

## ПОЛИНОМЫ УЗЛОВ ИЗ $\mathcal{R}$ -МАТРИЦ: ЗАЧЕМ ТАКАЯ МАТЕМАТИКА?

А. С. Анохина

Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова  
Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

Этот текст — продолжение обзора «Полиномы узлов из  $\mathcal{R}$ -матриц: при чем здесь физика?» (ЭЧАЯ. 2020. Т. 51. С. 223). Мы продолжаем обсуждать основы популярного сюжета современной математической физики: описание узлов с помощью  $\mathcal{R}$ -матричных полиномов. Обсудив физический контекст, мы теперь сосредоточимся на математическом аппарате, в котором переплетаются топология, теория интегрируемых систем и теория представлений квантовых групп. Текст задуман как введение в предмет для всех интересующихся данной темой.

This text is a sequel of the review “The knot polynomials from the  $\mathcal{R}$ -matrices: where is physics?” (Phys. Part. Nucl. 2020. V. 51. P. 172). We continue discussing the bases of such popular subject of the modern mathematical physics as describing of knots with help of the  $\mathcal{R}$ -matrix polynomials. Having described the physical context, we now concentrate on the mathematical machinery, where the topology, the theory of integrable systems, and the representation theory of quantum groups are intertwined. The text is intended to be an introduction into the subject for anyone who is interested in.

PACS: 02.20.Uw, 02.40.-k; 02.30.Ik

### ПРЕДИСЛОВИЕ

Слова *теория узлов* можно сравнить с названиями *теория чисел* или *теория поля*: они являются настолько общими, что не говорят практически ни о чем. Поэтому с самого начала следует оговориться, о какой *именно* «теории узлов» пойдет речь.

- Мы рассматриваем вполне конкретную задачу (или семейство задач): описание узлов с помощью полиномов ХОМФЛИ и родственных им инвариантов [1].

- Мы рассматриваем довольно специальный подход к этим инвариантам с помощью распространенного метода математической физики: такого как интегрирование (т. е. точное решение) бесконечной системы нелинейных уравнений с помощью  $\mathcal{R}$ -матриц [2].

• В теории инвариантов узлов находят применение довольно специальные (квантовые)  $\mathcal{R}$ -матрицы, связанные с представлениями квантовых универсальных обертывающих алгебр Ли [3, 4].

Мы также попытаемся изложить основы математических методов, в основном имея в виду два вопроса: «как это делается?» и «зачем именно так?».

С самого начала оговоримся, что часто будем жертвовать полнотой и строгостью описания, чтобы прежде всего дать представление о предмете *в целом* (на наш взгляд, именно этого не хватает в имеющейся, в том числе процитированной далее литературе). В частности, многие формулировки будут уточняться по мере их использования. Это противоречит сложившейся математической традиции — но именно так, как правило, происходит в истории науки.

## 1. УЗЛЫ И ПОЛИНОМЫ УЗЛОВ

Теперь сформулируем конкретную задачу топологии, которой посвящено основное изложение. Это очень характерная и простейшая в своем роде задача: описать пространство узлов — замкнутых кривых в трехмерном пространстве, рассмотренных с точностью до произвольных непрерывных преобразований.

Среди различных подходов к этой задаче [1, 5] нас интересуют такие, которые можно объединить общей формулировкой: ввести координаты на пространстве узлов.

Формулировка выше — довольно условная. Более строго следует говорить об изучении различных *инвариантов узлов*.

**1.1. Квантово-групповые полиномы узлов: история открытия.** *Инвариант узла* [1, 5] — это по определению величина, которая ставится в соответствие всякой замкнутой кривой в трехмерном пространстве и одинакова для всякой пары кривых, которые можно отождествить путем непрерывного преобразования. Эта величина может быть как числом — например, целым, вещественным или комплексным, так и функцией от одной или нескольких переменных (в последнем случае всякому узлу соответствует именно сама функция — с произвольными значениями аргументов).

*Квантово-групповые полиномы узлов* — это название не вполне устоявшееся, но вполне оправданное для наших целей, на которых мы сосредоточимся в настоящем тексте. Смысл названия поясняется в пп. 1.2 и 1.3 и раскрывается в разд. 3. В табл. 1 также приведен явный вид основных квантово-групповых полиномов узлов в простейших случаях. В настоящий момент все эти инварианты вычислены для огромного количества узлов и доступны в различных электронных каталогах [6]. Ниже мы дадим историческую справку об основных представителях данного класса.

Мы будем использовать обозначения простых (см. далее) узлов по таблице Рольфсена [6]:  $c_p$ , например,  $3_1, 4_1, 5_2, 8_{29}, 10_{124}$  и т. д. Здесь  $c$  — минималь-

Таблица 1. Примеры полиномов узлов

Полином	Группа	Пред- став- ление	Фор- мальные пере- менные	Пример полинома	
				Узел	Полином
Джонса	$SU(2)$	$\square$	$q$	$3_1$ «трилистник» (см. рис. 18) $4_1$ «восьмерка»	$-q^{-8} + q^{-6} + q^{-2}$  $q^4 - q^2 + 1 - q^{-2} + q^{-4}$
ХОМФЛИ	$SU(N)$	$\square$	$A, q$	$3_1$ $4_1$	$-A^{-4} + A^{-2}(q^2 + q^{-2})$ $1 + q^2(A + A^{-1}) - (q^2 + q^{-2})$
Алекса- ндера	$SU(0)$	$\square$	$q$	$3_1$ $4_1$	$q^2 - 1 + q^{-2}$ $q^2 + 1 - q^{-2}$
Кауфф- мана	$SO(N)$	$\square$	$a, q$	$3_1$	$a^2(q^2 + q^{-2}) - a^4(q^2 - 1 + q^{-2})$ $+ (-a^3 + a^5)(q - q^{-1})$
Джонса раскра- шенный	$SU(2)$	$\square\square$	$q$	$3_1$	$q^{-4} + q^{-10} - q^{-14} + q^{-16} -$ $-q^{-18} - q^{-20} + q^{-22}$

ное число перекрестков на плоской диаграмме данного узла (см. разд. 3), а индекс  $p$  можно считать просто номером по каталогу узлов с данным  $s$ . В этих обозначениях  $0_1$  — тривиальный узел, т. е. замкнутая кривая, переводимая в окружность непрерывным преобразованием в пространстве. Если завязать узлы  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$  последовательно на одной нити так, что нить можно будет перерезать между узлами, не разрушая ни один из них, а свободные концы нити соединить — получится связная узлов  $\mathcal{K}_1$  и  $\mathcal{K}_2$ , или составной узел  $\mathcal{K}_1 \# \mathcal{K}_2$  (например,  $3_1 \# 3_1$ ). Простой узел по определению не является составным, т. е. не получится как связная сумма каких-либо нетривиальных узлов [1, 5].

*Полином Александра.* Первый в классе полиномиальных инвариантов узла, он был известен уже в 1928 г. [7]. Сегодня этот инвариант считается очень грубым; тем не менее инварианты Александра различны для всех простых узлов с числом пересечений не более чем 8 — всего 36 узлов, включая тривиальный узел [8] — иными словами, инвариант Александра, вычисленный для произвольной замкнутой кривой не более чем с восемью самопересечениями на некоторой плоской проекции, однозначно определяет ее принадлежность к одному из 36 классов эквивалентности относительно произвольных непрерывных преобразований.

*Полином Джонса.* Следующий представитель того же класса, однако был открыт только в 1984 г. [9]. Этот инвариант существенно точнее, чем полином Александра и позволяет разбить все замкнутые кривые не более чем с 9

самопересечениями на (хотя бы одной) плоской проекции на 85 классов эквивалентности относительно произвольных непрерывных преобразований [1, 5]. В частности, инвариант Джонса простого узла  $6_1$  в таблице Рольфсена (6 пересечений) отличен от инварианта Джонса узла  $9_{146}$  (9 пересечений), имеющего такой же инвариант Александра. Однако узел  $10_{132}$  с 10 пересечениями имеет тот же инвариант Джонса, что и узел  $5_1$  с 5 пересечениями.

*Полином ХОМФЛИ.* Обобщение инвариантов Александра и Джонса одновременно. Его открыли почти вслед за полиномом Джонса (в 1985 г.) сразу несколько независимых групп: П. Фрейд и Д. Етгер, Д. Хост, В. Б. Р. Ликориш и К. Милле, А. Окнеану [10], а также Й. Пшитицкий и П. Трачук [11] (полное название инварианта, ХОМФЛИ — РТ, составлено из первых букв фамилий девяти первооткрывателей). Хотя инварианты ХОМФЛИ и «различают» некоторые узлы, «неразличимые» для инвариантов Джонса и Александра — например, простой узел  $8_9$  и составной узел  $4_1\#4_1$  [12] — инвариант ХОМФЛИ как индикатор топологического класса не многим точнее, чем инвариант Джонса: в частности, первая пара простых узлов с совпадающими инвариантами Джонса,  $5_1$  и  $10_{132}$ , имеет также одинаковые инварианты ХОМФЛИ. Настоящий же интерес к новому инварианту вызван совсем иными причинами — и настоящий обзор как раз посвящен таковым.

*Полином Кауфмана.* Был впервые рассмотрен вскоре после ХОМФЛИ, в 1987 г. [13]. В той же работе было отмечено, что все перечисленные инварианты узлов допускают единообразное определение с помощью статистической модели, которая по существу была первой версией обсуждаемой здесь  $\mathcal{R}$ -матричной конструкции (разд. 3).

*Раскрашенные инварианты Александра, Джонса, ХОМФЛИ и Кауфмана.* Стали следующим витком сюжета. В первых работах (см., например, [14]) раскрашенные инварианты вводились с помощью *узлов-спутников*, состоящих из нескольких, вообще говоря, переплетающихся между копий данного узла (см. подробное описание и ссылки в [15]). Инварианты всевозможных узлов-спутников данного узла образуют линейное пространство, которое, если ограничиться небольшим заданным числом копий, имеет конечную небольшую размерность, например, в случае инвариантов ХОМФЛИ: 2 для 2 копий, 3 для 3, 5 для 4, 7 для 5 — далее, однако, размерность пространства начинает стремительно возрастать. Раскрашенные инварианты узлов изначально были введены как некоторый выделенный базис в таком линейном пространстве [1].

*Раскрашенные инварианты различают узлы-мутанты.* Вероятно, самый яркий пример использования раскрашенных инвариантов, определенных через узлы-спутники, принадлежит Мортону [14], который показал, что узлы простейшей пары *мутантов*: *Киношиты–Терасаки* ( $11n42$  в таблице *Хоста–Систлевэйта* [6]) и *Конвея* ( $11n34$ ), неразличимые для простых инвариантов ХОМФЛИ и Джонса, *неразличимы* и для произвольных раскрашенных инва-

риантов Джонса, а также для раскрашенных инвариантов ХОМФЛИ узлов-спутников из двух копий данного узла. Зато уже для трех копий результат иной: трехмерное пространство полиномов ХОМФЛИ для таких спутников содержит вектор, принимающий различные значения на узлах этой пары. Таким образом, был впервые введен раскрашенный полином ХОМФЛИ со смешанной симметрией.

Явного вычисления соответствующих инвариантов работа Мортонa, правда, не содержит: такие вычисления стали доступны лишь недавно, как в этом [16], так и в более общем случаях [17] — благодаря методу  $R$ -матриц [19], которому посвящен настоящий обзор. Более того, в терминах  $R$ -матриц раскрашенные инварианты приобретают новый смысл, который мы отчасти обсудим в дальнейшем.

*Надписи в зоопарке или координаты на пространстве?* Итак, инварианты узлов являются мощным средством классификации замкнутых кривых, вложенных в трехмерное пространство, с точностью до непрерывных преобразований. Однако перечисленные полиномиальные инварианты ничем не лучше номера узла в каталоге (и даже хуже, коль скоро значения инвариантов различных узлов могут совпадать, как в примерах выше). Но все иначе, если полиномиальные инварианты позволяют связать с узлами какие-нибудь интересные новые структуры. Удивительным образом так и происходит: в 1980-е и 1990-е гг. ряд ранее известных инвариантов узлов получил альтернативное описание посредством понятий, развитых к тому моменту в рамках теории рассеяния, статистической физики и квантовой теории поля [1, 5]. «Физическим моделям узлов» посвящена первая часть настоящего обзора [18]. Вторая (данная) часть посвящена основному языку этих моделей:  $R$ -матричному формализму.

**1.2. От чего зависит инвариант узла.** Перед тем как пойти дальше, зададимся наивным, но существенным вопросом: относительно чего инвариант узла инвариантен — и от чего он в результате зависит?

Как уже было сказано, интересующие нас величины (примеры которых даны в табл. 1) зависят от замкнутой кривой в трехмерном пространстве, но не меняются при произвольных непрерывных преобразованиях этой кривой. То есть инвариант узла зависит не от самой кривой, а от ее топологического класса — узла (многочисленные примеры разных узлов см., например, в [6]). Однако все перечисленные выше величины зависят *не только от узла*. Иными словами, всякому узлу соответствует не одно число, а *функция* от нескольких дополнительных переменных, не имеющих отношения к самому узлу.

*Изучаемые величины зависят от:*

— самого узла, т. е. замкнутой кривой в пространстве, рассмотренной с точностью до непрерывных преобразований;

— одной или нескольких *формальных переменных*: здесь  $A$  и/или  $q$  либо  $\hbar$ ;

— нескольких *дополнительных* параметров, здесь: алгебра Ли  $\mathfrak{g}$  и ее представление  $Q$ .

*Формальные переменные.* Их можно рассматривать как обычные комплексные переменные: так, что вместо (например)  $A$  и  $q$  можно подставить произвольные комплексные числа, получив при этом числовые инварианты узлов. С другой стороны, обсуждаемые инварианты узлов можно представить в виде полиномов либо рядов Лорана по формальным переменным, тогда числовыми инвариантами будут коэффициенты.

*Дополнительные параметры.* Имеют более сложный смысл, который можно пояснить только в связи с конкретным определением каждого инварианта. Идея состоит в том, что инварианты, перечисленные в табл. 1 под разными названиями, можно рассматривать как значения *одной и той же* функции с различными значениями. Именно этим мы и займемся в последующих разделах. Забегая вперед, скажем, что в нашем случае дополнительные параметры естественным образом возникнут как параметры  $\mathcal{R}$ -матрицы.

*Исучаемые величины являются инвариантами* (не меняются при / не зависят от)

- непрерывных преобразований кривой;
- способа вычисления.

Последнее утверждение, хотя и выглядит тавтологией, существенно для большинства определений инвариантов узлов. В частности, все конструкции, описанные в последующих разделах, прибегают к проекции узла на плоскость — и условия независимости от выбора проекции приводят к нетривиальным уравнениям на искомые величины. При других способах вычисления [20] узел в пространстве «нарезается» на «элементарные составляющие» — и инвариант узла должен быть также инвариантом способа разрезания и склейки.

Ниже мы уточним некоторые технические подробности, существенные для дальнейшего изложения — в частности, приведем сводку выражений, на которые будем впоследствии ссылаться при вычислении инвариантов узлов.

**1.3. В каком смысле полином узла — полином?** *Полином узла — полином.* Все инварианты в табл. 1 обладают еще одним свойством [1, 5]: они являются полиномами Лорана по переменным  $A$  и/или  $q$  — при соответствующем выборе произвольного множителя, входящего в определение всех приведенных инвариантов. По этой причине упомянутые инварианты называют *полиномами*: Александера, Джонса, ХОМФЛИ, Кауффмана.

*Полином ли полином зацепления?* Сказанное выше в полной мере относится только к узлам — т. е. к однокомпонентным кривым. Для *зацеплений* неполиномиальный множитель зависит от ряда параметров и, в частности, от числа компонент зацепления, так что этот множитель невозможно положить равным 1 для всех зацеплений сразу. Тем не менее для зацеплений с данным числом компонент и для данных значений всех дискретных переменных зави-

симось инварианта зацепления от зацепления также полностью описывается полиномом Лорана [1].

*Целочисленность коэффициентов в полиноме узла.* Следующее важное свойство [1] полиномов в табл. 1 состоит в том, что коэффициенты при степенях  $A$  и  $q$  являются *целыми числами*. Это свойство далеко не случайно и является отражением более общего контекста, в котором возникают обсуждаемые здесь инварианты. А именно: абсолютные величины коэффициентов полиномов в табл. 1 возникают (в «математическом контексте») как размерности *гомологий узлов* [21] либо (в «физическом контексте») как размерности гильбертовых пространств в определенных квантово-полевых моделях [22].

*Разложение полинома узла в формальный ряд.* Наряду с переменными  $A$  и  $q$  рассматривают также переменные  $\hbar$  и  $N$ , определенные равенствами  $A = e^{i\hbar N}$ ,  $q = e^{i\hbar}$ . Тогда инварианты в табл. 1 разлагаются в ряды Лорана по переменной  $\hbar$  — причем коэффициенты рядов оказываются полиномами от  $N$  с рациональными коэффициентами. Эти коэффициенты сами по себе являются инвариантами узлов и известны как *инварианты Васильева* [23].

**1.3.1. Квантовые числа.** Явные выражения для полиномов узлов из табл. 1 часто содержат суммы последовательных четных или нечетных степеней переменной  $q$ , симметричные относительно 1. Такие суммы играют роль важных специальных функций в ряде сюжетов современной математической физики и получили название *квантовых чисел* [24].

В дальнейшем мы будем использовать определение квантового числа  $[N]_q$ :

$$[N]_q \equiv \sum_{i=1}^N q^{2i-N} = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}. \tag{1.1}$$

Квантовые числа являются полиномами Лорана по переменной  $q$  и обладают рядом свойств, которые позволяют рассматривать эти величины как обобщение обычных целых чисел. Вот примеры явных выражений:

$$\begin{aligned} [-1]_q &= \frac{q^{-1} - q}{q - q^{-1}} = -1, & [-N]_q &= -[N]_q, \\ [0]_q &= 0, & \sum_{n=1}^N [n]_q &= \frac{[N]_q [N+1]_q}{[2]_q}, \\ [1]_q &= \frac{q - q^{-1}}{q - q^{-1}} = 1, & \frac{[N-1]_q [N]_q}{[2]_q} + \frac{[N+1]_q [N]_q}{[2]_q} &= [N]_q^2, \\ [2]_q &= \frac{q^2 - q^{-2}}{q - q^{-1}} = q + q^{-1}, & \det \left\| \begin{matrix} [k+n]_q & [k+m+n]_q \\ [k]_q & [k+m]_q \end{matrix} \right\| &= [m]_q [n]_q. \\ [3]_q &= \frac{q^3 - q^{-3}}{q - q^{-1}} = q^2 + 1 + q^{-2}, & & \\ [4]_q &= \frac{q^3 - q^{-3}}{q - q^{-1}} = q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}, & & \end{aligned} \tag{1.2}$$

.....

**1.3.2. Топологические функции Шура.** Произведение самодуальных множителей по диаграмме Юнга. Инварианты из табл. 1, зависящие от двух переменных  $A$  и  $q$ , также выражаются через специальные функции более общего вида. Эти функции являются произведениями антисимметрических комбинаций вида

$$\{x\} \equiv x - x^{-1}, \tag{1.3}$$

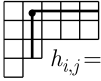
где в качестве  $x$  стоят произведения различных степеней  $A$  и  $q$ . Сами функции нумеруются *уровнями* — натуральными числами, а на каждом уровне  $n$  — *разбиениями*  $Y \vdash n = [n_1 \geq n_2 \geq \dots]$ , т. е. всевозможными способами разбить число  $n$  в сумму других натуральных чисел (без учета порядка слагаемых). Простейшие из этих функций приведены в табл. 2.

В общем случае необходимо вычислить произведение по всем клеткам диаграммы Юнга разбиения  $Y$ :

$$S_Y^*(A, q) = \prod_{(i,j) \in Y} \frac{\{Aq^{i-j}\}}{\{q^{h_{i,j}}\}}, \tag{1.4}$$

где  $(i, j)$  — координаты клетки по горизонтали (слева направо) и по вертикали (сверху вниз), а  $h_{i,j}$  — длина крюка, т. е. сумма расстояний (в единицах

Таблица 2. Простейшие топологические функции Шура

Уровни $n$	Разбиения, $Y \vdash n$		
$n = 1$	$= 1$		
Функции:	$Y = [1]$		Общая формула:
$S_Y^*(A, q)$	$\frac{\{A\}}{\{q\}}$	$\{x\} = x - x^{-1}$	$S_Y^* = \prod_{(i,j) \in Y} \frac{\{Aq^{i-j}\}}{\{q^{h_{i,j}}\}}$
$S_Y^*(q^N, q)$	$[N]_q$		
$n = 2$	$= 2$	$= 1 + 1$	
Функции:	$Y = [2]$	$Y = [11]$	$(i, j) = (1, 2)$
$S_Y^*(A, q)$	$\frac{\{A\}\{Aq\}}{\{q\}\{q^2\}}$	$\frac{\{A\}\{Aq^{-1}\}}{\{q\}\{q^2\}}$	 $h_{i,j} = 6$
$S_Y^*(q^N, q)$	$\frac{[N]_q[N+1]_q}{[2]_q}$	$\frac{[N-1]_q[N]_q}{[2]_q}$	$Y = [5321]$
$n = 3$	$= 3$	$= 2 + 1$	$= 1 + 1 + 1$
Функции:	$Y = [3]$	$Y = [2, 1]$	$Y = [1^3]$
$S_Y^*(A, q)$	$\frac{\{A\}\{Aq\}\{Aq^2\}}{\{q\}\{q^2\}\{q^3\}}$	$\frac{\{A\}\{Aq\}\{Aq^{-1}\}}{\{q\}^2\{q^3\}}$	$\frac{\{A\}\{Aq^{-1}\}\{Aq^{-2}\}}{\{q\}\{q^2\}\{q^3\}}$
$S_Y^*(q^N, q)$	$\frac{[N]_q[N+1]_q[N+2]_q}{[2]_q[3]_q}$	$\frac{[N-1]_q[N]_q[N+1]_q}{[3]_q}$	$\frac{[N-2]_q[N-1]_q[N]_q}{[2]_q[3]_q}$



стороны клетки) от центра клетки до правой и нижней границ диаграммы (см. рис. в табл. 2). Формула (1.4) — «деформация» стандартной формулы крюков для неприводимых представлений  $su_N$ ; последняя получается из (1.4) при  $A = q^N$  в пределе  $q \rightarrow 1$ .

