r'r}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')\hat{A}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k})\chi_r(\mathbf{k}), \\
 \mathbf{A}_{r'r}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{\mathbf{A}}_{r'r}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{k}')\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}', \mathbf{k})\chi_r(\mathbf{k}),
 \end{aligned} \tag{П.105}$$

где введены общие для нейтрино и антинейтрино токовые матрицы

$$\begin{aligned} \hat{V}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \lambda^2[1 + \alpha_{k'}^\dagger \alpha_k], & \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \lambda^2[\alpha_{k'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_k], \\ \hat{A}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \lambda^2[\alpha_{k'}^\dagger + \alpha_k], & \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &\equiv \lambda^2[\boldsymbol{\sigma} + \alpha_{k'}^\dagger \boldsymbol{\sigma} \alpha_k]. \end{aligned} \quad (\text{П.106})$$

Отличие токов нейтрино от токов антинейтрино состоит в том, что поскольку киральность (анти)нейтрино совпадает со спиральностью и сохраняется, то при $m_\nu = m_{\bar{\nu}} = 0$ нейтрино всегда имеют левую спиральность, и в этих выражениях следует для них использовать биспиноры $\chi_-^\dagger(\mathbf{k}')$ и $\chi_-(\mathbf{k})$. Антинейтрино всегда имеют правую спиральность, и следует для них использовать биспиноры $\chi_+^\dagger(\mathbf{k}')$ и $\chi_+(\mathbf{k})$.

Компоненты лептонных токов. Поскольку нейтрино обладает всегда левой спиральностью (т. е. спин нейтрино направлен против его импульса), то для полного описания нейтрино необходимы только биспиноры $\chi_-(\mathbf{k}_i)$ и $\chi_-(\mathbf{k}_f)$ из (П.91). Поэтому для нейтрино следует вычислить следующие компоненты слабого векторного и аксиального токов:

$$\begin{aligned} V_{--}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \chi_-^\dagger(\mathbf{k}') \hat{V}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_-(\mathbf{k}), \\ \mathbf{V}_{--}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \chi_-^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_-(\mathbf{k}), \\ A_{--}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \chi_-^\dagger(\mathbf{k}') \hat{A}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_-(\mathbf{k}), \\ \mathbf{A}_{--}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \chi_-^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_-(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Для антинейтрино, обладающих всегда правой спиральностью (т. е. спин антинейтрино направлен по его импульсу), применимы только биспиноры $\chi_+(\mathbf{k}_i)$ и $\chi_+(\mathbf{k}_f)$ из (П.91), и необходимо вычислить другие (дополнительные к нейтринным) компоненты слабого векторного и аксиального токов*:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{++}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}') \hat{V}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_+(\mathbf{k}), \\ \bar{\mathbf{V}}_{++}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_+(\mathbf{k}), \\ \bar{A}_{++}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}') \hat{A}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_+(\mathbf{k}), \\ \bar{\mathbf{A}}_{++}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \chi_+(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

В терминах наблюдаемых углов рассеяния θ и ϕ , связанных с уходящим 3-импульсом (анти)нейтрино $\mathbf{k}' \equiv \mathbf{k}_f$, матрицы векторных $\hat{V}^{0,1,2,3}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ и

*Возможность изменения спиральности (анти)нейтрино после взаимодействия не рассматривается. Хотя с точки зрения поиска проявлений Новой физики такой вариант может, в принципе, иметь право на существование, например, если принять во внимание ненулевые массы (анти)нейтрино.

аксиал-векторных $\hat{A}^{0,1,2,3}(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ лептонных токов, определенные выражениями (П.105) и (П.106), имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned}
 V^0(k_f) &\equiv \hat{V}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \lambda^2 [1 + \alpha_{k'}^\dagger \alpha_k] = E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 V^1(k_f) &\equiv \hat{V}^1(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \lambda^2 [\alpha_{k'} \sigma_1 + \sigma_1 \alpha_k] = E_\nu \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 V^2(k_f) &\equiv \hat{V}^2(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \lambda^2 [\alpha_{k'} \sigma_2 + \sigma_2 \alpha_k] = & \text{(П.107)} \\
 &= E_\nu \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta & i - i \cos \theta \\ i - i \cos \theta & -ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = iA^1(k_f), \\
 V^3(k_f) &\equiv \hat{V}^3(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \lambda^2 [\alpha_{k'} \sigma_3 + \sigma_3 \alpha_k] = \\
 &= E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} = V^0(k_f);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^0(k_f) &\equiv \hat{A}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \lambda^2 [\alpha_{k'} + \alpha_k] = E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 A^1(k_f) &\equiv \hat{A}^1(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \lambda^2 [\sigma_1 + \alpha_{k'} \sigma_1 \alpha_k] = E_\nu \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\
 A^2(k_f) &\equiv \hat{A}^2(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \lambda^2 [\sigma_2 + \alpha_{k'} \sigma_2 \alpha_k] = & \text{(П.108)} \\
 &= E_\nu \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta & -i(1 - \cos \theta) \\ i(1 - \cos \theta) & ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = iV^1(k_f), \\
 A^3(k_f) &\equiv \hat{A}^3(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \lambda^2 [\sigma_3 + \alpha_{k'} \sigma_3 \alpha_k] = \\
 &= E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix} = A^0(k_f).
 \end{aligned}$$

Действительно, прямые вычисления показывают

$$\begin{aligned}
 V^0(k_f) &= \lambda^2 + \lambda^2 \alpha_{k'} \alpha_k = E_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
 &+ E_\nu \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = E_\nu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \\
 &+ E_\nu \begin{pmatrix} \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V^1(k_f) &= \lambda^2[\alpha_{k'}\sigma_1 + \sigma_1\alpha_k] = E_\nu \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \times \right. \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left. \right] = E_\nu \left[\begin{pmatrix} e^{-i\phi}\sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix} + \right. \\
 &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = E_\nu \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\sin\theta & -1 + \cos\theta \\ 1 - \cos\theta & e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V^2(k_f) &= \lambda^2[\alpha_{k'}\sigma_2 + \sigma_2\alpha_k] = E_\nu \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \times \right. \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left. \right] = E_\nu \left[\begin{pmatrix} ie^{-i\phi}\sin\theta & -i\cos\theta \\ -i\cos\theta & -ie^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix} + \right. \\
 &\quad \left. + \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = E_\nu \begin{pmatrix} ie^{-i\phi}\sin\theta & i - i\cos\theta \\ i - i\cos\theta & -ie^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V^3(k_f) &= \lambda^2[\alpha_{k'}\sigma_3 + \sigma_3\alpha_k] = \\
 &= E_\nu \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & -e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & 1 + \cos\theta \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^0(k_f) &= \lambda^2[\alpha_{k'} + \alpha_k] = E_\nu \left[\begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -1 - \cos\theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^1(k_f) &= \lambda^2\sigma_1 + \lambda^2\alpha_{k'}\sigma_1\alpha_k = \\
 &= E_\nu \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= E_\nu \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= E_\nu \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\sin\theta & 1 - \cos\theta \\ 1 - \cos\theta & -e^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$A^2(k_f) = \lambda^2\sigma_2 + \lambda^2\alpha_{k'}\sigma_2\alpha_k = E_\nu \begin{pmatrix} ie^{-i\phi}\sin\theta & -i(1 - \cos\theta) \\ i(1 - \cos\theta) & ie^{i\phi}\sin\theta \end{pmatrix},$$

$$A^3(k_f) = \lambda^2\sigma_3 + \lambda^2\alpha_{k'}\sigma_3\alpha_k = E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta \\ e^{i\phi}\sin\theta & -1 - \cos\theta \end{pmatrix}.$$

С помощью явных выражений для матриц (П.107) и (П.108) и явного вида биспиноров

$$\chi_{-}(\mathbf{k}_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \chi_{-}(\mathbf{k}_f) = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

можно вычислить все компоненты векторного и аксиал-векторного токов для нейтрино:

$$\begin{aligned} V_{--}^0 &= \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}_f) V^0(k_f) \chi_{-}(\mathbf{k}_i) = \\ &= \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}_f) \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \chi_{-}(\mathbf{k}_i) = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} (-e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, 1) \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta \\ 1 + \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \theta \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \cos \theta \right) = 2 \cos \frac{\theta}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{--}^1 &= \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}_f) V^1(k_f) \chi_{-}(\mathbf{k}_i) = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \times \\ &\times \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} (-e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, 1) \begin{pmatrix} -1 + \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta) + \sin \theta \right] = 2e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{--}^2 &= \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}_f) V^2(k_f) \chi_{-}(\mathbf{k}_i) = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \times \\ &\times \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta & i - i \cos \theta \\ i - i \cos \theta & -ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \cos \frac{\theta}{2} i (-e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, 1) \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= -ie^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta) + \sin \theta \right] = -i2e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{--}^3 &= \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}_f) V^3(k_f) \chi_{-}(\mathbf{k}_i) = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \times \\
 &\times \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta \\ 1 + \cos \theta \end{pmatrix} = \\
 &= \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \cos \theta + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sin \theta \right) = 2 \cos \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{--}^0 &= \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}_f) A^0(k_f) \chi_{-}(\mathbf{k}_i) = \\
 &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ -1 - \cos \theta \end{pmatrix} = \\
 &= -\cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \cos \theta + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \sin \theta \right] = -2 \cos \frac{\theta}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{--}^1 &= \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}_f) A^1(k_f) \chi_{-}(\mathbf{k}_i) = \\
 &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\
 &= -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta) + \sin \theta \right] = -2e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{--}^2 &= \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}_f) A^2(k_f) \chi_{-}(\mathbf{k}_i) = \\
 &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta & -i(1 - \cos \theta) \\ i(1 - \cos \theta) & ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i(1 - \cos \theta) \\ ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\
 &= ie^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \left[\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} (1 - \cos \theta) + \sin \theta \right] = i2e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{--}^3 &= \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{k}_f) A^3(k_f) \chi_{-}(\mathbf{k}_i) = \\
 &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ -1 - \cos \theta \end{pmatrix} = -2 \cos \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

В этих выкладках был временно опущен общий множитель E_ν . Возвращая его на место, в базисе спиральности для компонент векторного нейтринного слабого тока в системе центра масс нейтрино и нуклона имеем

$$V_{--}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^0 u(\mathbf{k}, -1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{k}_f)V^0(k_f)\chi_-(\mathbf{k}_i) = 2E_\nu \cos \frac{\theta}{2},$$

$$V_{--}^1(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^1 u(\mathbf{k}, -1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{k}_f)V^1(k_f)\chi_-(\mathbf{k}_i) = 2e^{i\phi}E_\nu \sin \frac{\theta}{2},$$

$$V_{--}^2(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^2 u(\mathbf{k}, -1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{k}_f)V^2(k_f)\chi_-(\mathbf{k}_i) = \\ = -2ie^{i\phi}E_\nu \sin \frac{\theta}{2} = -V_{--}^1(\mathbf{k}', \mathbf{k}),$$

$$V_{--}^3(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^3 u(\mathbf{k}, -1) = \\ = \chi_-^\dagger(\mathbf{k}_f)V^3(k_f)\chi_-(\mathbf{k}_i) = 2E_\nu \cos \frac{\theta}{2} = V_{--}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}).$$

Для компонент аксиального нейтринного слабого тока соответственно имеем

$$A_{--}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^0\gamma_5 u(\mathbf{k}, -1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{k}_f)A^0(k_f)\chi_-(\mathbf{k}_i) = \\ = -2E_\nu \cos \frac{\theta}{2} = -V_{--}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}),$$

$$A_{--}^1(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^1\gamma_5 u(\mathbf{k}, -1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{k}_f)A^1(k_f)\chi_-(\mathbf{k}_i) = \\ = -2e^{i\phi}E_\nu \sin \frac{\theta}{2} = -V_{--}^1(\mathbf{k}', \mathbf{k}),$$

$$A_{--}^2(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^2\gamma_5 u(\mathbf{k}, -1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{k}_f)A^2(k_f)\chi_-(\mathbf{k}_i) = \\ = 2ie^{i\phi}E_\nu \sin \frac{\theta}{2} = -A_{--}^1(\mathbf{k}', \mathbf{k}),$$

$$A_{--}^3(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^3\gamma_5 u(\mathbf{k}, -1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{k}_f)A^3(k_f)\chi_-(\mathbf{k}_i) = \\ = -2E_\nu \cos \frac{\theta}{2} = A_{--}^0(\mathbf{k}', \mathbf{k}).$$

В более удобном и компактном виде для нейтрино токи записываются как

$$V_{--}^X(\mathbf{k}_f) = 2E_\nu \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, -ie^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad (\text{П.109})$$

$$A_{--}^X(\mathbf{k}_f) = 2E_\nu \left(-\cos \frac{\theta}{2}, -e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, ie^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, -\cos \frac{\theta}{2} \right) = -V_{--}^X(\mathbf{k}_f).$$

В работе [19] с учетом обозначений $c_{\theta/2} \equiv \cos \frac{\theta}{2}$, $s_{\theta/2} \equiv \sin \frac{\theta}{2}$ эти выражения выглядят так:

$$V_{--}^{\chi(0,1,2,3)} = 2E_\nu (c_{\theta/2}, s_{\theta/2}e^{+i\phi}, -is_{\theta/2}e^{+i\phi}, c_{\theta/2}), \\ A_{--}^{\chi(0,1,2,3)} = 2E_\nu (-c_{\theta/2}, -s_{\theta/2}e^{+i\phi}, is_{\theta/2}e^{+i\phi}, -c_{\theta/2}). \quad (\text{П.110})$$

Из (П.109) следует, во-первых, что для нейтрино правый слабый ток тождественно равен нулю, $V_{-}^{\chi} + A_{-}^{\chi} \equiv 0$, и, во-вторых, что левый $V - A$ -ток имеет вид

$$\begin{aligned} l_{\nu}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^{\mu}u(\mathbf{k}, -1) - \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^{\mu}\gamma_5u(\mathbf{k}, -1) = \\ &= \bar{u}(\mathbf{k}', -1)\gamma^{\mu}(1 - \gamma_5)u(\mathbf{k}, -1) = V_{-}^{\chi}(\mathbf{k}_f) - A_{-}^{\chi}(\mathbf{k}_f) = \\ &= 4E_{\nu} \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, -ie^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{П.111}) \end{aligned}$$

Этот слабый нейтринный ток должен быть свернут с аналогично полученным ниже слабым нуклонным током для нахождения скалярного произведения $(l_{\nu}^{\chi}, h^{\chi})$ в базисе спиральности.

Обратимся к вычислению компонент векторного $\bar{V}_{++}^{0,1,2,3}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{k}') \times \hat{V}^{0,1,2,3}(k_f)\chi_{+}(\mathbf{k})$ и аксиального $\bar{A}_{++}^{0,1,2,3}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{k}')\hat{A}^{0,1,2,3}(k_f)\chi_{+}(\mathbf{k})$ токов для антинейтрино. Аналогично «нейтринному» случаю с помощью выражений для матриц (П.107) и (П.108) и явного вида «антинейтринных» биспиноров

$$\chi_{+}(\mathbf{k}_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{+}(\mathbf{k}_f) = e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

вычисляются все компоненты векторного и аксиал-векторного токов для антинейтрино*:

$$\begin{aligned} V_{++}^0 &= \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{k}_f)V^0(k_f)\chi_{+}(\mathbf{k}_i) = \\ &= \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{k}_f) \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \chi_{+}(\mathbf{k}_i) = \\ &= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix}^{\dagger} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\ &= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) + \sin \theta \right] = 2 \cos \frac{\theta}{2}; \end{aligned}$$

*Использовано, что $e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta) + \sin \theta \right] = \sin \frac{\theta}{2} \frac{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta}{\sin \theta} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2}$.

$$\begin{aligned}
V_{++}^1 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}_f) V^1(k_f) \chi_+(\mathbf{k}_i) = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} (e^{i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, 1) \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix} = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \sin \theta + 1 - \cos \theta \right] = 2e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{++}^2 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}_f) V^2(k_f) \chi_+(\mathbf{k}_i) = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta & i - i \cos \theta \\ i - i \cos \theta & -ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} (e^{i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, 1) \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta \\ i - i \cos \theta \end{pmatrix} = \\
&= ie^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \left[\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \sin \theta + 1 - \cos \theta \right] = 2ie^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_{++}^3 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}_f) V^3(k_f) \chi_+(\mathbf{k}_i) = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} (e^{i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, 1) \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = 2 \cos \frac{\theta}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{++}^0 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}_f) A^0(k_f) \chi_+(\mathbf{k}_i) = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} (e^{i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, 1) \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = 2 \cos \frac{\theta}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{++}^1 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}_f) A^1(k_f) \chi_+(\mathbf{k}_i) E_\nu = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} (e^{i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, 1) \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta \\ 1 - \cos \theta \end{pmatrix} = 2e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{++}^2 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}_f) A^2(k_f) \chi_+(\mathbf{k}_i) = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta & -i(1 - \cos \theta) \\ i(1 - \cos \theta) & ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} (e^{i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, 1) \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta \\ i(1 - \cos \theta) \end{pmatrix} = 2ie^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{++}^3 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{k}_f) A^3(k_f) \chi_+(\mathbf{k}_i) = \\
 &= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} & \\ & 1 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \left(e^{i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, 1 \right) \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = 2 \cos \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

В результате (после восстановления множителя E_ν) компоненты векторного и аксиал-векторного токов антинейтрино в базисе спиральности принимают вид

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_{++}^{\chi(0,1,2,3)}(\mathbf{k}_f) &= 2E_\nu e^{-i\phi} \left(e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \right) = \\
 &= 2E_\nu \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, ie^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad (\text{П.112}) \\
 \bar{A}_{++}^{\chi(0,1,2,3)}(\mathbf{k}_f) &= 2E_\nu e^{-i\phi} \left(e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}, i \sin \frac{\theta}{2}, e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \right) = \\
 &= \bar{V}_{++}^{\chi(0,1,2,3)}(\mathbf{k}_f).
 \end{aligned}$$

Из полученных результатов для компонент слабых токов антинейтрино (П.112) следует, что для антинейтрино в полной противоположности случаю с нейтрино (П.111), во-первых, разность векторного и аксиального токов равна нулю, т. е. $\bar{V}_{++}^\chi - \bar{A}_{++}^\chi \equiv 0$, и, во-вторых, что правый слабый ток имеет вид

$$\begin{aligned}
 l_{\bar{\nu}}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) &= \bar{v}(\mathbf{k}', +1) \gamma^\mu v(\mathbf{k}, +1) + \bar{v}(\mathbf{k}', +1) \gamma^\mu \gamma_5 v(\mathbf{k}, +1) = \\
 &= \bar{v}(\mathbf{k}', +1) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) v(\mathbf{k}, +1) = \bar{V}_{++}^\chi(\mathbf{k}_f) + \bar{A}_{++}^\chi(\mathbf{k}_f) = \\
 &= 4E_\nu \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, ie^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{П.113})
 \end{aligned}$$

Таким образом, при заданном формулами (П.96) виде V - и A -слабого взаимодействия соотношение $\bar{V}_{++}^\chi - \bar{A}_{++}^\chi = 0$ означает, что если спин безмассового фермиона параллелен его импульсу (случай $++$), т. е. ν_R и $\bar{\nu}_R$), то такой фермион не может участвовать в слабом взаимодействии $V-A$ -типа. Однако он может участвовать в слабом взаимодействии $V+A$ -типа, поскольку $\bar{V}_{++}^\chi + \bar{A}_{++}^\chi \neq 0$, что и делает реально существующее правое антинейтрино $\bar{\nu}_R$ в отличие от несуществующего правого нейтрино ν_R . Когда спин антипараллелен импульсу (случай $--$), т. е. ν_L и $\bar{\nu}_L$), имеется обратная ситуация, т. е. левое (реальное) нейтрино ν_L участвует в $V-A$ -взаимодействии, а левое антинейтрино $\bar{\nu}_L$ в нем не проявляется, поскольку не существует.

Полученный выше антинейтринный слабый ток должен быть свернут с аналогичным током для нуклона с целью получения искомого скалярного произведения $(l_{\bar{\nu}}, h^\chi)$.

Компоненты нуклонных токов. Исходя из формул (П.96) и (П.97) для векторного и аксиал-векторного тока нуклона:

$$V_{r'r}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma_0 u(\mathbf{p}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{V}^0(\mathbf{p}_f) \chi_r(\mathbf{p}),$$

$$\text{где } \hat{V}^0(\mathbf{p}_f) \equiv \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \alpha_{p'} \alpha_p;$$

$$V_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}', r') \boldsymbol{\gamma} u(\mathbf{p}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}_f) \chi_r(\mathbf{p}),$$

$$\text{где } \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}_f) \equiv \lambda_- \lambda_+ [\alpha_{p'} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_p];$$

$$A_{r'r}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma_0 \gamma_5 u(\mathbf{p}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{A}^0(\mathbf{p}_f) \chi_r(\mathbf{p}),$$

$$\text{где } \hat{A}^0(\mathbf{p}_f) \equiv \lambda_+ \lambda_- [\alpha_{p'} + \alpha_p];$$

$$A_{r'r}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}', r') \boldsymbol{\gamma} \gamma_5 u(\mathbf{p}, r) = \chi_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_f) \chi_r(\mathbf{p}),$$

$$\text{где } \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_f) \equiv \lambda_+^2 \boldsymbol{\sigma} + \lambda_-^2 \alpha_{p'} \boldsymbol{\sigma} \alpha_p,$$

вычислим компоненты этих токов, принимая во внимание, что в системе центра масс лептона и нуклона справедливо

$$\lambda_{\pm}^2 = E_p \pm m \quad \text{и} \quad \lambda_+ \lambda_- = \sqrt{E_p^2 - m^2} = E_\nu.$$