**Функции Шура.** Функции из табл. 2 суть частные случаи функций Шура или характеристик  $gl_N$ , которые играют важную роль как в теории представлений, так и в теории точно решаемых систем (см., например, разд. 3 в [25]). Сами функции Шура относятся к весьма обширному семейству ортогональных полиномов, через которые записываются выражения для наблюдаемых в широком классе точно решаемых систем [25–27]. Выражения из табл. 2 получаются из функций Шура общего вида, когда переменные — времена принимают значения в определенной, «топологической» области полного пространства значений [28].

**Топологические функции Шура.** При  $A = q^N$  функции из табл. 2 переходят в произведения квантовых чисел (1.1), имеющие характерный вид комбинаторных множителей. При заданном  $N$  каждый коэффициент является полиномом по  $q$ , например:

$$\begin{aligned}
 S_1^*(q, q) &= 1, & S_1^*(q^2, q) &= [2]_q = q + q^{-1}, & S_1^*(q^3, q) &= [3]_q = q^3 + q + q^{-1} + q^{-3}, \\
 S_{[2]}^*(q^2, q) &= 1, & S_{[2]}^*(q^2, q) &= [3]_q, & S_{[2]}^*(q^3, q) &= \frac{[3]_q [4]_q}{[2]_q} = (q^2 + q^{-2}) [3]_q, \\
 S_{[1,1]}^*(q, q) &= 0, & S_{[2]}^*(q^2, q) &= 1, & S_{[1,1]}^*(q^3, q) &= [3]_q, \\
 & \dots & & & & \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.5}$$

Оказывается, что мономы в этих полиномах «перечисляют», с одной стороны, наборы из  $n$  чисел от 1 до  $N$ , различные по модулю определенной подгруппы группы перестановок, соответствующей разбиению  $Y$ , с другой стороны — базисные векторы в пространствах неприводимых представлений группы специальных (сохраняющих элемент объема) линейных преобразований  $N$ -мерного пространства [29–31]. Мы немного остановимся на этом в разд. 2 и 4.

## 2. ПОЛИНОМ УЗЛА КАК ВЗВЕШЕННЫЙ СЛЕД ЭЛЕМЕНТА ГРУППЫ КОС

**2.1. Общее описание конструкции. 2.1.1. Основная идея.** В основе конструкции для вычисления инвариантов узлов и зацеплений, о которой пойдет речь ниже, лежит следующая идея [1, 5, 32]:

- Инвариант узла есть взвешенный след элемента группы кос:

$$\mathfrak{J}^{\mathcal{K} \sim \mathfrak{B}} = \sum_{Q \vdash |m|} \chi_Q \operatorname{Tr} \mathfrak{b}_Q(\mathfrak{B}). \tag{2.1}$$

То есть если узел  $\mathcal{K}$  представлен в виде замыкания косы  $\mathfrak{B}$  и соответствующий элемент группы кос в представлении  $Q$  этой группы задан линейным оператором  $b_Q(\mathfrak{B})$ , то для определенного набора коэффициентов  $\chi_Q$  линейная комбинация (2.1) будет инвариантом, более того, полиномом узла  $\mathcal{K}$  в смысле п. 1.3. При этом для узла — замыкания косы из  $m$  нитей сумму в (2.1) достаточно вычислить по специальному набору неприводимых представлений группы кос из  $m$  нитей, причем необходимые представления можно перечислить с помощью всевозможных разбиений (диаграмм Юнга)  $Q \vdash |m|$  (п. 1.3.2).

### 2.1.2. Косы как диаграммы узлов. Соотношения эквивалентности.

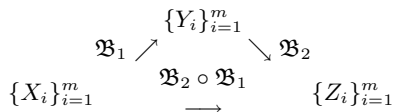
Ниже мы дадим краткую сводку существенных для нас понятий и утверждений, которые проиллюстрируем с помощью простейших примеров. Более систематическое изложение см., например, в [5].

*Узел (зацепление) есть замыкание косы.* Всякое зацепление, согласно теореме Александра [5], есть замыкание некоторой косы. С другой стороны, множество кос — по существу, одномерных объектов — устроено значительно проще, чем множество всех зацеплений и даже чем множество их произвольных плоских проекций. Здесь, однако, возникает трудность (как и всякий раз при задании узла его диаграммой, см. разд. 3): один и тот же узел (зацепление) можно получить как замыкание многих различных кос. Поэтому коса как диаграмма зацепления должна рассматриваться с точностью до определенных соотношений. Система этих соотношений эквивалентна системе движений Рейдемейстера (разд. 3) для плоской диаграммы узла. Однако здесь каждое элементарное геометрическое движение представлено в специальном виде: как соотношение в группе кос.

*Геометрические косы.* Геометрической косой в (трехмерном) пространстве называется набор  $m$  непересекающихся восходящих кривых (нитей косы). То есть в каждой точке каждой кривой задан касательный вектор, причем все касательные векторы имеют положительную проекцию на некоторое выбранное в пространстве направление. Набор касательных векторов задает направление на каждой из кривых, так что со всякой геометрической косой  $\mathfrak{B}$  можно связать отображение множества начальных (относительно заданных направлений) точек нитей  $\{A_i\}_{i=1}^m$  в множество конечных точек  $\{B_i\}_{i=1}^m$ . Подчеркнем при этом, что сама коса к описанному отображению не сводится: она также содержит информацию о взаимоположении нитей в пространстве (подробнее см. ниже).

*Умножение кос.* На множестве кос с заданным числом нитей ( $m$ ) можно задать группу. А именно: если конечные точки  $\{Y_i\}_{i=1}^m$  геометрической косы  $\mathfrak{B}_1$  с начальными точками  $\{X_i\}_{i=1}^m$  являются также начальными точками геометрической косы  $\mathfrak{B}_2$  с конечными точками  $\{Z_i\}_{i=1}^m$ , то объединение этих кос — геометрическая коса с начальными точками  $\{X_i\}_{i=1}^m$  и конечными точками  $\{Z_i\}_{i=1}^m$  — называется *произведением* ( $\mathfrak{B}_2 \circ \mathfrak{B}_1$ ) двух ис-

ходных геометрических кос. Полученная в результате коса также задает некоторое отображение множества начальных точек во множество конечных: композицию соответствующих отображений для кос-сомножителей. Роль единицы для такого умножения играет соответствующая пустая коса:  $m$  параллельных нитей.



*Изотопия кос.* Преобразование геометрической косы, при котором она все время остается геометрической косой, называется *изотопией*, а две геометрические косы, связанные таким преобразованием, — *изотопными*. Просто *косой* мы будем называть множество всех попарно-изотопных геометрических кос (в согласии с общепринятой терминологией).

*Диаграмма косы.* Если построить проекцию геометрической косы на некоторую плоскость, сохранив на ней направления нитей косы и записав в каждой точке пересечения, какая из нитей была верхней (относительно направления проекции) в пространстве, получится направленный граф с четырехвалентными вершинами двух родов: «положительными» и «отрицательными» (см. рис. 4). Такой граф называется *диаграммой косы*.

*Образующие группы кос.* Всякую косу из  $m$  нитей можно записать как произведение (в смысле данного выше определения) кос  $\mathfrak{b}_{\pm k}$  ( $k = \overline{1, m-1}$ ), содержащих по одному «положительному» ( $k > 0$ , см. рис. 6, I) либо «отрицательному» ( $k < 0$ , см. рис. 6, II) перекрестку между  $|k| - 1$  и  $m - |k| - 1$  параллельными нитями слева и справа от него. Такие косы называются *образующими* группы кос.

*Запись геометрической косы в виде слова.* При записи геометрической косы, как правило, вместо каждой образующей  $\mathfrak{b}_k$  записывают ее номер  $k$ , получается последовательность ненулевых целых чисел — *слово-коса*.

В согласии с общепринятой традицией мы иногда будем называть «косой» как геометрическую косу, так и просто косу, и ее диаграмму, и слово-косу — когда смысл ясен из контекста.

*Соотношения в группе кос как запись элементарных изотопий.* Геометрические косы, заданные различными словами, могут оказаться изотопными. Согласно одной из основных теорем группы кос [5], равенство всякой пары слов, задающих изотопные косы, следует из системы соотношений между образующими (табл. 3, столбец 1). Все эти соотношения отвечают «элементарным» изотопиям геометрических кос (рис. 1). Они являются аналогами движений Рейдемейстера (см. разд. 3) для диаграмм специального вида: для кос с закрепленными концами. В частности, преобразования на рис. 1, I и III представляют собой частные случаи преобразований в RIII (см. рис. 9) и RII (см. рис. 8) соответственно. Соотношение на рис. 1, II, как правило, не записывают в явном виде для плоских диаграмм общего вида — при вычислении инварианта узла аналог этого условия выполняется автоматически (как,

Таблица 3. Образующие группы кос (столбец 1) удовлетворяют части соотношений алгебры Гекке (столбец 3), которая есть обобщение группы перестановок (столбец 2) и, в свою очередь, допускает обобщение (столбец 4)

1	2	3	4
<p>Группа кос</p> $\mathbf{b}_i \mathbf{b}_{i+1} \mathbf{b}_i = \mathbf{b}_{i+1} \mathbf{b}_i \mathbf{b}_{i+1}$ $\mathbf{b}_i \mathbf{b}_j = \mathbf{b}_j \mathbf{b}_i, \quad  i - j  \neq 1$ $\mathbf{b}_i \mathbf{b}_{-i} = \mathbb{I}$	<p>Группа перестановок</p> $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$ $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad  i - j  \neq 1$ $\sigma_i \sigma_{-i} = \mathbb{I}$ $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$ $(\sigma_i - 1)(\sigma_i + 1) = 0$	<p>Алгебра Гекке</p> $\mathfrak{h}_i \mathfrak{h}_{i+1} \mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i+1} \mathfrak{h}_i \mathfrak{h}_{i+1}$ $\mathfrak{h}_i \mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_j \mathfrak{h}_i, \quad  i - j  \neq 1$ $\mathfrak{h}_i \mathfrak{h}_{-i} = \mathbb{I}$ $\mathfrak{h}_i^2 - (\lambda + \mu) \mathfrak{h}_i + \lambda \mu \mathbb{I} = 0$ $(\mathfrak{h}_i - \lambda)(\mathfrak{h}_i - \mu) = 0$ $(\mathfrak{h}_i - q)(\mathfrak{h}_i + q^{-1}) = 0$	<p>«Раскрашенная» алгебра Гекке</p> $\mathfrak{h}_i \mathfrak{h}_{i+1} \mathfrak{h}_i = \mathfrak{h}_{i+1} \mathfrak{h}_i \mathfrak{h}_{i+1}$ $\mathfrak{h}_i \mathfrak{h}_j = \mathfrak{h}_j \mathfrak{h}_i, \quad  i - j  \neq 1$ $\mathfrak{h}_i \mathfrak{h}_{-i} = \mathbb{I}$ $\mathfrak{h}_m = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \mathfrak{h}_i^k$ $\prod_{k=1}^m (\mathfrak{h}_i - \lambda_k) = 0$

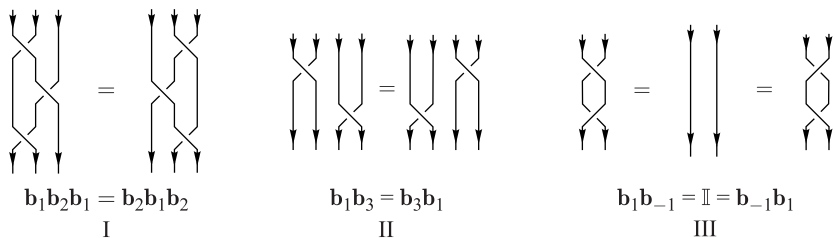


Рис. 1. Элементарные изотопии кос как соотношения в группе кос

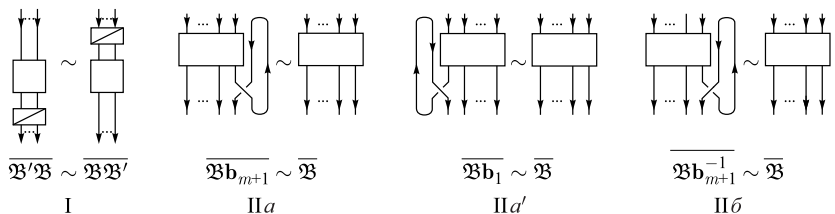


Рис. 2. Элементарные изотопии замыканий кос, соответствующие тождествам. Прямоугольники на рисунках содержат произвольные косы с соответствующим числом нитей; в обеих частях каждого соотношения прямоугольники с одинаковым наполнением содержат одинаковые косы. В формулах  $m$  означает число нитей в косе  $\mathcal{B}$ , а черта сверху — замыкание косы

например, в разд. 3). Наконец, преобразование в RI (см. рис. 10) не сводится к изотопиям косы — оно будет рассмотрено далее как изотопия *замыканий* косы (рис. 2, III). Соотношения в табл. 3, показанные на рис. 1, дают формальное определение группы кос [5].

**2.1.3. Как вычислить инвариант косы: представления группы кос.**

Инвариант (число или полином) по определению соответствует именно элементу группы кос, а не слову из образующих. То есть значения инварианта должны быть одинаковы для всякой пары слов-кос, равных при выполнении соотношений группы кос.

Сопоставить слову-косе явное значение инварианта можно, например, следующим образом. Найдем набор матриц, по одной на каждую групповую образующую, для которых выполняются условия в строках 1–2, столбец 3 табл. 3. Тогда со всяким словом-косой можно связать след соответствующего произведения этих матриц. Иными словами, инвариант косы можно получить как след элемента группы кос в некотором ее представлении\*.

\*Представлением группы называется набор линейных операторов (действующих на некотором линейном пространстве — пространстве представления), соответствующих ее элементам так, что произведению элементов соответствует композиция операторов; если выбран базис на пространстве представления, операторы — элементы представления записываются в виде матриц.

Записать в явном виде произвольное представление группы кос трудно: для этого, по крайней мере, потребовались бы бесконечные матрицы, поскольку группа содержит бесконечное число различных элементов-кос. Однако задача существенно упрощается для специальных представлений, в которых матрицы образующих удовлетворяют особым соотношениям — в дополнение к групповым. Именно такие представления позволяют явно вычислять множество интересных инвариантов кос и узлов (зацеплений) из п. 1.1.

Получить желаемые представления группы кос помогает связь между группой кос и группой перестановок. Точнее говоря, эту пару можно дополнить одним интересным объектом, который и станет для нас ключевым.

**2.1.4. Группа кос и группа перестановок. Алгебра Гекке и ее обобщения.** Как мы обсуждали выше, всякой косе соответствует некоторая перестановка. Более того, в силу групповых соотношений табл. 3, всякой паре изотопных кос соответствует одна и та же перестановка [5]. Следовательно, всякое представление группы перестановок автоматически является представлением группы кос. Однако полученный с помощью этого представления инвариант был бы слишком грубым: в частности, всякой двунитевой косе с  $2n$  пересечениями отвечает тривиальная перестановка.

В качестве «компромисса» между группой перестановок и группой кос в теории инвариантов часто рассматривают алгебру Гекке. Это обобщение групповой алгебры группы перестановок, обеспечивающее более полное (хотя и не взаимно однозначное) описание группы кос [3, 4]. В отличие от группы кос, алгебра Гекке конечномерна. Более того, ее конечномерные неприводимые представления можно построить как «деформации» аналогичных представлений группы перестановок. Но при этом алгебра Гекке гораздо лучше «различает» неизотопные косы и позволяет получить нетривиальные инварианты.

Формально алгебра Гекке задана как линейное пространство, натянутое на  $m - 1$  образующих  $\{h_i\}_{i=1}^{m-1}$ , удовлетворяющих соотношениям группы кос (строки 1–2 столбца 3 табл. 3), а также дополнительному соотношению (строки 3–4 столбца 3 в табл. 3), которое при частном значении формальных параметров  $\lambda = -\mu = 1$  переходит в «лишнее» (отсутствующее в группе кос) соотношение в группе перестановок (строки 3–4 столбца 2 табл. 3). Специальное условие алгебры Гекке обычно приводят к каноническому виду (последняя строка столбца 3 табл. 3): после перенормировки образующих  $h_i \rightarrow \sqrt{-\lambda\mu}h_i$  остается единственный параметр  $q = \sqrt{-\lambda/\mu}$  (с рядом оговорок в более строгой формулировке).

В алгебре, в отличие от группы, элементы можно не только умножать, но также складывать и умножать на число, что подразумевается в строках 3–4 столбца 3 в табл. 3. Эти соотношения (и их аналоги в более общих конструкциях) позволяют выразить инвариант данной косы через инварианты кос с меньшим числом пересечений. Последовательное применение соотношений алгебры Гекке вместе с соотношениями группы кос позволяет в конце концов

выразить инвариант произвольной косы через инварианты тривиальных кос (см. примеры в п. 2.2). Однако этот метод не обобщается в полной мере, если заменить соотношение алгебры Гекке на более общее: например, из столбца 4 табл. 3 — а как раз такие алгебры оказываются связанными с раскрашенными инвариантами (см. пп. 1.1 и 5.1).

С другой стороны, явно записать матрицы образующих в различных представлениях и таким образом явно вычислить след элемента для данного слова-косы во многих случаях удастся: как для алгебры Гекке, так и для ее «раскрашенных» обобщений\*. При этом матрицы в образующих явно зависят от параметра  $q$  алгебры Гекке (или от параметров  $\lambda_i$  обобщенной алгебры) — и вычисленный с их помощью инвариант получается функцией этого параметра (или параметров). Желаемые представления хорошо описываются с помощью  $\mathcal{R}$ -матриц, известных в теории интегрируемых систем [2] (см. разд. 4). Однако поучительно сперва построить простейшие представления из «первых принципов», чем мы и займемся в п. 2.2.

**2.1.5. От косы к ее замыканию.** Чтобы получить инвариант узла (зацепления), необходим еще один шаг. Нужно учесть, что замыкания неизотопных кос могут оказаться изотопными, т. е. могут представлять один и тот же узел. Поэтому соотношения эквивалентности замыканий кос наряду с преобразованиями на рис. 1 включают преобразования на рис. 2 (теорема Маркова [5]). Отметим, что необходимо одновременно наложить *оба* условия П<sub>а</sub> и П<sub>б</sub> («стабилизации справа» для положительного и отрицательного перекрестков в последней паре нитей), зато условие П<sub>а'</sub> («стабилизация слева» для перекрестка в первой паре нитей) при этом будет выполнено как их следствие.

**2.1.6. Умножение инвариантов для несвязной суммы узлов.** Обсуждаемые величины, в дополнение к своей топологической инвариантности, обладают замечательным свойством: значение инварианта для несвязного объединения зацеплений равно произведению значений для компонент\*\*.

Свойство выше необходимо для однозначного определения инварианта узла через группу кос. Оказывается, что достаточно потребовать этого свойства для всякой косы с несвязной правой нитью (крайняя правая нить не входит в пересечения с остальными, как на рис. 3), тогда свойство умножения будет выполнено и для всякой несвязной суммы узлов (зацеплений), представленных в виде замыканий кос [5].

**2.1.7. Инвариант узла как сумма по неприводимым представлениям группы кос.** След элемента группы кос в некотором представлении по по-

---

\*Представление алгебры отличается от представления группы (см. выше) дополнительным условием: линейной комбинации элементов алгебры отвечает та же линейная комбинация их матриц в представлении.

\*\*Свойство несколько видоизменяется в зависимости от выбранной нормировки инвариантов [28].

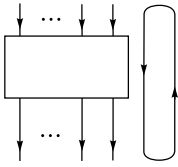


Рис. 3. Замыкание косы с несвязной нитью (последняя замкнута). Инвариант всего замыкания должен быть равен своему значению без этой нити, умноженному на инвариант тривиального узла

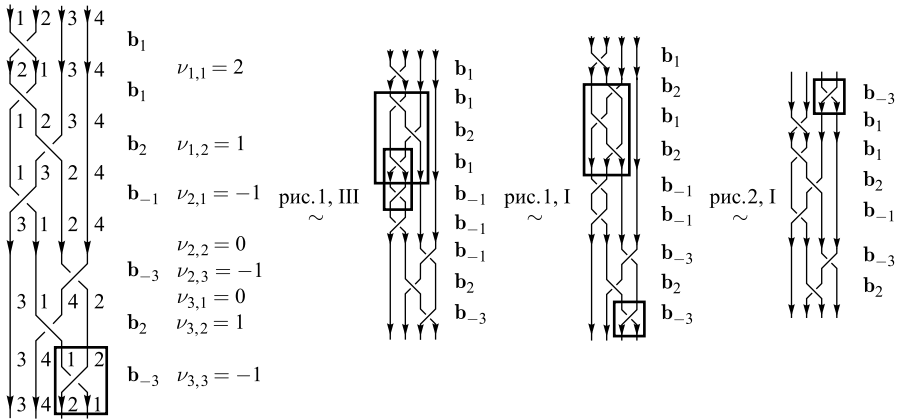


Рис. 4. I — четырехнитевая коса  $112(-1)(-3)2(-3)$ , замыканием которой является узел  $b_1$  в таблице Рольфсена [6]. Нити пронумерованы от 1 до 4. В обозначении косы перекресток нитей  $i$  и  $i + 1$  записывается как  $(i)$  либо как  $(-i)$ , в зависимости от знака перекрестка; порядок записи слева направо отвечает порядку пересечений сверху вниз. Образующие группы кос обозначены через  $b_i$  ( $i = \overline{1,4}$ );  $b_{-i} = b_i^{-1}$  означает элемент группы, обратный к  $b_i$ . Расположение чисел в каждом сечении косы иллюстрирует связь между группой кос и группой перестановок. II a, b — косы, изотопные исходной. III — коса, замыкание которой изотопно замыканию исходной косы. Во всех случаях над знаками эквивалентности указаны номера рисунков с соответствующими элементарными преобразованиями

строению сохраняется при изотопиях косы (см. рис. 1), а также при циклическом сдвиге всех перекрестков (см. рис. 2, I), но не при изотопиях замыкания (см. рис. 2, II). Однако оказывается, что в последнем случае будет сохраняться определенная линейная комбинация следов элемента группы кос в различных неприводимых представлениях. Одновременно можно потребовать, чтобы выполнялось также свойство умножения для несвязной суммы (см. рис. 3).

Для косы из  $m$  нитей линейную комбинацию с желаемыми свойствами удастся составить из следов соответствующего элемента алгебры Гекке с  $m - 1$  образующими во всевозможных неприводимых представлениях этой алгебры. Эти представления образуют подмножество представлений группы кос с  $m$  нитями (см. обсуждение выше).