Сначала получим явные выражения для матриц $\hat{V}^\mu(\mathbf{p}_f)$ и $\hat{A}^\mu(\mathbf{p}_f)$, учитывая, что согласно (П.86) и (П.89)

$$\alpha_p = \mathbf{n}_{p_i} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \alpha_{p'} = \mathbf{n}_{p_f} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Итак, прямые выкладки для матриц векторного тока нуклона дают следующее:

$$\begin{aligned} \hat{V}^0(\mathbf{p}_f) &= \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \alpha_{p'} \alpha_p = \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_+^2 & 0 \\ 0 & \lambda_+^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_-^2 \cos \theta & -\lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ \lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & \lambda_-^2 \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta & -\lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ \lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E_p + m + (E_p - m) \cos \theta & -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta & E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^1(\mathbf{p}_f) &= \lambda_- \lambda_+ [\alpha_{p'} \sigma_1 + \sigma_1 \alpha_p] = \\
 &= E_\nu \left[\begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= E_\nu \left[\begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= E_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^2(\mathbf{p}_f) &= \lambda_- \lambda_+ [\alpha_{p'} \sigma_2 + \sigma_2 \alpha_p] = \\
 &= E_\nu \left[\begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= E_\nu \left[\begin{pmatrix} -ie^{-i\phi} \sin \theta & i \cos \theta \\ i \cos \theta & ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= iE_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{V}^3(\mathbf{p}_f) &= \lambda_- \lambda_+ [\alpha_{p'} \sigma_3 + \sigma_3 \alpha_p] = \\
 &= E_\nu \left[\begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= E_\nu \left[\begin{pmatrix} -\cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Для матриц аксиал-векторного тока нуклона имеет место

$$\begin{aligned}
 \hat{A}^0(\mathbf{p}_f) &= \lambda_+ \lambda_- [\alpha_{p'} + \alpha_p] = E_\nu \left[\begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \\
 &= E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & (1 + \cos \theta) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{A}^1(\mathbf{p}_f) &= \lambda_+^2 \sigma_1 + \lambda_-^2 \alpha_{p'} \sigma_1 \alpha_p = \lambda_+^2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \\
 &+ \lambda_-^2 \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & \lambda_+^2 \\ \lambda_+^2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_-^2 \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & \lambda_+^2 \\ \lambda_+^2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_-^2 \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta & \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta \\ \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta & -\lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (E_p - m)e^{-i\phi} \sin \theta & (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & -(E_p - m)e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}^2(\mathbf{p}_f) &= \lambda_+^2 \sigma_2 + \lambda_-^2 \alpha_{p'} \sigma_2 \alpha_p = \lambda_+^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \\
&+ \lambda_-^2 \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i\lambda_+^2 \\ i\lambda_+^2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_-^2 \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -i\lambda_+^2 \\ i\lambda_+^2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_-^2 \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta & i \cos \theta \\ -i \cos \theta & ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\
&= i \begin{pmatrix} \lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta & -\lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta \\ \lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta & \lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} = \\
&= i \begin{pmatrix} (E_p - m)e^{-i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m)e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}^3(\mathbf{p}_f) &= \lambda_+^2 \sigma_3 + \lambda_-^2 \alpha_{p'} \sigma_3 \alpha_p = \lambda_+^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \\
&+ \lambda_-^2 \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_+^2 & 0 \\ 0 & -\lambda_+^2 \end{pmatrix} + \lambda_-^2 \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_+^2 & 0 \\ 0 & -\lambda_+^2 \end{pmatrix} + \lambda_-^2 \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \cos \theta & \lambda_-^2 e^{-i\phi} \sin \theta \\ \lambda_-^2 e^{i\phi} \sin \theta & -\lambda_+^2 - \lambda_-^2 \cos \theta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} (E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m)e^{-i\phi} \sin \theta \\ (E_p - m)e^{i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Напомним, что согласно (П.91) в базисе спиральности нуклонные начальные $\chi_{\pm}(\mathbf{p}) = \chi_{\pm}(\mathbf{p}_i)$ и конечные биспиноры $\chi_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p}') = \chi_{\pm}^{\dagger}(\mathbf{p}_f)$ нормированы условием $\chi_{\pm}^{\dagger}\chi_{\pm} = 1$ и имеют вид

$$\begin{aligned} \chi_{-}(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{p}_f) &= \sin \frac{\theta}{2} \left(e^{+i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad 1 \right) = \left(e^{+i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \sin \frac{\theta}{2} \right), \\ \chi_{+}(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{p}_f) &= -e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \left(-e^{+i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}, \quad 1 \right) = \left(\sin \frac{\theta}{2}, \quad -e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.114})$$

Подставляя их в формулы для векторного и аксиального токов (П.96) и (П.97) и учитывая полученный выше явный вид матриц $\hat{V}^{\mu}(\mathbf{p}_f)$ и $\hat{A}^{\mu}(\mathbf{p}_f)$, по аналогии со случаем для (анти)нейтрино * получаем следующие выражения для всех возможных компонент нуклонных слабых токов:

$$\begin{aligned} V_{--}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_0 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{p}_f)V_0(p_f)\chi_{-}(\mathbf{p}_i) = 2e^{i\phi}E_p \cos \frac{\theta}{2}, \\ V_{-+}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_0 u(\mathbf{p}, +1) = \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{p}_f)V_0(p_f)\chi_{+}(\mathbf{p}_i) = 2m \sin \frac{\theta}{2}, \\ V_{+-}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_0 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{p}_f)V_0(p_f)\chi_{-}(\mathbf{p}_i) = 2m \sin \frac{\theta}{2}, \\ V_{++}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_0 u(\mathbf{p}, +1) = \\ &= \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{p}_f)V_0(p_f)\chi_{+}(\mathbf{p}_i) = -2E_p e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}; \\ V_{--}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_1 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{p}_f)V_1(p_f)\chi_{-}(\mathbf{p}_i) = -2E_p \sin \frac{\theta}{2}, \\ V_{-+}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_1 u(\mathbf{p}, +1) = \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{p}_f)V_1(p_f)\chi_{+}(\mathbf{p}_i) = 0, \\ V_{+-}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_1 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{p}_f)V_1(p_f)\chi_{-}(\mathbf{p}_i) = 0, \\ V_{++}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_1 u(\mathbf{p}, +1) = \chi_{+}^{\dagger}(\mathbf{p}_f)V_1(p_f)\chi_{+}(\mathbf{p}_i) = 2E_p \sin \frac{\theta}{2}; \\ V_{--}^2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_2 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_{-}^{\dagger}(\mathbf{p}_f)V_2(p_f)\chi_{-}(\mathbf{p}_i) = -2iE_p \sin \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

*Или параллельно используя пакет MATHEMATICA.

$$\mathbf{V}_{-+}^2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_2 u(\mathbf{p}, +1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)V_2(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = 0,$$

$$\mathbf{V}_{+-}^2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_2 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)V_2(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{++}^2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_2 u(\mathbf{p}, +1) = \\ &= \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)V_2(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = -2iE_\nu \sin \frac{\theta}{2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{--}^3(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_3 u(\mathbf{p}, -1) = \\ &= \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)V_3(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = -2e^{i\phi}E_\nu \cos \frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_{-+}^3(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_3 u(\mathbf{p}, +1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)V_3(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = 0,$$

$$\mathbf{V}_{+-}^3(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_3 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)V_3(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = 0,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{V}_{++}^3(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_3 u(\mathbf{p}, +1) = \\ &= \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)V_3(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = 2E_\nu e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{--}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_0\gamma_5 u(\mathbf{p}, -1) = \\ &= \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)A_0(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = -2e^{i\phi}E_\nu \cos \frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

$$A_{-+}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_0\gamma_5 u(\mathbf{p}, +1) = \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)A_0(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = 0,$$

$$A_{+-}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_0\gamma_5 u(\mathbf{p}, -1) = \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)A_0(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = 0,$$

$$\begin{aligned}A_{++}^0(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_0\gamma_5 u(\mathbf{p}, +1) = \\ &= \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)A_0(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = -2E_\nu e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{--}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_1\gamma_5 u(\mathbf{p}, -1) = \\ &= \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)A_1(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = 2E_p \sin \frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{-+}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_1\gamma_5 u(\mathbf{p}, +1) = \\ &= \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)A_1(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = 2e^{i\phi}m \cos \frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{+-}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_1\gamma_5 u(\mathbf{p}, -1) = \\ &= \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)A_1(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = -2me^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A_{++}^1(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_1\gamma_5 u(\mathbf{p}, +1) = \\ &= \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)A_1(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = 2E_p \sin \frac{\theta}{2};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{--}^2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_2\gamma_5 u(\mathbf{p}, -1) = \\
 &= \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)A_2(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = 2iE_p \sin \frac{\theta}{2}, \\
 \mathbf{A}_{-+}^2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_2\gamma_5 u(\mathbf{p}, +1) = \\
 &= \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)A_2(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = -2ie^{i\phi}m \cos \frac{\theta}{2}, \\
 \mathbf{A}_{+-}^2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_2\gamma_5 u(\mathbf{p}, -1) = \\
 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)A_2(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = -2ime^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, \\
 \mathbf{A}_{++}^2(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_2\gamma_5 u(\mathbf{p}, +1) = \\
 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)A_2(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = -2iE_p \sin \frac{\theta}{2}; \\
 \mathbf{A}_{--}^3(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_3\gamma_5 u(\mathbf{p}, -1) = \\
 &= \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)A_3(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = 2e^{i\phi}E_p \cos \frac{\theta}{2}, \\
 \mathbf{A}_{-+}^3(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', -1)\gamma_3\gamma_5 u(\mathbf{p}, +1) = \\
 &= \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f)A_3(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = -2m \sin \frac{\theta}{2}, \\
 \mathbf{A}_{+-}^3(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_3\gamma_5 u(\mathbf{p}, -1) = \\
 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)A_3(p_f)\chi_-(\mathbf{p}_i) = 2m \sin \frac{\theta}{2}, \\
 \mathbf{A}_{++}^3(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', +1)\gamma_3\gamma_5 u(\mathbf{p}, +1) = \\
 &= \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f)A_3(p_f)\chi_+(\mathbf{p}_i) = 2E_p e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}$$

После сборки этих компонент в компактную запись 4-векторный и 4-аксиал-векторный токи нуклона в базисе спиральности принимают вид*

$$\begin{aligned}
 V_{--}^\chi &= 2 \left(e^{i\phi} E_p \cos \frac{\theta}{2}, -E_\nu \sin \frac{\theta}{2}, -iE_\nu \sin \frac{\theta}{2}, -e^{i\phi} E_\nu \cos \frac{\theta}{2} \right), \\
 V_{-+}^\chi &= 2m \left(\sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right) = (-)2m \left(-\sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right), \\
 V_{+-}^\chi &= 2m \left(\sin \frac{\theta}{2}, 0, 0, 0 \right), \\
 V_{++}^\chi &= 2 \left(-E_p e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, E_\nu \sin \frac{\theta}{2}, -iE_\nu \sin \frac{\theta}{2}, E_\nu e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \right) = \\
 &= (-)2 \left(E_p e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, -E_\nu \sin \frac{\theta}{2}, iE_\nu \sin \frac{\theta}{2}, -E_\nu e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \right);
 \end{aligned}$$

*Выделенный ниже временно знак $(-)$ отражает (упоминавшееся выше и несущественное) различие в определении нуклонного начального спинора $\chi_+(\mathbf{p}_i)$: $\chi_+(\mathbf{p}_i)$ здесь в (П.91) $= -\chi_+(\mathbf{p}_i)$ в (П.92) из [19].

$$\begin{aligned}
A_{--}^X &= 2 \left(-e^{i\phi} E_\nu \cos \frac{\theta}{2}, E_p \sin \frac{\theta}{2}, iE_p \sin \frac{\theta}{2}, e^{i\phi} E_p \cos \frac{\theta}{2} \right), \\
A_{-+}^X &= 2m \left(0, e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, -ie^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, -\sin \frac{\theta}{2} \right) = \\
&= (-)2m \left(0, -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, ie^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right), \\
A_{+-}^X &= 2m \left(0, -e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, -ie^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2} \right), \\
A_{++}^X &= 2 \left(-E_\nu e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, E_p \sin \frac{\theta}{2}, -iE_p \sin \frac{\theta}{2}, E_p e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \right) = \\
&= (-)2 \left(E_\nu e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2}, -E_p \sin \frac{\theta}{2}, iE_p \sin \frac{\theta}{2}, -E_p e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \right).
\end{aligned}$$

В работе [19] эти компоненты векторного и аксиального нуклонного токов в базисе спиральности (обозначенном индексом χ) с учетом обозначений $c_{\theta/2} = \cos \frac{\theta}{2}$, $s_{\theta/2} = \sin \frac{\theta}{2}$ записаны с другим знаком (см. сноску на с. 253) так:

$$\begin{aligned}
V_{++}^X &= 2 (c_{\theta/2} e^{-i\varphi} E_p, (-s_{\theta/2}, is_{\theta/2}, -c_{\theta/2} e^{-i\varphi}) E_\nu), \\
V_{--}^X &= 2 (c_{\theta/2} e^{+i\varphi} E_p, (-s_{\theta/2}, -is_{\theta/2}, -c_{\theta/2} e^{+i\varphi}) E_\nu), \\
V_{+-}^X &= 2m (s_{\theta/2}, 0, 0, 0), \\
V_{-+}^X &= 2m (-s_{\theta/2}, 0, 0, 0), \\
A_{++}^X &= 2 (c_{\theta/2} e^{-i\varphi} E_\nu, (-s_{\theta/2}, is_{\theta/2}, -c_{\theta/2} e^{-i\varphi}) E_p), \\
A_{--}^X &= 2 (-c_{\theta/2} e^{+i\varphi} E_\nu, (s_{\theta/2}, is_{\theta/2}, c_{\theta/2} e^{+i\varphi}) E_p), \\
A_{+-}^X &= 2m (0, -c_{\theta/2} e^{-i\varphi}, -ic_{\theta/2} e^{-i\varphi}, s_{\theta/2}), \\
A_{-+}^X &= 2m (0, -c_{\theta/2} e^{+i\varphi}, ic_{\theta/2} e^{+i\varphi}, s_{\theta/2}).
\end{aligned} \tag{П.115}$$

Из этих общих выражений видно, что для безмассовых нейтрино и антинейтрино имеет место $V_{+-} = V_{-+} = A_{+-} = A_{-+} = 0$, что означает сохранение спиральности нейтрино и антинейтрино в слабых взаимодействиях. Поэтому, например, в (П.109) только левые нейтринные токи необходимы для вычислений сечений упругого нейтрино-ядерного рассеяния.

Итак, в базисе спиральности слабый нуклонный ток при всех возможных значениях спиральности начального (второй индекс) и конечного (первый индекс) нуклонов имеет вид

$$\begin{aligned}
h_{\pm\pm}^\mu &= \bar{u}(\mathbf{p}_f, \pm) \gamma^\mu (g_V - g_A \gamma_5) u(\mathbf{p}_i, \pm) = g_V \bar{u}(\mathbf{p}_f, \pm) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_i, \pm) - \\
&\quad - g_A \bar{u}(\mathbf{p}_f, \pm) \gamma^\mu \gamma_5 u(\mathbf{p}_i, \pm) = g_V V_{\pm\pm}^{\chi, \mu} - g_A A_{\pm\pm}^{\chi, \mu}. \tag{П.116}
\end{aligned}$$

Покомпонентно этот нуклонный ток $h_{r'r}^{\chi,\mu} = g_V V_{r'r}^{\chi,\mu} - g_A A_{r'r}^{\chi,\mu}$ можно записать как

$$\begin{aligned}
 h_{--}^{\chi,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \\
 &= 2 \left\{ e^{i\phi} (E_\nu g_A + E_p g_V) \cos \frac{\theta}{2}, -(E_p g_A + E_\nu g_V) \sin \frac{\theta}{2}, \right. \\
 &\quad \left. -i(E_p g_A + E_\nu g_V) \sin \frac{\theta}{2}, -e^{i\phi} (E_p g_A + E_\nu g_V) \cos \frac{\theta}{2} \right\}, \\
 h_{-+}^{\chi,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \\
 &= 2 \left\{ g_V m \sin \frac{\theta}{2}, -e^{i\phi} g_A m \cos \frac{\theta}{2}, ie^{i\phi} g_A m \cos \frac{\theta}{2}, g_A m \sin \frac{\theta}{2} \right\}, \quad (\text{П.117})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{+-}^{\chi,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \\
 &= 2 \left\{ g_V m \sin \frac{\theta}{2}, e^{-i\phi} g_A m \cos \frac{\theta}{2}, ie^{-i\phi} g_A m \cos \frac{\theta}{2}, -g_A m \sin \frac{\theta}{2} \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{++}^{\chi,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \\
 &= 2 \left\{ e^{-i\phi} (E_\nu g_A - E_p g_V) \cos \frac{\theta}{2}, (-E_p g_A + E_\nu g_V) \sin \frac{\theta}{2}, \right. \\
 &\quad \left. i(E_p g_A - E_\nu g_V) \sin \frac{\theta}{2}, e^{-i\phi} (-E_p g_A + E_\nu g_V) \cos \frac{\theta}{2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Именно эти выражения необходимы для вычисления скалярных произведений $(l_\nu/\bar{\nu}, h^\chi)$.

П.5.2. Базис спиральности. Скалярные произведения токов (l, h) . Напомним, что слабые нейтринный и антинейтринный токи согласно (П.111) и (П.113) в базисе спиральности покомпонентно имеют вид

$$l_\nu^{\chi,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 4E_\nu \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, -ie^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right), \quad (\text{П.118})$$

$$l_{\bar{\nu}}^{\chi,\mu=0,1,2,3}(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = 4E_\nu \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, ie^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{П.119})$$

С помощью выражений (П.117, П.118) и (П.119), а также метрического тензора $g_{\mu\nu}$ * вычисляются искомые скалярные произведения лептонных и ну-

* $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Для нейтрино: $(l_\nu, h_{r'r}) = \bar{u}(k', -1)\gamma^\mu(1-\gamma^5)u(k, -1) \times$

$\bar{u}(p', r')\gamma_\mu(g_V - g_A\gamma^5)u(p, r)$.

КЛОННЫХ ТОКОВ

$$(l_\nu \cdot h_{r',r}^\chi) \equiv \sum_{\mu,\nu}^4 l_\nu^\mu g_{\mu\nu} h_{r',r}^{\chi,\nu}, \quad (\bar{l}_\nu \cdot h_{r',r}^\chi) \equiv \sum_{\mu,\nu}^4 \bar{l}_\nu^\mu g_{\mu\nu} h_{r',r}^{\chi,\nu}. \quad (\text{П.120})$$

Эти вычисления можно провести напрямую*, например, в виде следующей выкладки:

$$\begin{aligned} (l_\nu \cdot h_{--}^\chi) &= \sum_{\mu,\nu}^4 l_\nu^\mu g_{\mu\nu} h_{--}^{\chi,\nu} = 4E_\nu \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, -ie^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \times \\ &\times (g_{\mu\nu})_2 \left\{ e^{i\phi} (E_\nu g_A + E_p g_V) \cos \frac{\theta}{2}, -(E_p g_A + E_\nu g_V) \sin \frac{\theta}{2}, \right. \\ &\quad \left. -i(E_p g_A + E_\nu g_V) \sin \frac{\theta}{2}, -e^{i\phi} (E_p g_A + E_\nu g_V) \cos \frac{\theta}{2} \right\} = \\ &= 8E_\nu \left\{ \left[\cos \frac{\theta}{2} \right] \left[e^{i\phi} (E_\nu g_A + E_p g_V) \cos \frac{\theta}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right] \left[-(E_p g_A + E_\nu g_V) \sin \frac{\theta}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[-ie^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \right] \left[-i(E_p g_A + E_\nu g_V) \sin \frac{\theta}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[\cos \frac{\theta}{2} \right] \left[-e^{i\phi} (E_p g_A + E_\nu g_V) \cos \frac{\theta}{2} \right] \right\} = \\ &= 8E_\nu e^{i\phi} \left\{ (E_\nu g_A + E_p g_V) \cos^2 \frac{\theta}{2} + (E_p g_A + E_\nu g_V) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (E_p g_A + E_\nu g_V) \sin^2 \frac{\theta}{2} + (E_p g_A + E_\nu g_V) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right\} = \\ &= 8E_\nu e^{i\phi} \left\{ (E_\nu g_A + E_p g_V) \left[1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + (E_p g_A + E_\nu g_V) \sin^2 \frac{\theta}{2} + (E_p g_A + E_\nu g_V) \right\} = \\ &= 8E_\nu e^{i\phi} \left\{ [E_\nu + E_p][g_A + g_V] + [E_p - E_\nu][g_A - g_V] \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} = \\ &= 8 \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}} e^{i\phi} \left\{ [\sqrt{s}][2g_L] - \left[\frac{m^2}{\sqrt{s}} \right] [2g_R] \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} = \\ &= 8e^{i\phi} (s - m^2) \left(g_L - g_R \frac{m^2}{s} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \rightarrow (\text{П.122}). \end{aligned}$$

*Или с помощью пакета аналитических вычислений MATHEMATICA.

В результате в базисе спиральности (и в системе центра масс лептон–нуклон) с учетом

$$g_{V/A} = g_L \pm g_R, \quad E_{p/\nu} = \frac{s \pm m^2}{2\sqrt{s}} \quad \text{и} \quad \cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (\text{П.121})$$

скалярные произведения нейтринного и нуклонного токов при всех возможных значениях спиральности начального и конечного нуклонов выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} (l_\nu \cdot h_{++}^X) &= (-)8 e^{-i\phi} g_R (s - m^2) (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}), \\ (l_\nu \cdot h_{--}^X) &= 8 e^{i\phi} (s - m^2) \left(g_L - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right), \\ (l_\nu \cdot h_{+-}^X) &= 8 g_R (s - m^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}, \\ (l_\nu \cdot h_{-+}^X) &= (+)8 g_R (s - m^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (\text{П.122})$$

В работе [19] выражения для (l, h_{++}^X) и (l, h_{-+}^X) представлены с другим знаком, поскольку, как уже упоминалось, $\chi_+(\mathbf{p}_i)_{\text{здесь}} = -\chi_+(\mathbf{p}_i)$ в [19]:

$$\begin{aligned} (l, h_{++}^X) &= 8(s - m^2) e^{-i\varphi} \cos^2 \frac{\theta}{2} g_R, \\ (l, h_{--}^X) &= 8(s - m^2) e^{+i\varphi} \left(g_L - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right), \\ (l, h_{+-}^X) &= 8(s - m^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} g_R, \\ (l, h_{-+}^X) &= -8(s - m^2) \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} g_R. \end{aligned} \quad (\text{П.123})$$

Эта разница в знаке исчезает в квадратах скалярных произведений, которые входят в наблюдаемые величины.

Квадраты скалярных произведений $|(l_\nu \cdot h_{r'r}^X)|^2$ и их полная сумма по начальным и конечным проекциям спина нуклона (всем спиральностям), $\sum_{r'r} |(l_\nu \cdot h_{r'r}^X)|^2$, даются выражениями

$$\begin{aligned} |(l_\nu \cdot h_{--}^X)|^2 &= \frac{16}{s^2} (m^2 - s)^2 (-g_R m^2 + 2g_L s + g_R m^2 \cos \theta)^2, \\ |(l_\nu \cdot h_{-+}^X)|^2 &= \frac{16}{s} g_R^2 m^2 (m^2 - s)^2 \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |(l_\nu \cdot h_{+-}^X)|^2 &= \frac{16}{s} g_R^2 m^2 (m^2 - s)^2 \sin^2 \theta, \\
 |(l_\nu \cdot h_{++}^X)|^2 &= 16 g_R^2 (m^2 - s)^2 (1 + \cos \theta)^2; \\
 \sum_{r,r'} \frac{|(l_\nu \cdot h_{r,r'}^X)|^2}{64(m^2 - s)^2} &= g_L^2 + \frac{g_L g_R m^2 (-1 + \cos \theta)}{s} + \\
 + \frac{g_R^2 (m^2 + s + (-m^2 + s) \cos \theta)^2}{4s^2} &= g_L^2 + g_R^2 (1 - y)^2 - 2g_L g_R \frac{ym^2}{s - m^2}.
 \end{aligned}$$

Последняя строка соответствует известной формуле для нейтрино-нуклонного рассеяния с обменом Z^0 -бозоном (см., например, [39, 171]):

$$\sum_{r,r'} |(l_\nu \cdot h_{r,r'}^X)|^2 = 2^6 (s - m^2)^2 \left(g_L^2 + g_R^2 (1 - y)^2 - 2g_L g_R \frac{ym^2}{s - m^2} \right). \quad (\text{П.124})$$

В системе центра масс нейтрино и нуклона бьеркеновская переменная y и $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ связаны соотношениями

$$y = \frac{(p, q)}{(p, k)}, \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{ys}{s - m^2}, \quad \cos \theta = 1 - \frac{2ys}{s - m^2}. \quad (\text{П.125})$$

Аналогично выражениям (П.122) с учетом (П.119) и подстановок (П.121) скалярные произведения антинейтринного и нуклонного токов в базе спиральности при всех возможных значениях спиральности начального и конечного нуклонов выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (l_{\bar{\nu}} \cdot h_{--}^X) &= 4e^{i\phi} g_L (-m^2 + s)(1 + \cos \theta), \\
 (l_{\bar{\nu}} \cdot h_{-+}^X) &= \frac{4g_L m (-m^2 + s) \sin \theta}{\sqrt{s}}, \\
 (l_{\bar{\nu}} \cdot h_{+-}^X) &= \frac{4g_L m (-m^2 + s) \sin \theta}{\sqrt{s}}, \\
 (l_{\bar{\nu}} \cdot h_{++}^X) &= \frac{4e^{-i\phi} (m^2 - s) (-g_L m^2 + 2g_R s + g_L m^2 \cos \theta)}{s}.
 \end{aligned} \quad (\text{П.126})$$

Квадраты этих (антинейтринных) скалярных произведений $|(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{r,r'}^X)|^2$ и их полная сумма по начальным и конечным проекциям спина нуклона (всем

спиральностям нуклона) $\sum_{r'r} |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{r'r}^{\chi})|^2$ принимают вид

$$\begin{aligned}
 |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{--}^{\chi})|^2 &= 16g_L^2(m^2 - s)^2(1 + \cos \theta)^2, \\
 |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{-+}^{\chi})|^2 &= 16g_L^2 \frac{m^2}{s}(m^2 - s)^2 \sin^2 \theta, \\
 |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{+-}^{\chi})|^2 &= 16g_L^2 \frac{m^2}{s}(m^2 - s)^2 \sin^2 \theta, \\
 |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{++}^{\chi})|^2 &= \frac{16(m^2 - s)^2(-g_L m^2 + 2g_R s + g_L m^2 \cos \theta)^2}{s^2}; \\
 \frac{\sum_{r'r} |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{r'r}^{\chi})|^2}{64(m^2 - s)^2} &= g_R^2 + \frac{g_L g_R m^2(-1 + \cos \theta)}{s} + \\
 + \frac{g_L^2(m^2 + s + (-m^2 + s) \cos \theta)^2}{4s^2} &= g_R^2 + g_L^2(1 - y)^2 - 2g_L g_R \frac{ym^2}{s - m^2}.
 \end{aligned}
 \tag{П.127}$$

Выражение (П.127) соответствует известной формуле для сечения рассеяния антинейтрино на нуклоне (электроне), которая может быть получена из выражения для нейтрино-нуклонного (электронного) рассеяния (П.124) путем замены g_L на g_R и наоборот (см., например, [39, 171]).