Замечательно, что условия стабилизации (см. рис. 2, II) и умножения (см. рис. 3) приводят к уравнениям на искомые коэффициенты, хорошо известным в теории групп: точно такие соотношения выполняются для *характеров* неприводимых представлений алгебры  $\mathfrak{su}_N$  (см. разд. 2.3, 4.7) [29].

Однако чтобы понять, как устроена система уравнений — следствий условий на рис. 2, II, 3, стоит явно записать и решить ее для простейших кос. Ниже мы увидим, какие при этом возникают тонкости и каким образом в конце концов получаются известные выражения из теории представлений.

**2.1.8. Почему получится инвариант узла, и что это за инвариант?**

Итак, мы обсудили смысл всех величин в формуле (2.1):

$\mathfrak{B}$	Коса, замыканием которой является заданный узел (зацепление) $\mathcal{K}$ (всегда найдется по теореме Александра [5])	
$b_Q(\mathfrak{B})$	Линейный оператор — элемент алгебры Гекке (столбец 3 в табл. 3), заданный тем же словом из образующих, что и элемент группы кос $\mathfrak{B}$ (столбец 1 в табл. 3) — в представлении $Q$ алгебры Гекке (которое также есть <i>частное</i> представление группы кос)	Сохраняется при изотопиях на рис. 1 и, следовательно, есть инвариант открытой косы [5]
Tr	След элемента $b_Q$	Инвариант циклического сдвига перекрестков в косе (см. рис. 2, I)
$Q$	Разбиение (п. 1.3.2) числа $m$ нитей в косе	Нумерует неприводимые представления алгебры Гекке с $m - 1$ образующими — и тем самым <i>некоторые</i> представления группы кос из $m$ нитей
$\chi_Q$	Весовые коэффициенты для каждого представления $Q$	Такие, что линейная комбинация $\mathcal{J}^{\mathcal{K}}$ сохраняется при изотопиях замыкания рис. 2, IIа,б, а при добавлении несвязной нити, как на рис. 3, умножается на свое значение $\mathcal{J}^0$ для тривиального узла
$\mathcal{J}^{\mathcal{K}}$	Инвариант всех преобразований на рис. 1, 2 и, следовательно, инвариант узла (зацепления) $\mathcal{K}$ [5]	
	В силу свойства умножения для несвязной нити (см. рис. 3) обладает свойством умножения для несвязной суммы узлов (зацеплений) [5]	
	Наряду с матричными элементами операторов $b_Q$ и весовыми коэффициентами $\chi_Q$ зависит от параметров $\lambda, \mu$ алгебры Гекке	

Данная конструкция позволяет выразить искомый инвариант произвольного узла через параметры алгебры Гекке  $\lambda$ ,  $\mu$  и его значение для тривиального узла  $\chi$  [5]. Значения всех трех величин  $\lambda, \mu, \chi$  при этом произвольны. Для  $\lambda = q/A, \mu = -1/(qA)$  и  $\chi = (Aq - (Aq)^{-1})/(A(q - q^{-1}))$  получится полином ХОМФЛИ от двух формальных переменных  $A$  и  $q$ . С точностью до множителя  $\chi$  это действительно полином Лорана по  $A$  и  $q$  (см. разд. 1.3 [1]).

**2.2. Как работают явные формулы.** В данной конструкции, при вычислении инварианта узла (зацепления) — замыкания косы из  $m$  нитей, рассматриваются все такие представления группы кос из  $m$  нитей, которые одновременно являются представлениями алгебры Гекке с  $m-1$  образующими. Ниже мы не будем сразу записывать явные известные выражения [32] для матриц образующих алгебры Гекке в различных неприводимых представлениях. Однако мы воспользуемся взаимно однозначным соответствием между неприводимыми представлениями алгебры Гекке (столбец 3 в табл. 3) и симметрической группы (столбец 2 в табл. 3) с тем же числом образующих (группа перестановок  $m$  нитей косы) [32]\*. И те и другие представления нумеруются разбиениями целого  $m$ , а матричные элементы во вторых получаются из первых при  $\lambda = -\mu = 1$ . Так что это соответствие позволяет не только перечислить все необходимые представления группы кос, но и также определить их размерности и увидеть основные свойства.

Ниже жирный шрифт используется для образующих группы кос, а простой — для их матриц в различных представлениях (например,  $b_{2|[2,2]}$  — матрица образующей  $b_2$  в представлении  $[2, 2]$ ).

**2.2.1. Однонитевая коса.** Этот случай тривиален: одна нить является групповой единицей и единственным элементом группы однонитевых кос [1, 5]. Замыканием однонитевой косы является тривиальный узел, представленный в виде простейшей диаграммы: это замкнутая кривая без самопересечений в плоскости проекции (первая строка в табл. 4).

Однонитевой косе можно сопоставить группу перестановок из одного элемента, также состоящую только из групповой единицы  $\mathbb{I}$ . Эта группа имеет единственное (тривиальное) представление  $\mathbb{I} \mapsto 1$ , которое также является единственным неприводимым представлением группы однонитевых кос. Это представление можно связать с единственным разбиением 1: [1].

Множество топологических условий как для косы (см. рис. 1), так и для ее замыкания (см. рис. 2, 3) в данном случае пусто. Так что в качестве соответствующего значения инварианта в данной конструкции можно задать произвольную величину  $\chi_{[1]} \equiv \chi$ . Согласно общей теореме [1, 5], в справедливости которой мы убедимся в частных случаях, значение обсуждаемого инварианта для произвольного узла будет пропорционально этой величине.

---

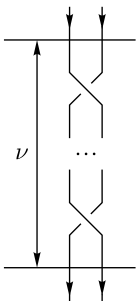
\*В случае общего положения параметров  $\lambda$  и  $\mu$  [32] (см. п. 5.3).

Таблица 4. Узлы и зацепления — замыкания простейших одно-, двух- и трехнитевых кос

Коса		Замыкание		
Число нитей	Слово	Обозначение Рольфсена	Альтернативные обозначения	Название
1	$\emptyset$	$0_1$		Тривиальный узел (кольцо)
2	$\emptyset$	$0_1^2$		Пара колец
	1	$0_1$		Одно кольцо с перекруткой
	11	$2_1^2$	$L2a1, T^{2,2}$	Зацепление Хопфа
	111	$3_1$	$T^{2,3}$	Трилистник, левосторонний
	$(-1)(-1)(-1)$	$3_1$	$T^{2,-3}$	Трилистник, правосторонний
	1111	$4_1^2$	$L2a2, T^{4,2}$	Соломоново зацепление
	$(1)^{2k+1}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$		$T^{2,2k+1}$	Двунитевые торические узлы
	$(1)^{2k}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$		$T^{2,2k}$	Двухкомпонентные двунитевые торические зацепления
3	$\emptyset$	$0_1^2$		Три кольца
	1	$0_1^2$		Два кольца, одно скручено
	12	$0_1^3$		Одно кольцо, дважды скручено
	1212	$3_1$	$T^{3,2}$	Трилистник с перекруткой
	$1(-1)1(-1)$	$4_2$		Узел-восьмерка
	$111(-2)1(-2)$	$5_2$		Трижды скрученный узел
	121212	$6_2^3$	$L6a4, T^{3,3}$	Кольца Бормео
	$(12)^{3k+1}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$		$T^{3,3k+1}$	Трехнитевые торические узлы
	$(12)^{3k}, k = \pm 1, \pm 2, \dots$		$T^{3,3k}$	Трехкомпонентные трехнитевые торические зацепления

Таблица 5. Узлы и зацепления — замыкания простейших четырехнитевых кос

Коса		Замыкание		
Число нитей	Слово	Обозначение Рольфсена	Альтернативные обозначения	Название
4	$\emptyset$	$0_1^4$		Четыре кольца
	1	$0_1^3$		Три кольца, одно скручено
	12	$0_1^2$		Два кольца, одно дважды скручено
	123	$0_1^3$		Одно кольцо, трижды скручено
	$112(-1)(-3)2(-3)$	$6_1$		Четырежды скрученный узел
	$1112(-1)23(-2)3$	$7_2$		Пять раз скрученный узел
	$(123)^{4k \pm 1}$ , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$		$T^{4k \pm 1, 3}$	Четырехнитевые торические узлы
	$(123)^{4k \pm 2}$ , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$		$T^{4k \pm 2}$	Двухкомпонентные четырехнитевые торические зацепления
	$(123)^{4k}$ , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$		$T^{4k, 4}$	Четырехкомпонентные четырехнитевые торические зацепления

Рис. 5. Двунитевая коса с  $\nu$  перекрестками

**2.2.2. Двунитевые косы.** Запись двунитевой косы. Двунитевая коса (рис. 5) задается единственным параметром — числом перекрестков между нитями, произвольным целым числом  $\nu$ , положительным или отрицательным в зависимости от знака перекрестков (см. рис. 6) [1, 5].

**Двунитевые узлы и зацепления.** Замыкания всевозможных двунитевых кос суть торические (т. е. лежащие без самопересечений на поверхность тора) узлы (для нечетного числа перекрестков  $\nu$ ) и зацепления (для четного  $\nu$ ) типа  $T^{2, \nu}$  [6]. Первые члены этого семейства описаны в табл. 4. При замене  $\nu$  на  $-\nu$  получим зеркальное отражение узла (зацепления) — вообще говоря, не эквивалентное оригиналу (см. п. 3.6).

**Произведение образующих.** Открытой двунитевой косе с  $\nu$  пересечениями соответствует линейный оператор  $b_1^\nu$ , где  $b_1$  — единственная образующая группы двунитевых кос в некотором непредставлении этой группы.

*Специальные представления группы перестановок двух нитей.* Группа перестановок 2 элементов содержит (кроме единицы) единственную образующую, которая действует на словах из 2 различных букв как  $\sigma_1(xy) = yx$ ,  $\sigma_1(yx) = xy$ , так что  $\sigma_1^2 = \mathbb{I}$ . На эти два слова натянута пространство представления данной группы. Симметрическая  $X_{[2]} \equiv (1/2)(xy + yx)$  и антисимметрическая  $X_{[1,1]} \equiv (1/2)(xy - yx)$  комбинации образуют базис в пространстве представления и являются собственными векторами для  $\sigma$ :  $\sigma_1 X_2 = X_2$ ,  $\sigma_1 X_{[1,1]} = -X_{[1,1]}$ . Тем самым исходное представление разлагается в сумму двух неприводимых (т. е. действие группы не выводит за пределы соответствующих подпространств), и в каждом из них образующая задана матрицей  $1 \times 1$ :

$$\sigma_{1|[2]} = 1, \quad \sigma_{1|[1,1]} = -1. \quad (2.2)$$

Для обозначения этих представлений используют разбиения 2:  $[2]$  и  $[11] \equiv 1 + 1$ . Их изображают в виде диаграмм: как строку и столбец из 2 клеток (табл. 6). Каждая клетка связана с позицией буквы в слове, а расположение клеток в одной строке либо столбце означает симметризацию либо антисимметризацию по этим позициям (эти операции с любым словом дают векторы соответствующих представлений). Именно такой набор неприводимых представлений предсказывает для группы перестановок из 2 элементов общая теорема [3, 4, 29, 30] (всякое неприводимое представление данной группы изоморфно одному из этих двух). В случае большего числа элементов идея та же, но реализация сложнее (мы покажем ее на примерах ниже).







*Специальные представления группы кос из двух нитей.* Неприводимые представления симметрической группы и алгебры Гекке задаются теми же разбиениями и имеют те же размерности [32]. То есть в последнем случае сохраняются размеры матриц, но изменяются значения их элементов:

$$b_{1|[2]} = \lambda, \quad b_{1|[1,1]} = \mu. \quad (2.3)$$

Соотношения группы кос (столбец 1 табл. 3), множество которых пусто при  $n = 2$ , никак не ограничивают значения параметров  $\lambda$  и  $\mu$  — и мы оставим их произвольными вплоть до обсуждения связи конструкции с квантовыми группами в п. 2.1.7. Тогда образующие удовлетворяют условию алгебры Гекке в однородном виде (предпоследняя строка столбца 3 табл. 3, см. п. 2.1.4). В последующих примерах мы увидим, что условия для замыканий кос приводят к выражениям для инвариантов многонитевых кос через двунитевые собственные значения  $\lambda$  и  $\mu$  и значение инварианта тривиального узла  $\chi$ , но не требуют связи между этими тремя величинами.

*Инвариант замыкания двунитевой косы.* Рассмотрим теперь линейную комбинацию следов от матриц  $(1 \times 1)$  элемента группы кос в двух описанных

Таблица 6. Неприводимые представления группы перестановок 1, 2 и 3 элементов

Обозначение	Кратность	Вектор	Тождества	Размерность	Базис
[1] 	1	$x$		1	$X$
[2] 	1	$xy + yx$	$\sigma_1 X = X$	1	$X$
[11] 	1	$xy - yx$	$\sigma_1 X = -X$	1	$X$
[3] 	1	$xyz + xzy + yxz + yzx + zxy + zyx$	$\sigma_1 X = \sigma_2 X = X$	1	$X$
[2, 1] 	2	$a_x(xyz + yxz) + a_y(yzx + zxy) + a_z(zxy + xzy)$ $a_x + a_y + a_z = 0$	$\sigma_1 X = X,$ $(\text{Id} + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2) X = 0$	2	$X,$ $\sigma_2 X$
[111] 	1	$xyz - xzy + yxz - yzx + zxy - zyx$	$\sigma_1 X = \sigma_2 X = -X$	1	$X$

неприводимых представлениях группы кос из двух нитей:

$$\mathfrak{J}^{(\nu)} = \lambda^\nu \chi_{[2]} + \mu^\nu \chi_{[1,1]}. \tag{2.4}$$

*Весовые коэффициенты*  $\chi_{[2]}$  и  $\chi_{[1,1]}$  предстоит определить, исходя из свойств замыкания на рис. 3 и 2, II. Для двунитевой косы эти свойства запишутся, соответственно, в виде уравнений

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \chi_{[2]} + \chi_{[1,1]}, \\ \chi &= \lambda \chi_{[2]} + \mu \chi_{[1,1]}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Подставив решение (2.5) в (2.4), получаем искомое выражение для инварианта узла, представленного в виде замыкания двунитевой косы:

$$\mathfrak{J}^{(\nu)}(\lambda, \mu; \chi) = \lambda^\nu \chi_{[2]} + \mu^\nu \chi_{[1,1]}, \tag{2.6}$$

где

$$\chi_{[2]} = \frac{(1 - \mu\chi)\chi}{\lambda - \mu} \quad \text{и} \quad \chi_{[1,1]} = \frac{(\lambda\chi - 1)\chi}{\lambda - \mu}. \tag{2.7}$$

**2.2.3. Трехнитевые косы.** *Запись трехнитевой косы.* Как только коса содержит более двух нитей, задать полное число перекрестков в косе уже недостаточно, чтобы задать саму косу, поскольку переплетаться теперь могут различные пары нитей. Произвольную трехнитевую косу можно задать набором целых чисел  $\{\nu_{i,1}, \nu_{i,2}\}_{i=1}^L$  — так, что коса запишется в виде слова [1, 5]

$$\underbrace{(\varepsilon_{i,1}1) \dots (\varepsilon_{i,1}1)}_{|\nu_{i,1}|} \underbrace{(\varepsilon_{i,2}2) \dots (\varepsilon_{i,2}2)}_{|\nu_{i,2}|} \dots \dots \dots \underbrace{(\varepsilon_{L,1}1) \dots (\varepsilon_{L,1}1)}_{|\nu_{L,1}|} \underbrace{(\varepsilon_{L,2}2) \dots (\varepsilon_{L,2}2)}_{|\nu_{L,2}|}, \tag{2.8}$$

где  $\varepsilon_{i,j} = \text{sgn } \nu_{i,j}$  ( $j = 1, 2, i = \overline{1, L}$ ).

$\prod_{i=1}^L (\pm 1)^{\nu_{i,1}} (\pm 2)^{\nu_{i,2}}$ , где  $i_{k,i}^\nu$  и  $(-i)_{k,i}^\nu$  ( $i = 1, 2, k = \overline{1, L}$ ) означает последовательность из  $\nu_{k,i}$ , соответственно, положительных и отрицательных перекрестков (см. рис. 6), слева от каждого из которых расположены еще  $k - 1$  нитей. Всего коса содержит  $\sum_{i=1}^L (|\nu_{1,i}| + |\nu_{2,i}|)$  перекрестков. Обозначение поясняется на рис. 4.

Простейшие узлы и зацепления — замыкания трехнитевых кос перечислены в табл. 4, дальнейшие примеры см. в [6].

*Произведение образующих.* Всякому элементу группы трехнитевых кос соответствует выражение

$$\mathbf{b}_1^{\nu_{1,1}} \mathbf{b}_2^{\nu_{1,2}} \mathbf{b}_1^{\nu_{2,1}} \mathbf{b}_2^{\nu_{2,2}} \dots \mathbf{b}_1^{\nu_{L,1}} \mathbf{b}_2^{\nu_{L,2}}, \tag{2.9}$$

где через  $\mathbf{b}_1$  и  $\mathbf{b}_2$  обозначены две образующие группы трехнитевых кос.

*Представления группы перестановок.* В случае группы трехнитевых кос необходимо рассмотреть группу перестановок трех элементов, которая содержит две образующих  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  и действует на словах из трех различных букв  $x$ ,  $y$  и  $z$  (см. табл. 6). Пространства неприводимых представлений содержатся в шестимерном линейном пространстве, натянутом на перестановки  $(xyz)$  ( $3! = 6$ ). Среди них есть два одномерных неприводимых представления: *симметрическое* — натянутое на вектор  $X_{[3]} = xyz + yxz + xzy + yzx + zxy + zyx$  — и *антисимметрическое* — действующее на вектор  $X_{[1^3]} = xyz - yxz - xzy + yzx + zxy - zyx$ . В отличие от случая двух элементов, для трех элементов возникают также двумерные представления группы перестановок. А именно, всякая пара выражений вида (связанных перестановкой двух последних элементов в каждом мономе)

$$\begin{aligned} X_{[2,1]} &= a(xyz + yxz) + b(yzx + zyx) + c(zxy + xzy), \\ \sigma_2 X_{[2,1]} &= a(xzy + yzx) + b(yxz + zxy) + c(zyx + xyz), \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\text{где } a + b + c = 0 \quad (2.11)$$

образует базис в двумерном неприводимом представлении, как можно непосредственно убедиться, действуя на эти элементы групповыми образующими. Кроме того, векторы вида  $X_{[2,1]}$  по условию (2.11) образуют двумерное линейное подпространство, и всякая пара  $\{X_{[2,1]}, \sigma_2 X_{[2,1]}\}$  составляет базис в другом линейном пространстве — в также двумерном пространстве неприводимого представления данного типа. Все эти представления изоморфны между собой.

Если положить, например,  $X_{[2,1]}^{(1)} = X_{[2,1]}[a = -b = 1, c = 0]$  и  $X_{[2,1]}^{(2)} = X_{[2,1]}[a = 0, b = -c = 1]$ , получим 6 линейно независимых векторов:  $X_3$ ,  $\{X_{[2,1]}^{(1)}, \sigma X_{[2,1]}^{(1)}\}$ ,  $\{X_{[2,1]}^{(2)}, \sigma X_{[2,1]}^{(2)}\}$ ,  $X_{[1^3]}$  — таких, что векторы каждой группы образуют базис в одном из неприводимых представлений, а все векторы вместе образуют базис в исходном шестимерном пространстве ( $6! = 1 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 1$ ).

В рамках общей конструкции [3, 4, 29, 30] симметрическое и антисимметрическое представления связаны с разбиениями тройки:  $3$  ( $[3]$ ) и  $1 + 1 + 1$  ( $[1^3]$ ) соответственно, а двумерное представление — с разбиением  $2 + 1$  ( $[2, 1]$ ); их диаграммы даны в табл. 6. В случае  $[2, 1]$  двум клеткам в одной строке соответствует симметризация (2.10) по первой паре букв, а двум клеткам в одном столбце — условие (2.11), которое исключает полностью симметрическую комбинацию.

Всякое неприводимое представление группы перестановок трех элементов изоморфно одному из трех описанных выше [3, 4, 29, 30]. Три различных представления группы перестановок соответствуют трем неприводимым представлениям алгебры Гекке — и, следовательно, группы кос. Именно эти представления необходимы для вычисления искомого инварианта [32].



*Размеры матриц образующих.* Таким образом, мы перечислили все необходимые представления группы кос и для каждого определили размеры матриц образующих. Теперь перейдем к вычислению элементов этих матриц из условий топологической инвариантности и умножения (см. п. 2.1.8).

*Соотношения группы кос как условия на матричные элементы.* Еще одно отличие трехнитевых кос от двунитевых в том, что множество условий в столбце 1 табл. 3, начиная с  $n = 3$ , не пусто. В данном случае оно содержит единственное уравнение:

$$\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2. \tag{2.12}$$

Это частный случай соотношения Янга–Бакстера, которое (как мы убедимся в разд. 3) играет ключевую роль во всей конструкции.

Прежде всего, (2.12) означает, что операторы  $\mathbf{b}_2$  и  $\mathbf{b}_1$  удовлетворяют одному и тому же характеристическому уравнению:

$$(2.12) \Rightarrow (\mathbf{b}_1 - \lambda \mathbb{I}) \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 (\mathbf{b}_2 - \lambda \mathbb{I}) \Rightarrow \det(\mathbf{b}_1 - \lambda \mathbb{I}) = \det(\mathbf{b}_2 - \lambda \mathbb{I}), \tag{2.13}$$

т. е. у линейных операторов  $\mathbf{b}_2$  и  $\mathbf{b}_1$  тождественно совпадают характеристические полиномы, и, следовательно, их собственные значения попарно равны с учетом кратности. То есть эти операторы связаны сопряжением (а их матрицы — заменой базиса):  $\mathbf{b}_1 = U \mathbf{b}_2 U^{-1}$  для некоторой  $U$ .

Таким образом, для одномерных представлений имеем

$$b_{1|[3]} = b_{2|[3]} \equiv \lambda_{[3]} \quad \text{и} \quad b_{1|[1^3]} = b_{2|[1^3]} \equiv \lambda_{[1^3]}. \tag{2.14}$$

Для двумерного представления  $[2, 1]$  условие (2.12) дает нетривиальную систему уравнений на элементы матриц  $(2 \times 2)$   $\mathbf{b}_{1|[2,1]}$  и  $\mathbf{b}_{2|[2,1]}$ , которую мы решим ниже.

*Решение для матриц  $2 \times 2$  через собственные значения.* Выберем базис в двумерном представлении группы кос так, что обе матрицы образующих будут симметричны\* и первая диагональна:  $b_{1|[2,1]} = \text{diag}(\lambda_{[2,1],1}, \lambda_{[2,1],2})$ ,  $b_{2|[2,1]}^T = b_{2|[2,1]}$ .

Соотношение (2.12) связывает элементы  $b_{1|[2,1]}$  с элементами  $b_{2|[2,1]}$  через систему квадратных уравнений. Система имеет решения:

$$\begin{aligned} b_{2|[2,1]} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & b_{2|[2,1]} &= \begin{pmatrix} \lambda_{[2,1],1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ b_{2|[2,1]} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{[2,1],2} \end{pmatrix}, & b_{2|[2,1]} &= \begin{pmatrix} \lambda_{[2,1],1} & 0 \\ 0 & \lambda_{[2,1],2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

---

\*Если в матрице  $A$  размера  $2 \times 2$  отличны от нуля оба внедиагональных элемента, то замена базиса с матрицей  $V = \text{diag}(x, x^{-1})$ , где  $x = \sqrt{A_{2,1}^{-1} A_{12}}$ , даст симметричную матрицу  $V^{-1} A V$ .

а также нетривиальное решение, которое нас интересует (поскольку именно оно приводит к интересным инвариантам узлов):

$$b_{2|[2,1]} = \frac{1}{\lambda_{[2,1],1} - \lambda_{[2,1],2}} \begin{pmatrix} \lambda_{[2,1],2}^2 & x \\ x & -\lambda_{[2,1],1}^2 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$\text{где } x^2 = \lambda_{[2,1],1}^2 - \lambda_{[2,1],1}\lambda_{[2,1],2} + \lambda_{[2,1],2}^2.$$

Как мы увидим в п. 2.2.4, аналогичные блоки  $2 \times 2$  встречаются и случае кос с большим числом нитей, поэтому удобно ввести обозначение

$$B^{(2)}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{p_2} \begin{pmatrix} \lambda_2^2 & \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 p_3} \\ \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2 p_3} & -\lambda_1^2 \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

где

$$p_n(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1^n - (-\lambda_2)^n}{\lambda_1 + \lambda_2} = \sum_{k=1}^n (-\lambda_1)^{k-1} \lambda_2^{k-n}. \quad (2.18)$$

*Тождества для замыканий: весовые коэффициенты через собственные значения.* Сразу заметим, что условия стабилизации «справа» (рис. 2, II а) и «слева» (рис. 2, II б) в данном случае приводят к одним и тем же выражениям — вследствие установленного выше соотношения между операторами перекрестков:  $b_1 = Ub_2U^{-1}$  (для некоторой  $U$ ). То же касается условий факторизации при отделяемой правой (см. рис. 3) и левой нитях. Поэтому ниже рассмотрим более удобные для записи «левые» условия.

Инвариант замыкания *трехнитевой* косы вида  $(1^\nu)$  должен удовлетворять **условию факторизации** (п. 2.1.6):

$$\lambda_{[2]}^\nu \chi \chi_{[2]} + \lambda_{[1,1]}^\nu \chi \chi_{[1,1]} = \lambda_{[3]}^\nu \chi_{[3]} + \left( \lambda_{[2,1],1}^\nu + \lambda_{[2,1],2}^\nu \right) \chi_{[2,1]} + \lambda_{[1^3]}^\nu \chi_{[1^3]}. \quad (2.19)$$

В правой части (2.19) записана трехнитевая формула, содержащая только диагональные матрицы  $b_{Y|1}^\nu$  ( $Y = [3], [2, 1], [1^3]$ ) — через степени их собственных значений. В левой части (2.19) стоит произведение инвариантов простой окружности и двунитевого узла/зацепления, равное инварианту несвязной суммы двух последних. Именно ей изотопно замыкание трехнитевой косы с отделяемой нитью.

Условия (2.19) для всевозможных чисел перекрестков  $\nu$  дают бесконечную систему соотношений между собственными значениями  $\lambda$  и характеристиками  $\chi$ . Эти условия можно получить путем подстановок

$$\begin{aligned} x_1 &= -\chi \chi_{[2]}, & x_2 &= -\chi \chi_{[1,1]}, & x_3 &= \chi_{[3]}, & x_4 &= \chi_{[2,1]}, & x_5 &= \chi_{[2,1]}, & x_6 &= \chi_{[1^3]}, \\ \lambda_1 &= \lambda_{[2]}, & \lambda_2 &= \lambda_{[1,1]}, & \lambda_3 &= \lambda_{[3]}, & \lambda_4 &= \lambda_{[2,1],1} & \lambda_5 &= \lambda_{[2,1],2}, & \lambda_6 &= \lambda_{[1^3]} \end{aligned} \quad (2.20)$$

из более общей системы вида  $\sum_{I=1}^6 \lambda_I^\nu x_I = 0$ . Последняя как система уравнений на  $x$  имеет базисный минор в виде определителя Вандермонда:  $\det \|\lambda_Q^\nu\|_{I=1,6}^{\nu=0,5} = \prod_{I < J} (\lambda_I - \lambda_J)$ . То есть уже подсистема условий с  $\nu = \overline{0,5}$  при попарно различных  $\lambda_I$  не вырождена и имеет единственное решение  $x_I = 0$ . Напротив, для каждой вырожденной пары  $\lambda_I = \lambda_J$  найдется одномерное пространство нетривиальных решений:  $\{x_I + x_J = 0; x_K = 0, K \neq I, J\}$ . При этом непосредственно видно, что каждое решение рассмотренной подсистемы удовлетворяет также полной системе условий (для всех  $\nu$ ). Иными словами, размерность пространства решений условия факторизации относительно характеристик равна полной кратности вырождения системы входящих в него собственных значений.

К аналогичному выводу приводят **условия стабилизации** (п. 2.1.5) для замыкания косы  $1^{\nu}2$ , которые для положительного перекрестка запишутся как

$$\begin{aligned} & \lambda_{[2]}^{\nu+1} \chi_{[2]} + \lambda_{[1,1]}^{\nu+1} \chi_{[1,1]} = \\ & = \lambda_{[3]}^{\nu+1} \chi_{[3]} + \frac{\lambda_{[2,1,1]} \lambda_{[2,1,2]} (\lambda_{[2,1,1]}^{\nu-1} - \lambda_{[2,1,2]}^{\nu-1})}{\lambda_{[2,1,1]} - \lambda_{[2,1,2]}} \chi_{[2,1]} + \lambda_{[1^3]}^{\nu+1} \chi_{[1^3]} \end{aligned} \quad (2.21)$$

и получатся путем подстановок

$$\begin{aligned} & y_1 = -\lambda_{[2]} \chi_{[2]}, \quad y_2 = -\lambda_{[1,1]} \chi_{[1,1]}, \\ & y_3 = \lambda_{[3]} \chi_{[3]}, \quad y_4 = \frac{1}{\lambda_{[2,1,1]} (\lambda_{[2,1,1]} - \lambda_{[2,1,2]}} \chi_{[2,1]}, \\ & y_5 = \frac{1}{\lambda_{[2,1,2]} (\lambda_{[2,1,2]} - \lambda_{[2,1,1]}} \chi_{[2,1]}, \quad y_6 = \lambda_{[1^3]} \chi_{[1^3]} \end{aligned} \quad (2.22)$$

из системы того же вида, что и выше:  $\sum_{I=1}^6 \lambda_I^\nu y_I = 0$ . Наконец, точно так же можно рассмотреть условия стабилизации для отрицательного перекрестка — для замыкания косы  $1^{\nu}(-2)$ . Все три системы условий еще нужно исследовать на совместность между собой. Но уже здесь мы можем сделать существенный вывод: чтобы тождества для замыканий кос были совместны, должны быть установлены те или иные равенства между собственными значениями операторов перекрестков в различных неприводимых представлениях. Эти равенства определяют число и вид решений для весовых коэффициентов в выражении для инварианта.

Тем самым установить конкретный вид соотношений между собственными значениями и весовыми коэффициентами условия топологической инвариантности не позволяют. Однако можно ввести систему *дополнительных*

**Таблица 7. Собственные значения образующих группы перестановок из трех элементов (столбец 2) и группы трехнитевых кос в соответствующих специальных представлениях (столбец 3)**

Представления	Собственные значения	
$Q$	$\sigma$	$\mathbf{b} \sim \mathfrak{h}$
[2]	1	$\lambda$
[1, 1]	-1	$\mu$
[3]	1	$\lambda$
[2, 1]	1, -1	$\lambda, \mu$
[1 <sup>3</sup> ]	-1	$\mu$

соотношений, исходя из других соображений. Таким образом мы еще больше сузим класс включенных в конструкцию представлений группы кос, но получим нетривиальные выражения для желаемых инвариантов. Причем универсальным образом для произвольного числа нитей в косе.

*Анзац о вырождении собственных значений.* В вырожденном частном случае, когда рассмотренные представления группы кос являются

также представлениями группы перестановок, среди собственных значений образующих всего два различных:  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$  и  $\lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6 = -1$ . Тогда решение условий факторизации относительно весовых коэффициентов задано соотношениями  $\{x_1 + x_3 + x_4 = 0, x_2 + x_5 + x_6 = 0\}$ . Ниже мы запишем все эти равенства в исходных переменных (2.20), а в разд. 2.3 обсудим, чем они важны сами по себе. Пока заметим, что в соотношения между коэффициентами собственные значения непосредственно не входят. Так что можно, наоборот, потребовать выполнения этих условий во всех интересующих нас представлениях группы кос. Если также нет других линейных соотношений между  $x_I$ , из условий факторизации тогда последуют ослабленные условия на собственные значения:  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4$  и  $\lambda_2 = \lambda_5 = \lambda_6$ . С другой стороны, именно такое вырождение собственных значений имеет место, если все рассмотренные представления группы кос являются также представлениями алгебры Гекке с одним и тем же параметром  $q$  (см. табл. 7). Имея в виду все эти соображения, *дополнительно* укажем, что: тип вырождения собственных значений образующих групповой алгебры группы перестановок сохраняется для интересующих нас представлений группы кос, которые при этом являются представлениями одной и той же алгебры Гекке.

*Инвариант замыкания трехнитевой косы.* Свойство умножения на рис. 3 в случае трехнитевых кос записывается для произвольной двунитевой косы и параллельной ей нити. При этом получается бесконечное семейство уравнений, которые при собственных значениях, как в табл. 7, имеют вид ( $\nu$  — число пересечений в двунитевой косе):

$$\chi(\lambda^\nu \chi_{[2]} + \mu^\nu \chi_{[1,1]}) = \lambda^\nu \chi_{[3]} + (\lambda^\nu + \mu^\nu) \chi_{[2,1]} + \mu^\nu \chi_{[1^3]}. \quad (2.23)$$

Система (2.23) для всех целых  $\nu$  эквивалентна системе двух уравнений, состоящих из членов при каждой из произвольных степеней  $\lambda^\nu$  и  $\mu^\nu$ :

$$\chi \chi_{[2]} = \chi_{[3]} + \chi_{[2,1]}, \quad \chi \chi_{[1,1]} = \chi_{[2,1]} + \chi_{[1^3]}. \quad (2.24)$$

Аналогично, свойство стабилизации на рис. 2, II приводит к бесконечному семейству соотношений вида

$$\lambda^n \chi_{[2]} + \mu^n \chi_{[1,1]} = \lambda^{n+1} \chi_{[3]} + \frac{\lambda^n \mu^2 - \mu^n \lambda^2}{\mu - \lambda} \chi_{[2,1]} + \mu^{n+1} \chi_{[1^3]}, \quad (2.25)$$

однако можно непосредственно убедиться, что любые три из уравнений (2.25) линейно зависимы. С другой стороны, любые два из них, например, для  $n = 1$  и  $n = 2$ :

$$\begin{aligned} \text{рис. 2, } \overline{\text{I}} \sim \overline{\text{I2}} : \quad \lambda \chi_{[2]} + \mu \chi_{[1,1]} &= \lambda^2 \chi_{[3]} + \lambda \mu \chi_{[2,1]} + \mu^2 \chi_{[1^3]} \\ \text{рис. 2, } \overline{\text{II}} \sim \overline{\text{II2}} : \quad \lambda^2 \chi_{[2]} + \mu^2 \chi_{[1,1]} &= \lambda^3 \chi_{[3]} + \mu^3 \chi_{[1^3]}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

дополняют (2.24) до полной системы уравнений на трехнитевые коэффициенты. Решением (2.24), (2.26) являются следующие выражения через двунитевые собственные значения:

$$\begin{aligned} \chi_{[3]} &= \frac{\chi(\mu\chi - 1)(\mu^2\chi + \lambda - \mu)}{(\mu - \lambda)(\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2)}, \\ \chi_{[2,1]} &= \frac{\chi(\mu\chi - 1)(\lambda\chi - 1)}{\lambda\mu - \lambda^2 - \mu^2}, \\ \chi_{[1^3]} &= \frac{\chi(\lambda\chi - 1)(\lambda^2\chi + \mu - \lambda)}{(\lambda - \mu)(\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2)} \end{aligned}$$

или через введенные в (2.18)  $p_n$  (в частности,  $p_1 = 1$ ):

$$\begin{aligned} \chi_{[3]} &= \frac{\chi(p_1 - \mu\chi)(p_2 + \mu^2\chi)}{p_2 p_3}, \\ \chi_{[2,1]} &= \frac{\chi(p_1 - \mu\chi)(\lambda\chi - p_1)}{p_3}, \\ \chi_{[1^3]} &= \frac{\chi(\lambda\chi - p_1)(\lambda^2\chi + p_2)}{p_2 p_3}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

*Ответ для инварианта трехнитевого узла.* Наконец, получаем выражение для инварианта узла — замыкания трехнитевой косы через значение того же инварианта для тривиального узла  $\chi$  и двунитевые собственные значения  $\lambda$  и  $\mu$ :

$$\mathfrak{J}(\lambda, \mu; \chi) = \lambda^w \chi_{[3]} + \text{Tr} \prod_{i=1}^L \text{diag} (\lambda^{\nu_{i,1}}, \mu^{\nu_{i,1}}) B_{(2)}^{\nu_{i,2}}(\lambda, \mu) + \mu^w \chi_{[1^3]}, \quad (2.28)$$

где  $w = \sum_{i=1}^L (\nu_{i,1} + \nu_{i,2})$  называется алгебраическим числом перекрестков в косе (в отличие от полного числа перекрестков  $n = \sum_{i=1}^L (|\nu_{i,1}| + |\nu_{i,2}|)$ ), матрица  $B_{2 \times 2}^{(2)}$  задана в (2.17), а коэффициенты  $\chi_{Q-3}$  — в (2.27).

**2.2.4. Четырехнитевые косы.** В этом случае впервые проявляются все элементы обсуждаемой конструкции для инварианта узла. Поэтому мы завершим настоящий раздел этим слегка громоздким, но показательным упражнением.

*Запись четырехнитевой косы.* Всякую четырехнитевую косу (аналогично трехнитевой) можно записать как слово вида

$$\prod_{i=1}^L (\varepsilon_{i,1} 1)^{\nu_{i,1}} (\varepsilon_{i,2} 2)^{\nu_{i,2}} (\varepsilon_{i,3} 3)^{\nu_{i,3}}, \quad \varepsilon_{i,j} = \text{sign } \nu_{i,j}, \quad (2.29)$$

$$\nu_{i,j} \in \mathbb{Z}, \quad i = \overline{1, L}, \quad j = \overline{1, 3}$$

(см. рис. 4). Простейшие примеры узлов и зацеплений — замыканий четырехнитевых кос приведены в табл. 5, дальнейшие примеры см. в [6].

*Произведение образующих.* Соответствующий элемент группы четырехнитевых кос запишется как

$$\mathbf{b}_1^{\nu_{1,1}} \mathbf{b}_2^{\nu_{1,2}} \mathbf{b}_3^{\nu_{1,3}} \mathbf{b}_1^{\nu_{2,1}} \mathbf{b}_2^{\nu_{2,2}} \mathbf{b}_3^{\nu_{2,3}} \dots \mathbf{b}_1^{\nu_{L,1}} \mathbf{b}_2^{\nu_{L,2}} \mathbf{b}_3^{\nu_{L,3}}. \quad (2.30)$$

*Представления группы перестановок и размеры матрицы образующих.* Пространства неприводимых представлений группы перестановок из 4 элементов можно построить по аналогии с предыдущими случаями: как инвариантные (относительно действий всей группы) подпространства в пространстве, натянутом на все слова из 4 различных букв  $x, y, z, t$  (табл. 8, 9). Согласно общей теореме [29, 31], группа перестановок 4 элементов имеет 5 различных (с точностью изоморфизмов) неприводимых представлений — по числу разбиений 4:  $Q = [4], [3, 1], [2, 2], [2, 1, 1], [1^4]$ . В частности, разбиения  $[4] \equiv 4$  и  $[1^4] \equiv 1 + 1 + 1 + 1$  отвечают симметрическому и антисимметрическому одномерным представлениям.

Соответственно, для группы кос нужно рассмотреть пять троек матриц  $b_{k|Q}$ , где индекс  $k$  пробегает номера образующих группы кос ( $k = 1, 2, 3$ ), а индекс  $Q$  — разбиения 4. Размеры матрицы суть размерности пространств соответствующих представлений симметрической группы из табл. 9  $1 \times 1$  (для  $[4]$  и  $[1^4]$ ),  $3 \times 3$  (для  $[3, 1]$  и  $[2, 1, 1]$ ) и  $2 \times 2$  (для  $[2, 2]$ ).

*Четырехнитевые групповые соотношения и уравнения на матричные элементы.* На этот раз группа кос содержит уже три образующих:  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ , которые удовлетворяют системе трех уравнений (двух одного типа, и одного — другого):

$$\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2, \quad \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_2 = \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_3 \mathbf{b}_1. \quad (2.31)$$

Таблица 8. Группа перестановок четырех элементов. Чтобы записать перестановку, нужно последовательно выбрать: 1 из 4 клеток столбца 1, затем одну из 3 смежных клеток столбца 2, затем в 1 из 2 смежных клеток столбца 3, затем смежную клетку столбца 4. Записанные слева направо последовательность букв и композиция групповых элементов в выбранных клетках задают, соответственно, 1 из  $4! = 24$  перестановок и приводящую к ней последовательность транспозиций слова  $xyzt$  (столбец 5). В столбце 5 использованы соотношения группы перестановок для упрощения выражений. В рамки заключены 6 элементов, которые можно выбрать как базис в групповой алгебре. Данная таблица помогает явно записать неприводимые представления группы четырех элементов (табл. 9)

x 	y 	z 	t 	
	t $\sigma_3$	t $\sigma_3$	z $\sigma_3$	$\sigma_3$
z $\sigma_3\sigma_2$	t 	t 	y $\sigma_3$	$\sigma_3\sigma_2$
	y $\sigma_3$	t $\sigma_3$	y $\sigma_3$	$\sigma_2$
t $(\sigma_3\sigma_2)^2 = \sigma_2\sigma_3$	y 	y 	z $\sigma_3$	$\sigma_2\sigma_3$
	z $\sigma_3$	z $\sigma_3$	y $\sigma_3$	$\sigma_3\sigma_2\sigma_3$
z 	t 	t 	x $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$	$\sigma_3\sigma_2\sigma_1$
	x $\sigma_3$	x $\sigma_3$	t $\sigma_3$	$\sigma_3 \cdot \sigma_3\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1$
t $\sigma_3\sigma_2$	x 	z 	x $\sigma_3\sigma_2 \cdot \sigma_3\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1$	$\sigma_2 \cdot \sigma_3\sigma_2\sigma_1$
	z $\sigma_3$	z $\sigma_3$	x $\sigma_3$	$\sigma_2 \cdot \sigma_3\sigma_2\sigma_1$
x $\sigma_2\sigma_3$	z 	z 	t $\sigma_2\sigma_3 \cdot \sigma_3\sigma_2\sigma_1 = \sigma_1$	$\sigma_1$
	t $\sigma_3$	t $\sigma_3$	z $\sigma_3\sigma_2\sigma_3 \cdot \sigma_3\sigma_2\sigma_1 = \sigma_3\sigma_1$	$\sigma_3\sigma_1$

z $(\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^2$	t 	t $\sigma_3$	x $\sigma_3\sigma_2 \cdot \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2$
	x $\sigma_3\sigma_2$	y 	x $\sigma_3\sigma_2 \cdot \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3\sigma_1\sigma_2$
	y 	t $\sigma_3$	$\sigma_2 \cdot \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3\sigma_1\sigma_2$
	x $\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2$	x $\sigma_3$	$\sigma_2\sigma_3 \cdot \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2$
t $(\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^3$	x 	z $\sigma_3$	$\sigma_3\sigma_2\sigma_3 \cdot \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$
	y $\sigma_3\sigma_2$	z 	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$
	z $\sigma_3$	x $\sigma_3$	$\sigma_3 \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3$
	x $\sigma_2\sigma_3$	x $\sigma_3$	$\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \cdot \sigma_3\sigma_2$
$\sigma_1\sigma_2\sigma_3$	z 	y $\sigma_3$	$\sigma_2 \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3$
	y $\sigma_3$	x $\sigma_3$	$\sigma_2\sigma_3 \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3$
$\sigma_3\sigma_2\sigma_3$	z 	y $\sigma_3$	$\sigma_3\sigma_2\sigma_3 \cdot \sigma_1\sigma_2\sigma_3$
	x $\sigma_3$	x $\sigma_3$	

Таблица 9. Всевозможные (с точностью до изоморфизмов) неприводимые представления группы перестановок 4 элементов. Подсчет размерностей:  $4! = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 \cdot 1$ . Выражения в таблице нужны нам для записи специальных неприводимых представлений группы кос

Обозначение	Кратность	Вектор	Тождества	Размерность	Базис
[4] 	1	$\sum_{\sigma \in \text{perm}(4)} \sigma(xyzt)$	$\sigma_1 X = \sigma_2 X = \sigma_3 X$ $\parallel$ $X$	1	$X$
[311] 	3	$\sum_{\sigma \in \text{perm}(3)} \{a_x x \sigma(yzt) + a_y y \sigma(ztx) + a_z \sigma(tx y) + a_t \sigma(xyz)\},$ $a_x + a_y + a_z + a_t = 0$	$\sigma_1 X = \sigma_2 X = X,$ $(\parallel + \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2) X = 0$	3	$X,$ $\sigma_3 X,$ $\sigma_2 \sigma_3 X$
[2, 2] 	2	$\sum_{\sigma, \sigma' \in \text{perm}(2)} \{a_1 (\sigma(xy)\sigma'(zt) + \sigma(zt)\sigma'(xy)) + a_2 (\sigma(xz)\sigma'(yt) + \sigma(yt)\sigma'(zx)) + a_3 (\sigma(xt)\sigma'(yz) + \sigma(yz)\sigma'(xt))\},$ $a_1 + a_2 + a_3 = 0$	$\sigma_1 X = \sigma_3 X = X,$ $(\parallel + \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2) X = 0$ $\Downarrow$ $\sigma_2 \sigma_3 \sigma_1 \sigma_2 X = X,$ $(\parallel + \sigma_2 + \sigma_3 \sigma_2) X = 0$	2	$X,$ $\sigma_2 X$
[2, 1, 1] 	3	$\sum_{\sigma \in \text{perm}(3)} (-1)^{\text{par}(\sigma)} \{a_x x \sigma(yzt) + a_y y \sigma(ztx) + a_z z \sigma(txy) + a_t t \sigma(xyz)\},$ $a_x + a_y + a_z + a_t = 0$	$\sigma_1 X = \sigma_2 X = X,$ $(\parallel + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3) X = 0$	3	$X,$ $\sigma_3 X,$ $\sigma_2 \sigma_3 X$
[1 <sup>4</sup> ] 	1	$\sum_{\sigma \in \text{perm}(4)} \sigma(xyzt)$	$\sigma_1 X = \sigma_2 X = \sigma_3 X$ $\parallel$ $-X$	1	$X$



*Дальняя коммутация, слабый анзац для собственных значений и блочная структура.* Впервые для четырехнитевых кос возникает последнее из условий (2.31) — свойство *дальней коммутации*. Из него следует связь между числом различных собственных значений  $b_1$  и размером недиагональных блоков в матрице  $b_3$ : в базисе, где  $b_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ ,

$$(b_3 b_1 - b_3 b_1)_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j)(b_3)_{ij} = 0 \Rightarrow (b_3)_{ij} = 0 \text{ или } \lambda_i = \lambda_j. \quad (2.32)$$

Со схожим явлением мы столкнулись в п. 2.2.3, где тип вырождения собственных значений приводил к различным решениям для весовых коэффициентов. Оказывается, что принятый тогда анзац и здесь позволяет получить *интересное* решение для матриц образующих: нетривиальное и обобщаемое на произвольное число нитей в косе. Для вычисления матриц образующих нам понадобится *слабый* анзац (который в случае трехнитевых кос в явном виде не обсуждался): число различных собственных значений и их кратности в каждом представлении такие же, как для соответствующего представления симметрической группы (т.е. интересующие нас представления группы кос суть представления алгебры Гекке). Тогда кратности собственных значений можно вычислить, явно записав матрицы образующих симметрической группы  $\sigma$  с помощью табл. 9. Результат — различные собственные значения интересующих нас представлений группы кос в рамках слабого анзаца записаны в столбце 3 табл. 10.