Итак, формулы (П.122) и (П.126) представляют собой искомый набор скалярных произведений лептон-нуклонных слабых токов в системе центра масс сталкивающихся частиц, полученный в базисе спиральности для всех возможных значений спиральности начального (второй индекс \pm) и конечного (первый индекс \pm) нуклона. Формула (П.122) отвечает случаю нейтрино-нуклонного рассеяния, а формула (П.126) — случаю рассеяния антинейтрино на нуклоне.

П.5.3. Базис σ_3 . Собственные векторы и компоненты токов. Как и ранее, будем считать, что направление падающего (на ядро и/или нуклон) начального (анти)нейтрино совпадает с z -осью (рис. 21) и задается единичным вектором $\mathbf{n}_{k_i} = (0, 0, 1)$. Оператор спиральности начального нейтрино и антинейтрино $\alpha_{k_i} = \mathbf{n}_{k_i} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ имеет собственные значения -1 и $+1$ и соответствующие нормированные, $|\eta_{\pm}(\mathbf{k}_i)|^2 = 1$, собственные векторы:

$$\eta_{-}(\mathbf{k}_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \eta_{+}(\mathbf{k}_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
 \tag{П.128}$$

Как и ранее, направление движения конечного (анти)нейтрино задается единичным вектором $\mathbf{n}_{k_f} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$. Оператор спиральности

для конечного лептона имеет стандартный вид

$$\alpha_{k_f} = \mathbf{n}_{k_f} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

Его собственным значениям -1 и $+1$ отвечают нормированные $|\eta_{\pm}(\mathbf{k}_f)|^2 = 1$, собственные векторы

$$\eta_{-}(\mathbf{k}_f) \equiv \chi_{-}(\mathbf{k}_f) \quad \text{и} \quad \eta_{+}(\mathbf{k}_f) \equiv \chi_{+}(\mathbf{k}_f), \quad (\text{П.129})$$

явный вид которых определяется выражениями (П.91). Иными словами, поскольку спиральность нейтрино и антинейтрино сохраняется, то собственные состояния в базисе спиральности (начального нейтрального безмассового лептона) и в σ_3 -базисе совпадают.

Для массивного нуклона ситуация меняется. Будем теперь квантовать спин нуклона не по направлению движения самого нуклона (базис спиральности), а вдоль оси \mathbf{n}_k налетающего (анти)нейтрино в системе центра масс лептон–нуклон. Это означает, что биспиноры начального $\eta_r(\mathbf{p}_i)$ и конечного $\eta_{r'}(\mathbf{p}_f)$ нуклонов являются собственными векторами оператора $\mathbf{n}_k \times \boldsymbol{\sigma} = \sigma_3$ (отсюда σ_3 -базис), т. е.

$$\begin{aligned} \sigma_3 \eta_r(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \eta_r(\mathbf{p}_i) = r \eta_r(\mathbf{p}_i), \\ \sigma_3 \eta_{r'}(\mathbf{p}_f) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \eta_{r'}(\mathbf{p}_f) = r' \eta_{r'}(\mathbf{p}_f). \end{aligned}$$

В результате для начального нуклона собственные векторы $\eta_{\mp}(\mathbf{p}_i)$ отвечают собственным значениям $r = \mp 1$. Поскольку как спин начального, так и спин конечного нуклонов квантуется по одной и той же оси (т. е. сохраняет значение своей проекции на эту ось или меняет эту проекцию строго на противоположную), заданной направлением падающего лептона \mathbf{n}_{k_i} , то для собственных значений проекции спина конечного нуклона $r' = \mp 1$ имеются нормированные условием $|\eta_{\pm}(\mathbf{p}_{f,i})|^2 = 1$ собственные векторы $\eta_{\mp}(\mathbf{p}_f) = \eta_{\mp}(\mathbf{p}_i)$, или в явном виде:

$$\begin{aligned} \eta_{+} &= \eta_{+}(\mathbf{p}_i) = \eta_{+}(\mathbf{p}_f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \eta_{-} &= \eta_{-}(\mathbf{p}_i) = \eta_{-}(\mathbf{p}_f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.130})$$

Таким образом, для вычисления всех векторных и аксиал-векторных (анти)нейтринных и нуклонных компонент токов в σ_3 -базисе, когда спин нуклона

квантован вдоль оси падающего (анти)нейтрино, необходимы следующие базисные биспиноры, нормированные условием $|\eta|^2 = 1$:

$$\begin{aligned} \text{Начальные : } \eta_-(\mathbf{k}_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_-(\mathbf{k}_i), & \eta_+(\mathbf{k}_i) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_+(\mathbf{k}_i), \\ \eta_-(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_+(\mathbf{p}_i), & \eta_+(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \chi_-(\mathbf{p}_i). \end{aligned} \quad (\text{П.131})$$

$$\text{Конечные : } \eta_-(\mathbf{p}_f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \eta_-(\mathbf{p}_i), \quad \eta_+(\mathbf{p}_f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \eta_+(\mathbf{p}_i),$$

$$\eta_-(\mathbf{k}_f) = \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_-(\mathbf{k}_f),$$

$$\eta_+(\mathbf{k}_f) = e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \chi_+(\mathbf{k}_f).$$

Из этих формул видно, что базисные спиноры для начальных и конечных нейтральных (безмассовых) лептонов одинаковы в обоих базисах. Для массивных нуклонов иначе. Поскольку в системе центра масс лептона и нуклона $\mathbf{k}_i = -\mathbf{p}_i$, то η_{\mp} -спиноры начальных нуклонов в σ_3 -базисе (проекция на направление \mathbf{k}_i) отвечают противоположным собственным значениям χ_{\pm} -спиноров из базиса спиральности (проекция на направление \mathbf{p}_i).

Компоненты лептонных токов. Согласно проведенному в базисе спиральности рассмотрению токовые матрицы $\hat{V}^{0,1,2,3}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$ и $\hat{A}^{0,1,2,3}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)$ * одинаковы для нейтрино и антинейтрино и имеют вид (П.107) и (П.108):

$$\hat{V}^0(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{V}^1(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = E_\nu \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{V}^2(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = E_\nu \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta & i - i \cos \theta \\ i - i \cos \theta & -ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\hat{V}^3(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & 1 + \cos \theta \end{pmatrix};$$

*В силу явных выражений для 4-спиноров $u(\mathbf{k})$ и $v(\mathbf{k})$, а также процедуры получения формул (П.107) и (П.108).

$$\begin{aligned}\hat{A}^0(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{A}^1(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= E_\nu \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ 1 - \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{A}^2(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= E_\nu \begin{pmatrix} ie^{-i\phi} \sin \theta & -i(1 - \cos \theta) \\ i(1 - \cos \theta) & ie^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{A}^3(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= E_\nu \begin{pmatrix} 1 + \cos \theta & e^{-i\phi} \sin \theta \\ e^{i\phi} \sin \theta & -1 - \cos \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

С помощью этих матриц для (левого) нейтрино с $\eta_-(\mathbf{k}_{i/f})$ и (правого) антинейтрино с $\eta_+(\mathbf{k}_{i/f})$ в σ_3 -базисе следует вычислить компоненты векторного и аксиал-векторного токов:

$$\begin{aligned}V_{--}^\mu(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= \eta_-^\dagger(\mathbf{k}_f) \hat{V}^\mu(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \eta_-(\mathbf{k}_i), \\ A_{--}^\mu(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= \eta_-^\dagger(\mathbf{k}_f) \hat{A}^\mu(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \eta_-(\mathbf{k}_i), \\ V_{++}^\mu(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= \eta_+^\dagger(\mathbf{k}_f) \hat{V}^\mu(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \eta_+(\mathbf{k}_i), \\ A_{++}^\mu(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) &= \eta_+^\dagger(\mathbf{k}_f) \hat{A}^\mu(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) \eta_+(\mathbf{k}_i).\end{aligned}$$

Поскольку согласно (П.129) явный вид $\eta_\pm(\mathbf{k}_{i/f})$ совпадает с $\chi_\pm(\mathbf{k}_{i/f})$, то выражения для лептонных токов в σ_3 -базисе должны также совпадать с полученными ранее выражениями для этих токов в базисе спиральности, и, следовательно, полные нейтринные и антинейтринные слабые токи имеют тот же вид:

$$l_\nu(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = 4E_\nu \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, -ie^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right); \quad (\text{П.132})$$

$$l_{\bar{\nu}}(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i) = 4E_\nu \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, ie^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right). \quad (\text{П.133})$$

В силу строгого сохранения спиральности безмассовых нейтрино и антинейтрино использование σ_3 -базиса значимо только для нуклонных токов.

Компоненты нуклонных токов. В σ_3 -базисе дираковские 4-спиноры начального (с $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_i$) и конечного (с $\mathbf{p}' \equiv \mathbf{p}_f$) нуклонов, необходимые для вычисления слабых токов по формулам (П.96), имеют вид

$$u(\mathbf{p}, r) = \begin{pmatrix} \lambda_+ \\ \lambda_- \alpha_p \end{pmatrix} \eta_r(\mathbf{p}), \quad u^\dagger(\mathbf{p}', r') = \eta_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') (\lambda_+, \lambda_- \alpha_{p'}^\dagger). \quad (\text{П.134})$$

Согласно кинематике упругого рассеяния в системе центра масс лептон–нуклон операторы спиральности нуклонов α_p и $\alpha_{p'}$, входящие в выражения (П.134), совпадают с операторами спиральности нуклонов в базе спиральности и выражаются в виде

$$\begin{aligned}\alpha_p &= \alpha_{p_i} = \mathbf{n}_{p_i} \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\sigma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \alpha_{p'} &= \alpha_{p_f} = \mathbf{n}_{p_f} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Тогда из определения токов (П.96) имеем в σ_3 -базисе

$$\begin{aligned}V_{r'r}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^\mu u(\mathbf{p}, r) = \eta_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{V}^\mu(\mathbf{p}_f) \eta_r(\mathbf{p}) \equiv \eta_{r'}^\dagger \hat{V}^\mu(\mathbf{p}_f) \eta_r, \\ A_{r'r}^\mu(\mathbf{p}', \mathbf{p}) &= \bar{u}(\mathbf{p}', r') \gamma^\mu \gamma_5 u(\mathbf{p}, r) = \eta_{r'}^\dagger(\mathbf{p}') \hat{A}^\mu(\mathbf{p}_f) \eta_r(\mathbf{p}) \equiv \eta_{r'}^\dagger \hat{A}^\mu(\mathbf{p}_f) \eta_r,\end{aligned}\tag{П.135}$$

где матрицы токов выражаются через матрицы спиральности начального и конечного нуклонов

$$\begin{aligned}\hat{V}^0(\mathbf{p}_f) &\equiv \lambda_+^2 + \lambda_-^2 \alpha_{p'} \alpha_p, & \hat{\mathbf{V}}(\mathbf{p}_f) &\equiv \lambda_- \lambda_+ [\alpha_{p'} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} \alpha_p], \\ \hat{A}^0(\mathbf{p}_f) &\equiv \lambda_+ \lambda_- [\alpha_{p'} + \alpha_p], & \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{p}_f) &\equiv \lambda_+^2 \boldsymbol{\sigma} + \lambda_-^2 \alpha_{p'} \boldsymbol{\sigma} \alpha_p.\end{aligned}$$

Поскольку в системе центра масс $\lambda_\pm^2 = E_p \pm m$ и $\lambda_+ \lambda_- = \sqrt{E_p^2 - m^2} = E_\nu$, а также с учетом явного вида $\alpha_{p'}$ и α_p , в σ_3 -базисе имеем для матриц $\hat{V}^\mu(\mathbf{p}_f)$ и $\hat{A}^\mu(\mathbf{p}_f)$ выражения, полностью совпадающие с полученными ранее в базе спиральности:

$$\begin{aligned}\hat{V}^0(\mathbf{p}_f) &= \begin{pmatrix} E_p + m + (E_p - m) \cos \theta & -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta & E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{V}^1(\mathbf{p}_f) &= E_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{V}^2(\mathbf{p}_f) &= iE_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{V}^3(\mathbf{p}_f) &= E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix}; \\ \hat{A}^0(\mathbf{p}_f) &= E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & (1 + \cos \theta) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{A}^1(\mathbf{p}_f) &= \begin{pmatrix} (E_p - m)e^{-i\phi} \sin \theta & (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & -(E_p - m)e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{A}^2(\mathbf{p}_f) &= i \begin{pmatrix} (E_p - m)e^{-i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m)e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix}, \\ \hat{A}^3(\mathbf{p}_f) &= \begin{pmatrix} (E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m)e^{-i\phi} \sin \theta \\ (E_p - m)e^{i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в правые части определений токов в σ_3 -базисе (П.135) с учетом

$$\begin{aligned}\eta_- \equiv \eta_-(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \eta_+ \equiv \eta_+(\mathbf{p}_i) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \eta_-^\dagger \equiv \eta_-^\dagger(\mathbf{p}_f) &= (0 \ 1), \quad \eta_+^\dagger \equiv \eta_+^\dagger(\mathbf{p}_f) = (1 \ 0),\end{aligned}$$

получим явные выражения для всех компонент нуклонного тока при всех возможных проекциях спина нуклона на направление движения начального лептона:

$$\begin{aligned}V_{--}^0(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{V}^0(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\ &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} E_p + m + (E_p - m) \cos \theta & -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta & E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} = E_p + m + (E_p - m) \cos \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{--}^1(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{V}^1(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\ &= (0 \ 1) E_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -E_\nu e^{i\phi} \sin \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{--}^2(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{V}^2(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\ &= (0 \ 1) i E_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i E_\nu e^{i\phi} \sin \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{--}^3(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{V}^3(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\ &= (0 \ 1) E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -E_\nu (1 + \cos \theta);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{--}^0(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{A}^0(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\
 &= (0 \ 1) E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \underline{(1 + \cos \theta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E_\nu (1 + \cos \theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{--}^1(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{A}^1(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\
 &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta & (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & -(E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= -(E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{--}^2(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{A}^2(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\
 &= (0 \ 1) i \begin{pmatrix} (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= i(E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{--}^3(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{A}^3(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\
 &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} (E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta \\ (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= -(E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{-+}^0(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{V}^0(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
 &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} E_p + m + (E_p - m) \cos \theta & -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ \underline{e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta} & E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \\ e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta \end{pmatrix} = e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{-+}^1(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{V}^1(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
 &= (0 \ 1) E_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & 1 - \cos \theta \\ \underline{-1 + \cos \theta} & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -E_\nu (1 - \cos \theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{-+}^2(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{V}^2(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
 &= (0 \ 1) i E_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ \underline{-1 + \cos \theta} & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i E_\nu (-1 + \cos \theta),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{-+}^3(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{V}^3(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
 &= (0 \ 1) E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ \underline{-e^{i\phi} \sin \theta} & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e^{i\phi} E_\nu \sin \theta;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{-+}^0(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{A}^0(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\ &= (0 \ 1) E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & (1 + \cos \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e^{i\phi} E_\nu \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{-+}^1(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{A}^1(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\ &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta & (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & -(E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{-+}^2(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{A}^2(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\ &= (0 \ 1) i \begin{pmatrix} (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= i(E_p + m) - i(E_p - m) \cos \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{-+}^3(\mathbf{p}_f) &= \eta_-^\dagger \hat{A}^3(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\ &= (0 \ 1) \begin{pmatrix} (E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta \\ (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{+-}^0(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{V}^0(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} E_p + m + (E_p - m) \cos \theta & \frac{-e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta}{E_p + m + (E_p - m) \cos \theta} \\ e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta & E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} = -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{+-}^1(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{V}^1(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\ &= (1 \ 0) E_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & \frac{1 - \cos \theta}{-e^{i\phi} \sin \theta} \\ -1 + \cos \theta & -e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E_\nu (1 - \cos \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{+-}^2(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{V}^2(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\ &= (1 \ 0) i E_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i E_\nu (-1 + \cos \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{+-}^3(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{V}^3(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\ &= (1 \ 0) E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = E_\nu e^{-i\phi} \sin \theta; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{+-}^0(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{A}^0(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\
 &= (1 \ 0) E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & \frac{-e^{-i\phi} \sin \theta}{(1 + \cos \theta)} \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -e^{-i\phi} E_\nu \sin \theta, \\
 A_{+-}^1(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{A}^1(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\
 &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta & (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & -(E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta, \\
 A_{+-}^2(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{A}^2(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\
 &= (1 \ 0) i \begin{pmatrix} (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= -i(E_p + m) + i(E_p - m) \cos \theta, \\
 A_{+-}^3(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{A}^3(\mathbf{p}_f) \eta_- = \\
 &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} (E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta \\ (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\
 &= (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta; \\
 V_{++}^0(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{V}^0(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
 &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} \frac{E_p + m + (E_p - m) \cos \theta}{e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta} & -e^{-i\phi} (E_p - m) \sin \theta \\ E_p + m + (E_p - m) \cos \theta & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
 &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} E_p + m + (E_p - m) \cos \theta \\ e^{i\phi} (E_p - m) \sin \theta \end{pmatrix} = E_p + m + (E_p - m) \cos \theta, \\
 V_{++}^1(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{V}^1(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
 &= (1 \ 0) E_\nu \begin{pmatrix} \frac{-e^{-i\phi} \sin \theta}{-1 + \cos \theta} & 1 - \cos \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -e^{-i\phi} E_\nu \sin \theta, \\
 V_{++}^2(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{V}^2(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
 &= (1 \ 0) i E_\nu \begin{pmatrix} -e^{-i\phi} \sin \theta & -1 + \cos \theta \\ -1 + \cos \theta & e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i E_\nu e^{-i\phi} \sin \theta, \\
 V_{++}^3(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{V}^3(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
 &= (1 \ 0) E_\nu \begin{pmatrix} -(1 + \cos \theta) & e^{-i\phi} \sin \theta \\ -e^{i\phi} \sin \theta & -(1 + \cos \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -(1 + \cos \theta) E_\nu;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{++}^0(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{A}^0(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
&= (1 \ 0) E_\nu \begin{pmatrix} \frac{-(1 + \cos \theta)}{-e^{i\phi} \sin \theta} & -e^{-i\phi} \sin \theta \\ & (1 + \cos \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -(1 + \cos \theta) E_\nu,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{++}^1(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{A}^1(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
&= (1 \ 0) \begin{pmatrix} (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta & (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & -(E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{++}^2(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{A}^2(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
&= (1 \ 0) i \begin{pmatrix} (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta \\ (E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= i(E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{++}^3(\mathbf{p}_f) &= \eta_+^\dagger \hat{A}^3(\mathbf{p}_f) \eta_+ = \\
&= (1 \ 0) \begin{pmatrix} (E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta & (E_p - m) e^{-i\phi} \sin \theta \\ (E_p - m) e^{i\phi} \sin \theta & -(E_p + m) - (E_p - m) \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
&= (E_p + m) + (E_p - m) \cos \theta.
\end{aligned}$$

Эти компоненты нуклонного тока для всех возможных значений проекций спина начального и конечного нуклонов на направление движения начального лептона (σ_3 -базис) можно собрать в компактные выражения для векторного тока:

$$\begin{aligned}
V_{++}^\eta &= \{ E_p + m + \cos \theta (E_p - m), -\sin \theta e^{-i\phi} E_\nu, \\
&\quad -i \sin \theta e^{-i\phi} E_\nu, -(1 + \cos \theta) E_\nu \}, \\
V_{--}^\eta &= \{ E_p + m + \cos \theta (E_p - m), -\sin \theta e^{+i\phi} E_\nu, \\
&\quad +i \sin \theta e^{+i\phi} E_\nu, -(1 + \cos \theta) E_\nu \}, \\
V_{+-}^\eta &= \{ -\sin \theta e^{-i\phi} (E_p - m), +(1 - \cos \theta) E_\nu, \\
&\quad -i(1 - \cos \theta) E_\nu, +\sin \theta e^{-i\phi} E_\nu \}, \\
V_{-+}^\eta &= \{ +\sin \theta e^{+i\phi} (E_p - m), -(1 - \cos \theta) E_\nu, \\
&\quad -i(1 - \cos \theta) E_\nu, -\sin \theta e^{+i\phi} E_\nu \}.
\end{aligned} \tag{П.136}$$

Аналогично для аксиал-векторного нуклонного тока

$$\begin{aligned}
 A_{++}^{\eta} &= \left\{ -(1 + \cos \theta) E_{\nu}, + \sin \theta e^{-i\phi} (E_p - m), \right. \\
 &\quad \left. i \sin \theta e^{-i\phi} (E_p - m), +(E_p + m + \cos \theta (E_p - m)) \right\}, \\
 A_{--}^{\eta} &= \left\{ +(1 + \cos \theta) E_{\nu}, - \sin \theta e^{+i\phi} (E_p - m), \right. \\
 &\quad \left. i \sin \theta e^{+i\phi} (E_p - m), -(E_p + m + \cos \theta (E_p - m)) \right\}, \\
 A_{+-}^{\eta} &= \left\{ - \sin \theta e^{-i\phi} E_{\nu}, E_p + m - \cos \theta (E_p - m), \right. \\
 &\quad \left. -i(E_p + m - \cos \theta (E_p - m)), \sin \theta e^{-i\phi} (E_p - m) \right\}, \\
 A_{-+}^{\eta} &= \left\{ - \sin \theta e^{+i\phi} E_{\nu}, E_p + m - \cos \theta (E_p - m), \right. \\
 &\quad \left. +i(E_p + m - \cos \theta (E_p - m)), \sin \theta e^{+i\phi} (E_p - m) \right\}.
 \end{aligned} \tag{П.137}$$

Здесь первый индекс $r' = \mp 1$ отвечает значению проекции (удвоенного) спина конечного нуклона на направление движения начального лептона, второй индекс $r = \mp 1$ отвечает значению проекции (удвоенного) спина начального нуклона на то же самое направление.

Свойства нуклонных токов. Отметим, что выражения для нуклонных слабых токов, полученные в базисе спиральности и имеющие вид (П.115), существенно образом отличаются от аналогичных выражений в σ_3 -базисе, заданных формулами (П.136) и (П.137). Это обусловлено разницей в физическом и математическом смыслах собственных значений r, r' .

Так, в выражении (П.115) r, r' — это (удвоенные) проекции спина нуклона на начальное и конечное направления импульса самого нуклона, в то время как в выражениях (П.136) и (П.137) r, r' — (удвоенные) проекции спина нуклона на некоторую заранее фиксированную ось, которая была выбрана вдоль направления движения (3-импульса) начального лептона.