Заметим, что уже для группы перестановок наборы собственных значений различны для пар представлений одной размерности ( $\dim_{[4]} = \dim_{[1^4]} = 1$ ,  $\dim_{[3,1]} = \dim_{[2,1,1]} = 3$ ), поэтому все перечисленные представления попарно неизоморфны.

Если, как и прежде, выбрать базис, где матрица оператора  $b_1$  в каждом представлении диагональна, то условие дальней коммутации вместе с предположениями в табл. 10 ограничивает расположение ненулевых внедиагональных элементов в матрице оператора  $b_3$ . Так, в каждой матрице  $3 \times 3$  ( $b_{3|Q}$ ,

**Таблица 10. Собственные значения образующих группы перестановок из трех элементов (столбец 2) и группы трехнитевых кос в соответствующих специальных представлениях (столбец 3)**

Разбиения	Собственные значения, $\lambda_Q^{(i)} \neq \lambda_Q^{(j)}$ при $i \neq j$		
	$\sigma$	$\mathfrak{b} \sim \mathfrak{h}$	
[4]	1	$\lambda_{[4]}$	$\lambda$
[3, 1]	1, 1, -1	$\lambda_{[3,1],1}, \lambda_{[3,1],1}, \lambda_{[3,1],2}$	$\lambda, \lambda, \mu$
[2, 2]	1, -1	$\lambda_{[2,2],1}, \lambda_{[2,2],2}$	$\lambda, \mu$
[2, 1, 1]	1, -1, -1	$\lambda_{[2,1,1],1}, \lambda_{[2,1,1],2}, \lambda_{[2,1,1],2}$	$\lambda, \mu, \mu$
[1 <sup>4</sup> ]	-1	$\lambda_{[1^4]}$	$\mu$

$Q = [3, 1], [2, 1, 1]$ ) ненулевым может быть блок  $2 \times 2$  в тех же строках и столбцах, что пара совпадающих собственных значений в соответствующей  $b_{1|Q}$ . Матрица  $2 \times 2$  ( $b_{3|[2,2]}$ ) должна быть диагональна. С помощью табл. 9 можно убедиться, что теми же свойствами обладают аналогичные матрицы для группы перестановок.

*Уравнения Янга–Бакстера и собственные значения.* В случае четырех нитей в косе к каждому из соотношений (2.31) можно применить цепочку следствий (2.13). Следовательно, операторы всяких двух смежных, а значит, и всех трех перекрестков связаны сопряжением:  $b_{k+1} = U b_k U^{-1}$  ( $k = 1, 2$ ) для некоторой  $U$ . В частности, собственные значения различных образующих в каждом представлении попарно совпадают с учетом кратностей.

*Уравнения Янга–Бакстера и универсальные блоки.* Напомним, что соотношениям (2.31) удовлетворяют также образующие группы перестановок, так что их матрицы в каждом представлении являются частным решением этих соотношений. Искомые матрицы образующих группы кос имеют другие собственные значения. Однако мы можем предположить, что расположение ненулевых матричных элементов совпадает для обеих групп. Если решение (2.31) такого вида найдется для каждого  $Q$  — разбиения 4, то мы получим все (с точностью до изоморфизмов) интересующие нас представления группы четырехнитевых кос.

Как и прежде, будем считать, что в выбранном базисе все матрицы симметричны, и будем рассматривать только нетривиальные решения групповых соотношений. Вид матриц образующих группы перестановок можно определить из табл. 9. В предположении, что то же расположение ненулевых элементов сохраняется в искомым матрицах для группы кос, получаем нетривиальные ограничения на вид матриц размеров  $3 \times 3$  (где  $Q = [3, 1], [2, 1, 1]$ , а  $\mathbb{I}^{2 \times 2}$  и  $X_{k|Q}$  — единичная матрица и неизвестные блоки  $2 \times 2$ ):

$$\begin{aligned} b_{1|[3,1]} &= \begin{pmatrix} \lambda_{[3,1],1} \mathbb{I}^{2 \times 2} & \\ & \lambda_{[3,1],2} \end{pmatrix}, \\ b_{2|[3,1]} &= \begin{pmatrix} \lambda_{[3,1],1} & \\ X_{2|Q}^{2 \times 2} & \end{pmatrix}, \\ b_{3|[3,1]} &= \begin{pmatrix} X_{3|Q}^{2 \times 2} & \\ & \lambda_{[3,1],1} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Для каждой пары  $(b_1, b_2)$  (2.31) дает уравнение на блок  $2 \times 2$ , которое совпадает с (2.12), так что можно сразу воспользоваться решением через собственные значения (2.17). Для пары  $(b_{2|[2,2]}, b_{3|[2,2]})$  матриц  $2 \times 2$  из (2.12) следует  $b_{3|[2,2]} = b_{1|[2,2]}$ . Для пар  $(b_{2|Q}, b_{3|Q})$  ( $Q = [3, 1], [2, 1, 1]$ ) матриц  $3 \times 3$  (2.12) дает уравнения, решением которых является новый блок  $2 \times 2$ . Оба

типа блоков  $2 \times 2$  имеют вид ( $p_n$  определены в (2.18)):

$$B^{(n)}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{p_n} \begin{pmatrix} \lambda_2^n & z_n \\ z_n & -(-\lambda_1)^n \end{pmatrix}, \quad \text{где } z_n^2 = -\lambda_1 \lambda_2 p_{n-1} p_{n+1} \quad (2.34)$$

— для  $n = 2$  и  $n = 3$  соответственно. Таким образом, получаем явный вид матриц образующих группы кос во всех интересующих нас представлениях ( $\mathbb{I}$  и все  $B$  обозначают блоки  $2 \times 2$ ):

$$\begin{aligned} b_{1|[4]} &= b_{2|[4]} = b_{3|[4]} = \lambda_{[4]}, \\ b_{1|[3,1]} &= \begin{pmatrix} \lambda_{[3,1],1} \mathbb{I} & \\ & \lambda_{[3,1],2} \end{pmatrix}, \quad b_{2|[3,1]} = \begin{pmatrix} \lambda_{[3,1],1} & \\ & B^{(2)}(\lambda_{[3,1],1}, \lambda_{[3,1],2}) \end{pmatrix}, \\ b_{3|[3,1]} &= \begin{pmatrix} B^{(3)}(\lambda_{[3,1],1}, \lambda_{[3,1],2}) & \\ & \lambda_{[3,1],1} \end{pmatrix}, \\ b_{1|[2,2]} &= b_{3|[2,2]} = \begin{pmatrix} \lambda_{[2,2],1} & \\ & \lambda_{[2,2],2} \end{pmatrix}, \quad b_{2|[2,2]} = B^{(2)}(\lambda_{[2,2],1}, \lambda_{[2,2],2}), \quad (2.35) \\ b_{1|[2,1,1]} &= \begin{pmatrix} \lambda_{[2,1,1],2} \mathbb{I} & \\ & \lambda_{[2,1,1],1} \end{pmatrix}, \quad b_{2|[2,1,1]} = \begin{pmatrix} \lambda_{[2,1,1],2} & \\ & B^{(2)}(\lambda_{[2,1,1],1}, \lambda_{[2,1,1],2}) \end{pmatrix}, \\ b_{3|[2,1,1]} &= \begin{pmatrix} B^{(3)}(\lambda_{[2,1,1],1}, \lambda_{[2,1,1],2}) & \\ & \lambda_{[2,1,1],2} \end{pmatrix}, \\ b_{1|[1^4]} &= b_{2|[1^4]} = b_{3|[1^4]} = \lambda_{[1^4]}. \end{aligned}$$

Каждая тройка матриц задает представление алгебры Гекке — и тем самым специальное представление группы кос, поскольку они удовлетворяют всем групповым соотношениям.

*Сильный анзац для четырехнитевых собственных значений.* Как и для трехнитевых кос (п. 2.2.3), каждое из условий на рис. 2, II а, б и 3 порождает бесконечную систему соотношений между собственными значениями образующих и весовыми коэффициентами. Причем в качестве отделяемой либо стабилизируемой косы теперь может стоять произвольная трехнитевая коса.

И снова полученная система условий имеет нетривиальное решение только при вырождении собственных значений. Теперь, чтобы получить аналог решения для трехнитевых весовых коэффициентов, необходимо принять *сильный анзац* для собственных значений: различные собственные значения образующих распределены между всеми интересующими нас неприводимыми представлениями группы кос так же, как в случае симметрической группы; тем самым все эти представления являются неприводимыми представлениями алгебры Гекке с одним и тем же параметром.

*Решение для четырехнитевых весовых коэффициентов.* Распределение собственных значений в рамках сильного анзаца записано в столбце 4 табл. 10.

Можно показать, что тогда условие на рис. 3 для четырехнитевой косы с несвязной нитью эквивалентно системе трех соотношений:

$$\begin{aligned} \chi\chi_{[3]} &= \chi_{[4]} + \chi_{[3,1]}, \\ \chi\chi_{[2,1]} &= \chi_{[3,1]} + \chi_{[2,2]} + \chi_{[2,1,1]}, \\ \chi\chi_{[1^3]} &= \chi_{[2,1,1]} + \chi_{[1^4]}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Это следует из выражения (2.28) для трехнитевой косы и явного вида (2.35) четырехнитевых матриц  $b_{1|Q}$ ,  $b_{2|Q}$  (где в указанных предположениях матрицы  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$  и блоки  $2 \times 2$  в матрицах  $3 \times 3$  равны соответствующим трехнитевым матрицам, а в матрицах  $3 \times 3$ , кроме того, отличен от нуля только первый элемент на диагонали).

Условия стабилизации на рис. 2, II для четырехнитевой косы содержат еще 2 независимых уравнения. В этом можно убедиться так же, как в случае трехнитевых кос: явно записав это условие для произвольной трехнитевой косы с помощью (2.28) и (2.35). Менее явный, но более общий (для любого числа нитей) вывод того же факта опирается на соотношения алгебры Гекке. Вывод становится более прозрачным в тензорном представлении операторов перекрестков — как мы покажем в п. 3.4.1 (эквивалентность обоих представлений обсуждается в разд. 4). В качестве пары линейно независимых следствий соотношения на рис. 2, II можно выбрать, например,

$$\begin{aligned} (\text{рис. 2}), \overline{123} \sim \overline{12}: \lambda^3\chi_{[4]} + \lambda^2\mu\chi_{[3,1]} + \lambda\mu^2\chi_{[2,1,1]} + \mu^3\chi_{[1^4]} &= \\ &= \lambda^2\chi_{[3]} + \lambda\mu\chi_{[2,1]} + \mu^2\chi_{[1^3]}, \\ (\text{рис. 2}), \overline{1123} \sim \overline{112}: \lambda^2\chi_{[4]} + \frac{(\lambda + \mu)(\lambda^3 - \mu^3)}{\mu(\lambda - \mu)}\chi_{[3,1]} + \frac{\lambda^5 - \mu^5}{\lambda\mu(\lambda - \mu)}\chi_{[2,2]} + \\ + \frac{(\lambda + \mu)(\lambda^3 - \mu^3)}{\lambda(\lambda - \mu)}\chi_{[2,1,1]} + \mu^2\chi_{[1^4]} &= \lambda\chi_{[3]} + \frac{(\lambda^4 - \mu^4)}{\lambda\mu(\lambda - \mu)}\chi_{[2,1]} + \mu\chi_{[1^3]}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Решение системы (2.37), (2.36) запишется через введенные в (2.18)  $p_n$  как

$$\begin{aligned} \chi_{[4]} &= \frac{\chi(p_1 - \mu\chi)(p_2 + \mu^2\chi)(p_3 - \mu^3\chi)}{p_1p_2p_3}, \\ \chi_{[3,1]} &= \frac{\chi((p_1 - \mu\chi)(p_2 + \mu^2\chi)\lambda\chi - p_1)}{p_2p_4}, \\ \chi_{[2,2]} &= \frac{\lambda\mu\chi_1^2(p_1 - \mu\chi)(\lambda\chi - p_1)}{p_2^2p_3}, \\ \chi_{[2,1,1]} &= -\frac{\chi(p_1 - \mu\chi)(\lambda\chi - p_1)(\lambda^2\chi - p_2)}{p_2p_4}, \\ \chi_{[1^4]} &= \frac{\chi(\lambda\chi - p_1)(\lambda^2\chi - p_2)(\lambda^3\chi - p_3)}{p_2p_3p_4}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

*Инвариант четырехнитевого узла.* В качестве окончательного ответа для инварианта узла или зацепления — замыкания четырехнитевой косы ((2.29), см. пример на рис. 4) — получаем

$$H^{\overline{\{\nu_{i,1}\nu_{i,2}\nu_{i,3}\}}_{i=1}^L} = \sum_{Q \vdash 4} \chi_Q \operatorname{Tr} \prod_{i=1}^L \left\{ b_{1|Q}^{\nu_{i,1}} b_{2|Q}^{\nu_{i,2}} b_{3|Q}^{\nu_{i,3}} \right\}, \quad (2.39)$$

где  $Q \vdash 4$  означает, что индекс  $Q$  пробегает все разбиения 4 ( $Q \in \{[4], [3, 1], [2, 2], [2, 1, 1], [1^4]\}$ ), матрицы образующих группы кос  $\mathbf{b}_{k|Q}$  в соответствующих неприводимых представлениях для  $k = 1, 2, 3$  задаются формулами (2.35) и (2.34) для  $n = 2, 3$ , а весовые коэффициенты  $\chi_Q$  перед неприводимыми представлениями заданы выражениями (2.38).

**2.3. Что это за весовые коэффициенты?** Вычисленные выше матрицы перекрестков с самого начала вводились как матрицы специальных неприводимых представлений образующих группы кос. Весовые же коэффициенты при различных представлениях в окончательных выражениях подбирались так, чтобы ответ обладал всеми необходимыми свойствами (топологической инвариантности и умножения для несвязного объединения). На самом деле подобранные коэффициенты «оказались» весьма специальными величинами. Ряд свойств, существенных для данной конструкции, присущ этим величинам в силу их независимого определения. Появление этих величин при вычислении инварианта узла становится менее загадочным при тензорном ( $\mathcal{R}$ -матричном) подходе к той же задаче. Мы убедимся в этом и назовем вещи своими именами в примерах из разд. 4. А пока обратим внимание на то, что уже сами выражения для весовых коэффициентов выглядят отнюдь не случайными.

Прежде всего, если собственные значения такие, как для группы перестановок ( $\lambda = -\mu = 1$ ), а значение инварианта для тривиального узла есть целое число ( $\chi \equiv \chi_{[1]} = N \in \mathbb{Z}$ ), то все коэффициенты  $\chi_Q$  в (2.7), (2.27), (2.38) суть также целые числа (в этом можно убедиться из анализа делимости числителей на знаменатели):

$$\begin{aligned} \chi_{[1]} &= N, \quad \chi_{[2]} = \frac{N(N+1)}{2}, \quad \chi_{[1,1]} = \frac{N(N-1)}{2}, \quad \chi_{[3]} = \frac{N(N+1)(N+2)}{6}, \\ \chi_{[2,1]} &= \frac{N(N+1)(N-1)}{3}, \quad \chi_{[1^3]} = \frac{N(N-1)(N-2)}{6}, \\ \chi_{[4]} &= \frac{N(N+1)(N+2)(N+3)}{24}, \quad \chi_{[3,1]} = \frac{N(N+1)(N+2)(N-1)}{8}, \\ \chi_{[2,2]} &= \frac{N^2(N+1)(N-1)}{3}, \\ \chi_{[2,1,1]} &= \frac{N(N+1)(N-1)(N-2)}{8}, \quad \chi_{[1^4]} = \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{24}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Далее можно показать, что для собственных значений алгебры Гекке  $\lambda = q$ ,  $\mu = -q^{-1}$  все  $\chi_Q$  будут полиномами Лорана по  $q$  с целыми неотрицательными коэффициентами, если инвариант тривиального узла есть квантовое число  $[N]_q$  вида (1.1). В последнем случае выражения для  $\chi(N, q)$  будут получаться как «деформации» (2.40) путем замен  $(N - k) \rightarrow [N - k]_q$  для  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$  для каждого множителя в числителе и  $2 \rightarrow [2]_q$ ,  $3 \rightarrow [3]_q$ ,  $6 \rightarrow [1]_q [2]_q [3]_q \equiv [3]_q!$ ,  $24 \rightarrow [1]_q [2]_q [3]_q [4]_q \equiv [4]_q!$ ,  $8 \rightarrow [2]_q [4]_q$  в знаменателях. Если же ввести переменную  $A = q^N$ , то  $\chi_Q$  окажутся частными случаями функций Шура, откуда, в частности, следует предыдущее свойство (п. 1.3.2).

Наконец, в контексте инвариантов узлов наиболее значительно, что для  $\chi_Q$  существуют *формулы умножения*: частными случаями являются (2.24), (2.36). Эти формулы, кроме прочего, обеспечивают свойство умножения инвариантов для несвязной суммы узлов (зацеплений), как мы обсудили в примерах выше.

Перечисленные свойства говорят о происхождении величин  $\chi_Q$  из теории представлений: на самом деле они являются характеристиками алгебры Ли  $\mathfrak{su}_N$  (см. разд. 4).

### 3. ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ В ТЕРМИНАХ $\mathcal{R}$ -МАТРИЦ

**3.1. Инвариант узла как инвариант алгебры Ли. 3.1.1. При чем здесь характеры?** Итак, в разд. 2 весовые коэффициенты перед неприводимыми представлениями алгебры Гекке, необходимые для топологической инвариантности ответа, «неожиданно» оказались известными специальными функциями теории представлений  $\mathfrak{su}_N$ .

В настоящем разделе мы разберем другой подход к вычислению инварианта узла, в котором этот факт не будет выглядеть случайным. Теперь матрицы перекрестков с самого начала будут иметь непосредственное отношение к представлениям  $\mathfrak{su}_N$ . В конце концов (в разд. 4) мы снова придем к выражениям (2.6), (2.28) с теми же матрицами операторов перекрестков и характеров, однако смысл этих матриц будет иным. В некотором смысле два обсуждаемых подхода являются двойственными друг другу, а их точное соответствие можно рассматривать как обобщенную дуальность Шура–Вейля между представлениями симметрических и специальных унитарных групп [3, 4].

**3.1.2. Оператор перекрестка как инвариантный оператор.** В разд. 2 с каждой нитью косы был связан формальный элемент (буква), с каждым сечением косы между перекрестками — слово. Тогда с перекрестком было бы естественно связать оператор транспозиции (перестановки соседних букв), однако интересные инварианты узлов получались для «обобщенных» транспозиций: образующих алгебры Гекке.

При подходе, о котором пойдет речь ниже, с каждой нитью косы будет связано целое векторное пространство — пространство представления алгебры Ли (точнее, квантовой обертывающей этой, а в различных вариантах конструкции — более общей алгебры, см. разд. 5). Паре нитей будет отвечать тензорное произведение этих двух пространств, и на этом произведении будет действовать оператор перекрестка как линейный оператор.

Определяющее свойство оператора перекрестка состоит в его инвариантности относительно действия алгебры Ли на паре нитей, т. е. на тензорном произведении представлений.

Ниже мы приведем более точную формулировку определяющего свойства со всеми необходимыми определениями. При построении инвариантов узлов это свойство играет двойную роль:

1) благодаря условию инвариантности будет достаточно вычислить матричные элементы операторов перекрестков лишь на небольшом числе базисных векторов (остальные будут равны уже вычисленным);

2) для инвариантных операторов будет автоматически выполнено одно из условий топологической инвариантности: уравнение Янга–Бакстера  $\cong (2.12) \cong \text{RPI}$  на рис. 9.

Благодаря (1) инвариант запишется в виде разложения по характеристам: через следы небольших матриц, действующих на выбранные базисные векторы, коэффициенты которых «перечисляют» остальные базисные векторы (см. разд. 4). Наблюдение (2) является замечательным фактом из теории представлений (см. п. 3.2), в силу которого инвариантные операторы заслужили особый интерес и отдельное название:  $\mathcal{R}$ -матрицы [3, 4].

## 3.2. Квантовая $\mathcal{R}$ -матрица — обобщенный оператор перестановки.

**3.2.1. Оператор перестановки как инвариантный и «топологический» оператор.** Симметрия коумножения и первое свойство оператора перекрестка. Тензорное умножение представлений — это больше, чем тензорное умножение простых линейных пространств: нужно дополнительно определить линейные операторы, задающие действие элементов исходной алгебры на пространстве–произведении — так, чтобы последнее также оказалось пространством представления. В теории представлений алгебр Ли [29, 31] для этого используют определение операторов алгебры через изменение векторов пространства–представления на пространстве  $V$  при бесконечно малом групповом преобразовании  $x \mapsto G_\varepsilon x \sim x + \varepsilon gx$ , что приводит к правилу Лейбница:

$$\Delta(g)(x \otimes y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \{ (x + \varepsilon gx) \otimes (y + \varepsilon gy) - x \otimes y \} = x \otimes gy + y \otimes gx. \quad (3.1)$$

Здесь линейные операторы  $g$  и  $\Delta(g)$  суть образы одного и того же элемента алгебры в представлениях с пространствами  $V$  и  $V \otimes V$  соответственно. Правило (3.1) симметрично относительно перестановки тензорных компонент

$(\mathbb{P} : x \otimes y \mapsto y \otimes x)$ :

$$\begin{aligned} \Delta(g)\mathbb{P}(x \otimes y) &= \Delta(g)(y \otimes x) = gy \otimes x + y \otimes gx = \\ &= \mathbb{P}(x \otimes gy) + \mathbb{P}(gx \otimes y) = \mathbb{P}\Delta(g)(x \otimes y). \end{aligned} \quad (3.2)$$

В этом смысле говорят, что  $\mathbb{P}$  является инвариантным оператором, и пишут:  $\mathbb{P}\Delta = \Delta\mathbb{P}$ . Заданное в (3.1) отображение  $\Delta : g \mapsto \Delta(g)$  называется *коумножением*. В частности, (3.2) означает, что матрица оператора  $\mathbb{P}$  на  $V \otimes V$  должна коммутировать со *всеми* матрицами  $\Delta(g)$  для данной алгебры. Кроме того, если  $Y = \mathbb{P}X$  для  $X, Y \in V \otimes V$ , то  $\Delta(g)Y = \mathbb{P}\Delta(g)X$  для *всех*  $\Delta(g)$ . То есть если известно действие  $\Delta(g)$  на векторах  $V \otimes V$ , то вычислить образ  $\mathbb{P}X$  для *некоторого* вектора  $X$  достаточно, чтобы вычислить образы *всех* векторов подпространства, порожденного  $X$  под действием всех  $\Delta(g)$ .

Таким образом, оператор перестановки обладает одним из двух определяющих свойств оператора перекрестка.

*Ассоциативность коумножения и второе свойство оператора перекрестка.* Можно повторно использовать правило Лейбница для определения \* отображения  $\Delta^{\circ 2} = \Delta(\Delta)$  и операторов  $\Delta^{\circ 2}(g)$  на пространстве  $V \otimes V \otimes V$ . Тогда можно показать, что оба оператора  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{I} \equiv \mathbb{P}$  и  $\mathbb{P}_2 \equiv \mathbb{P} \otimes \mathbb{I}$  (где  $\mathbb{I}$  — единичный оператор на  $V$ ) в описанном выше смысле инвариантны относительно действия алгебры  $\mathfrak{g}$  на  $V \otimes V \otimes V$ . Более того, пара инвариантных операторов на тройном тензорном произведении удовлетворяет соотношению группы перестановок  $\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_2\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2$ , которое имеет смысл топологического условия на рис. 1, I.

*Наблюдение и проблема.*

- Операторы перестановки в теории представлений алгебр Ли обладают двумя существенными свойствами операторов перекрестков, входящих в инварианты узлов.

- Однако, как и в случае группы *kos*, операторы перестановки недостаточно интересны, чтобы получить интересные инварианты узлов. Именно этой цели служит нетривиальное обобщение описанной выше конструкции. Знакомство с ним мы начнем с простейшего примера.

**3.2.2. Пример нетривиального инвариантного оператора.** Сейчас мы разберем простой пример действия алгебры на тензорном квадрате с *нарушением* правила Лейбница — так, что в результате возникнет нетривиальный инвариантный оператор.

Рассмотрим алгебру  $\mathfrak{su}_2$ : линейное пространство, натянутое на три элемента  $E$ ,  $F$  и  $H$ , на котором задана антисимметричная билинейная операция

---

\*Корректность такого определения обсуждается в п. 3.2.4.



(коммутатор) с выполнением соотношений

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = H. \quad (3.3)$$

В простейшем (фундаментальном) представлении элементам алгебры  $\mathfrak{su}_2$  соответствуют линейные операторы на двумерном пространстве, причем образующие в некотором (стандартном) базисе  $\{x_+ \leftrightarrow +, x_- \leftrightarrow -\}$  задаются матрицами

$$H = \begin{array}{cc|c} + & - & \\ \hline 1 & 0 & + \\ 0 & -1 & - \end{array}, \quad F = \begin{array}{cc|c} + & - & \\ \hline 0 & 1 & + \\ 0 & 0 & - \end{array}, \quad E = \begin{array}{cc|c} + & - & \\ \hline 0 & 0 & + \\ 1 & 0 & - \end{array}. \quad (3.4)$$

Теперь попытаемся задать действие алгебры на тензорном квадрате исходного пространства  $V \otimes V$ . В этом случае *стандартным* назовем базис из элементов  $\{x_+ \otimes x_+ \leftrightarrow ++, x_+ \otimes x_- \leftrightarrow +-, x_- \otimes x_+ \leftrightarrow -+, x_- \otimes x_- \leftrightarrow --\}$ . Предположим, что в стандартном базисе у линейных операторов  $\Delta H, \Delta E, \Delta F$ , соответствующих образующим алгебры, отличны от нуля в точности те же элементы, что и при действии алгебры по правилу Лейбница, а именно:

$$\Delta H = \begin{array}{cccc|c} ++ & +- & -+ & -- & \\ \hline h_1 & 0 & 0 & 0 & ++ \\ 0 & h_2 & 0 & 0 & +- \\ 0 & 0 & h_3 & 0 & -+ \\ 0 & 0 & 0 & h_4 & -- \end{array}, \quad \Delta F = \begin{array}{cccc|c} ++ & +- & -+ & -- & \\ \hline 0 & f_1 & f_2 & 0 & ++ \\ 0 & 0 & 0 & f_3 & +- \\ 0 & 0 & 0 & f_4 & -+ \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -- \end{array}, \quad (3.5)$$

$$\Delta E = \begin{array}{cccc|c} ++ & +- & -+ & -- & \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & ++ \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & +- \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & -+ \\ 0 & e_3 & e_4 & 0 & -- \end{array},$$

а значения ненулевых матричных элементов пока оставим неопределенными. Частный случай  $h_1 = h_4 = 2, h_2 = h_3 = 0$  и  $e_i = f_i = 1$  для  $i = \overline{1, 4}$  отвечает действию по правилу Лейбница. Далее потребуем, чтобы действие алгебры сохраняло некоторый оператор, *похожий* на оператор перестановки. Пусть этот оператор имеет набор собственных значений  $(q, q, q, -1/q)$  вместо  $(1, 1, 1, -1)$  (ср. с табл. 7, 10), причем в стандартном базисе два различных значения «перемешаны» в симметричном блоке  $2 \times 2$ :

$$R = \begin{array}{cccc|c} ++ & +- & -+ & -- & \\ \hline q & 0 & 0 & 0 & ++ \\ 0 & r_1 & r & 0 & +- \\ 0 & r & r_2 & 0 & -+ \\ 0 & 0 & 0 & q & -- \end{array}. \quad (3.6)$$

То есть элементы удовлетворяют соотношениям

$$r_1 + r_2 = q - q^{-1}, \quad r_1 r_2 - r^2 = 0. \quad (3.7)$$

Первое из условий инвариантности требует равенства двух диагональных элементов  $\Delta H$ :

$$[\Delta H, R] = 0 \Rightarrow h_2 = h_3 \quad (3.8)$$

(если отбросить тривиальное решение  $r = 0, r_1 = r_2$ ). Два других позволяют выразить отличные от нуля матричные элементы  $\Delta E$  и  $\Delta F$  через элементы  $\mathcal{R}$ :

$$\begin{cases} [\Delta E, R] = 0, \\ [\Delta F, R] = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{e_2}{e_1} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{e_3}{e_4} = \frac{f_3}{f_4} = \frac{q - r_1}{r}. \quad (3.9)$$

Особенно простой вид имеет решение (3.6), (3.9) с  $r = 1$

$$r = 1, \quad r_2 = 0, \quad r_1 = q - q^{-1}, \quad \frac{e_1}{e_2} = \frac{e_3}{e_4} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{f_3}{f_4} = q \quad (3.10)$$

(с точностью до возможной замены  $r_1 \leftrightarrow r_2$ ). Общее решение при  $r \neq 1$  принимает тот же вид после замены базиса матрицей с недиагональным блоком вида  $\begin{pmatrix} r_2/(1-r) & 0 \\ r_2/(1-r) & -1 \end{pmatrix}$ . При такой замене сохраняется общий вид операторов образующих алгебры (ниже  $i = \overline{1, 4}$ ): при условии равенства двух диагональных элементов  $\Delta H$  изменяются только значения ненулевых матричных элементов в  $\Delta E$  и  $\Delta F$ . Таким образом, можно без потери общности написать:

$$R = \begin{array}{cccc|cc} ++ & +- & -+ & -- & & \\ \hline & q & 0 & 0 & 0 & ++ \\ & 0 & q - q^{-1} & 1 & 0 & +- \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & -+ \\ & 0 & 0 & 0 & q & -- \end{array} . \quad (3.11)$$

Матрица (3.11) задает оператор, действующий на тензорном квадрате пространства фундаментального представления  $\mathfrak{su}_2$  — инвариантный относительно действия алгебры, порожденной операторами  $\Delta E, \Delta F, \Delta H$  вида (3.5) при условиях (3.10).

**3.2.3. Инвариант какой алгебры мы получили?** Однако полученные выше  $\Delta(E), \Delta(F)$  и  $\Delta(H)$  порождают не алгебру  $\mathfrak{su}_2$ .

На тензорном квадрате два из соотношений (3.3) выполняются в виде  $[\Delta E, \Delta H] = -2\Delta H$  и  $[\Delta E, \Delta F] = 2\Delta F$  при произвольных  $e_i$  и  $f_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ),

если положить  $h_1 = h_4 = 2$  и  $h_2 = h_3 = 0$  (как в правиле Лейбница). Третье соотношение при подстановке (3.10) дает

$$[\Delta F, \Delta E] = \begin{pmatrix} c_1(1+q^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{c}q^2 & \tilde{c}q & 0 \\ 0 & \tilde{c}q & \tilde{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2(1+q^2) \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

(где  $c_1 = e_2 f_2$ ,  $c_2 = e_4 f_4$  и  $\tilde{c} = c_2 - c_1$ ) и при  $c_1 = c_2 = 2/(1+q^2)$  совпадает с третьим из (3.3).

Однако уже на тензорном кубе (для матриц  $8 \times 8$ ) не удастся сохранить последнее соотношение из (3.3). Зато, отказавшись от него, можно добиться инвариантности обоих операторов  $R_1 = \mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes R$  и  $R_2 = R \otimes \mathbb{I}_{2 \times 2}$ . Пусть, как и прежде,  $[\Delta^2 H, \Delta^2 E] = -2\Delta^2 E$ ,  $[\Delta^2 H, \Delta^2 F] = 2\Delta^2 F$ , причем  $\Delta^2 H$  и положения ненулевых элементов в  $\Delta^2 E$  и  $\Delta^2 F$  определены по правилу Лейбница. Тогда в стандартном базисе из тензорных мономов  $\Delta^2 H = \text{diag}(3, 1, 1, -1, 1, -1, -1, -3)$ . В дополнение можно потребовать, чтобы матрица коммутатора  $[\Delta^2 E, \Delta^2 F]$  в том же базисе была диагональной — как при сохранении третьего из равенств (3.3). При всех этих предположениях условия инвариантности  $[\Delta^2 E, R_{1,2}] = 0$  и  $[\Delta^2 F, R_{1,2}] = 0$  имеют нетривиальное решение, из которого следует

$$[\Delta^2 E, \Delta^2 F] = c \text{diag}(1+q^2+q^4, q, q, -q, q, -q, -q, -1-q^2-q^4) \quad (3.13)$$

(коэффициент  $c$  перед матрицей выражается через неопределенные элементы матриц  $\Delta^2 E$  и  $\Delta^2 F$ ). Можно убедиться, что диагональная матрица в правой части коммутационного соотношения (3.13) есть матрица оператора  $(q^H \otimes q^H \otimes q^H - q^{-H} \otimes q^{-H} \otimes q^{-H}) / (q - q^{-1})$  в стандартном базисе.

Продолжая начатые здесь построения, можно получить интересное обобщение алгебры  $\mathfrak{su}_2$ , понятие о котором мы дадим ниже.

**3.2.4. Квантовая обертывающая.** Рассмотрим следующее обобщение алгебры  $\mathfrak{su}_2$  [3, 4]: пусть образующие  $E$ ,  $F$  и  $H$  действуют на тензорном произведении представлений по правилам

$$\Delta E = \mathbb{I} \otimes E + E \otimes q^{-H}, \quad \Delta F = q^H \otimes F + F \otimes \mathbb{I}, \quad \Delta H = \mathbb{I} \otimes H + H \otimes \mathbb{I}. \quad (3.14)$$

Строго говоря, формулы (3.14) включают элементы *не* из  $\mathfrak{su}_2$ , которая по определению содержит только линейные комбинации образующих  $E$ ,  $F$ ,  $H$ . Под оператором  $q^H$  можно понимать матричную экспоненту от  $H$  в *некотором* представлении, имея в виду, что (3.14), как и все последующие соотношения, должны выполняться в *произвольном* представлении. Иначе можно расширить изучаемое линейное пространство операторов: включить произвольные (не коммутативные) произведения  $E$ ,  $F$ ,  $H$  и произвольные формальные ряды по ним (в частности, ряд для  $q^H$ ). В обоих случаях получится

универсальная квантовая обертывающая алгебры Ли  $\mathfrak{su}_2$ ; пишут:  $U_q(\mathfrak{su}_2)$ . «Универсальная» значит, что определение не зависит от выбора представления, а «квантовая» — что в определениях появился параметр  $q$  (который также называется «квантовым»).

Правила коумножения (3.14) согласуются с « $q$ -деформированными» коммутационными соотношениями:

$$[H, E] = 2E, \quad [H, F] = -2F, \quad [E, F] = \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}}. \quad (3.15)$$

Действительно, из (3.15) следует

$$\begin{aligned} HF = F(H - 2\mathbb{I}) &\Rightarrow q^H F = Fq^{H-2} \\ \text{или } q^{-H-2}F = Fq^{-H}; \quad q^H E = E q^{H+2}; \end{aligned} \quad (3.16)$$

отсюда

$$E q^H \otimes q^{-H} F = q^H E \otimes F q^{-H} = q^{-2} \cdot q^H E \otimes q^{-H} F, \quad (3.17)$$

так что

$$\begin{aligned} [\Delta E, \Delta F] &= q^H \otimes [E, F] + [E, F] \otimes q^{-H} = \\ &= \frac{q^H \otimes q^H - q^{-H} \otimes q^{-H}}{q - q^{-1}} = \Delta \left( \frac{q^H - q^{-H}}{q - q^{-1}} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

На последнем шаге мы использовали замечательное следствие (3.14):

$$\Delta(q^H) = q^H \otimes q^H, \quad (3.19)$$

в справедливости которого можно убедиться путем почленного сравнения формальных рядов для обеих частей равенства.

Более того, с помощью (3.14) можно определить действие алгебры на тензорном кубе — благодаря корректности определения

$$\Delta^{\circ 2} := \mathbb{I} \otimes \Delta = \Delta \otimes \mathbb{I}. \quad (3.20)$$

Например,

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta E) &= (\mathbb{I} \otimes \Delta) E = \Delta E \otimes \mathbb{I} + \Delta q^H \otimes E = \\ &= E \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + q^H \otimes E \otimes \mathbb{I} + q^H \otimes q^H \otimes E \end{aligned} \quad (3.21)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta E) &= (\Delta \otimes \mathbb{I}) E = E \otimes \Delta \mathbb{I} + q^H \otimes \Delta E = \\ &= E \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + q^H \otimes E \otimes \mathbb{I} + q^H \otimes q^H \otimes E, \end{aligned} \quad (3.22)$$

и аналогично для других образующих (и, следовательно, для произвольных элементов)  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . Аналогичным образом можно ввести оператор  $\Delta^{\circ n}$  ( $n \in \mathbb{Z}_+$ ), определяющий действие алгебры на старших тензорных степенях.

*Простейшие представления квантовой обертывающей.* Из (3.15) следует, что фундаментальное представление  $\mathfrak{sl}_2$  (3.4) также является представлением  $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ . В п. 3.2.4 мы частично построили тензорный квадрат и куб этого представления.

**3.2.5. Квантовая  $\mathcal{R}$ -матрица.** Нетривиальный линейный оператор, инвариантный на тензорном произведении двух пространств произвольных представлений  $V_1$  и  $V_2$  некоторой алгебры, обертывающей и т. д.  $\mathfrak{G}$ , называется универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицей [33] (см. также [3, 4, 34]):

$$\mathcal{R} : V_1 \otimes V_2 \mapsto V_2 \otimes V_1 : \quad \Delta g \mathcal{R} = \mathcal{R} \mathbb{P} \Delta g \mathbb{P}^{-1}, \quad \forall g \in \mathfrak{G}. \quad (3.23)$$

Рассматривают также подкрученную матрицу

$$R : V_1 \otimes V_2 \mapsto V_1 \otimes V_2, \quad R \equiv \mathcal{R} \mathbb{P}, \quad (3.24)$$

которая вместо (3.23) удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[\Delta g, R] = 0, \quad \forall g \in \mathfrak{G}. \quad (3.25)$$

Второе свойство оператора перекрестка (уравнение Янга–Бакстера) несколько по-разному записывается для прямой и подкрученной матриц. Соотношению группы кос (2.12) удовлетворяет подкрученная матрица  $R$  (именно ее можно связать с перекрестком в методе кос). Аналогичное соотношение для прямой матрицы  $\mathcal{R}$  мы запишем ниже в тензорном виде: рис. 9 (такая запись подходит для узловых диаграмм более общего вида). К связи между прямыми и подкрученными матрицами мы вернемся в п. 4.1.

Вопрос о существовании и единственности  $\mathcal{R}$ -матрицы для данной  $\mathfrak{G}$  — одна из основных задач теории представлений. В частности, известно, что для простой алгебры Ли  $\mathfrak{G} = \mathfrak{g}$  (3.23) не имеет решения кроме  $\mathcal{R} = \mathbb{I}$ , а для универсальной квантовой обертывающей  $\mathfrak{G} = U_q(\mathfrak{g})$  есть единственное решение для  $\mathcal{R}$ , причем  $\mathbb{I}$  решением не является [3]. В последнем случае  $\mathcal{R}$ -матрица, как и сама обертывающая, называется *универсальной квантовой*. Для этого оператора известно явное выражение в виде формального ряда по тензорным произведениям пар элементов универсальной обертывающей [4, 35].

Одно из первых и ярких приложений  $\mathcal{R}$ -матрицы получили при вычислении инвариантов торических узлов и зацеплений [36]. Мы, однако, будем придерживаться более общего и систематического подхода.

*Явные формулы для простейших  $\mathcal{R}$ -матриц.* Если в выражение для  $\mathcal{R}$ -матрицы подставить матрицы элементов обертывающей в конкретной паре

представлений, получится частное решение (3.23), которое называют  $\mathcal{R}$ -матрицей для *этой* пары представлений. В простейшем случае, для двух фундаментальных представлений  $U_q(\mathfrak{su}_2)$ ,  $\mathcal{R}$ -матрица имеет вид

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{su}_2|\square\otimes\square} = q^{\frac{1}{2}(\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}+H\otimes H)} (\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + (q - q^{-1})E\otimes F), \quad (3.26)$$

где в качестве  $E$ ,  $F$  и  $H$  нужно подставить их матрицы в фундаментальном представлении  $\mathfrak{su}_2$ : например, выражения (3.4) в стандартном базисе. В аналогичном стандартном базисе для  $\mathfrak{su}_N$  ненулевые элементы  $\mathcal{R}$ -матрицы равны [3, 37]

$$\mathcal{R}_{ii}^{ii} = q; \quad \mathcal{R}_{ij}^{ij} = 1, \quad i \neq j; \quad \mathcal{R}_{ji}^{ij} = q - q^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (3.27)$$

а элементы подкрученной матрицы  $R_{kl}^{ij} \equiv \mathcal{R}_{lk}^{ij}$  суть

$$R_{ii}^{ii} = q; \quad R_{ji}^{ij} = 1, \quad i \neq j; \quad R_{ij}^{ij} = q - q^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq N. \quad (3.28)$$

Компоненты обратного оператора

$$\tilde{\mathcal{R}} : V \otimes V \rightarrow V \otimes V, \quad \tilde{\mathcal{R}}\mathcal{R} = \mathcal{R}\tilde{\mathcal{R}} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \quad (3.29)$$

получаются из (3.27) заменой  $q \rightarrow 1/q$  и имеют вид

$$\tilde{\mathcal{R}}_{ii}^{ii} = q^{-1}; \quad \tilde{\mathcal{R}}_{ij}^{ij} = 1, \quad i \neq j; \quad \tilde{\mathcal{R}}_{ji}^{ij} = q^{-1} - q, \quad 1 \leq i < j \leq N, \quad (3.30)$$

так что

$$\sum_{a,b=1}^N \mathcal{R}_{ab}^{ij} \tilde{\mathcal{R}}_{kl}^{ab} = \sum_{a,b=1}^N \tilde{\mathcal{R}}_{ab}^{ij} \mathcal{R}_{kl}^{ab} = \delta_k^i \delta_l^j. \quad (3.31)$$

Аналогично подкрученная обратная матрица  $\tilde{R}_{kl}^{ij} = \tilde{\mathcal{R}}_{kl}^{ji}$  имеет ненулевые компоненты\*

$$R_{ii}^{ii} = q; \quad R_{ij}^{ij} = 1, \quad i \neq j; \quad R_{ji}^{ij} = q - q^{-1}, \quad 1 \leq i < j \leq N. \quad (3.32)$$

Можно непосредственно убедиться, что подкрученные матрицы  $R$  удовлетворяют всем трем соотношениям алгебры Гекке (столбец 3 табл. 2.1). В примерах из разд. 4 мы покажем, каким образом выражения (3.28) сводятся к матричным представлениям для элементов алгебры Гекке, рассмотренным в разд. 2.