Действительно, если предположить, что в результате взаимодействия нуклон рассеивается назад ($\cos \theta = -1$), то в базисе спиральности обозначение в виде индексов $(++)$ означает, что направление спина нуклона меняется строго на противоположное (вместе с направлением его импульса). В базисе, где спин нуклона квантуется вдоль фиксированной оси (σ_3 -базис), как это определено в (П.130), индексы $(++)$ отвечают ситуации, когда спин нуклона вообще не изменяет своей ориентации относительно выбранной оси.

Обсудим несколько подробнее результаты, представленные в выражениях (П.136) и (П.137). Для этой цели обратимся к наиболее интересным случаям: а) когда нуклон рассеивается вперед ($\cos \theta = 1$), б) когда нуклон рассеивается назад ($\cos \theta = -1$) и в) нерелятивистский режим, когда $\sqrt{s} \rightarrow m$.

а) При $\cos \theta = 1$ (и $\sin \theta = 0$) согласно (П.136) векторный ток

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 1} V_{++}^{\eta} = \lim_{\cos \theta \rightarrow 1} V_{--}^{\eta} = 2(E_p, 0, 0, -|\mathbf{P}_p|)$$

сводится к 4-импульсу нуклона, движущемуся вдоль направления начального лептона. Переворот спина нуклона за счет такого векторного тока невозможен, поскольку

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 1} V_{+-}^\eta = \lim_{\cos \theta \rightarrow 1} V_{-+}^\eta = 0.$$

Наоборот, переворот спина нуклона становится возможным в случае рассеяния вперед благодаря аксиальному току, поскольку возникают ненулевые компоненты аксиального тока в плоскости, перпендикулярной движению лептона:

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 1} A_{+-}^\eta = 2m(0, 1, -i, 0), \quad \lim_{\cos \theta \rightarrow 1} A_{-+}^\eta = 2m(0, 1, i, 0).$$

Имеет место полная компенсация аксиальных токов с противоположными проекциями спина нуклона

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow 1} (A_{++}^\eta + A_{--}^\eta) = 0. \quad (\text{П.138})$$

Это сокращение можно понять, учтя, что аксиальный ток фермиона, обладающего одним и тем же начальным и конечным импульсом p и одной и той же проекцией спина r , пропорционален вектору 4-спина s^μ , т. е. $\bar{u}(p, r)\gamma^\mu\gamma^5 \times u(p, r) = 2mrs^\mu$. Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{u}(p, +1)\gamma^\mu\gamma^5 u(p, +1) + \bar{u}(p, -1)\gamma^\mu\gamma^5 u(p, -1) &= \\ &= 2m(+1)s^\mu + 2m(-1)s^\mu = 0, \end{aligned}$$

что в точности соответствует выражению (П.138) в случае рассеяния нуклона вперед.

б) При $\cos \theta = -1$ (и $\sin \theta = 0$) векторный ток, сохраняющий проекцию спина нуклона, сводится к

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{++}^\eta = \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{--}^\eta = 2m(1, 0, 0, 0).$$

Переворот спина нуклона также возможен:

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{+-}^\eta = 2|\mathbf{P}_p|(0, 1, -i, 0), \quad \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} V_{-+}^\eta = 2|\mathbf{P}_p|(0, -1, -i, 0).$$

Сохраняющий проекцию спина аксиальный ток сводится к

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{++}^\eta = 2m(0, 0, 0, 1), \quad \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{--}^\eta = 2m(0, 0, 0, -1).$$

Переворот спина нуклона также допустим:

$$\lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{+-}^\eta = 2E_p(0, 1, -i, 0), \quad \lim_{\cos \theta \rightarrow -1} A_{-+}^\eta = 2E_p(0, 1, i, 0).$$

в) Наконец, в нерелятивистском случае векторный ток сохраняет направление спина нуклона, поскольку

$$\lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} V_{++}^\eta = \lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} V_{--}^\eta = 2m(1, 0, 0, 0), \quad \lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} V_{+-}^\eta = V_{-+}^\eta = 0. \quad (\text{П.139})$$

Аксиальный ток может как сохранять проекцию спина нуклона за счет членов

$$\lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} A_{++}^\eta = 2m(0, 0, 0, 1), \quad \lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} A_{--}^\eta = 2m(0, 0, 0, -1),$$

так и менять проекцию спина нуклона на противоположную:

$$\lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} A_{+-}^\eta = 2m(0, 1, -i, 0), \quad \lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} A_{-+}^\eta = 2m(0, 1, i, 0). \quad (\text{П.140})$$

Можно заметить, что в этом пределе аналогично (П.138) имеется сокращение

$$\lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} (A_{++}^\eta + A_{--}^\eta) = 0, \quad (\text{П.141})$$

откуда следует, что в когерентном слагаемом сечения (6.36) происходит сокращение вклада аксиальных токов для бесспиновых ядер. Более точное утверждение можно получить из рассмотрения полных выражений (П.137) для аксиальных токов. Действительно,

$$\begin{aligned} A_{++}^\eta + A_{--}^\eta &= -2i \sin \theta (E_p - m)(0, \sin \phi, \cos \phi, 0) \simeq \\ &\simeq -i \frac{k_0^2}{m} \sin \theta (0, \sin \phi, \cos \phi, 0) \simeq \\ &\simeq -i(1 \text{ МэВ}) \frac{k_0^2}{(30 \text{ МэВ})^2} \sin \theta (0, \sin \phi, \cos \phi, 0). \end{aligned} \quad (\text{П.142})$$

Видно, что в общем случае этот 4-вектор отличен от нуля, если энергия нейтрино в лабораторной системе не равна нулю и угол рассеяния $\theta \neq 0$ или π .

Полный $V-A$ нуклонный ток. В терминах дираковских спиноров начальных и конечных нуклонов компоненты слабого нуклонного ($V-A$) тока определяются, как и ранее:

$$\begin{aligned} h_{\pm\pm}^\mu(\mathbf{p}_f) &= g_V \bar{u}(\mathbf{p}_f, \pm) \gamma^\mu u(\mathbf{p}_i, \pm) - g_A \bar{u}(\mathbf{p}_f, \pm) \gamma^\mu \gamma_5 u(\mathbf{p}_i, \pm) = \\ &= g_V V_{\pm\pm}^{\eta, \mu}(\mathbf{p}_f) - g_A A_{\pm\pm}^{\eta, \mu}(\mathbf{p}_f). \end{aligned}$$

Для четырех возможных комбинаций проекций спина конечного и начального нуклонов на направление 3-импульса начального лептона согласно формулам (П.136) и (П.137) имеются следующие явные выражения для компонент

слабого нуклонного тока:

$$\begin{aligned}
 h_{++}^{\mu} &= \{g_A E_{\nu}(1 + \cos \theta) + g_V(E_p + m + (E_p - m) \cos \theta), \\
 &\quad -e^{-i\phi}(E_p g_A + E_{\nu} g_V - g_A m) \sin \theta, \\
 &\quad -ie^{-i\phi}(E_p g_A + E_{\nu} g_V - g_A m) \sin \theta, \\
 &\quad -E_{\nu} g_V(1 + \cos \theta) - g_A(E_p + m + (E_p - m) \cos \theta)\}; \\
 h_{--}^{\mu} &= \{-g_A E_{\nu}(1 + \cos \theta) + g_V(E_p + m + (E_p - m) \cos \theta), \\
 &\quad e^{i\phi}(E_p g_A - E_{\nu} g_V - g_A m) \sin \theta, ie^{i\phi}(-E_p g_A + E_{\nu} g_V + g_A m) \sin \theta, \\
 &\quad -E_{\nu} g_V + g_A(E_p + m) + (E_p g_A - E_{\nu} g_V - g_A m) \cos \theta\}; \\
 h_{+-}^{\mu} &= \{e^{-i\phi}(E_{\nu} g_A + g_V(-E_p + m)) \sin \theta, \\
 &\quad g_V(E_{\nu} - E_{\nu} \cos \theta) - g_A(E_p + m + (-E_p + m) \cos \theta), \\
 &\quad i(E_{\nu} g_V(-1 + \cos \theta) + g_A(E_p + m + (-E_p + m) \cos \theta)), \\
 &\quad e^{-i\phi}(-E_p g_A + E_{\nu} g_V + g_A m) \sin \theta\}; \\
 h_{-+}^{\mu} &= \{e^{i\phi}(E_{\nu} g_A + g_V(E_p - m)) \sin \theta, \\
 &\quad E_{\nu} g_V(-1 + \cos \theta) - g_A(E_p + m + (-E_p + m) \cos \theta), \\
 &\quad i(E_{\nu} g_V(-1 + \cos \theta) - g_A(E_p + m + (-E_p + m) \cos \theta)), \\
 &\quad -e^{i\phi}(E_p g_A + E_{\nu} g_V - g_A m) \sin \theta\}.
 \end{aligned} \tag{П.143}$$

Эти компоненты используются ниже для вычисления скалярных произведений лептонного и нуклонного токов (l, h).

П.5.4. Базис σ_3 . Скалярные произведения токов (l, h). Напомним, что скалярные произведения лептонного и нуклонного 4-токов определяются сверткой с метрическим $g_{\mu\nu}$ -тензором: $(l_{\nu/\bar{\nu}} \cdot h_{r'/r}^{\eta}) = l_{(\nu/\bar{\nu})}^{\mu} g_{\mu\nu} h_{r'/r}^{\eta, \nu}$, где компоненты нуклонного 4-тока даны выражениями (П.143), а нейтринный и антинейтринный 4-токи (как и в базисе спиральности) имеют вид (П.132) и (П.133):

$$\begin{aligned}
 l_{\nu} &= 4E_{\nu} \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, -ie^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right), \\
 l_{\bar{\nu}} &= 4E_{\nu} \left(\cos \frac{\theta}{2}, e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, ie^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right).
 \end{aligned}$$

С учетом определения энергии лептона и нуклона в их системе центра масс:

$$E_{\nu} = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}}, \quad E_p = \frac{s + m^2}{2\sqrt{s}}, \quad \text{и связи} \quad g_V = g_L + g_R, \quad g_A = g_L - g_R$$

после ряда выкладок* для нейтрино-нуклонных скалярных произведений в σ_3 -базисе получаются выражения**

$$\begin{aligned}
 (l_\nu \cdot h_{--}^\eta) &= 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} g_R \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \\
 &= 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} g_R \frac{(m + \sqrt{s} + (-m + \sqrt{s}) \cos \theta)}{2\sqrt{s}}, \\
 (l_\nu \cdot h_{++}^\eta) &= 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} \left(g_L + g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \\
 &= 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} \left(g_L + \frac{g_R m (-m + \sqrt{s}) \sin^2 \frac{\theta}{2}}{s} \right), \\
 (l_\nu \cdot h_{-+}^\eta) &= 8e^{i\phi} (s - m^2) \sin \frac{\theta}{2} \left(g_L - g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right), \\
 (l_\nu \cdot h_{+-}^\eta) &= -8(s - m^2) e^{-i\phi} g_R \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{П.144}$$

Аналогично для антинейтрино-нуклонных скалярных произведений получается

$$\begin{aligned}
 (l_{\bar{\nu}} \cdot h_{--}^\eta) &= 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} \left(g_R + \frac{g_L m (\sqrt{s} - m) \sin^2 \frac{\theta}{2}}{s} \right) = \\
 &= 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} \left(g_R + g_L \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\
 (l_{\bar{\nu}} \cdot h_{-+}^\eta) &= 8(s - m^2) e^{i\phi} g_L \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\
 (l_{\bar{\nu}} \cdot h_{+-}^\eta) &= -8(s - m^2) e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \left(g_R - g_L \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right), \\
 (l_{\bar{\nu}} \cdot h_{++}^\eta) &= 8(s - m^2) g_L \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right).
 \end{aligned}
 \tag{П.145}$$

Из сравнения скалярных произведений (П.144) и (П.145) следует формальное правило: при переходе от нейтрино к антинейтрино надо в формулах

*Или с использованием аналитических вычислений в рамках, скажем, MATHEMATICA или MAPLE.

**В работе [19] был рассмотрен только нейтринный случай. К сожалению, в формуле (С33): $(l, h_{++}^\eta) = 8(s - m^2) \cos \frac{\theta}{2} \left(g_L - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \right)$, была допущена досадная опечатка (знак «-» перед g_R , ср. с (П.144)).

для нейтрино заменить g_L на g_R и одновременно g_R на g_L , а также поменять знаки проекции спина нуклона «+» на «-» и одновременно «-» на «+».

Здесь уместно отметить, что скалярные произведения (l, h_{rr}^η) , определяемые, например, формулами (П.144), отличаются от тех скалярных произведений (l, h_{rr}^χ) , что даются соотношениями (П.122). Действительно, во-первых, зависимость от азимутального угла ϕ «магическим образом» исчезла из первых двух выражений (П.144), которые входят в сечение когерентного рассеяния (спин нуклона не изменяет своей ориентации). В случае скалярного произведения (l, h_{++}^η) это имеет место благодаря тому, что экспоненциальный множитель $e^{i\phi}$ нейтринного тока из (П.132) сокращается с соответствующим множителем $e^{-i\phi}$, присутствующим в нуклонных векторном V_{++} и аксиальном A_{++} токах из (П.136) и (П.137). В случае скалярного произведения (l, h_{--}^η) это происходит по той причине, что векторный и аксиал-векторный вклады, оба зависящие уже от $e^{i2\phi}$, в точности сокращаются, поскольку входят в конечный результат с противоположными знаками.

Во-вторых, для случая рассеяния вперед $\theta \rightarrow 0$ сумма первых двух выражений из (П.144) не зависит от аксиальной константы связи нуклона g_A :

$$\lim_{y \rightarrow 0} ((l, h_{++}^\eta) + (l, h_{--}^\eta)) = 8(s - m^2)g_V,$$

остальные два выражения (П.144), соответствующие перевороту спина нуклона, обращаются в нуль. Далее оба скалярных произведения (l, h_{rr}^η) обращаются в нуль, если нейтрино рассеивается назад ($\theta = \pi$) в системе центра масс, поскольку такая ситуация отвечает случаю изменения полного спина нейтрино-нуклонной системы на единицу. Это наблюдение поясняет, почему когерентное сечение исчезает, когда ядро отдачи имеет максимальную кинетическую энергию.

Наконец, в нерелятивистском пределе имеется

$$\begin{aligned} \lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} \frac{(l, h_{++}^\eta)}{8(s - m^2)} &= \cos \frac{\theta}{2} g_L, \\ \lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} \frac{(l, h_{--}^\eta)}{8(s - m^2)} &= \cos \frac{\theta}{2} g_R, \\ \lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} \frac{(l, h_{+-}^\eta)}{8(s - m^2)} &= 0, \\ \lim_{\sqrt{s} \rightarrow m} \frac{(l, h_{-+}^\eta)}{8(s - m^2)} &= e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} g_A. \end{aligned} \tag{П.146}$$

Множитель $8(s - m^2)$ перемещен в знаменатель, поскольку он именно в таком виде сокращается в соответствующих сечениях. Интересны два разных предела для двух нижних выражений в (П.146), отвечающих случаю переворота спина нуклона. В нерелятивистском пределе векторные токи, изменяющие

спин, зануляются, как это видно из (П.139), и выживают только поперечные компоненты аксиальных токов (П.140). Однако аксиальный ток A_{+-}^η в (П.140) оказывается ортогональным нейтринному току при $\sqrt{s} \rightarrow m$. В то же время его скалярное произведение с A_{+}^η из (П.140) не нулевое и пропорционально аксиальной константе связи g_A .

П.5.5. Соотношения между σ_3 -базисом и базисом спиральности. Собственные векторы χ_\pm и η_\pm , определенные для начального и конечного нуклона соответственно в базисе спиральности как (П.92) и в σ_3 -базисе как (П.130), связаны между собой линейным преобразованием

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta_+(\mathbf{n}_\mathbf{p}) \\ \eta_-(\mathbf{n}_\mathbf{p}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\pm)1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{n}_\mathbf{p}) \\ \chi_-(\mathbf{n}_\mathbf{p}) \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} \eta_+(\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}) \\ \eta_-(\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} & \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}) \\ \chi_-(\mathbf{n}_{\mathbf{p}'}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.147})$$

Правильность этого преобразования для начальных частиц легко проверяется прямой подстановкой. Так, согласно (П.91) и (П.131), если начальные состояния выбраны в виде

$$\begin{aligned} \chi_+(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \chi_-(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \eta_-(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \eta_+(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то сразу получается верхняя строка формулы (П.147) со знаком «+»:

$$\begin{pmatrix} \eta_+(\mathbf{p}_i) \\ \eta_-(\mathbf{p}_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_+(\mathbf{p}_i) \\ \chi_-(\mathbf{p}_i) \end{pmatrix}.$$

Если же начальные собственные состояния выбраны со знаком «-»:

$$\begin{aligned} \chi_+(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & \chi_-(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \eta_-(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \eta_+(\mathbf{p}_i) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то тоже легко видеть, что имеет место верхняя строка формулы (П.147) со знаком «-». Если конечные собственные векторы нуклона выбраны в виде

$$\begin{aligned} \eta_-(\mathbf{p}_f) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & \eta_+(\mathbf{p}_f) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \chi_-(\mathbf{p}_f) &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, & \chi_+(\mathbf{p}_f) &= \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то справедливо выражение из нижней строки (П.147), поскольку прямая подстановка дает

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} \chi_+(\mathbf{p}_f) + e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \chi_-(\mathbf{p}_f) &= \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ (e^{i\phi} - e^{-i\phi}) \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \eta_+(\mathbf{p}_f) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{\theta}{2} \chi_-(\mathbf{p}_f) - e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \chi_+(\mathbf{p}_f) &= \\ &= \sin \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \equiv \eta_-(\mathbf{p}_f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Скалярные произведения в σ_3 -базисе и базисе спиральности. Формула перехода от одного базиса к другому (П.147) позволяет связать выражения для нуклонных токов и скалярных произведений (l, h) , полученные в разных базисах*:

$$\begin{aligned} (l, h_{++}^\eta) &= \sin \frac{\theta}{2} (l, h_{+-}^\chi) + \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} (l, h_{--}^\chi), \\ (l, h_{-+}^\eta) &= -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} (l, h_{+-}^\chi) + \sin \frac{\theta}{2} (l, h_{--}^\chi), \end{aligned} \quad (\text{П.148})$$

$$\begin{aligned} (l, h_{+-}^\eta) &= (\mp 1) \left\{ -\sin \frac{\theta}{2} (l, h_{++}^\chi) - \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} (l, h_{-+}^\chi) \right\}, \\ (l, h_{-+}^\eta) &= (\mp 1) \left\{ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} (l, h_{++}^\chi) - \sin \frac{\theta}{2} (l, h_{-+}^\chi) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.149})$$

*Например, для любой аналогичной току структуры типа $Q_{+-}^\eta = \eta_+^\dagger(\mathbf{p}_f) Q \eta_-(\mathbf{p}_i)$ согласно матрицам преобразования (П.147) в базисе спиральности имеем $\left[\sin \frac{\theta}{2} \chi_+^\dagger(\mathbf{p}_f) + e^{-i\phi} \times \cos \frac{\theta}{2} \chi_-^\dagger(\mathbf{p}_f) \right] Q [(\pm 1) \chi_+(\mathbf{p}_i)]$. Откуда следует $Q_{+-}^\eta = (\pm 1) \left\{ \sin \frac{\theta}{2} Q_{++}^\chi + e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \times Q_{-+}^\chi \right\}$. Что эквивалентно верхней формуле в (П.149).

Здесь знак (∓ 1) соответствует знаку (± 1) в верхней формуле (П.147). В качестве физической интерпретации этих формул отметим, что, например, нуклонные токи из левой части соотношений (П.148) соответствуют рассеянию, когда проекция спина нуклона на заданную ось квантования (направление начального нейтрино) не изменяется (ток h_{++}^η) и меняется на противоположную (ток h_{+-}^η). Эти нуклонные токи могут быть единственным образом представлены в виде линейной комбинации тока с отрицательной спиральностью в начальном и конечном состояниях, т. е. h_{-}^χ , и тока, который меняет начальную отрицательную спиральность на конечную положительную, т. е. h_{+}^χ .

Для доказательства соотношений (П.148) и (П.149) вычислим их правые части и сравним с левыми. Итак, стоящие слева скалярные произведения, полученные в σ_3 -базисе (П.144), будучи разделенными для удобства на общий фактор $8(s - m^2)$, имеют вид

$$\begin{aligned} (l, h_{++}^\eta) &= \cos \frac{\theta}{2} \left(g_L + g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ (l, h_{-+}^\eta) &= \sin \frac{\theta}{2} \left(g_L - g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right), \\ (l, h_{+-}^\eta) &= -e^{-i\phi} g_R \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ (l, h_{--}^\eta) &= \cos \frac{\theta}{2} g_R \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned} \tag{П.150}$$

Входящие в правые части выражений (П.148) и (П.149) скалярные произведения, деленные на общий множитель $8(s - m^2)$ и вычисленные в базисе спиральности (П.123), таковы*:

$$\begin{aligned} (l, h_{++}^\chi) &= e^{-i\phi} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) g_R, \\ (l, h_{--}^\chi) &= e^{i\phi} \left(g_L - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right), \\ (l, h_{+-}^\chi) &= \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} g_R, \\ (l, h_{-+}^\chi) &= -\frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} g_R. \end{aligned} \tag{П.151}$$

*В этих формулах $\chi_+(\mathbf{p}_i) = -\chi_+(\mathbf{p}_i)$ здесь для входящего нуклона, т. е. как в статье [19].

С помощью соотношений (П.151) преобразуем правые части выражений (П.148) и (П.149). Для первой строки (П.148) получается

$$\begin{aligned}
 & \sin \frac{\theta}{2}(l, h_{+-}^{\chi}) + \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}(l, h_{--}^{\chi}) = \\
 & = \sin \frac{\theta}{2} \left[\frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} g_R \right] + \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \left[e^{i\phi} \left(g_L - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right) \right] = \\
 & = \cos \frac{\theta}{2} \left(g_L + \frac{m}{\sqrt{s}} \sin^2 \frac{\theta}{2} g_R - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right) = \\
 & = \cos \frac{\theta}{2} \left(g_L + g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = (l, h_{++}^{\eta}).
 \end{aligned}$$

Для второй строки (П.148) имеем

$$\begin{aligned}
 & -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi}(l, h_{+-}^{\chi}) + \sin \frac{\theta}{2}(l, h_{--}^{\chi}) = \\
 & = -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \left[\frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} g_R \right] + \sin \frac{\theta}{2} \left[e^{i\phi} \left(g_L - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right) \right] = \\
 & = -e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \frac{m}{\sqrt{s}} \cos^2 \frac{\theta}{2} g_R + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} g_L - \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} = \\
 & = e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \left(g_L - g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) = (l, h_{-+}^{\eta}).
 \end{aligned}$$

Для первой строки (П.149) имеем

$$\begin{aligned}
 & -\sin \frac{\theta}{2}(l, h_{++}^{\chi}) - \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi}(l, h_{+-}^{\chi}) = \\
 & = -\sin \frac{\theta}{2} \left[e^{-i\phi} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) g_R \right] - \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \left[\left(-\frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} g_R \right) \right] = \\
 & = -e^{-i\phi} g_R \sin \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + e^{-i\phi} g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \\
 & = -e^{-i\phi} g_R \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = (l, h_{+-}^{\eta}).
 \end{aligned}$$

Для второй строки (П.149) имеем

$$\begin{aligned}
 & \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} (l, h_{++}^{\chi}) - \sin \frac{\theta}{2} (l, h_{-+}^{\chi}) = \\
 & = \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \left[e^{-i\phi} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) g_R \right] - \sin \frac{\theta}{2} \left[\left(-\frac{m}{\sqrt{s}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} g_R \right) \right] = \\
 & = \cos \frac{\theta}{2} g_R \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m}{\sqrt{s}} \cos \frac{\theta}{2} g_R = \\
 & = \cos \frac{\theta}{2} g_R \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = (l, h_{--}^{\eta}).
 \end{aligned}$$

Тем самым доказана справедливость связи скалярных произведений токов, полученных в разных базисах, в виде соотношений (П.148) и (П.149). Согласно логике, примененной в сноске на с.276, т.е. наличие зависимости от выбора базиса только в формулах для преобразования нуклонных биспиноров в виде (П.147), соотношения типа (П.148) и (П.149) справедливы как для нейтрино-нуклонных $(l_{\nu}, h_{r'}^{\eta})$, так и антинейтрино-нуклонных $(l_{\bar{\nu}}, h_{r'}^{\eta})$ скалярных произведений.

Квадраты скалярных произведений в σ_3 -базисе и базисе спиральности.

Поскольку окончательные выражения для сечений (анти)нейтрино-ядерного рассеяния не зависят от выбора базиса, в котором были получены выражения для скалярных произведений, то в практических вычислениях удобно воспользоваться следующими соотношениями для квадратов скалярных произведений:

$$\begin{aligned}
 & |(l, h_{++}^{\eta})|^2 + |(l, h_{-+}^{\eta})|^2 = |(l, h_{+-}^{\chi})|^2 + |(l, h_{--}^{\chi})|^2, \\
 & |(l, h_{+-}^{\chi})|^2 + |(l, h_{--}^{\chi})|^2 = |(l, h_{++}^{\chi})|^2 + |(l, h_{-+}^{\chi})|^2.
 \end{aligned} \tag{П.152}$$

Их справедливость можно показать следующим образом. Согласно выражениям для скаляров в σ_3 -базисе (П.150), где везде опущен множитель $8(s-m^2)$, для их квадратов получается

$$\begin{aligned}
 & |(l, h_{++}^{\eta})|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(g_L + g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2, \\
 & |(l, h_{--}^{\eta})|^2 = \cos^2 \frac{\theta}{2} g_R^2 \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2, \\
 & |(l, h_{-+}^{\eta})|^2 = \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(g_L - g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right)^2, \\
 & |(l, h_{+-}^{\chi})|^2 = g_R^2 \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned} \tag{П.153}$$

Аналогично для квадратов скаляров в базисе спиральности (П.151) имеется *

$$\begin{aligned}
 |(l, h_{++}^{\chi})|^2 &= \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 g_R^2 = g_R^2 \cos^4 \frac{\theta}{2}, \\
 |(l, h_{--}^{\chi})|^2 &= \left(g_L - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s}\right)^2, \\
 |(l, h_{+-}^{\chi})|^2 &= g_R^2 \frac{m^2}{s} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\
 |(l, h_{-+}^{\chi})|^2 &= g_R^2 \frac{m^2}{s} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}.
 \end{aligned} \tag{П.154}$$

С учетом (П.153) и (П.154) выполняется прямое вычисление сумм квадратов скаляров из (П.152):

$$\begin{aligned}
 |(l, h_{--}^{\eta})|^2 + |(l, h_{+-}^{\eta})|^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} g_R^2 \left(1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)^2 + \\
 &\quad + g_R^2 \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} = \\
 &= g_R^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 - 2 \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2} + \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] = \\
 &= g_R^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 - \left(1 - \frac{m^2}{s}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}\right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |(l, h_{++}^{\chi})|^2 + |(l, h_{-+}^{\chi})|^2 &= g_R^2 \cos^4 \frac{\theta}{2} + g_R^2 \frac{m^2}{s} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \\
 &= g_R^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{m^2}{s} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right] = |(l, h_{--}^{\eta})|^2 + |(l, h_{+-}^{\eta})|^2.
 \end{aligned}$$

Второе равенство из (П.152) доказано. Несколько сложнее дело обстоит с первым равенством. Для упрощения введем временные обозначения: $a = \sin^2 \frac{\theta}{2}$, $d = \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}}\right)$ и $g_B = g_R \frac{m}{\sqrt{s}}$, тогда правая часть первого равенства

* В квадратах скаляров зависимость от $\chi_+(\mathbf{p}_i) = -\chi_+(\mathbf{p}_i)$ здесь исчезает.

из (П.152) принимает вид

$$\begin{aligned}
 |(l, h_{--}^x)|^2 + |(l, h_{+-}^x)|^2 &= \left(g_L - g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} \right)^2 + \\
 &+ g_R^2 \frac{m^2}{s} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = g_L^2 - 2g_L g_R \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m^2}{s} + \\
 &+ g_R^2 \sin^4 \frac{\theta}{2} \frac{m^4}{s^2} + g_R^2 \frac{m^2}{s} \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = \\
 &= g_L^2 - 2g_L g_R \frac{am^2}{s} + g_R^2 \frac{am^2}{s} \left[\frac{am^2}{s} + (1-a) \right].
 \end{aligned}$$

Покажем, что левая часть имеет тот же вид, т. е.

$$\begin{aligned}
 |(l, h_{++}^\eta)|^2 + |(l, h_{-+}^\eta)|^2 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(g_L + g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)^2 + \\
 &+ \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(g_L - g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \right)^2 = \\
 &= (1-a) (g_L + g_B da)^2 + a (g_L - g_B(1-da))^2 = \\
 &= g_L^2 + 2g_L g_B da + g_B^2 (da)^2 - ag_L^2 - 2g_L g_B da^2 - ag_B^2 (da)^2 + ag_L^2 - \\
 &- 2ag_L g_B + 2g_L g_B da^2 + ag_B^2 - 2g_B^2 da^2 + ag_B^2 (da)^2 = \\
 &= g_L^2 - 2g_L g_B a[1-d] + g_B^2 [(da)^2 + a - 2da^2] = \\
 &= g_L^2 - 2g_L g_R \frac{m}{\sqrt{s}} a \left[1 - 1 + \frac{m}{\sqrt{s}} \right] + \\
 &+ g_R^2 \frac{m^2}{s} \left[a^2 - 2a^2 \frac{m}{\sqrt{s}} + a^2 \frac{m^2}{s} + a - 2a^2 + 2a^2 \frac{m}{\sqrt{s}} \right] = \\
 &= g_L^2 - 2g_L g_R \frac{am^2}{s} + g_R^2 \frac{m^2}{s} \left[a^2 \frac{m^2}{s} + a - a^2 \right] = \\
 &= |(l, h_{--}^x)|^2 + |(l, h_{+-}^x)|^2.
 \end{aligned}$$

Что доказывает справедливость первого равенства из (П.152).

Из выражений (П.152) следует, что суммирование по конечным проекциям спина нуклона для фиксированных начальных спиральностей $r = -1$ и $r = +1$ можно провести раздельно посредством соответствующего суммирования квадратов скалярных произведений, полученных в σ_3 -базисе. Действительно, если спиральность начального нуклона фиксирована: $r = +1(-1)$, то суммирование по всем спиральностям конечного нуклона ($r' = -1, +1$) равно аналогичной сумме по спинам конечного нуклона ($s' = -1, +1$) для проекции

спина начального нуклона на фиксированную ось $s = -1(+1)$, т. е.

$$\begin{aligned} \sum_{r'=\pm} |(l, h_{r'+}^x)|^2 &\equiv |(l, h_{++}^x)|^2 + |(l, h_{+-}^x)|^2 = \\ &= |(l, h_{+-}^\eta)|^2 + |(l, h_{--}^\eta)|^2 \equiv \sum_{s'=\pm} |(l, h_{s'-}^\eta)|^2, \\ \sum_{r'=\pm} |(l, h_{r'-}^x)|^2 &\equiv |(l, h_{+-}^x)|^2 + |(l, h_{--}^x)|^2 = \\ &= |(l, h_{++}^\eta)|^2 + |(l, h_{+-}^\eta)|^2 \equiv \sum_{s'=\pm} |(l, h_{s'+}^\eta)|^2. \end{aligned}$$

Обобщение на полное суммирование по всем возможным проекциям спина нуклона таково:

$$\sum_{r',r=\pm} |(l, h_{r'r}^x)|^2 = \sum_{s',s=\pm} |(l, h_{s's}^\eta)|^2. \quad (\text{П.155})$$

Это соотношение позволяет проводить в σ_3 -базисе (ось квантования спина нуклона фиксирована) вычисления как когерентного вклада в полное сечение (анти)нейтрино-ядерного рассеяния (для которого σ_3 -базис наиболее адекватен), так и некогерентного вклада, который обычно рассматривается в базисе спиральности.

П.6. Вычисление сечений в терминах скалярных произведений токов.

Сечения рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядре (6.39) представляют собой суммы когерентного и некогерентного слагаемых:

$$\frac{d\sigma^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} + \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} \equiv \frac{4G_F^2 m_A}{\pi} \left(\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} + \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} \right), \quad (\text{П.156})$$

где когерентное (6.41) и некогерентное (6.40) слагаемые определяются через скалярные произведения токов $(l_{\bar{\nu}/\nu}, h_{r'r}^{\eta,f})$ в σ_3 -базисе:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \sum_{k=1}^{A_f} [(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{++}^{\eta,f}) + (l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{--}^{\eta,f})] \right|^2, \quad (\text{П.157})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \sum_{f=p,n} g_{\text{inc}}^f [1 - |F_f|^2] \sum_{k=1}^{A_f} \left[\sum_{r'=\pm} |(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{r'+}^{\eta,f})|^2 + \right. \\ \left. + \sum_{r'=\pm} |(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{r'-}^{\eta,f})|^2 \right]. \quad (\text{П.158}) \end{aligned}$$

Эти выражения разбиты на два слагаемых, соответствующих положительной и отрицательной (удвоенной) проекции спина начального нуклона на направление импульса налетающего нейтрального безмассового лептона.

Некоторые кинематические определения и соотношения. В дальнейшем потребуется перейти от переменной $\sin^2 \frac{\theta_*}{2}$, определенной в системе центра масс лептона и нуклона, к измеряемым кинематическим переменным, отвечающим рассеянию (анти)нейтрино на ядре.

Действительно, поскольку $q^2 \equiv (k - k')^2 = q_{\max}^2 \sin^2 \frac{\theta_*}{2}$, то в скалярных произведениях (l, h) можно заменить $\sin^2 \frac{\theta_*}{2}$ на отношение $\frac{q^2}{q_{\max}^2}$. Как было показано в разд. 4, в качестве хорошего приближения можно использовать соотношение

$$a \equiv \sin^2 \frac{\theta_*}{2} \equiv \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{ys}{s - m^2} = \frac{q^2}{q_{\max}^2} \simeq \frac{T_A}{T_A^{\max}}. \quad (\text{П.159})$$

Здесь y — стандартная бьеркеновская переменная и s — квадрат полной энергии в системе центра масс лептона и нуклона:

$$y = \frac{(p, q)}{(p, k)}, \quad s = (p + k)^2, \quad b^2 = \frac{m_f^2}{s}, \quad (\text{П.160})$$

где p — 4-импульс активного нуклона, являющийся решением уравнения на сохранение энергии-импульса ядра (3.20). В (П.160) введена также безразмерная переменная b , зависящая от массы нуклона $m_f \equiv m$. Вспомогательные переменные a и b используются в данном разделе для упрощения вычислений, например, в выражениях для квадратов скалярных произведений из п. 6.3 или в формулах (П.164).

Имеются следующие соотношения между переменными a, b и y, s, m :

$$\begin{aligned} a(1 - b^2) &= y, \quad ab^2 = \frac{ym^2}{s - m^2}, \quad (1 - a) = 1 - \frac{ys}{s - m^2}, \\ 1 - a + ab^2 &= 1 - a(1 - b^2) = 1 - y, \quad a(1 + b^2) = y \frac{s + m^2}{s - m^2}, \\ a(1 - b) &= \frac{\sqrt{sy}}{\sqrt{s + m}}, \quad a(1 - b)^2 = y\tau, \quad \tau = \frac{1 - b}{1 + b} = \frac{\sqrt{s - m}}{\sqrt{s + m}}. \end{aligned}$$

На их основе для когерентного случая полезны выражения

$$ab(1 - b) = \frac{my}{\sqrt{s + m}}, \quad 1 - a(1 - b) = 1 - \frac{\sqrt{sy}}{\sqrt{s + m}}. \quad (\text{П.161})$$

Соответственно, для некогерентного случая удобно использовать связи типа

$$\begin{aligned} (1 - a) &= \frac{s(1 - y) - m^2}{s - m^2}, \quad (1 - a)ab^2 = ym^2 \frac{s(1 - y) - m^2}{(s - m^2)^2}, \\ (1 - a)(1 - a + ab^2) &= \frac{s(1 - y)^2 - m^2(1 - y)}{s - m^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.162})$$

Наконец, используя определения y , s , q^2 и $E_\nu = \frac{s - m^2}{2\sqrt{s}}$, а также $\frac{ys}{s - m^2} = \frac{q^2}{q_{\max}^2} \simeq \frac{T_A}{T_A^{\max}}$, можно связать y с кинетической энергией отдачи ядра T_A и q^2 в виде

$$y = \frac{s - m^2}{s} \frac{q^2}{q_{\max}^2} \simeq \frac{s - m^2}{s} \frac{T_A}{T_A^{\max}}. \quad (\text{П.163})$$

П.6.1. Сечение когерентного рассеяния (анти)нейтрино на ядре в терминах A_{\pm}^f . Суммирование по индексу k (т. е. по числу нуклонов f -типа) в выражении (П.157) позволяет записать когерентное сечение в терминах A_{+}^f и A_{-}^f , которые равны числу нуклонов f -типа в ядре, имеющих соответственно положительное и отрицательное значения проекций спина на ось квантования:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f [A_{+}^f(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{++}^{\eta,f}) + A_{-}^f(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{--}^{\eta,f})] \right|^2,$$

где $A_{\pm}^p = Z_{\pm}$ и $A_{\pm}^n = N_{\pm}$ — число протонов и нейтронов в ядре до взаимодействия с проекцией спина $\pm 1/2$ на направление импульса налетающего лептона.

Воспользуемся явными выражениями для скалярных произведений $(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{++}^{\eta,f})$ и $(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{--}^{\eta,f})$ из п. 6.3 (или из прил. П.5), а также тем, что общий множитель всех квадратов скалярных произведений $8^2(s - m^2)^2$ уже был учтен при определении основного размерного фактора сечений $\frac{4G_F^2 m_A}{\pi}$ согласно приближению (6.23). Тогда для нейтрино и антинейтрино соответственно получаются формулы

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu}}{dT_A} = \cos^2 \frac{\theta}{2} & \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left\{ A_{+}^f \left[g_L + g_R \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + A_{-}^f g_R \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \right\} \right|^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} = \cos^2 \frac{\theta}{2} & \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left\{ A_{+}^f g_L \left[1 - \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + A_{-}^f \left[g_R + g_L \frac{m}{\sqrt{s}} \left(1 - \frac{m}{\sqrt{s}} \right) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \right\} \right|^2. \end{aligned}$$

Или в терминах a и $b = \frac{m_f}{\sqrt{s}}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu}}{dT_A} &= (1-a) \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left\{ A_+^f \left[g_L^f + g_R^f b(1-b)a \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_-^f g_R^f \left[1 - (1-b)a \right] \right\} \right|^2, \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} &= (1-a) \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left\{ A_-^f \left[g_R^f + g_L^f b(1-b)a \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_+^f g_L^f \left[1 - (1-b)a \right] \right\} \right|^2. \end{aligned}$$

Если раскрыть квадратные скобки, то из сравнения приведенных ниже выражений

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu}}{dT_A} &= (1-a) \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left\{ A_+^f g_L^f + A_+^f g_R^f b(1-b)a + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_-^f g_R^f \left[1 - (1-b)a \right] \right\} \right|^2, \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} &= (1-a) \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left\{ A_-^f g_R^f + A_-^f g_L^f b(1-b)a + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_+^f g_L^f \left[1 - (1-b)a \right] \right\} \right|^2, \end{aligned} \quad (\text{П.164})$$

видно, что для получения формулы для антинейтрино $\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\bar{\nu}}}{dT_A}$ из формулы для нейтрино $\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu}}{dT_A}$ следует заменить в последней множитель $A_+^f g_L^f$ на $A_-^f g_R^f$ (и одновременно $A_-^f g_R^f$ на $A_+^f g_L^f$), а также заменить $A_+^f g_R^f$ на $A_-^f g_L^f$. Если же $A_+^f = A_-^f$ (т. е. ядро имеет нулевой суммарный спин), то достаточно просто поменять местами киральные константы $g_R^f \leftrightarrow g_L^f$.

Выражения (П.164) можно записать в едином для ν -ядерного и $\bar{\nu}$ -ядерного рассеяний виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} &= (1-a) \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f(q^2) \left\{ A_{\pm}^f \left[g_{L/R}^f + g_{R/L}^f b(1-b)a \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + A_{\mp}^f g_{R/L}^f \left[1 - (1-b)a \right] \right\} \right|^2 = \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}} \right) \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \times \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ A_{\pm}^f \left[g_{L/R}^f + g_{R/L}^f \frac{my}{\sqrt{s} + m} \right] + A_{\mp}^f g_{R/L}^f \left[1 - \frac{\sqrt{sy}}{\sqrt{s} + m} \right] \right\} \right|^2, \end{aligned} \quad (\text{П.165})$$

где левый (правый) и верхний (нижний) индекс отвечает нейтрино (антинейтрино), а кинематические параметры y и s уже определены выше в прил. П.6.

П.6.2. Сечение когерентного рассеяния (анти)нейтрино на ядре в терминах A^f и ΔA^f . В выражении для когерентного сечения рассеяния (П.165) можно и, как оказывается, более удобно перейти от пары ядерных параметров A_{\pm} к другой (ортогональной) паре ядерных параметров, которая представляет собой полное число нуклонов f -типа A^f и разность между числом f -нуклонов, имеющих положительное и отрицательное значения проекции спина на выделенную ось ΔA^f , т. е.

$$A^f = A_+^f + A_-^f, \quad \Delta A^f = A_+^f - A_-^f \quad \text{или} \quad A_{\pm}^f = \frac{1}{2}(A^f \pm \Delta A^f). \quad (\text{П.166})$$

Такое преобразование удобно провести, заметив, что

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu}}{dT_A} &\propto \left| A_+^f \alpha_{\nu} + A_-^f \beta_{\nu} \right|^2 = \left| \frac{A^f + \Delta A^f}{2} \alpha_{\nu} + \frac{A^f - \Delta A^f}{2} \beta_{\nu} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{A^f}{2} (\alpha_{\nu} + \beta_{\nu}) + \frac{\Delta A^f}{2} (\alpha_{\nu} - \beta_{\nu}) \right|^2, \end{aligned} \quad (\text{П.167})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\sigma}_{\text{coh}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} &\propto \left| A_-^f \alpha_{\bar{\nu}} + A_+^f \beta_{\bar{\nu}} \right|^2 = \left| \frac{A^f - \Delta A^f}{2} \alpha_{\bar{\nu}} + \frac{A^f + \Delta A^f}{2} \beta_{\bar{\nu}} \right|^2 = \\ &= \left| \frac{A^f}{2} (\alpha_{\bar{\nu}} + \beta_{\bar{\nu}}) + \frac{(-\Delta A^f)}{2} (\alpha_{\bar{\nu}} - \beta_{\bar{\nu}}) \right|^2, \end{aligned}$$

где введены вспомогательные переменные

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu} &= g_L^f + g_R^f b(1-b)a, & \beta_{\nu} &= g_R^f [1 - (1-b)a]; \\ \alpha_{\bar{\nu}} &= g_R^f + g_L^f b(1-b)a, & \beta_{\bar{\nu}} &= g_L^f [1 - (1-b)a]. \end{aligned} \quad (\text{П.168})$$

Из формул преобразования (П.167) видно, что вопрос перехода к параметризации сечений в терминах A^f и ΔA^f сводится к вычислению сумм и разностей вспомогательных переменных из (П.168). С учетом кинематических определений и соотношений из прил. П.6 получается

$$\begin{aligned} \alpha_{\nu} + \beta_{\nu} &= g_L^f + g_R^f [ab(1-b) + 1 - a(1-b)] = \\ &= g_L^f + g_R^f + g_R^f [ab(1-b) - a(1-b)] = \\ &= g_L^f + g_R^f + g_R^f y \left[\frac{m}{\sqrt{s} + m} - \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s} + m} \right] = g_L^f + g_R^f - g_R^f y \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_\nu - \beta_\nu &= g_L^f + g_R^f[ab(1-b) - 1 + a(1-b)] = \\
 &= g_L^f - g_R^f + g_R^f[ab(1-b) + a(1-b)] = \\
 &= g_L^f - g_R^f + g_R^f y \left[\frac{m}{\sqrt{s}+m} + \frac{\sqrt{s}}{\sqrt{s}+m} \right] = g_L^f - g_R^f + g_R^f y.
 \end{aligned}$$

Напомним, что $\tau = \frac{\sqrt{s}-m}{\sqrt{s}+m}$. Аналогично (или пользуясь заменой $g_L^f \leftrightarrow g_R^f$) имеем

$$\begin{aligned}
 \alpha_{\bar{\nu}} + \beta_{\bar{\nu}} &= g_R^f + g_L^f[ab(1-b) + 1 - a(1-b)] = g_R^f + g_L^f - g_L^f y \tau, \\
 \alpha_{\bar{\nu}} - \beta_{\bar{\nu}} &= g_R^f + g_L^f[ab(1-b) - 1 + a(1-b)] = g_R^f - g_L^f + g_L^f y.
 \end{aligned}$$

Вспоминая переход от $g_L^f = \frac{1}{2}(g_V^f + g_A^f)$ и $g_R^f = \frac{1}{2}(g_V^f - g_A^f)$ к $g_V^f = g_L^f + g_R^f$ и $g_A^f = g_L^f - g_R^f$, можно также записать полученные соотношения в виде

$$\begin{aligned}
 \alpha_\nu + \beta_\nu &= g_V^f - g_R^f y \tau = g_V^f - \frac{y\tau}{2}(g_V^f - g_A^f) = g_V^f \left(1 - \frac{y\tau}{2}\right) + g_A^f \frac{y\tau}{2}, \\
 \alpha_\nu - \beta_\nu &= g_A^f + g_R^f y = g_A^f + \frac{y}{2}(g_V^f - g_A^f) = g_V^f \frac{y}{2} + g_A^f \left(1 - \frac{y}{2}\right); \\
 \alpha_{\bar{\nu}} + \beta_{\bar{\nu}} &= g_V^f - g_L^f y \tau = g_V^f - \frac{y\tau}{2}(g_V^f + g_A^f) = g_V^f \left(1 - \frac{y\tau}{2}\right) - g_A^f \frac{y\tau}{2}, \\
 \alpha_{\bar{\nu}} - \beta_{\bar{\nu}} &= -g_A^f + g_L^f y = -g_A^f + \frac{y}{2}(g_V^f + g_A^f) = g_V^f \frac{y}{2} - g_A^f \left(1 - \frac{y}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Сечения (П.165) когерентного рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядре с помощью преобразования (П.167) можно выразить через α_ν , β_ν , $\alpha_{\bar{\nu}}$, $\beta_{\bar{\nu}}$ и A^f и ΔA^f таким образом:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^\nu}{dT_A} &= (1-a) \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left[\frac{A^f}{2}(\alpha_\nu + \beta_\nu) + \frac{\Delta A^f}{2}(\alpha_\nu - \beta_\nu) \right] \right|^2, \\
 \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} &= (1-a) \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left[\frac{A^f}{2}(\alpha_{\bar{\nu}} + \beta_{\bar{\nu}}) + \frac{(-\Delta A^f)}{2}(\alpha_{\bar{\nu}} - \beta_{\bar{\nu}}) \right] \right|^2.
 \end{aligned}$$

Откуда с учетом полученных выражений для $(\alpha_\nu \pm \beta_\nu)$ и $(\alpha_{\bar{\nu}} \pm \beta_{\bar{\nu}})$ сечения когерентного рассеяния на ядре в терминах слабых нуклонных киральных

констант имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu}}{dT_A} \Big|_{L,R} &= \frac{(1-a)}{4} \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left[A^f \left(g_L^f + g_R^f (1-y\tau) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta A^f \left(g_L^f - g_R^f (1-y) \right) \right] \right|^2, \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} \Big|_{L,R} &= \frac{(1-a)}{4} \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left[A^f \left(g_R^f + g_L^f (1-y\tau) \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-\Delta A^f) \left(g_R^f - g_L^f (1-y) \right) \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{П.169})$$

Сечения (П.169), выраженные через векторные и аксиальные слабые константы, выглядят так:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu}}{dT_A} \Big|_{V,A} &= \frac{(1-a)}{4} \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left[A^f \left(g_V^f \left(1 - \frac{y\tau}{2} \right) + g_A^f \frac{y\tau}{2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \Delta A^f \left(g_V^f \frac{y}{2} + g_A^f \left(1 - \frac{y}{2} \right) \right) \right] \right|^2, \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} \Big|_{V,A} &= \frac{(1-a)}{4} \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left[A^f \left(g_V^f \left(1 - \frac{y\tau}{2} \right) - g_A^f \frac{y\tau}{2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-\Delta A^f) \left(g_V^f \frac{y}{2} - g_A^f \left(1 - \frac{y}{2} \right) \right) \right] \right|^2. \end{aligned} \quad (\text{П.170})$$

Далее, собирая коэффициенты при g_V^f и g_A^f , т. е. переходя от выражения типа

$$\begin{aligned} [A^f() + (-\Delta A^f)()] &= g_V^f A^f \left(1 - \frac{y\tau}{2} \right) - g_A^f A^f \frac{y\tau}{2} + \\ &\quad + g_V^f \frac{y}{2} (-\Delta A^f) - g_A^f \left(1 - \frac{y}{2} \right) (-\Delta A^f) \end{aligned}$$

к выражению типа

$$g_V^f \left[A^f \left(1 - \frac{y\tau}{2} \right) + \frac{y}{2} (-\Delta A^f) \right] + (-g_A^f) \left[A^f \frac{y\tau}{2} + \left(1 - \frac{y}{2} \right) (-\Delta A^f) \right],$$

для сечения когерентного рассеяния нейтрино и антинейтрино на ядре согласно (П.156) получаем окончательные формулы:

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \frac{4G_F^2 m_A}{\pi} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}} \right) \left| G_V^{\nu/\bar{\nu}} + G_A^{\nu/\bar{\nu}} \right|^2, \quad (\text{П.171})$$

где для случая нейтрино:

$$G_V^\nu = \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f g_V^f \left(A^f \left[1 - \frac{y\tau}{2} \right] + \Delta A^f \frac{y}{2} \right), \quad (\text{П.172})$$

$$G_A^\nu = \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f g_A^f \left(A^f \frac{y\tau}{2} + \Delta A^f \left[1 - \frac{y}{2} \right] \right),$$

и для случая антинейтрино:

$$G_V^{\bar{\nu}} = \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f g_V^f \left[A^f \left(1 - \frac{y\tau}{2} \right) + \frac{y}{2} (-\Delta A^f) \right], \quad (\text{П.173})$$

$$G_A^{\bar{\nu}} = \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f (-g_A^f) \left[A^f \frac{y\tau}{2} + \left(1 - \frac{y}{2} \right) (-\Delta A^f) \right].$$

Выражение (П.171) с коэффициентами из (П.172) с точностью до переопределения поправочного множителя g_{coh}^f соответствует формуле для когерентного νA -рассеяния (48) из работы [19].