С помощью семейства (3.27), (3.29) решений уравнения Янга–Бакстера можно получить  $\mathcal{R}$ -матричное представление для (нераскрашенных) полиномов ХОМФЛИ [20, 38, 39]. В п. 3.5 мы явно проделаем соответствующее вычисление для узла-трилистника.

---

\*Обратите внимание на различие в определениях прямой и обратной подкрученных матриц: первая получена перестановкой пары *верхних*, а вторая — пары *нижних* индексов. Причина такого соглашения будет ясна в п. 4.2.

**3.3. Инвариант связки из  $\mathcal{R}$ -матриц. 3.3.1. Операторы перекрестков для разрезанной диаграммы.** Прежде всего необходимо связать с узлом пространства, на которых будут действовать  $\mathcal{R}$ -матрицы. В разд. 2 для этого использовалось представление узла в виде косы. Метод  $\mathcal{R}$ -матриц позволяет рассмотреть более общее представление.

**Правило 1.** Узлу  $\mathcal{K}$  (замкнутой направленной кривой в пространстве) соответствует диаграмма узла  $\mathcal{D}$  — проекция кривой на плоскость с сохранением проходов и переходов (рис. 6) в точках самопересечения.

По аналогии с косами (разд. 2) мы будем называть диаграммы топологически эквивалентных узлов *изотопными*.

Путем непрерывных преобразований плоскости проекции окрестность всякой точки самопересечения приводится к одному из двух видов на рис. 6. Соответствующие точки самопересечения мы будем называть *прямым* и *обратным* перекрестками соответственно\*. Основу конструкции для инварианта узла составят линейные операторы перекрестков, которые впоследствии окажутся  $\mathcal{R}$ -матрицами (п. 3.2.4). Для определения этих операторов было бы естественно связать векторное пространство с нитью узла, однако  $\mathcal{R}$ -матрица действует на тензорное произведение пары пространств. Аналогично в разд. 2 перекресток был связан с образующей алгебры Гекке, т. е. с обобщенной транспозицией пары смежных нитей косы. Здесь же сперва придется видоизменить диаграмму узла так, чтобы каждый перекресток превратился из точки самопересечения в точку пересечения различных компонент.

**Правило 2.** Диаграмма узла  $\mathcal{D}$  разрезается вдоль некоторых ребер так, что ни одна из компонент полученной (несвязной) диаграммы  $\mathcal{D}$  более не содержит точек самопересечения.

Разрезать внутреннее ребро, направленное от вершины  $A$  к вершине  $B$ , значит, заменить это ребро парой ребер: входящим в вершину  $A$  и выходящим из вершины  $B$  (рис. 7). Необходимое разрезание диаграммы узла можно выполнить следующим образом. Первый разрез сделаем на произвольном ребре. Далее будем следовать по ребрам диаграммы в направлении, заданном на диаграмме узла. При этом перекрестки будем проходить так, чтобы наш путь был проекцией непрерывного пути в пространстве (например, входя в любой из перекрестков на рис. 6 по ребру  $i$ , выходим по ребру  $k$ , а входя по ребру  $j$ , выходим по ребру  $l$ ). Следующий разрез сделаем прежде, чем снова

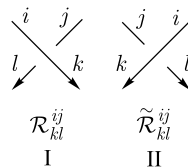


Рис. 6. Операторы прямого (I) и обратного (II) перекрестков

\*Это то же, что положительный и отрицательный перекрестки в случае группы кос (разд. 2), — различаются только принятые названия в этих двух случаях.

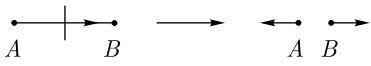


Рис. 7. Разрезание ребра на диаграмме узла

попадем на однажды пройденное ребро. Затем процедура повторяется до тех пор, пока мы не вернемся к первому разрезу. В случае зацепления описанную процедуру разрезания следует произвести для диаграммы

каждой компоненты зацепления в отдельности. Пример разрезанной таким образом диаграммы узла приведен на рис. 18. Коса, замыканием которой является данный узел или зацепление (разд. 2), — частный случай его разрезанной диаграммы.

После описанной процедуры:

**Правило 3.** *Всякой связной компоненте  $\alpha$  разрезанной диаграммы узла соответствует векторное пространство  $V_\alpha$*

и

**Правило 4.** *Прямому (рис. 6, I) и обратному (рис. 6, II) перекресткам между компонентами  $\alpha$  и  $\beta$  отвечают линейные операторы  $V_\alpha \otimes V_\beta \mapsto V_\beta \otimes V_\alpha$  —  $S^{(\alpha,\beta)}$  и  $\tilde{S}^{(\alpha,\beta)}$  соответственно.*

Компоненты  $S_{kl}^{(\alpha,\beta)ij}$  оператора имеют по четыре тензорных индекса: два нижних  $i \in V_\alpha$  и  $j \in V_\beta$  бегут в пространстве-оригинале и связаны с входящими ребрами, а два верхних  $k \in V_\alpha$  и  $l \in V_\beta$  бегут в пространстве-образе и связаны с выходящими ребрами. Те же компоненты можно нумеровать двумя мультииндексами  $I, J$ , тогда оператор перекрестка запишется в виде матрицы  $S_J^{(\alpha,\beta)I}$  размера  $\dim V_\alpha \cdot \dim V_\beta \times \dim V_\alpha \cdot \dim V_\beta$ . Далее:

**Правило 5.** *Разрезанной диаграмме соответствует тензорное произведение  $\mathcal{T}$  операторов  $S^{(\alpha,\beta)}$  и  $\tilde{S}^{(\alpha,\beta)}$  по всем перекресткам, свернутое по паре индексов всякий раз, когда эти индексы нумеруют базисные векторы, связанные с одним и тем же ребром.*

Для диаграммы узла с  $r$  разрезами  $\mathcal{T}$  есть тензор типа  $(r, r)$ : например,  $\mathcal{T}_{id}^{kc}$  для диаграммы на рис. 18, I.

**3.3.2. Второе движение Рейдемейстера: прямые и обратные перекрестки.** Теперь мы готовы наложить одно из условий топологической инвариантности: относительно преобразования RII на рис. 8. Это условие эквивалентно правилу:

**Правило 6.** *Операторы прямого ( $S^{(\alpha,\beta)}$  рис. 6, I) и обратного ( $\tilde{S}^{(\alpha,\beta)}$ , рис. 6, II) перекрестков являются взаимно обратными линейными операторами на пространствах  $V_\alpha \otimes V_\beta$  и  $V_\beta \otimes V_\alpha$ .*

**3.3.3. Третье движение Рейдемейстера: квантовые  $\mathcal{R}$ -матрицы в перекрестках.** Следующее условие топологической инвариантности, относительно преобразования RIII на рис. 9, играет центральную роль во всем по-



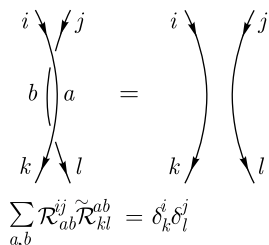


Рис. 8. Второе движение Рейдемейстера (RII)

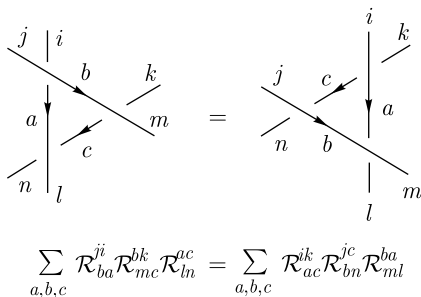


Рис. 9. Третье движение Рейдемейстера (RIII)

строении. Именно это условие совпадает с одним из основных свойств  $\mathcal{R}$ -матрицы в теории представлений (п. 3.2.4): с соотношением Янга–Бакстера (п. 3.1.2).

Примем следующий анзац.

**Правило 7.**  $V_\alpha$  есть пространство представления  $Q_\alpha$ ,

причем

**Правило 8.** На тензорном произведении  $Q_\alpha \otimes Q_\beta$  действует оператор  $S^{(\alpha,\beta)}$  —  $\mathcal{R}$ -матрица.

В случае узла для самосогласованности конструкции в конце концов потребуется положить  $Q_\alpha = Q_\beta$  во всех перекрестках. В случае зацеплений аналогичные условия достаточно наложить в перекрестках, соответствующих самопересечениям каждой компоненты зацепления (не путать со связными компонентами разрезанной диаграммы!).

**3.3.4. Квантовый инвариант связки.** По Правилу 5 разрезанию диаграммы отвечает некоторый тензор, а благодаря Правилам 8 и 6, всякой паре диаграмм, связанных последовательностью преобразований RII (см. рис. 8) и RIII (рис. 9), отвечает один и тот же тензор. Оказывается, что таким образом связана всякая пара диаграмм, которым в трехмерном пространстве отвечают изотопные связки: топологически эквивалентные наборы кривых с закрепленными концами [5]. Таким образом, верно куда более сильное утверждение:

**Правило 9.** Величина, полученная по Правилам 2–8, есть тензорный инвариант связки, представленной разрезанной диаграммой узла.

До сих пор на роль перекрестка годилось произвольное решение Янга–Бакстера (RIII на рис. 9). Однако уже в следующем разделе мы столкнемся с проблемой определения инвариантов узлов, которую удастся решить только для весьма специальных  $\mathcal{R}$ -матриц. Ниже пойдет речь о конечномерных

квантовых  $\mathcal{R}$ -матрицах из п. 3.2.1; некоторые другие примеры упоминаются в п. 5.3.1.

Как мы обсуждали в п. 3.2, для всякой простой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  и для всякой пары ее представлений  $Q_\alpha, Q_\beta$  найдется единственная *квантовая*  $\mathcal{R}$ -матрица  $\mathcal{R}_{\mathfrak{g}, Q_\alpha, Q_\beta}(q)$  (нетривиальный инвариантный оператор на паре соответствующих представлений универсальной квантовой обертывающей). Более того, известны явные выражения как для самой квантовой  $\mathcal{R}$ -матрицы, так и для обратного оператора на тензорном произведении представлений. Если подставить эти выражения в качестве операторов прямого и обратного перекрестков в описанный выше инвариант связки, получится

**Правило 10.** Для всякой пары:  $r$ -компонентная связка и представление  $Q$  алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  найдется тензор  $T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n}(\mathfrak{g}, Q|q)$ , зависящий от формального параметра  $q$ .

**3.4. Инвариант узла устроен сложнее. 3.4.1. Проблема: диаграммы с циклами.** Пришло время признаться, что в формулировке Правила 9 была допущена неточность. На самом деле, построение из п. 3.3 позволяет получить инвариант только при условии, что диаграмма связки не содержит *цикла*: замкнутой цепочки последовательно смежных ребер, которую можно пройти вдоль направления на ребрах (см. примеры ниже). На самом деле RII и RIII порождают полный набор условий топологической инвариантности именно для таких диаграмм. Однако при попытке получить таким образом инвариант узла по его диаграмме, которая неизбежно содержит циклы, возникает ряд нетривиальных проблем. Они хорошо видны в следующих примерах.

**RI: стягивание цикла.** *Первое движение Рейдемейстера* (рис. 10) является изотопией диаграммы узла и входит в полный набор условий топологической инвариантности [5]. Однако его невозможно записать как тождество

на  $\mathcal{R}$ -матрицы. Диаграмма на рис. 10 слева, согласно правилам выше, один раз разрезается вдоль петли, причем разрезанной диаграмме сопоставляется тензор  $\mathcal{R}_{bk}^{ia}$ . Теперь диаграмму следует снова «склеить» вдоль разреза. Эта операция до сих пор не была определена. Наивно хотелось бы определить «склею» как свертку  $\sum_a \mathcal{R}_{ak}^{ia} = \sum_a \mathcal{R}_{bk}^{ia} \delta_a^b$  — но такой ответ, как легко убедиться, *не равен* единичному тензору  $\delta_j^i$  — значению инварианта для изотопной диаграммы в правой части.

Выполнения равенства на рис. 10 можно добиться с помощью более общего «правила склейки»:  $\mathcal{R}_{bk}^{ia} \mapsto \mathcal{M}_{bk}^{ia} \mathcal{M}_a^b$  для диаграммы в левой части. Здесь  $\mathcal{M}$  — новый оператор тензор типа (1,1), в отличие от оператора перекрестка — тензора типа (2,2). Мы бу-

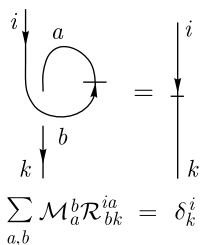


Рис. 10. Первое движение Рейдемейстера (RI)

дем называть оператор  $\mathcal{M}$  *оборотным*, поскольку он размещается на участке диаграммы, где касательный вектор делает полный оборот.

В стандартном базисе решение для  $\mathcal{M}$  находится в виде диагональной матрицы \*:  $\mathcal{M}_j^i = m_i \delta_j^i$ . Равенство под рис. 10 тогда дает

$$m_i R_{ii}^{ii} + \sum_{j=i+1}^N m_j R_{ji}^{ij} = 1 \Rightarrow qm_i + (q - q^{-1}) \times \\ \times \sum_{j=i+1}^N m_j = 1 \Rightarrow m_i = q^{2i-2N-1}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.33)$$

Всякую стягиваемую петлю на диаграмме узла можно привести (с помощью непрерывных преобразований ее окрестности в плоскости диаграммы) к одному из четырех типов (строка 1 табл. 11), и для каждого типа из RI получится свой оборотный оператор. Соответствующие уравнения на матричные элементы этих операторов вместе с их решениями в стандартном базисе (для ненулевых — диагональных элементов) приведены в табл. 11.

Таблица 11. Уравнения на оборотные операторы для различных стягиваемых петель и их решения. Рукописными буквами набраны компоненты операторов в наивной нормировке, готическими — в симметричной, которая используется при вычислении инвариантов узлов

$\mathcal{M}_a^b \mathcal{R}_{bk}^{ia} = \delta_k^i$	$\mathcal{M}'_a{}^b \mathcal{R}_{lb}^{aj} = \delta_l^j$	$\tilde{\mathcal{M}}_a^b \tilde{\mathcal{R}}_{bj}^{ia} = \delta_k^i$	$\tilde{\mathcal{M}}'^b{}_a \tilde{\mathcal{R}}_{lb}^{aj} = \delta_l^j$	
$m_i = q^{2i-2N-1}$	$m'_i = q^{-2i+1}$	$\tilde{m}_i = q^{2N-2i+1}$	$\tilde{m}'_i = q^{2i-1}$	
$\text{Tr } \mathcal{M} = q^{-N} [N]_q$	$\text{Tr } \tilde{\mathcal{M}} = q^{-N} [N]_q$	$\text{Tr } \mathcal{M}' = q^N [N]_q$	$\text{Tr } \tilde{\mathcal{M}}' = q^N [N]_q$	
$\mathfrak{M}_a^b \mathcal{R}_{bk}^{ia} = q^N \delta_k^i$	$\mathfrak{M}'_a{}^b \mathcal{R}_{lb}^{aj} = q^N \delta_l^j$	$\tilde{\mathfrak{M}}_a^b \tilde{\mathcal{R}}_{bj}^{ia} = q^{-N} \delta_k^i$	$\tilde{\mathfrak{M}}'^b{}_a \tilde{\mathcal{R}}_{lb}^{aj} = q^{-N} \delta_l^j$	$\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M}' = \tilde{\mathfrak{M}}'$
$m_i = q^{2i-N-1}$	$m'_i = q^{N-2i+1}$	$\tilde{m}_i = q^{2i-N-1}$	$\tilde{m}'_i = q^{N-2i+1}$	
$\text{Tr } \mathfrak{M} = [N]_q$	$\text{Tr } \tilde{\mathfrak{M}} = [N]_q$	$\text{Tr } \mathfrak{M}' = [N]_q$	$\text{Tr } \tilde{\mathfrak{M}}' = [N]_q$	

*RII с растаскиванием цикла.* На рис. 8 и 9 относительные направления нитей выбраны так, что рассмотренные фрагменты диаграмм не содержат циклов. В противоположном случае возникает та же проблема, что и с движе-

\* Последовательная запись уравнений для  $i = N, N - 1, \dots, 1$  дает линейную систему с треугольной матрицей.

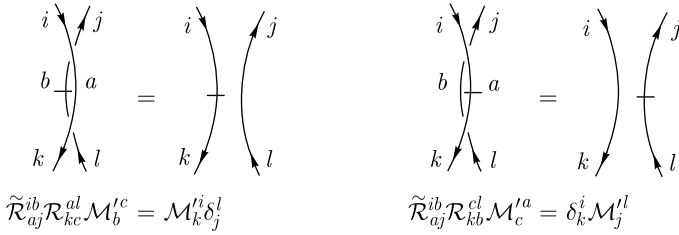


Рис. 11. Второе движение Рейдемейстера с циклом

нием RI (см. рис. 10): соответствующие условия на операторы перекрестков выполнены только при надлежащей вставке оборотных операторов.

В частности, «циклический» вариант RII на рис. 11 соответствует записанной там *pare* тождеств (заметьте, что на этот раз оборотные операторы стоят в обеих частях равенств). В их справедливости можно непосредственно убедиться с помощью формул (3.27), (3.33):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ij \\ kl \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ii \\ kk \end{bmatrix}, \quad i < k: & \tilde{\mathcal{R}}_{ii}^{ii} \mathcal{R}_{ki}^{ik} m'_i + \sum_{a=i+1}^{k-1} \tilde{\mathcal{R}}_{ai}^{ia} \mathcal{R}_{ka}^{ak} m'_a + \tilde{\mathcal{R}}_{ki}^{ik} \mathcal{R}_{kk}^{kk} m'_k = \\ &= q^{-1} (q - q^{-1}) q^{-2i+1} + (q^{-1} - q) (q^{-2i} - q^{-2k+2}) + \\ &+ (q^{-1} - q) q \cdot q^{-2k+1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ij \\ kl \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ii \\ kk \end{bmatrix}, \quad k < i: & = 0 \\ & & \text{(аналогично)} \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} ij \\ kl \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ij \\ ij \end{bmatrix}: & \tilde{\mathcal{R}}_{ij}^{ij} \mathcal{R}_{ij}^{ij} m'_a = 1 \cdot 1 \cdot m'_a, \\ & & a = i \text{ или } a = j. \end{aligned}$$

**3.4.2. Экстремальные и оборотные операторы.** 8 перекрестков и 4 типа экстремальных точек. Полный набор условий топологической инвариантности тензорного формализма должен включать RI на рис. 10 и по несколько версий RII и RIII, различающихся выбором направлений на отрезках на рис. 8 и 9 (хотя не обязательно все эти условия являются независимыми). Как мы убедились в примерах выше, особую роль при этом играют диаграммы с циклами: для них условия топологической инвариантности *не* выполняются как тождества на операторы перекрестков ( $\mathcal{R}$ -матрицы), но *могут* выполняться при «коррекции» соответствующих сверток «поправочным» оператором (вообще говоря, несколькими). Из этих наблюдений вытекает идея о том, что каждый цикл (простой — без кратных проходов ребер) на диаграмме узла должен содержать один такой «поправочный» оператор. Однако такая



Рис. 12. Типы особых точек на диаграмме узла с учетом проблемы стягивания петель

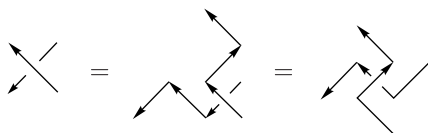


Рис. 13. Обращение направления на нити как «сопряжение» парой экстремальных точек

формулировка не конструктивна, и не ясно, как проверить осуществимость и корректность предлагаемой процедуры.

Классический и устоявшийся подход [19] основан на связи циклов и экстремальных точек. Действительно, если выбрать на плоскости некоторое направление (ось  $z$ ), то всякая замкнутая линия, в частности последовательность смежных ребер на диаграмме узла, будет содержать хотя бы одну точку минимума и одну точку максимума. При этом если на линии выбрано направление обхода, как в случае цикла, то минимум и максимум (если цикл содержит их по одному) будут пройдены в противоположных по нормали к оси  $z$  направлениях («слева направо» и «справа налево»). Поэтому необходимо различать 4 типа экстремальных точек на рис. 12, III. Непрерывными деформациями диаграммы узла можно добиться того, чтобы экстремальные точки никогда не совпадали с перекрестками. Тогда предлагается в каждую экстремальную точку поместить «поправочный» (назовем его *экстремальным*) оператор, один из 4 для каждого типа экстремальной точки.

Однако оказывается, что в присутствии экстремальных точек необходимо различать большее число типов перекрестков. Действительно, как видно из рис. 13, обращение направления на одной из нитей перекрестка топологически эквивалентно его «сопряжению» парой экстремальных точек. В результате приходится различать уже не 2, а 8 типов перекрестков (по 4 прямых и обратных, рис. 12, II); при этом два перекрестка общего положения считаются изотопными, если совмещаются сдвигом, сжатием-растяжением и поворотом менее чем на  $90^\circ$  в любом направлении.

Классическая теорема [19] гласит, что таким образом тензорный формализм удастся спасти: найдутся такие экстремальные операторы, что полученная свертка действительно будет инвариантом узла. Однако так получается не для всяких  $\mathcal{R}$ -матриц, а только для универсальных квантовых обертывающих

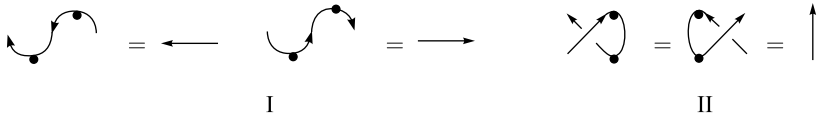


Рис. 14. Топологические условия на экстремальные операторы

алгебр Ли (см. п. 3.2.4). В последнем случае для экстремальных операторов, как и для самих  $\mathcal{R}$ -матриц, известно явное выражение в виде формального ряда.

Точные формулировки и доказательства описанного подхода можно найти в [19], а примеры подробно разобраны в [39]. Мы же сосредоточимся на вопросах, оставленных без должного внимания в литературе.

*Свобода выбора «поправочных» операторов.* Как мы убедились выше, условия топологической инвариантности требуют введения «поправочных» операторов. Однако ни явные выражения для этих операторов, ни их расположение на диаграмме узла не определяются этими условиями однозначно. Различным допустимым положениям разрезов отвечают *a priori* различные свертки операторов, но при определенных условиях такие свертки будут тождественно равны.