Другие выражения для сечений когерентного рассеяния (анти)нейтрино на ядре. Полезно раскрыть квадрат матричного элемента в формулах (П.165) для когерентного (анти)нейтрино-ядерного рассеяния. Вводя временные обозначения

$$P_f = \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f A_+^f (g_L^f + g_R^f \alpha), \quad M_f = \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f A_-^f g_R^f \beta,$$

где $\alpha = ab(1-b) = \frac{my}{\sqrt{s+m}}$ и $\beta = (1-a(1-b)) = 1 - \frac{\sqrt{s}y}{\sqrt{s+m}}$ *, для «нейтринной» формулы из (П.165) можно записать

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^\nu}{dT_A(1-a)} &= \left| \sum_{f=p,n} [P_f + M_f] \right|^2 = [(P_n + M_n)^* + (P_p + M_p)^*] \times \\ &\times [(P_n + M_n) + (P_p + M_p)] = |P_n + M_n|^2 + |P_p + M_p|^2 + \\ &+ (P_n + M_n)^*(P_p + M_p) + (P_p + M_p)^*(P_n + M_n) = \\ &= (P_n + M_n)^2 + (P_p + M_p)^2 + 2P_n P_p + 2P_n M_p + 2M_n P_p + 2M_p M_n. \end{aligned}$$

*Хорошее приближение, когда $m \equiv m_p = m_n$.

В последней строке без существенной потери общности сделано упрощающее предположение, что P_f и M_f — действительные величины. Тогда учтя, что

$$(P_f + M_f)^2 = g_{\text{coh}}^f |F_f|^2 [A_+^f (g_L^f + g_R^f \alpha) + A_-^f g_R^f \beta]^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^\nu}{dT_A(1-a)} &= \sum_{f=p,n} g_{\text{coh}}^f |F_f|^2 [A_+^f (g_L^f + g_R^f \alpha) + A_-^f g_R^f \beta]^2 + \\ &+ 2\sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n [A_+^p A_+^n (g_L^p + g_R^p \alpha)(g_L^n + g_R^n \alpha) + \\ &+ A_+^p (g_L^p + g_R^p \alpha) A_-^n g_R^n \beta + A_+^n (g_L^n + g_R^n \alpha) A_-^p g_R^p \beta + A_-^p g_R^p \beta A_-^n g_R^n \beta]. \end{aligned}$$

Поэтому в терминах g_L^f , g_R^f и A_\pm^f сечение когерентного (анти)нейтрино-ядерного рассеяния принимает (громоздкий) вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} &= \frac{4G_F^2 m_A}{\pi} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \frac{4G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}\right) \times \\ &\times \left\{ \sum_{f=p,n} g_{\text{coh}}^f |F_f|^2 \left[A_\pm^f \left(g_{L/R}^f + g_{R/L}^f \frac{my}{\sqrt{s+m}} \right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. A_\mp^f g_{R/L}^f \left(1 - \frac{\sqrt{sy}}{\sqrt{s+m}} \right) \right]^2 + 2\sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n \times \right. \\ &\times \left[A_\pm^p A_\pm^n \left(g_{L/R}^p + g_{R/L}^p \frac{my}{\sqrt{s+m}} \right) \left(g_{L/R}^n + g_{R/L}^n \frac{my}{\sqrt{s+m}} \right) + \right. \\ &+ \left. A_\mp^p A_\mp^n g_{R/L}^p g_{R/L}^n \left(1 - \frac{\sqrt{sy}}{\sqrt{s+m}} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. A_\pm^p A_\mp^n \left(g_{L/R}^p + g_{R/L}^p \frac{my}{\sqrt{s+m}} \right) g_{R/L}^n \left(1 - \frac{\sqrt{sy}}{\sqrt{s+m}} \right) + \right. \\ &+ \left. \left. A_\pm^n A_\mp^p \left(g_{L/R}^n + g_{R/L}^n \frac{my}{\sqrt{s+m}} \right) g_{R/L}^p \left(1 - \frac{\sqrt{sy}}{\sqrt{s+m}} \right) \right] \right\}. \quad (\text{П.174}) \end{aligned}$$

Аналогичное «раскрытие» формулы для когерентного рассеяния (нейтрино) в терминах A_f , ΔA_f , g_L и g_R выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\nu}}{dT_A} = & \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}\right) \left\{ \sum_{f=p,n} g_{\text{coh}}^f |F_f|^2 \left[A_f^2 [g_L^f + g_R^f(1-y\tau)]^2 + \right. \right. \\ & + 2A_f \Delta A_f [g_L^f + g_R^f(1-y\tau)] [g_L^f - g_R^f(1-y)] + \Delta A_f^2 [g_L^f - g_R^f(1-y)]^2 \left. \right] + \\ & + 2\sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n \left[A_p A_n [g_L^p + g_R^p(1-y\tau)] [g_L^n + g_R^n(1-y\tau)] + \right. \\ & + \Delta A_p \Delta A_n [g_L^p - g_R^p(1-y)] [g_L^n - g_R^n(1-y)] + \\ & + A_n \Delta A_p [g_L^n + g_R^n(1-y\tau)] [g_L^p - g_R^p(1-y)] + \\ & \left. \left. + A_p \Delta A_n [g_L^p + g_R^p(1-y\tau)] [g_L^n - g_R^n(1-y)] \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если спины протонов и нейтронов «сбалансированы» (т.е. $\Delta A_f = 0$), то из предыдущего выражения получается достаточно простая формула для когерентного νA -сечения:

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\nu}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}\right) \left\{ \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f [g_L^f + g_R^f(1-y\tau)] \right\}^2.$$

Формула для сечения когерентного $\bar{\nu} A$ -рассеяния при $\Delta A_f = 0$ получается из этого выражения простой заменой обозначений $g_L^f \leftrightarrow g_R^f$.

Такое же «раскрытие» квадрата матричного элемента имеет смысл сделать для сечений (П.170), выраженных через g_V^f , g_A^f , A_f , ΔA_f и $\tau = \frac{\sqrt{s} - m}{\sqrt{s} + m}$.

Вводя переменные

$$P_f = \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f A_f (g_V^f - g_R^f y \tau), \quad M_f = \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \Delta A_f (g_A^f + g_R^f y),$$

сечение когерентного νA -рассеяния из (П.170) удобно записать, удерживая временно g_R , как

$$\begin{aligned} \frac{4 d\bar{\sigma}_{\text{coh}}^{\nu}}{dT_A(1-a)} &= \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f \left[A_f (g_V^f - g_R^f y \tau) + \Delta A_f (g_A^f + g_R^f y) \right] \right|^2 = \\ &= \left| \sum_{f=p,n} [P_f + M_f] \right|^2 = (P_n + M_n)^2 + (P_p + M_p)^2 + \\ &+ 2P_n P_p + 2P_n M_p + 2M_n P_p + 2M_p M_n, \end{aligned}$$

где

$$(P_f + M_f)^2 = g_{\text{coh}}^f |F_f|^2 \left[A_f^2 (g_V^f - g_R^f y \tau)^2 + \right. \\ \left. + 2A_f (g_V^f - g_R^f y \tau) \Delta A_f (g_A^f + g_R^f y) + \Delta A_f^2 (g_A^f + g_R^f y)^2 \right]$$

и

$$P_n P_p + P_n M_p + M_n P_p + M_p M_n = \\ = \sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n A_p A_n (g_V^p - g_R^p y \tau) (g_V^n - g_R^n y \tau) + \\ + \sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n A_n \Delta A_p (g_V^n - g_R^n y \tau) (g_A^p + g_R^p y) + \\ + \sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n A_p \Delta A_n (g_V^p - g_R^p y \tau) (g_A^n + g_R^n y) + \\ + \sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n \Delta A_p \Delta A_n (g_A^n + g_R^n y) (g_A^p + g_R^p y) = \\ = \sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n \left\{ A_p A_n (g_V^p - g_R^p y \tau) (g_V^n - g_R^n y \tau) + \right. \\ \left. + A_n \Delta A_p (g_V^n - g_R^n y \tau) (g_A^p + g_R^p y) + \right. \\ \left. + A_p \Delta A_n (g_V^p - g_R^p y \tau) (g_A^n + g_R^n y) + \right. \\ \left. + \Delta A_p \Delta A_n (g_A^n + g_R^n y) (g_A^p + g_R^p y) \right\}.$$

Тогда это выражение для сечения несколько упрощается:

$$\frac{4 d\bar{\sigma}_{\text{coh}}^\nu}{dT_A(1-a)} = \sum_{f=p,n} g_{\text{coh}}^f |F_f|^2 \left[A_f^2 (g_V^f - g_R^f y \tau)^2 + \right. \\ \left. + 2A_f (g_V^f - g_R^f y \tau) \Delta A_f (g_A^f + g_R^f y) + \Delta A_f^2 (g_A^f + g_R^f y)^2 \right] + \\ + 2\sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n \left[A_p A_n (g_V^p - g_R^p y \tau) (g_V^n - g_R^n y \tau) + \right. \\ \left. + A_n \Delta A_p (g_V^n - g_R^n y \tau) (g_A^p + g_R^p y) + A_p \Delta A_n (g_V^p - g_R^p y \tau) (g_A^n + g_R^n y) + \right. \\ \left. + \Delta A_p \Delta A_n (g_A^n + g_R^n y) (g_A^p + g_R^p y) \right].$$

Наконец, если исключить g_R , путем замены

$$(g_V^f - g_R^f y \tau) = g_V^f \left(1 - \frac{y\tau}{2} \right) + g_A^f \frac{y\tau}{2}, \\ (g_A^f + g_R^f y) = g_V^f \frac{y}{2} + g_A^f \left(1 - \frac{y}{2} \right)$$

сечение когерентного рассеяния нейтрино на ядре (П.170) в терминах A_f , ΔA_f , $g_{V,A}$ примет окончательный (опять громоздкий) вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^\nu}{dT_A} = & \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}\right) \left\{ \sum_{f=p,n} g_{\text{coh}}^f |F_f|^2 \times \right. \\ & \times \left[A_f^2 \left(g_V^f \left(1 - \frac{yT}{2}\right) + g_A^f \frac{yT}{2} \right)^2 + 2A_f \Delta A_f \left(g_V^f \left(1 - \frac{yT}{2}\right) + g_A^f \frac{yT}{2} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left(g_V^f \frac{y}{2} + g_A^f \left(1 - \frac{y}{2}\right) \right) + \Delta A_f^2 \left(g_V^f \frac{y}{2} + g_A^f \left(1 - \frac{y}{2}\right) \right)^2 \right] + 2\sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n \times \\ & \times \left[A_p A_n \left(g_V^p \left(1 - \frac{yT}{2}\right) + g_A^p \frac{yT}{2} \right) \left(g_V^n \left(1 - \frac{yT}{2}\right) + g_A^n \frac{yT}{2} \right) + \right. \\ & + A_n \Delta A_p \left(g_V^n \left(1 - \frac{yT}{2}\right) + g_A^n \frac{yT}{2} \right) \left(g_V^p \frac{y}{2} + g_A^p \left(1 - \frac{y}{2}\right) \right) + \\ & + A_p \Delta A_n \left(g_V^p \left(1 - \frac{yT}{2}\right) + g_A^p \frac{yT}{2} \right) \left(g_V^n \frac{y}{2} + g_A^n \left(1 - \frac{y}{2}\right) \right) + \\ & \left. \left. + \Delta A_p \Delta A_n \left(g_V^p \frac{y}{2} + g_A^p \left(1 - \frac{y}{2}\right) \right) \left(g_V^n \frac{y}{2} + g_A^n \left(1 - \frac{y}{2}\right) \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Однако, если $\Delta A_f = 0$, то отсюда получается более простая формула для сечения когерентного рассеяния нейтрино на ядре:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^\nu}{dT_A} = & \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}\right) \times \\ & \times \left\{ \sum_{f=p,n} g_{\text{coh}}^f |F_f|^2 A_f^2 \left[g_V^f \left(1 - \frac{yT}{2}\right) + g_A^f \frac{yT}{2} \right]^2 + \right. \\ & \left. + 2\sqrt{g_{\text{coh}}^p g_{\text{coh}}^n} F_p F_n A_p A_n \left[g_V^p \left(1 - \frac{yT}{2}\right) + g_A^p \frac{yT}{2} \right] \left[g_V^n \left(1 - \frac{yT}{2}\right) + g_A^n \frac{yT}{2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

которая еще более упрощается и обобщается на случай когерентного $\bar{\nu}A$ -рассеяния (путем замены $g_A \rightarrow -g_A$) в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = & \frac{G_F^2 m_A}{\pi} \left(1 - \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}\right) \times \\ & \times \left(\sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} F_f A_f \left[g_V^f \left(1 - \frac{yT}{2}\right) \pm g_A^f \frac{yT}{2} \right] \right)^2. \quad (\text{П.175}) \end{aligned}$$

П.6.3. Сечение некогерентного рассеяния (анти)нейтрино на ядре в терминах A_{\pm}^f . Суммирование по индексу k в выражении (П.158) позволяет записать некогерентное сечение (П.158) в терминах A_{+}^f и A_{-}^f :

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \sum_{f=p,n} \hat{F}_f \left[A_{-}^f \sum_{r'=\pm} |(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{r',-}^{\eta,f})|^2 + A_{+}^f \sum_{r'=\pm} |(l_{\nu/\bar{\nu}}, h_{r',+}^{\eta,f})|^2 \right],$$

где, как и ранее, $A_{\pm}^p = Z_{\pm}$ и $A_{\pm}^n = N_{\pm}$ — число начальных протонов и нейтронов с проекцией спина $\pm 1/2$ на направление импульса налетающего лептона. Для удобства записи временно введена вспомогательная величина

$$\hat{F}_f(q^2) = g_{\text{inc}}^f \left[1 - |F_f(q^2)|^2 \right]. \quad (\text{П.176})$$

Далее следует использовать выражения для квадратов скалярных произведений $|(l_{\bar{\nu},\nu}, h_{r',\pm}^{\eta,f})|^2$ из прил. П.5*. Поскольку для их сумм (по спидам конечных нуклонов $r' = -1, +1$) имеются выражения

$$\begin{aligned} |(l_{\nu}, h_{-}^{\eta,f})|^2 + |(l_{\nu}, h_{+}^{\eta,f})|^2 &= (1-a)g_R^2 [1 - (1-b)a]^2 + \\ &\quad + a(1-a)^2 g_R^2 (1-b)^2, \\ |(l_{\nu}, h_{-}^{\eta,f})|^2 + |(l_{\nu}, h_{+}^{\eta,f})|^2 &= a(g_L - g_R b [1 - (1-b)a])^2 + \\ &\quad + (1-a)[g_L + g_R b(1-b)a]^2, \\ |(l_{\bar{\nu}}, h_{-}^{\eta,f})|^2 + |(l_{\bar{\nu}}, h_{+}^{\eta,f})|^2 &= (1-a)[g_R + g_L b(1-b)a]^2 + \\ &\quad + a(g_R - g_L b [1 - (1-b)a])^2, \\ |(l_{\bar{\nu}}, h_{-}^{\eta,f})|^2 + |(l_{\bar{\nu}}, h_{+}^{\eta,f})|^2 &= a(1-a)^2 g_L^2 (1-b)^2 + \\ &\quad + (1-a)g_L^2 [1 - (1-b)a]^2, \end{aligned}$$

* Они приведены ниже в терминах a и b , будучи деленными на множитель $64(s - m^2)^2$:

$$\begin{aligned} |(l_{\nu} \cdot h_{-}^{\eta})|^2 &= (1-a)g_R^2 [1 - (1-b)a]^2, & |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{-}^{\eta})|^2 &= (1-a)[g_R + g_L b(1-b)a]^2, \\ |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{+}^{\eta})|^2 &= (1-a)g_L^2 [1 - (1-b)a]^2, & |(l_{\nu} \cdot h_{+}^{\eta})|^2 &= (1-a)[g_L + g_R b(1-b)a]^2, \\ |(l_{\nu} \cdot h_{-}^{\eta})|^2 &= a(g_L - g_R b [1 - (1-b)a])^2, & |(l_{\nu} \cdot h_{+}^{\eta})|^2 &= a(1-a)^2 g_R^2 (1-b)^2, \\ |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{+}^{\eta})|^2 &= a(g_R - g_L b [1 - (1-b)a])^2, & |(l_{\bar{\nu}} \cdot h_{-}^{\eta})|^2 &= a(1-a)^2 g_L^2 (1-b)^2. \end{aligned}$$

то для сечений некогерентного νA - и $\bar{\nu} A$ -рассеяния соответственно получается

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\nu}}{dT_A} &= \sum_{f=p,n} \hat{F}_f \left[A_-^f g_R^2 (1-a) \left\{ [1 - (1-b)a]^2 + a(1-a)(1-b)^2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + A_+^f \left\{ a(g_L - g_R b [1 - (1-b)a])^2 + (1-a) [g_L + g_R b(1-b)a]^2 \right\} \right], \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} &= \sum_{f=p,n} \hat{F}_f \left[A_+^f g_L^2 (1-a) \left\{ [1 - (1-b)a]^2 + a(1-a)(1-b)^2 \right\} + \right. \\ &\quad \left. + A_-^f \left\{ a(g_R - g_L b [1 - (1-b)a])^2 + (1-a) [g_R + g_L b(1-b)a]^2 \right\} \right]. \end{aligned}$$

Вводя для удобства промежуточных вычислений вспомогательные переменные

$$X \equiv \left\{ [1 - (1-b)a]^2 + a(1-a)(1-b)^2 \right\} \quad \text{и} \quad (\text{П.177})$$

$$Z(P, Q) \equiv \left\{ a(P - Qb [1 - (1-b)a])^2 + (1-a) [P + Qb(1-b)a]^2 \right\},$$

эти сечения можно записать в более «компактном» виде:

$$\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} = \sum_{f=p,n} \hat{F}_f \left[A_{\mp}^f g_{R/L}^2 (1-a) X + A_{\pm}^f Z(g_{L/R}, g_{R/L}) \right]. \quad (\text{П.178})$$

Прямая выкладка* для X и несколько более продолжительная** для $Z(P, Q)$ дают

$$X = 1 - a + ab^2, \quad Z(P, Q) = (P - Qab^2)^2 + Q^2 ab^2 (1-a). \quad (\text{П.179})$$

* $X = 1 - 2(1-b)a + (1-b)^2 a^2 + (a - a^2)(1-b)^2 = 1 - 2a + 2ab + (a - 2ab + ab^2) = 1 - a + ab^2$.

** $Z(P, Q) = a(P - [Qb - Qb(1-b)a])^2 + (1-a)[P + Qb(1-b)a]^2 =$
 $= (1-a)[P + Qab(1-b)]^2 + a[[P + Qab(1-b)] - Qb]^2 =$
 $= [P + Qab(1-b)]^2 - \underbrace{a[P + Qab(1-b)]^2 + a[P + Qab(1-b)]^2}_0 +$
 $+ 2a[-P - Qab(1-b)]Qb + aQ^2 b^2 = P^2 + 2PQab(1-b) + Q^2 a^2 b^2 (1-b)^2 -$
 $- 2PQab - 2Q^2 a^2 b^2 (1-b) + aQ^2 b^2 = P^2 - 2PQab^2 + Q^2 a^2 b^2 (1-2b + b^2) -$
 $- 2Q^2 a^2 b^2 (1-b) + aQ^2 b^2 \underbrace{+ 2PQab - 2PQab}_0 = P^2 - 2PQab^2 +$
 $+ Q^2 a^2 b^2 - 2Q^2 a^2 b^3 + Q^2 a^2 b^4 - 2Q^2 a^2 b^2 + 2Q^2 a^2 b^3 + aQ^2 b^2 =$
 $= \underbrace{P^2 - 2PQab^2 + Q^2 a^2 b^4 + Q^2 a^2 b^2 - 2Q^2 a^2 b^2}_0 +$
 $\underbrace{(P - Qab^2)^2}_{(P - Qab^2)^2} - \underbrace{Q^2 a^2 b^2}_{-Q^2 a^2 b^2} +$
 $+ aQ^2 b^2 + \underbrace{2Q^2 a^2 b^3 - 2Q^2 a^2 b^3}_0 = (P - Qab^2)^2 + Q^2 ab^2 (1-a).$

С учетом (П.179) сечения некогерентного $(\nu/\bar{\nu})A$ -рассеяния (П.178) принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\nu}}{dT_A} &= \sum_{f=p,n} \hat{F}_f \left[A_-^f g_R^2 (1-a)(1-a+ab^2) + \right. \\ &\quad \left. + A_+^f \left\{ (g_L - g_R ab^2)^2 + g_R^2 ab^2 (1-a) \right\} \right], \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} &= \sum_{f=p,n} \hat{F}_f \left[A_+^f g_L^2 (1-a)(1-a+ab^2) + \right. \\ &\quad \left. + A_-^f \left\{ (g_R - g_L ab^2)^2 + g_L^2 ab^2 (1-a) \right\} \right],\end{aligned}$$

который (учтя, что $g_{L,R} \equiv g_{L,R}^f$, $b \equiv b_f$) можно записать через спиновые ядерные параметры A_{\mp}^f , формфакторную переменную ядерной структуры (П.176) и кинематические соотношения (П.162) в окончательном для данного пункта виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\nu/\bar{\nu}}}{dT_A} &= \sum_{f=p,n} \hat{F}_f(q^2) \left[A_{\mp}^f (g_{R/L}^f)^2 (1-a)(1-a+ab_f^2) + \right. \\ &\quad \left. + A_{\pm}^f \left\{ (g_{L/R}^f - g_{R/L}^f ab_f^2)^2 + (g_{R/L}^f)^2 ab_f^2 (1-a) \right\} \right] = \\ &= \sum_{f=p,n} g_{\text{inc}}^f [1 - |F_f(q^2)|^2] \left[A_{\mp}^f (g_{R/L}^f)^2 \frac{s(1-y)^2 - m^2(1-y)}{s-m^2} + \right. \\ &\quad \left. + A_{\pm}^f \left\{ \left(g_{L/R}^f - g_{R/L}^f \frac{ym^2}{s-m^2} \right)^2 + (g_{R/L}^f)^2 \frac{ym^2[s(1-y) - m^2]}{(s-m^2)^2} \right\} \right]. \quad (\text{П.180})\end{aligned}$$

П.6.4. Сечение некогерентного рассеяния (анти)нейтрино в терминах A^f и ΔA^f . В выражении для сечения некогерентного рассеяния (П.180) также имеет смысл перейти от ядерных параметров A_{\pm} к определенным в (П.166) ядерным параметрам A^f и ΔA^f . Преобразование (П.167), использованное выше для когерентного случая, здесь выглядит проще:

$$\begin{aligned}\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\nu}}{dT_A} &\propto A_- \alpha_{\nu} + A_+ \beta_{\nu} = \frac{A - \Delta A}{2} \alpha_{\nu} + \\ &\quad + \frac{A + \Delta A}{2} \beta_{\nu} = \frac{A}{2} (\alpha_{\nu} + \beta_{\nu}) + \frac{\Delta A}{2} (\beta_{\nu} - \alpha_{\nu}), \\ \frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} &\propto A_+ \alpha_{\bar{\nu}} + A_- \beta_{\bar{\nu}} = \frac{A + \Delta A}{2} \alpha_{\bar{\nu}} + \\ &\quad + \frac{A - \Delta A}{2} \beta_{\bar{\nu}} = \frac{A}{2} (\alpha_{\bar{\nu}} + \beta_{\bar{\nu}}) + \frac{(-\Delta A)}{2} (\beta_{\bar{\nu}} - \alpha_{\bar{\nu}}),\end{aligned} \quad (\text{П.181})$$

где введены другие вспомогательные переменные

$$\begin{aligned}\alpha_\nu &= (g_R^f)^2(1-a)(1-a+ab_f^2), & \beta_\nu &= (g_L^f - g_R^f ab_f^2)^2 + (g_R^f)^2 ab_f^2(1-a), \\ \alpha_{\bar{\nu}} &= (g_L^f)^2(1-a)(1-a+ab_f^2), & \beta_{\bar{\nu}} &= (g_R^f - g_L^f ab_f^2)^2 + (g_L^f)^2 ab_f^2(1-a).\end{aligned}\tag{П.182}$$

Отсюда уже видны контуры общего правила — чтобы получить выражение для антинейтрино $\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\bar{\nu}}}{dT_A}(A^f, \Delta A^f, \alpha_{\bar{\nu}}, \beta_{\bar{\nu}})$, следует в имеющейся формуле для нейтрино $\frac{d\tilde{\sigma}_{\text{inc}}^{\nu}}{dT_A}(A^f, \Delta A^f, \alpha_\nu, \beta_\nu)$ заменить $A^f \rightarrow A^f$, $\Delta A^f \rightarrow -\Delta A^f$, $\alpha_\nu \rightarrow \alpha_{\bar{\nu}}$ и $\beta_\nu \rightarrow \beta_{\bar{\nu}}$ (или, что эквивалентно, $g_L^f \leftrightarrow g_R^f$).

Используя кинематические соотношения из П.6 типа $a = ys/(s - m^2)$, $ab^2 = ym^2/(s - m^2)$ и $1 - a + ab^2 = 1 - y$ для сумм и разностей вспомогательных переменных (П.182), получаем

$$\begin{aligned}\alpha_\nu + \beta_\nu &= g_L^2 - 2ab^2 g_L g_R + (1 - a + ab^2)^2 g_R^2 = \\ &= g_L^2 - 2g_L g_R \frac{m^2 y}{s - m^2} + g_R^2 (1 - y)^2, \\ \beta_\nu - \alpha_\nu &= \left(g_L^f - g_R^f ab_f^2\right)^2 + \\ &+ (g_R^f)^2 ab_f^2(1-a) - (g_R^f)^2(1-a)^2 - (g_L^f)^2(1-a)ab_f^2 = \\ &= \left(g_L^f - g_R^f ab_f^2 + g_R^f - ag_R^f\right) \left(g_L^f - g_R^f ab_f^2 - g_R^f + ag_R^f\right) = \\ &= \left(g_L + g_R \left(1 - y \frac{s + m^2}{s - m^2}\right)\right) \left(g_L - g_R(1 - y)\right); \\ \alpha_{\bar{\nu}} + \beta_{\bar{\nu}} &= g_R^2 - 2g_R g_L \frac{m^2 y}{s - m^2} + g_L^2 (1 - y)^2, \\ \beta_{\bar{\nu}} - \alpha_{\bar{\nu}} &= \left(g_R + g_L \left(1 - y \frac{s + m^2}{s - m^2}\right)\right) \left(g_R - g_L(1 - y)\right).\end{aligned}$$

С учетом этих выражений на основе формулы (П.180) сечения некогерентного рассеяния (анти)нейтрино на ядрах в терминах слабых нуклонных киральных

констант приобретают вид

$$\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\nu}}{dT_A} = \frac{2G_F^2 m_A}{\pi} \sum_{f=p,n} \hat{F}_f(q^2) \left\{ A^f \left[g_L^2 - 2g_L^f g_R^f \frac{ym^2}{s-m^2} + g_R^2(1-y)^2 \right] + \right. \\ \left. + \Delta A^f (g_L^f + g_R^f(y-1)) \left[g_L^f + g_R^f \left(1 + y \frac{m^2+s}{m^2-s} \right) \right] \right\}, \quad (\text{П.183})$$

$$\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} = \frac{2G_F^2 m_A}{\pi} \sum_{f=p,n} \hat{F}_f(q^2) \left\{ A^f \left[g_R^2 - 2g_L^f g_R^f \frac{ym^2}{s-m^2} + g_L^2(1-y)^2 \right] - \right. \\ \left. - \Delta A^f (g_R^f + g_L^f(y-1)) \left[g_R^f + g_L^f \left(1 + y \frac{m^2+s}{m^2-s} \right) \right] \right\}. \quad (\text{П.184})$$

Отметим, что первые слагаемые в квадратных скобках, пропорциональные A^f , в точности соответствуют стандартному результату для рассеяния нейтрино и антинейтрино на точечной мишени (нуклон, электрон) с константами слабого взаимодействия g_L^f и g_R^f (см., например, [39, 171]).

«Переходные суммы и разности», построенные из вспомогательных переменных (П.182), можно записать в терминах векторных и аксиал-векторных нуклонных слабых констант, учитывая, что $g_L = \frac{1}{2}(g_V + g_A)$, $g_R = \frac{1}{2}(g_V - g_A)$, тогда

$$\alpha_{\nu} + \beta_{\nu} = \left[2 \left(1 - \frac{ys}{s-m^2} \right) + y^2 + y \frac{4m^2}{s-m^2} \right] \frac{g_A^2}{4} + \\ + 2y(2-y) \frac{g_A^f g_V^f}{4} + \left[2 \left(1 - \frac{ys}{s-m^2} \right) + y^2 \right] \frac{g_V^2}{4}, \\ \beta_{\nu} - \alpha_{\nu} = \frac{1}{4} \left[y \frac{s+m^2}{s-m^2} (g_A^f - g_V^f) + 2g_V^f \right] \left[(2-y)g_A^f + yg_V^f \right], \\ \alpha_{\bar{\nu}} + \beta_{\bar{\nu}} = \left[2 \left(1 - \frac{ys}{s-m^2} \right) + y^2 + y \frac{4m^2}{s-m^2} \right] \frac{g_A^2}{4} + \\ + 2y(2-y) \frac{(-g_A^f)g_V^f}{4} + \left[2 \left(1 - \frac{ys}{s-m^2} \right) + y^2 \right] \frac{g_V^2}{4}, \\ \beta_{\bar{\nu}} - \alpha_{\bar{\nu}} = \frac{1}{4} \left[y \frac{s+m^2}{s-m^2} (-g_A^f - g_V^f) + 2g_V^f \right] \left[-(2-y)g_A^f + yg_V^f \right].$$

Заметим, что в данном случае переход от «нейтрино» к «антинейтрино» осуществляется путем замены: $A^f \rightarrow A^f$, $\Delta A^f \rightarrow -\Delta A^f$, $g_V^f \rightarrow g_V^f$ и $g_A^f \rightarrow -g_A^f$ (что эквивалентно $g_L^f \leftrightarrow g_R^f$).

Сечения некогерентного рассеяния (П.183) и (П.184) приобретают вид

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\nu}}{dT_A} = & \frac{G_F^2 m_A}{2\pi} \sum_{f=p,n} \hat{F}_f(q^2) \left\{ A^f \left[\left(2 \left(1 - \frac{ys}{s-m^2} \right) + y^2 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + y \frac{4m^2}{s-m^2} \right) (g_A^f)^2 + g_A^f g_V^f 2y(2-y) + \left(2 \left(1 - \frac{ys}{s-m^2} \right) + y^2 \right) (g_V^f)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \Delta A^f \left[2g_V^f - y \frac{s+m^2}{s-m^2} (g_V^f - g_A^f) \right] \left[yg_V^f + g_A^f(2-y) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\bar{\nu}}}{dT_A} = & \frac{G_F^2 m_A}{2\pi} \sum_{f=p,n} \hat{F}_f(q^2) \left\{ A^f \left[\left(2 \left(1 - \frac{ys}{s-m^2} \right) + y^2 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + y \frac{4m^2}{s-m^2} \right) (g_A^f)^2 - g_A^f g_V^f 2y(2-y) + \left(2 \left(1 - \frac{ys}{s-m^2} \right) + y^2 \right) (g_V^f)^2 \right] - \right. \\ & \left. - \Delta A^f \left[2g_V^f - y \frac{s+m^2}{s-m^2} (g_V^f + g_A^f) \right] \left[yg_V^f - g_A^f(2-y) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Полученные формулы для сечений некогерентного (анти)нейтрино-ядерного рассеяния (в терминах g_V^f и g_A^f) не выглядят предпочтительнее приведенных ранее формул (П.183) и (П.184).

Выражение (П.183) для сечения некогерентного рассеяния нейтрино на ядре с точностью до переопределения поправочного множителя g_{inc}^f , входящего в формфакторный множитель $\hat{F}_f(q^2) = g_{\text{inc}}^f(1 - |F_f(q^2)|^2)$, соответствует формуле для некогерентного νA -рассеяния (46) из работы [19].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Freedman D. Z.* Coherent Effects of a Weak Neutral Current // *Phys. Rev. D.* 1974. V. 9. P. 1389–1392.
2. *Kopeliovich V. B., Frankfurt L. L.* Isotopic and Chiral Structure of Neutral Current // *JETP Lett.* 1974. V. 19. P. 145–147.
3. *Freedman D. Z., Schramm D. N., Tubbs D. L.* The Weak Neutral Current and Its Effects in Stellar Collapse // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 1977. V. 27. P. 167–207.
4. *Gaponov Yu. V., Tikhonov V. N.* Elastic Scattering of Low-Energy Neutrinos by Atomic Systems // *Yad. Fiz.* 1977. V. 26. P. 594–600.
5. *Sehgal L. M., Wanninger M.* Atomic Effects in Coherent Neutrino Scattering // *Phys. Lett. B.* 1986. V. 171. P. 107–112.

6. *Cadeddu M., Dordei F., Giunti C., Kouzakov K. A., Picciau E., Studenikin A. I.* Potentialities of a Low-Energy Detector Based on ^4He Evaporation to Observe Atomic Effects in Coherent Neutrino Scattering and Physics Perspectives. arXiv:1907.03302.
7. *Barranco J., Miranda O. G., Rashba T. I.* Probing New Physics with Coherent Neutrino Scattering off Nuclei // JHEP. 2005. V. 12. P. 021; arXiv: hep-ph/0508299.
8. *Akimov D. et al. (COHERENT Collab.).* Observation of Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering. 2017; arXiv:1708.01294.
9. *Akimov D. et al. (COHERENT Collab.).* The COHERENT Experiment at the Spallation Neutron Source. arXiv: 1509.08702.
10. *Akimov D. et al. (COHERENT Collab.).* COHERENT 2018 at the Spallation Neutron Source. arXiv:1803.09183.
11. *Akimov D. et al. (COHERENT Collab.).* COHERENT Collaboration Data Release from the First Observation of Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering. arXiv:1804.09459.
12. *Scholberg K. et al. (COHERENT Collab.).* Observation of Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering by COHERENT // PoS. 2018. V. NuFact2017. P. 020; arXiv:1801.05546.
13. *Akimov D. et al. (COHERENT Collab.).* Observation of Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering // Science. 2017. V. 357(6356). P. 1123–1126.
14. *Collar J. I., Fields N. E., Hai M., Hossbach T. W., Orrell J. L., Overman C. T., Perumpilly G., Scholz B.* Coherent Neutrino–Nucleus Scattering Detection with a CsI[Na] Scintillator at the SNS Spallation Source // Nucl. Instr. Meth. A. 2015. V. 773. P. 56–65; arXiv: 1407.7524.
15. *Akimov D. et al. (CSI Collab.).* Coherent Scattering Investigations at the Spallation Neutron Source: A Snowmass White Paper // Proc. 2013 Community Summer Study on the Future of U. S. Particle Physics: Snowmass on the Mississippi (CSS2013), Minneapolis, MN, USA, July 29 – August 6, 2013; arXiv:1310.0125. 2013.
16. *Bolozdynya A. et al.* Opportunities for Neutrino Physics at the Spallation Neutron Source: A White Paper. arXiv:1211.5199.
17. *Scholberg K.* Prospects for Measuring Coherent Neutrino–Nucleus Elastic Scattering at a Stopped-Pion Neutrino Source // Phys. Rev. D. 2006. V. 73. P. 033005; arXiv: hep-ex/0511042.
18. *Akimov D. et al. (COHERENT Collab.).* First Detection of Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering on Argon. arXiv: 2003.10630.
19. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* Coherency and Incoherency in Neutrino–Nucleus Elastic and Inelastic Scattering // Phys. Rev. D. 2018. V. 98, No. 5. P. 053004; arXiv:1806.08768.
20. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* On Coherent Neutrino and Antineutrino Scattering off Nuclei // Phys. Part. Nucl. Lett. 2019. V. 16, No. 6. P. 638–646; arXiv:1904.03119.
21. *Donnelly T. W., Walecka J. D.* Electron Scattering and Nuclear Structure // Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 1975. V. 25. P. 329–405.
22. *Bernabeu J.* Low-Energy Elastic Neutrino–Nucleon and Nuclear Scattering and Its Relevance for Supernova. CERN-TH-2073. 1975.
23. *Amanik P. S., McLaughlin G. C.* Neutron Form-Factor from Neutrino–Nucleus Coherent Elastic Scattering. arXiv:0707.4191.

24. *Horowitz C. J., Coakley K. J., McKinsey D. N.* Supernova Observation via Neutrino–Nucleus Elastic Scattering in the CLEAN Detector // *Phys. Rev. D.* 2003. V. 68. P. 023005; arXiv: astro-ph/0302071.
25. *Engel J.* Nuclear Form-Factors for the Scattering of Weakly Interacting Massive Particles // *Phys. Lett. B.* 1991. V. 264. P. 114–119.
26. *Amanik P. S., McLaughlin G. C.* Nuclear Neutron Form-Factor from Neutrino Nucleus Coherent Elastic Scattering // *J. Phys. G.* 2009. V. 36. P. 015105.
27. *Akhmedov E., Arcadi G., Lindner M., Vogl S.* Coherent Scattering and Macroscopic Coherence: Implications for Neutrino, Dark Matter and Axion Detection // *JHEP.* 2018. V. 10. P. 045; arXiv:1806.10962.
28. *Gaponov Yu. V., Dobrynin Yu. L., Tikhonov V. N.* Neutrino and Anti-Neutrino Scattering on Hydrogen-Like Atom // *Yad. Fiz.* 1975. V. 22. P. 328–334.
29. *Weber J.* Gravitons, Neutrinos, and Anti-Neutrinos // *Found. Phys.* 1984. V. 14. P. 1185–1209.
30. *Weber J.* Method for Observation of Neutrinos and Antineutrinos // *Phys. Rev. C.* 1985. V. 31. P. 1468–1475.
31. *Weber J.* Apparent Observation of Abnormally Large Coherent Scattering Cross-Sections Using keV and MeV Range Anti-Neutrinos, and Solar Neutrinos // *Phys. Rev. D.* 1988. V. 38. P. 32–39.
32. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* *Electrodynamics of Continuous Media.* V. 8, Secs. 124 and 125. Second ed. Revised and Enlarged by E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevsky. Pergamon Press, 1984.
33. *Smith P. F.* Coherent Neutrino Scattering — Relativistic and Nonrelativistic // *Nuovo Cim. A.* 1984. V. 83. P. 263–274.
34. *Kerman S., Sharma V., Deniz M., Wong H. T., Chen J. W., Li H. B., Lin S. T., Liu C.-P., Yue Q. (TEXONO Collab.).* Coherency in Neutrino–Nucleus Elastic Scattering // *Phys. Rev. D.* 2016. V. 93, No. 11. P. 113006; arXiv:1603.08786.
35. *Papoulias D. K., Kosmas T. S.* Standard and Nonstandard Neutrino–Nucleus Reactions Cross Sections and Event Rates to Neutrino Detection Experiments // *Adv. High Energy Phys.* 2015. V. 2015. P. 763648; arXiv:1502.02928.
36. *Papoulias D. K., Kosmas T. S.* Nuclear Aspects of Neutral Current Non-Standard ν -Nucleus Reactions and the Role of the Exotic $\mu^- \rightarrow e^-$ Transitions Experimental Limits // *Phys. Lett. B.* 2014. V. 728. P. 482–488; arXiv:1312.2460.
37. *Vogel P., Engel J.* Neutrino Electromagnetic Form-Factors // *Phys. Rev. D.* 1989. V. 39. P. 3378.
38. *Peskin M. E., Schroeder D. V.* *An Introduction to Quantum Field Theory.* Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
39. *Bilenky S. M.* *Introduction to Feynman Diagrams and Electroweak Interactions Physics.* Gif-sur-Yvette, France, 1995. P. 1–365.
40. *Drukier A., Stodolsky L.* Principles and Applications of a Neutral Current Detector for Neutrino Physics and Astronomy // *Phys. Rev. D.* 1984. V. 30. P. 2295.
41. *Patton K., Engel J., McLaughlin G. C., Schunck N.* Neutrino–Nucleus Coherent Scattering as a Probe of Neutron Density Distributions // *Phys. Rev. C.* 2012. V. 86. P. 024612; arXiv:1207.0693.

42. *Jachowicz N., Heyde K., Rombouts S.* Many Body Description of Neutrino Nucleus Interactions // Nucl. Phys. A. 2001. V. 688. P. 593–595.
43. *Divari P. C., Chasioti V. C., Kosmas T. S.* Neutral Current Neutrino-Mo-98 Reaction Cross Sections at Low and Intermediate Energies // Phys. Scripta. 2010. V. 82. P. 065201.
44. *McLaughlin G.* Theory and Phenomenology of Coherent Neutrino–Nucleus Scattering // AIP Conf. Proc. 2015. V. 1666. P. 160001.
45. *Vergados J. D., Avignone F. T., III, Giomataris I.* Coherent Neutral Current Neutrino–Nucleus Scattering at a Spallation Source: A Valuable Experimental Probe // Phys. Rev. D. 2009. V. 79. P. 113001; arXiv:0902.1055.
46. *Papavassiliou J., Bernabeu J., Passera M.* Neutrino–Nuclear Coherent Scattering and the Effective Neutrino Charge Radius // PoS 2006. V. HEP2005. P. 192; arXiv: hep-ph/0512029.
47. *Divari P. C.* Coherent and Incoherent Neutral Current Scattering for Supernova Detection // Adv. High Energy Phys. 2012. V. 2012. P. 379460.
48. *Belov V. V. et al.* Investigation of Neutrino Properties with the Low-Background Germanium Spectrometer Gemma-III // JINR Program Advisory Committee 2018. Dubna, 2017.
49. *Barker D., Mei D. M.* Germanium Detector Response to Nuclear Recoils in Searching for Dark Matter // Astropart. Phys. 2012. V. 38. P. 1–6; arXiv:1203.4620.
50. *Belov V. et al.* The NuGeN Experiment at the Kalinin Nuclear Power Plant // J. Instrum. 2015. V. 10, No. 12. P. P12011.
51. *Agnes P. et al. (DarkSide Collab.).* Low-Mass Dark Matter Search with the DarkSide-50 Experiment. arXiv:1802.06994.
52. *Piekarewicz J., Linero A. R., Giuliani P., Chicken E.* Power of Two: Assessing the Impact of a Second Measurement of the Weak-Charge Form-Factor of ^{208}Pb // Phys. Rev. C. 2016. V. 94, No. 3. P. 034316; arXiv:1604.07799.
53. *Helm R. H.* Inelastic and Elastic Scattering of 187-MeV Electrons from Selected Even–Even Nuclei // Phys. Rev. 1956. V. 104. P. 1466–1475.
54. *Cadeddu M., Dordei F.* Reinterpreting the Weak Mixing Angle from Atomic Parity Violation in View of the Cs Neutron RMS Radius Measurement from COHERENT // Phys. Rev. D. 2019. V. 99, No. 3. P. 033010; arXiv:1808.10202.
55. *Bæhm C., Cerdeño D. G., Machado P. A. N., Campo A. O.-D., Reid E.* How High Is the Neutrino Floor? // JCAP. 2019. V. 1901. P. 043; arXiv:1809.06385.
56. *Brdar V., Rodejohann W., Xu X.-J.* Producing a New Fermion in Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering: From Neutrino Mass to Dark Matter // JHEP. 2018. V. 12. P. 024; arXiv:1810.03626.
57. *Cadeddu M., Giunti C., Kouzakov K. A., Li Y. F., Studenikin A. I., Zhang Y. Y.* Neutrino Charge Radii from COHERENT Elastic Neutrino–Nucleus Scattering // Phys. Rev. D. 2018. V. 98, No. 11. P. 113010; arXiv:1810.05606.
58. *Millar A., Raffelt G., Stodolsky L., Vitagliano E.* Neutrino Mass from Bremsstrahlung Endpoint in Coherent Scattering on Nuclei // Phys. Rev. D. 2018. V. 98, No. 12. P. 123006; arXiv:1810.06584.
59. *Altmannshofer W., Tammaro M., Zupan J.* Non-Standard Neutrino Interactions and Low Energy Experiments. arXiv:1812.02778.

60. *Blanco C., Hooper D., Machado P.* Constraining Sterile Neutrino Interpretations of the LSND and MiniBooNE Anomalies with Coherent Neutrino Scattering Experiments. arXiv:1901.08094.
61. *Aristizabal Sierra D., Liao J., Marfatia D.* Impact of Form-Factor Uncertainties on Interpretations of Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering Data. arXiv:1902.07398.
62. *Huang X.-R., Chen L.-W.* Neutron Skin in CsI and Low-Energy Effective Weak Mixing Angle from COHERENT Data. arXiv:1902.07625.
63. *Miranda O. G., Sanchez Garcia G., Sanders O.* Testing New Physics with Future COHERENT Experiments. arXiv:1902.09036.
64. *Papoulias D. K., Kosmas T. S., Sahu R., Kota V. K. B., Hota M.* Constraining Nuclear Physics Parameters with Current and Future COHERENT Data. arXiv:1903.03722.
65. *Donnelly T., Peccei R.* Neutral Current Effects in Nuclei // *Phys. Rep.* 1979. V. 50. P. 1.
66. *Collar J. I., Kavner A. R. L., Lewis C. M.* Response of CsI[Na] to Nuclear Recoils: Impact on Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering (CE ν NS). arXiv:1907.04828.
67. *Papoulias D. K.* COHERENT Constraints after the Chicago-3 Quenching Factor Measurement. arXiv:1907.11644.
68. *Khan A. N., Rodejohann W.* New Physics from COHERENT Data with Improved Quenching Factors. arXiv:1907.12444.
69. *Naumov D. V., Naumov V. A.* A Diagrammatic Treatment of Neutrino Oscillations // *J. Phys. G.* 2010. V. 37. P. 105014; arXiv:1008.0306.
70. *Naumov D. V.* On the Theory of Wave Packets // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2013. V. 10. P. 642–650; arXiv:1309.1717.
71. *Karlovets D.* Scattering of Wave Packets with Phases // *JHEP.* 2017. V. 03. P. 049; arXiv:1611.08302.
72. *Wilson J. R.* Coherent Neutrino Scattering and Stellar Collapse // *Phys. Rev. Lett.* 1974. V. 32. P. 849–852.
73. *Rombouts S., Heyde K.* Calculation of Neutrino Nucleus Scattering Cross-Sections Relevant for Supernova Processes // *Nucl. Phys. A.* 1997. V. 621. P. 371C–374C.
74. *O'Connor E. P., Couch S. M.* Two Dimensional Core-Collapse Supernova Explosions Aided by General Relativity with Multidimensional Neutrino Transport // *Astrophys. J.* 2018. V. 854, No. 1. P. 63; arXiv:1511.07443.
75. *Giomataris Y., Vergados J. D.* A Network of Neutral Current Spherical TPC's for Dedicated Supernova Detection // *Phys. Lett. B.* 2006. V. 634. P. 23–29; arXiv: hep-ex/0503029.
76. *Vergados J. D., Giomataris Y.* Neutral Current Coherent Cross-Sections. Implications on Detecting SN and Earth Neutrinos with Gaseous Spherical TPC // *Intern. J. Mod. Phys. E.* 2017. V. 26, No. 01–02. P. 1740030; arXiv:1603.03966.
77. *Divari P. C., Galanopoulos S., Souliotis G. A.* Coherent Scattering of Neutral-Current Neutrinos as a Probe for Supernova Detection // *J. Phys. G.* 2012. V. 39. P. 095204.
78. *Lykasov G. I., Bednyakov V. A.* Neutrino–Nucleus Interactions at Low Energies within Fermi-Liquid Theory // *Phys. Rev. C.* 2007. V. 76. P. 014622; arXiv: nucl-th/0703036.

79. Pirinen P., Suhonen J., Ydrefors E. Neutral-Current Neutrino–Nucleus Scattering off Xe Isotopes. arXiv:1804.08995.
80. Coraggio L., De Angelis L., Fukui T., Gargano A., Itaco N. Calculation of Gamow–Teller and Two-Neutrino Double- β Decay Properties for ^{130}Te and ^{136}Xe with a Realistic Nucleon–Nucleon Potential // Phys. Rev. C. 2017. V. 95, No. 6. P. 064324; arXiv:1703.05087.
81. Helm R. H. Inelastic and Elastic Scattering of 187-MeV Electrons from Selected Even–Even Nuclei // Phys. Rev. 1956. V. 104. P. 1466–1475.
82. Sprung D. W. L., Martorell J. The Symmetrized Fermi Function and Its Transforms // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. V. 30. P. 6525–6534.
83. Klein S., Nystrand J. Exclusive Vector Meson Production in Relativistic Heavy Ion Collisions // Phys. Rev. C. 1999. V. 60. P. 014903; arXiv: hep-ph/9902259.
84. Cadeddu M., Giunti C., Li Y. F., Zhang Y. Average CsI Neutron Density Distribution from COHERENT Data. arXiv:1710.02730.
85. Ciuffoli E. Measuring the Neutron Distribution from Coherent Elastic Neutrino Nucleus Scattering // Prospects in Neutrino Physics (NuPhys2018), London, Dec. 19–21, 2018; arXiv:1903.12120. 2019.
86. Sick I. Proton Charge Radius from Electron Scattering // Atoms. 2018. V. 6, No. 1. P. 2; arXiv:1801.01746.
87. Baldo M., Burgio G. F. The Nuclear Symmetry Energy // Prog. Part. Nucl. Phys. 2016. V. 91. P. 203–258; arXiv:1606.08838.
88. Cadeddu M., Dordei F., Giunti C., Li Y. F., Zhang Y. Y. Neutrino, Electroweak and Nuclear Physics from COHERENT Elastic Neutrino–Nucleus Scattering with Refined Quenching Factor. arXiv:1908.06045.
89. Giusti C., Ivanov M. V. Neutral Current Neutrino–Nucleus Scattering. Theory. arXiv:1908.08603.
90. Payne C. G., Bacca S., Hagen G., Jiang W., Papenbrock T. Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering on ^{40}Ar from First Principles. arXiv:1908.09739.
91. Bernabei R. et al. First Model Independent Results from DAMA/LIBRA-Phase2 // Universe. 2018. V. 4, No. 11. P. 116; arXiv:1805.10486 (Nucl. Phys. Atom. Energy. 2018. V. 19, No. 4. P. 307).
92. Bernabei R. et al. Improved Model-Dependent Corollary Analyses after the First Six Annual Cycles of DAMA/LIBRA-Phase2. arXiv:1907.06405.
93. Billard J., Strigari L., Figueroa-Feliciano E. Implication of Neutrino Backgrounds on the Reach of Next Generation Dark Matter Direct Detection Experiments // Phys. Rev. D. 2014. V. 89, No. 2. P. 023524; arXiv:1307.5458.
94. Bednyakov V. A. Is It Possible to Discover a Dark Matter Particle with an Accelerator? // Phys. Part. Nucl. 2016. V. 47, No. 5. P. 711–774; arXiv:1505.04380.
95. Gutlein A. et al. Impact of Coherent Neutrino–Nucleus Scattering on Direct Dark Matter Searches Based on CaWO_4 Crystals // Astropart. Phys. 2015. V. 69. P. 44–49; arXiv:1408.2357.
96. Anderson A. J., Conrad J. M., Figueroa-Feliciano E., Scholberg K., Spitz J. Coherent Neutrino Scattering in Dark Matter Detectors // Phys. Rev. D. 2011. V. 84. P. 013008; arXiv:1103.4894.

97. *deNiverville P., Pospelov M., Ritz A.* Light New Physics in Coherent Neutrino–Nucleus Scattering Experiments // *Phys. Rev. D.* 2015. V.92, No.9. P.095005; arXiv:1505.07805.
98. *Ge S.-F., Shoemaker I.M.* Constraining Photon Portal Dark Matter with TEXONO and COHERENT Data. arXiv:1710.10889.
99. *Giunti C., Studenikin A.* Neutrino Electromagnetic Interactions: A Window to New Physics // *Rev. Mod. Phys.* 2015. V. 87. P. 531; arXiv:1403.6344.
100. *Kouzakov K.A., Studenikin A.I.* Electromagnetic Properties of Massive Neutrinos in Low-Energy Elastic Neutrino–Electron Scattering // *Phys. Rev. D.* 2017. V. 95, No.5. P.055013; arXiv:1703.00401; Erratum // *Phys. Rev. D.* 2017. V.96, No.9. P.099904.
101. *Papoulias D.K., Kosmas T.S.* COHERENT Constraints to Conventional and Exotic Neutrino Physics // *Phys. Rev. D.* 2018. V.97, No.3. P.033003; arXiv:1711.09773.
102. *Novales-Sanchez H., Rosado A., Santiago-Olan V., Toscano J.J.* Effects of Physics beyond the Standard Model on the Neutrino Charge Radius: An Effective Lagrangian Approach // *Phys. Rev. D.* 2008. V.78. P.073014; arXiv:0805.4177.
103. *Anderson A.J., Conrad J.M., Figueroa-Feliciano E., Ignarra C., Karagiorgi G., Scholberg K., Shaevitz M.H., Spitz J.* Measuring Active-to-Sterile Neutrino Oscillations with Neutral Current Coherent Neutrino–Nucleus Scattering // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 86. P.013004; arXiv:1201.3805.
104. *Miranda O.G., Papoulias D.K., Tórtola M., Valle J.W.F.* Probing Neutrino Transition Magnetic Moments with Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering. arXiv:1905.03750.
105. *Shrock R.E.* Electromagnetic Properties and Decays of Dirac and Majorana Neutrinos in a General Class of Gauge Theories // *Nucl. Phys. B.* 1982. V.206. P.359–379.
106. *Grimus W., Maltoni M., Schwetz T., Tórtola M.A., Valle J.W.F.* Constraining Majorana Neutrino Electromagnetic Properties from the LMA-MSW Solution of the Solar Neutrino Problem // *Nucl. Phys. B.* 2003. V. 648. P.376–396; arXiv: hep-ph/0208132.
107. *Dutta B., Liao S., Sinha S., Strigari L.E.* Searching for beyond the Standard Model Physics with COHERENT Energy and Timing Data. arXiv:1903.10666.
108. *Kosmas T.S., Miranda O.G., Papoulias D.K., Tórtola M., Valle J.W.F.* Probing Neutrino Magnetic Moments at the Spallation Neutron Source Facility // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 92, No.1. P.013011; arXiv:1505.03202.
109. *Kosmas T.S., Miranda O.G., Papoulias D.K., Tórtola M., Valle J.W.F.* Sensitivities to Neutrino Electromagnetic Properties at the TEXONO Experiment // *Phys. Lett. B.* 2015. V. 750. P.459–465; arXiv:1506.08377.
110. *Tanabashi M. et al. (Particle Data Group Collab.).* Review of Particle Physics // *Phys. Rev. D.* 2018. V.98, No.3. P.030001.
111. *Billard J., Johnston J., Kavanagh B.J.* Prospects for Exploring New Physics in Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering. arXiv:1805.01798.
112. *Canas B.C., Garcés E.A., Miranda O.G., Tórtola M., Valle J.W.F.* The Weak Mixing Angle from Low Energy Neutrino Measurements: A Global Update // *Phys. Lett. B.* 2016. V. 761. P.450–455; arXiv:1608.02671.

113. *Canas B. C., Garces E. A., Miranda O. G., Parada A.* Future Perspectives for a Weak Mixing Angle Measurement in Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering Experiments. arXiv:1806.01310.
114. *Arcadi G., Lindner M., Martins J., Queiroz F. S.* New Physics Probes: Atomic Parity Violation, Polarized Electron Scattering and Neutrino–Nucleus Coherent Scattering. arXiv:1906.04755.
115. *Esteban I., Gonzalez-Garcia M. C., Maltoni M., Martinez-Soler I., Salvado J.* Updated Constraints on Non-Standard Interactions from Global Analysis of Oscillation Data. arXiv:1805.04530.
116. *Dent J. B., Dutta B., Liao S., Newstead J. L., Strigari L. E., Walker J. W.* Accelerator and Reactor Complementarity in Coherent Neutrino Scattering. arXiv:1711.03521.
117. *Abdullah M., Dent J. B., Dutta B., Kane G. L., Liao S., Strigari L. E.* Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering ($CE\nu NS$) as a Probe of Z' through Kinetic and Mass Mixing Effects. arXiv:1803.01224.
118. *Liao J., Marfatia D.* COHERENT Constraints on Nonstandard Neutrino Interactions. arXiv:1708.04255.
119. *Aristizabal Sierra D., De Romeri V., Rojas N.* COHERENT Analysis of Neutrino Generalized Interactions. arXiv:1806.07424.
120. *Farzan Y., Tórtola M.* Neutrino Oscillations and Non-Standard Interactions // *Front. Phys.* 2018. V. 6. P. 10; arXiv:1710.09360.
121. *Lindner M., Rodejohann W., Xu X.-J.* Coherent Neutrino–Nucleus Scattering and New Neutrino Interactions // *JHEP.* 2017. V. 03. P. 097; arXiv:1612.04150.
122. *Farzan Y., Lindner M., Rodejohann W., Xu X.-J.* Probing Neutrino Coupling to a Light Scalar with Coherent Neutrino Scattering // *JHEP.* 2018. V. 05. P. 066; arXiv:1802.05171.
123. *Hakenmuller J. et al.* Neutron-Induced Background in the CONUS Experiment. arXiv:1903.09269.
124. *Denton P. B., Farzan Y., Shoemaker I. M.* A Plan to Rule Out Large Non-Standard Neutrino Interactions after COHERENT Data. arXiv:1804.03660.
125. *Aristizabal Sierra D., De Romeri V., Rojas N.* CP Violating Effects in Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering Processes. arXiv:1906.01156.
126. *Giunti C.* General COHERENT Constraints on Neutrino Nonstandard Interactions // *Phys. Rev. D.* 2020. V. 101, No. 3. P. 035039; arXiv:1909.00466.
127. *Parada A.* Constraints on Neutrino Electric Millicharge from Experiments of Elastic Neutrino–Electron Interaction and Future Experimental Proposals Involving Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering. arXiv:1907.04942.
128. *Canas B., Garces E., Miranda O., Parada A., Sanchez Garcia G.* Interplay between Nonstandard and Nuclear Constraints in Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering Experiments // *Phys. Rev. D.* 2020. V. 101, No. 3. P. 035012; arXiv:1911.09831.
129. *Dutta B., Lang R. F., Liao S., Sinha S., Strigari L., Thompson A.* A Global Analysis Strategy to Resolve Neutrino NSI Degeneracies with Scattering and Oscillation Data. arXiv:2002.03066.
130. *Chang W.-F., Liao J.* Constraints on Light Singlet Fermion Interactions from Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering. arXiv:2002.10275.

131. *Miranda O., Papoulias D., Tórtola M., Valle J.* Probing New Neutral Gauge Bosons with $CE\nu NS$ and Neutrino–Electron Scattering // *Phys. Rev. D.* 2020. V. 101, No. 7. P. 073005; arXiv: 2002.01482.
132. *Flores L., Nath N., Peinado E.* Non-Standard Neutrino Interactions in $U(1)'$ Model after COHERENT Data. arXiv: 2002.12342.
133. *Abdullah M., Aristizabal Sierra D., Dutta B., Strigari L. E.* Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering with Directional Detectors. arXiv: 2003.11510.
134. *Miranda O., Papoulias D., Garcia G. S., Sanders O., Tórtola M., Valle J.* Implications of the First Detection of Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering ($CE\nu NS$) with Liquid Argon. arXiv: 2003.12050.
135. *Cadeddu M., Dordei F., Giunti C., Li Y., Picciau E., Zhang Y.* Physics Results from the First COHERENT Observation of $CE\nu NS$ in Argon and Their Combination with Cesium–Iodide Data. arXiv: 2005.01645.
136. *Li T., Ma X.-D., Schmidt M. A.* Generic Neutrino Interactions with Sterile Neutrinos in Light of Neutrino–Nucleus Coherent Scattering and Meson Invisible Decays. arXiv: 2005.01543.
137. *Coloma P., Esteban I., Gonzalez-Garcia M., Menendez J.* Determining the Nuclear Neutron Distribution from Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering: Current Results and Future Prospects // *JHEP.* 2020. V. 08, No. 08. P. 030; arXiv: 2006.08624.
138. *Neog H., Mahapatra R., Mirabolfathi N., Platt M., Jastram A., Agnolet G., Kubik A., Chen H., Mohanty B.* Phonon-Mediated High-Voltage Detector with Background Rejection for Low-Mass Dark Matter and Reactor Coherent Neutrino Scattering Experiments. arXiv: 2006.13139.
139. *Van Dessel N., Pandey V., Ray H., Jachowicz N.* Nuclear Structure Physics in Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering. arXiv: 2007.03658.
140. *Hofrichter M., Menéndez J., Schwenk A.* Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering: EFT Analysis and Nuclear Responses. arXiv: 2007.08529.
141. *Skiba W., Xia Q.* Electroweak Constraints from the COHERENT Experiment. arXiv: 2007.15688.
142. *Miranda O., Papoulias D., Sanders O., Tórtola M., Valle J.* Future $CE\nu NS$ Experiments as Probes of Lepton Unitarity and Light-Sterile Neutrinos. arXiv: 2008.02759.
143. *Cadeddu M., Cargioli N., Dordei F., Giunti C., Li Y., Picciau E., Zhang Y.* Constraints on Light Vector Mediators through Coherent Elastic Neutrino Nucleus Scattering Data from COHERENT. arXiv: 2008.05022.
144. *Denton P. B., Gehrlein J.* A Statistical Analysis of the COHERENT Data and Applications to New Physics. arXiv: 2008.06062.
145. *Qian X., Peng J.-C.* Physics with Reactor Neutrinos // *Rep. Prog. Phys.* 2019. V. 82, No. 3. P. 036201; arXiv: 1801.05386.
146. *Sinatkas J., Tsaktsara V., Kosmas O.* Simulated Neutrino Signals of Low and Intermediate Energy Neutrinos on Cd Detectors. arXiv: 1904.01056.
147. *Carneiro M. F.* Neutrino Cross Sections: Status and Prospects // *Proc. of Conf. “Prospects in Neutrino Physics” (NuPhys2017), London, Dec. 20–22, 2017.* P. 13–22. arXiv: 1804.03238.

148. *Mahn K., Marshall C., Wilkinson C.* Progress in Measurements of 0.1–10 GeV Neutrino–Nucleus Scattering and Anticipated Results from Future Experiments // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2018. V. 68. P. 105–129; arXiv:1803.08848.
149. *Baxter D. et al.* Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering at the European Spallation Source // *JHEP.* 2020. V. 02. P. 123; arXiv:1911.00762.
150. *Wong H. T., Li H.-B., Li J., Yue Q., Zhou Z.-Y.* Research Program towards Observation of Neutrino–Nucleus Coherent Scattering // *J. Phys. Conf. Ser.* 2006. V. 39. P. 266–268; arXiv: hep-ex/0511001.
151. *Wong H. T.* Neutrino–Nucleus Coherent Scattering and Dark Matter Searches with Sub-keV Germanium Detector // *Nucl. Phys. A.* 2010. V. 844. P. 229C–233C.
152. *Akimov D. Yu. et al. (RED Collab.).* Prospects for Observation of Neutrino–Nuclear Neutral Current Coherent Scattering with Two-Phase Xenon Emission Detector // *J. Instrum.* 2013. V. 8. P. P10023; arXiv:1212.1938.
153. *Akimov D. Yu. et al.* The RED-100 Two-Phase Emission Detector // *Instrum. Exp. Tech.* 2017. V. 60, No. 2. P. 175–181.
154. *Kopylov A. V., Orekhov I. V., Petukhov V. V., Solomatin A. E.* Gaseous Detector of Ionizing Radiation for Registration of Coherent Neutrino Scattering on Nuclei // *Tech. Phys. Lett.* 2014. V. 40, No. 3. P. 185–187.
155. *Formaggio J. A., Figueroa-Feliciano E., Anderson A. J.* Sterile Neutrinos, Coherent Scattering and Oscillometry Measurements with Low-Temperature Bolometers // *Phys. Rev. D.* 2012. V. 85. P. 013009; arXiv:1107.3512.
156. *Brice S. J. et al.* A Method for Measuring Coherent Elastic Neutrino–Nucleus Scattering at a Far Off-Axis High-Energy Neutrino Beam Target // *Phys. Rev. D.* 2014. V. 89, No. 7. P. 072004; arXiv:1311.5958.
157. *Fernandez Moroni G., Estrada J., Paolini E. E., Cancelo G., Tiffenberg J., Molina J.* Charge Coupled Devices for Detection of Coherent Neutrino–Nucleus Scattering // *Phys. Rev. D.* 2015. V. 91, No. 7. P. 072001; arXiv:1405.5761.
158. *Aguilar-Arevalo A. et al. (CONNIE Collab.).* The CONNIE Experiment // *J. Phys. Conf. Ser.* 2016. V. 761, No. 1. P. 012057; arXiv:1608.01565.
159. *Aguilar-Arevalo A. et al. (CONNIE Collab.).* Exploring Low-Energy Neutrino Physics with the Coherent Neutrino–Nucleus Interaction Experiment (CONNIE). arXiv:1906.02200.
160. *Billard J. et al.* Coherent Neutrino Scattering with Low Temperature Bolometers at Chooz Reactor Complex // *J. Phys. G.* 2017. V. 44, No. 10. P. 105101; arXiv:1612.09035.
161. *Strauss R. et al.* The ν -Cleus Experiment: A Gram-Scale Fiducial-Volume Cryogenic Detector for the First Detection of Coherent Neutrino–Nucleus Scattering // *Eur. Phys. J. C.* 2017. V. 77. P. 506; arXiv:1704.04320.
162. *Oberauer L.* Coherent Neutrino–Nucleus Scattering // *Prog. Part. Nucl. Phys.* 2002. V. 48. P. 301–304.
163. *Fallows S., Kozynets T., Krauss C. B.* Sensitivity of the PICO-500 Bubble Chamber to Supernova Neutrinos through Coherent Nuclear Elastic Scattering. arXiv:1806.01417.
164. *Agnolet G. et al. (MINER Collab.).* Background Studies for the MINER Coherent Neutrino Scattering Reactor Experiment // *Nucl. Instr. Meth. A.* 2017. V. 853. P. 53–60; arXiv:1609.02066.

165. *Sangiorgio S., Bernstein A., Coleman J., Foxe M., Haggmann C., Joshi T.H., Jovanovic I., Kazkaz K., Movrokoridis K., Pereverzev S.* R&D for the Observation of Coherent Neutrino–Nucleus Scattering at a Nuclear Reactor with a Dual-Phase Argon Ionization Detector // *Phys. Procedia*. 2012. V. 37. P. 1266–1272.
166. *Lindner M.* The CONUS Coherent Neutrino Scattering Experiment. Talk at Conf. on Neutrino and Nuclear Physics, Catania, Oct. 15–20, 2017.
167. *Bellenghi C., Chiesa D., Di Noto L., Pallavicini M., Previtali E., Vignati M.* Coherent Elastic Nuclear Scattering of ^{51}Cr Neutrinos. arXiv:1905.10611.
168. *Arnaud Q. et al. (EDELWEISS Collab.)*. Optimizing EDELWEISS Detectors for Low-Mass WIMP Searches // *Phys. Rev. D*. 2018. V.97, No.2. P.022003; arXiv:1707.04308.
169. *Armengaud Q. et al. (EDELWEISS Collab.)*. Searching for Low-Mass Dark Matter Particles with a Massive Ge Bolometer Operated above Ground // *Phys. Rev. D*. 2019. V. 99, No. 8. P. 082003; arXiv:1901.03588.
170. *Lewis R.R.* Coherent Detector for Low-Energy Neutrinos // *Phys. Rev. D*. 1980. V. 21. P. 663.
171. *Bilenky S.* Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos // *Lect. Notes Phys.* 2018. V. 947. P. 1–273.