Топологическая инвариантность позволяет установить значения свертки *пар* взаимно спрямляющих либо образующих цикл операторов (см. рис. 14):

$$\begin{aligned} Q_+ Q'_- &= Q'_- Q_+ = 1, & Q'_+ Q_- &= Q_- Q'_+ = 1, \\ Q_- Q_+ &= Q_+ Q_- = \mathfrak{M}, & Q'_+ Q'_- &= Q'_- Q'_+ = \mathfrak{M}'. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Здесь  $\mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M}'$  — нормированные оборотные операторы из табл. 11 (см. п. 3.4.3). Известная теорема [40] утверждает, что (3.35) достаточно, чтобы по описанным выше правилам получить топологический инвариант\*. При этом можно, например, операторы «справа налево» отождествить с единичными; тогда операторы «слева направо» будут равны оборотным операторам из табл. 11

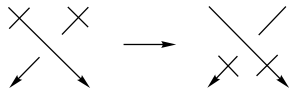
$$Q_- = Q'_- = \mathbb{I}, \quad Q_+ = \mathfrak{M}, \quad Q'_+ = \mathfrak{M}'. \quad (3.36)$$

Можно наложить другие условия: например, как в [19, 39].

*Расположение «поправочных» операторов* также не задано жестко. Прежде всего, каждый из них можно «двигать» в окрестности его точки экстремума между ближайшими перекрестками — на записи тензорной свертки это никак не скажется. Однако иногда допустим также перенос экстремальных операторов через перекресток. На рис. 15 показан пример допустимого

\*С одним существенным дополнением, которому посвящен п. 3.4.3.

Рис. 15. Правило коммутации оператора перекрестка с тензорным квадратом оборотного оператора: графическое изображение



переноса пары операторов (отмечены штрихами). Для рассмотренных в тексте простейших  $\mathcal{R}$ -матриц (связанных, как упоминалось выше, с фундаментальным представлением  $\mathfrak{su}_N$ ) нетрудно проверить соответствующее «правило коммутации»:

$$\sum_{a,b} m_a^i m_b^j \mathcal{R}_{kl}^{ab} = \sum_{a,b} m_k^a m_l^b \mathcal{R}_{kl}^{ij} \Leftrightarrow m_i m_j \mathcal{R}_{kl}^{ij} = m_k m_l \mathcal{R}_{kl}^{ij}. \quad (3.37)$$

Соотношение (3.37), и вместе с ним правило на рис. 15, верно в гораздо более общем случае: для  $\mathcal{R}$ -матрицы для всякой пары представлений всякой простой компактной алгебры Ли [3, 4]. Это следует из общего решения:  $M \propto q^H$ , где оператор  $H$  зависит от алгебры Ли (это один из элементов подалгебры Картана, из общих собственных векторов которой строится выделенный базис в пространстве представления [19, 39]), но всегда действует на тензорном квадрате представления по правилу  $\Delta(q^H) = q^H \otimes q^H$  (см. 3.5 в случае  $\mathfrak{su}_2$ ). В результате (3.37) сводится к условию коммутации

$$M \otimes M \propto \Delta(q^H) \Rightarrow M \otimes M \cdot \mathcal{R} = \mathcal{R} \otimes M \otimes M, \quad (3.38)$$

которое есть частный случай определяющего свойства  $\mathcal{R}$ -матрицы (3.23) \*.

К сожалению, нам неизвестны примеры изложения  $\mathcal{R}$ -матричной конструкции с последовательным описанием всего имеющегося произвола в определении «поправочных» операторов. В примерах ниже мы примем соглашения (3.36), а также будем использовать одно из допустимых расположений этих операторов на диаграмме узла: в разрезах, сделанных при записи  $\mathcal{R}$ -матричной свертки. При таком выборе «поправочные» операторы не привязаны к выбору направления и точкам экстремума, и мы продолжим называть их *оборотными* (как в примерах из п. 3.4.1). В каждом рассмотренном случае нетрудно путем преобразований на рис. 15 «сдвинуть» оборотные операторы в точки экстремума относительно некоторого выбранного направления.

**3.4.3.  $\mathcal{R}$ -матричный инвариант ленточного узла.** Наконец, определение инварианта узла с помощью  $\mathcal{R}$ -матриц содержит еще одну проблему — и снова уже в простейших примерах.

*Скрученные окружности.* Для двух диаграмм перекрученных окружностей на рис. 16, I и II перечисленные выше правила дают, соответственно, выраже-

\* Автор благодарен Андрею Смирнову за указание на этот факт.

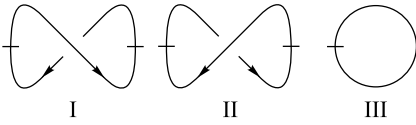


Рис. 16. I, II — диаграммы-восьмерки. III — диаграмма-окружность. Все три являются диаграммами тривиального узла. Штрихами отмечены вставки оборотных операторов в наших вычислениях

ния для инварианта через квантовые числа (1.1):

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,a,b} \overline{1,N} \mathcal{R}_{ab}^{ij} \mathcal{M}_b^i \mathcal{M}_a^j &= \sum_{i,j} \overline{1,N} \mathcal{R}_{ji}^{ij} m_i m'_j = \sum_{i=1}^N m_i = \\ &= \sum_{j=1}^N m'_{N-j+1} = \sum_{i=1}^N q^{-2i+1} = q^{-N} [N]_q \end{aligned} \quad (3.39)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,a,b} \overline{1,N} \tilde{\mathcal{R}}_{ab}^{ij} \mathcal{M}_b^i \mathcal{M}_a^j &= \sum_{i,j} \overline{1,N} \tilde{\mathcal{R}}_{ji}^{ij} \tilde{m}_i \tilde{m}'_j = \sum_{i=1}^N \tilde{m}_i = \\ &= \sum_{j=1}^N \tilde{m}'_j = \sum_{i=1}^N q^{2i-1} = q^N [N]_q. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ответы не равны, в то время как обе диаграммы задают тривиальный узел.

*Простая окружность.* Более того, диаграмма без перекрестков на рис. 16, III требует одного оборотного оператора. На равных основаниях можно использовать любой из четырех операторов в табл. 11, и в качестве значения тривиального инварианта получится его след. Следы введенных нами операторов, однако, различны:

$$\sum_{i=1}^N \mathcal{M}_i^i = \sum_{i=1}^N \mathcal{M}'_i^i = q^{-N} [N]_q \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^N \tilde{\mathcal{M}}_i^i = \sum_{i=1}^N \tilde{\mathcal{M}}'_i^i = q^N [N]_q. \quad (3.41)$$

*Оснащение диаграммы: рецепт.* Ключ лежит в наблюдении, что выражения (3.39) и (3.40) получены с помощью диаграмм узла с различным значением *относительного инварианта*: алгебраического числа перекрестков  $w$ , т. е. разности числа прямых и обратных перекрестков (см. рис. 6) на диаграмме. Эта величина инвариантна относительно RII (см. рис. 8) и RIII (см. рис. 9), но изменяется на  $\pm 1$  при движении RI (см. рис. 10), в зависимости от типа (прямой или обратный) перекрестка в стянутой петле. Например,  $w = 3$  и  $w = 4$  для диаграмм на рис. 18, I и 17 с 3 и 4 положительными перекрестками соответственно (вторая диаграмма эквивалентна первой с точностью до



РШ и однократного RI); для диаграммы на рис. 18, II с 3 обратными перекрестками  $w = -3$ .

Ответы (3.39) и (3.40) совпадут после умножения обоих на  $q^{wN}$ , где  $w = 1$  и  $w = -1$  для диаграмм на рис. 16, I и II соответственно.

Предложенная процедура, однако, не решает проблем с простой окружностью (рис. 16, III), для которой  $w = 0$ . Хуже того, случаи столбцов 1 и 3 табл. 11 отвечают стягиванию петель одной ориентации с прямым и обратным перекрестками, так что не ясно, какой из оборотных операторов  $\mathcal{M} \neq \tilde{\mathcal{M}}$  использовать в общем случае (то же относится к столбцам 2 и 4). Поправить положение можно путем следующей перенормировки оборотных операторов:

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{M} \equiv q^{-N} \mathcal{M} \text{ и } \mathcal{M}' \rightarrow \mathfrak{M}' \equiv q^{-N} \mathcal{M}'. \quad (3.42)$$

Полученные в результате матричные элементы приведены в последней строке табл. 11. Теперь все четыре следа (3.41) равны  $[N]_q \equiv q^N - q^{-N}/q - q^{-1}$ , а (3.39) совпадает с (3.40), как и с ответом для простой окружности, — после умножения каждого ответа на *оснащающий множитель*, который в новой нормировке равен  $q^{-wN}$  с  $w$  для соответствующей диаграммы. Более того,  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}$  и  $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'$ . Как видно из табл. 11, нормированный оборотный оператор зависит от ориентации «корректируемого им» цикла, но не от типа пересечений в этом цикле. Напротив, множитель  $q^{wN}$  перед стянутой петлей зависит только от знака перекрестка ( $w = 1$  для прямого и  $w = -1$  для обратного).

И оборотные операторы, и оснащающий множитель можно ввести для всякой квантовой, но, к сожалению, не для произвольной  $\mathcal{R}$ -матрицы. Это обстоятельство существенно ограничивает класс  $\mathcal{R}$ -матричных инвариантов

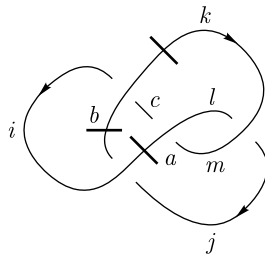


Рис. 17. Диаграмма узла-трилистника (не простейшая) с 4 перекрестками и 3 оборотными операторами

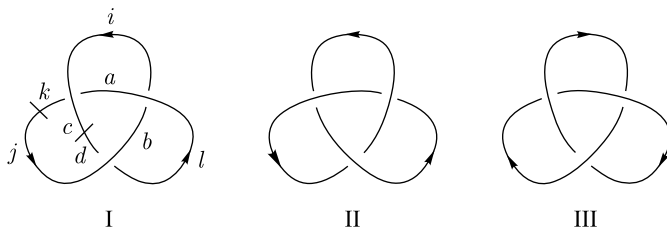


Рис. 18. I — разрезанная диаграмма левостороннего узла-трилистника. II — диаграмма правостороннего узла-трилистника — зеркально отраженного узла I. Узлы I и II не изотопны. III — диаграмма узла I с противоположным выбором направления — проекция той же направленной кривой на «потолок» вместо «пола»

узлов. Как уже говорилось, и квантовые  $\mathcal{R}$ -матрицы, и оборотные операторы, и, следовательно, оснащающий множитель допускают явные выражения через образующие произвольной простой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  в ее произвольном представлении  $Q$  [19, 39].

Теперь можно дать такой рецепт вычисления инварианта узла по «склейке» его диаграммы:

**Правило 11.** Полученный по правилам 2–10 тензор  $T_{j_1 \dots j_n}^{i_1 \dots i_n}(G, Q|q)$  необходимо свернуть по всем свободным индексам с тензорным произведением оборотных операторов  $\mathfrak{M}_{G|Q}$ , которое порождается каким-либо допустимым их расположением на диаграмме узла (см. обсуждение выше).

**Правило 12.** Полученную по правилам 2–11 величину необходимо умножить на оснащающий множитель вида  $q^{w\Theta_{\mathfrak{g}|Q}}$ , где  $w$  — алгебраическое число перекрестков на диаграмме узла, а  $\Theta_{\mathfrak{g}|Q}$  — не зависящее от узла целое, которое можно вычислить из условия RI.

**Правило 13.** В простейшем случае, когда  $Q$  — фундаментальное представление  $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}_N$ , оснащающий множитель равен  $q^{wN}$  ( $\Theta_{\mathfrak{g}|Q} = N$ , где  $N$  — размерность пространства-представления на нитях), а оборотные операторы  $\mathfrak{M}_{\mathfrak{g}|Q}$  в стандартном базисе заданы выражениями из табл. 11.

Более общая формула для  $\Theta_{\mathfrak{g}|Q}$  из теории квантовых  $\mathcal{R}$ -матриц [39, 61] обсуждалась выше в связи с условиями (3.38).

**Правило 14.** Полученная по правилам 2–13 величина будет инвариантом узла [19]. Эта величина зависит от самого узла с точностью до непрерывных преобразований и является функцией формальной переменной  $q$ , а также дискретных переменных  $\mathfrak{g}$  (алгебра Ли) и  $Q$  (ее представление).

Как понимать множитель перед стянутой петлей? Для обыкновенных узлов RI (см. рис. 10) представляет собой тождественное преобразование, отвечающее непрерывному преобразованию кривой в трехмерном пространстве. Так что его вариант с нетривиальным множителем в правой части на самом деле представляет собой уравнение на инвариант оснащенного узла: снабженного дополнительной структурой [5]. Эту структуру можно представить наглядно: заменить нить, на которой завязан узел, лентой. Тогда RI (см. рис. 10) больше не является тождественным преобразованием, поскольку приводит к перекручиванию ленты.

Оснащающий множитель перед выражением можно «спрятать», вводя «топологические» операторы перекрестков:  $q^{-N}\mathcal{R}$  и  $q^N\tilde{\mathcal{R}}$ . Именно так мы неявно поступили в п. 2.1.8 при определении инварианта узла через группу кос.

**3.5. Явное вычисление полинома ХОМФЛИ для узла-трилистника.** После обсуждения основных принципов и особенностей метода  $\mathcal{R}$ -матриц мы, наконец, готовы применить этот метод для вычисления интересующего

нас инварианта (полинома ХОМФЛИ) для простейшего узла: трилистника ( $\mathcal{Z}_1$  в [6]). Диаграмме узла на рис. 18, I соответствует выражение

$$\mathcal{H}^{\mathcal{Z}_1} = q^{-wN} \sum_{\substack{\overline{1,N} \\ i,j,k,l, \\ a,b,c,d}} \mathcal{R}_{kc}^{ai} \mathcal{R}_{ia}^{bl} \mathcal{R}_{lb}^{dj} \mathcal{M}_d^c \mathcal{M}_j^k = q^{-3N} \sum_{\substack{\overline{1,N} \\ i,k,l, \\ a,b,c}} \mathcal{R}_{kc}^{ai} \mathcal{R}_{ia}^{bl} \mathcal{R}_{lb}^{ck} m_c m_k. \quad (3.43)$$

В выражении (3.43) каждая из  $\mathcal{R}$ -матриц соответствует одному из трех перекрестков на диаграмме на рис. 18 (по правилам 5–10), а каждый из двух оборотных операторов  $\mathcal{M}$  — одному из двух разрезов (по правилу 11). Каждый матричный индекс связан с ребром разрезанной диаграммы (как указано на рисунке), так что каждая  $\mathcal{R}$  или  $\mathcal{M}$  имеет четверку или пару индексов, связанных с ребрами, присоединенными к соответствующему перекрестку или разрезу (см. рис. 18). Сумму следует вычислять по всем повторяющимся индексам, независимо пробегающим значения от 1 до  $N$ . Перед суммой стоит оснащающий множитель (по правилам 12, 13). Показатель экспоненты содержит разность числа прямых и обратных (см. рис. 6) перекрестков для диаграммы на рис. 18:  $w = 3$  (все перекрестки прямые).

Таблица 12. Варианты соотношения индексов в тензорном выражении для полинома ХОМФЛИ узла трилистника

Вариант	$a \ i$ $k \ c$	$b \ l$ $i \ a$	$c \ k$ $l \ b$	$c$	$k$
$k = a = l = c = i = b$	$i \ i$ $i \ i$	$i \ i$ $i \ i$	$i \ i$ $i \ i$	$i$	$i$
$k = a = l < c = i = b$	$k \ i$ $k \ i$	$i \ k$ $i \ k$	$i \ k$ $k \ i$	$i$	$k$
$k = a = b < c = i = l$	$k \ i$ $k \ i$	$i \ k$ $k \ i$	$i \ k$ $i \ k$	$i$	$k$
$k = i = b < c = a = l$	$l \ k$ $k \ l$	$k \ l$ $k \ l$	$l \ k$ $l \ k$	$l$	$k$
$k = i = l < c = a = b$	$a \ k$ $k \ a$	$a \ k$ $k \ a$	$a \ k$ $k \ a$	$a$	$k$

Далее следует подставить в явные выражения компоненты из (3.27) и табл. 11 для элементов  $\mathcal{R}$ - и  $\mathcal{M}$ -матриц. Из вида (3.27) следует, что каждый ненулевой член в (3.43) соответствует одной из строк в табл. 12.

Сложив все соответствующие комбинации элементов (3.27), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N^{\mathcal{Z}_1} &= q^{-3N} \left\{ \sum_{i=1}^N \mathcal{R}_{ii}^{ii} \mathcal{R}_{ii}^{ii} \mathcal{R}_{ii}^{ii} m_i m_i + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\substack{i,k=1, \\ i < k}}^N (3\mathcal{R}_{ik}^{ik} \mathcal{R}_{ik}^{ik} \mathcal{R}_{ik}^{ki} + \mathcal{R}_{ki}^{ik} \mathcal{R}_{ki}^{ik} \mathcal{R}_{ki}^{ki}) m_i m_k \right\} \equiv \\ &\equiv q^{-3N} \{ q^3 \alpha_N + (3(q - q^{-1}) + (q - q^{-1})^3) \beta_N \} = \\ &= q^{-3N} \{ q^3 (\alpha_N + \beta_N) - q^{-3} \beta_N \}, \quad (3.44) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\alpha_N \equiv \sum_{i=1}^N (m_i)^2, \quad \beta_N \equiv \sum_{\substack{i,k=1, \\ i < k}}^N m_i m_k \Rightarrow \alpha_N + \beta_N = \sum_{\substack{i,k=1, \\ i \leq k}}^N m_i m_k. \quad (3.45)$$

После вычисления этих сумм по формулам из табл. 11 (обратите внимание, что нам нужны нормированные матричные элементы обратных операторов  $m$ , см. п. 3.4.3), величины  $\alpha_N$  и  $\beta_N$  совпадают с *характерами*, соответственно, первого антисимметрического и первого симметрического представлений  $\mathfrak{su}_N$  [3, 4, 29, 30] с учетом (1.1):

$$\begin{aligned} \beta_N &= \sum_{1 \leq i < j \leq N} q^{2i+2j-2N-2} = \frac{[N]_q [N-1]_q}{[2]_q} = \chi_{[1,1]}, \\ \alpha_N + \beta_N &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq N} q^{2i+2j-2N-2} = \frac{[N]_q [N+1]_q}{[2]_q} = \chi_{[2]}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Мы остановимся на этом явлении подробнее в разд. 4.

В результате получаем следующее выражение для искомого инварианта:

$$\mathcal{H}_N^{3_1}(N, q) = q^{-3N} \left\{ q^3 \frac{[N]_q [N+1]_q}{[2]_q} - q^{-3} \frac{[N]_q [N-1]_q}{[2]_q} \right\}. \quad (3.47)$$

Ответ пропорционален  $[N]_q$  — значению данного инварианта для тривиального узла (см. п. 3.4). Можно показать, что та же величина возникает в случае произвольного узла: в качестве множителя перед его *нормированным* полиномом [19, 28] (см. также обсуждение в п. 4.3), причем это свойство сохраняется и для более общих (раскрашенных, см. п. 5.1) инвариантов. Именно нормированные полиномы, как правило, приводятся в стандартных таблицах [6].

Выражение (3.47) допускает аналитическое продолжение к произвольным значениям  $N$ , что позволяет перейти к новой переменной  $A = q^N \in \mathbb{C}$  и затем рассматривать  $H^{3_1}(A, q)$  как функцию двух *независимых* комплексных переменных  $A$  и  $q$ . После этого множитель перед  $\chi[N]_q \equiv A - A^{-1}/q - q^{-1}$  в (3.47) примет вид полинома ХОМФЛИ узла-трилистника из стандартных таблиц [6] (где  $a = A^{-1}$  и  $z = q - q^{-1}$ ):

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{H}}_N^{3_1}(A, q) &= \frac{A^{-3}}{[2]_q} \left\{ q^3 \frac{Aq - A^{-1}q^{-1}}{q - q^{-1}} - q^{-3} \frac{Aq^{-1} - A^{-1}q}{q - q^{-1}} \right\} = \\ &= A^{-2}(q^2 + q^{-2}) - A^{-4}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

**3.6. Зеркальная симметрия полиномов узлов.** Если на диаграмме на рис. 18, I все перекрестки заменить на обратные, получится диаграмма на рис. 18, II. Согласно правилу 6 соответствующее выражение для инварианта получается из (3.43) путем замены всех операторов перекрестка на обратные операторы с компонентами (3.29) и подстановки алгебраического числа перекрестков  $w = -3$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{\tilde{3}1} &= q^{-\tilde{w}N} \sum_{\substack{i,j,k,l, \\ a,b,c,d}} \tilde{\mathcal{R}}_{kc}^{ai} \tilde{\mathcal{R}}_{ia}^{bl} \tilde{\mathcal{R}}_{lb}^{dj} \mathfrak{M}_d^c \mathfrak{M}_k^j = \\ &= q^{3N-3} \frac{[N]_q [N+1]_q}{[2]_q} - q^{3N+3} \frac{[N]_q [N-1]_q}{[2]_q}, \quad (3.49) \end{aligned}$$

т. е.  $\mathcal{H}^{\tilde{3}1}(q, N) = \mathcal{H}^{\tilde{3}1}(q^{-1}, -N)$ . Это соотношение называют свойством *зеркальной симметрии* полиномов ХОМФЛИ, поскольку узлы, представленные диаграммами рис. 18, I и II, переходят друг в друга при отражении в зеркале. Легко проверить, полиномы для этих узлов *не* равны (даже с точностью до множителя):  $\mathcal{H}^{\tilde{3}1}(q, N) \not\propto \mathcal{H}^{\tilde{3}1}(q, N)$ . Противоречия здесь нет: трилистник — *киральный* узел, то есть топологически *не* эквивалентный своему зеркальному образу [1].

Для произвольного узла (нераскрашенный) полином ХОМФЛИ обладает свойством  $\mathcal{H}^{\mathcal{K}}(q, N) = \mathcal{H}^{\tilde{\mathcal{K}}}(q^{-1}, -N)$ , где узлы  $\mathcal{K}$  и  $\tilde{\mathcal{K}}$  являются зеркальными образами друг друга. При этом в случае  $\mathcal{K} \cong \tilde{\mathcal{K}}$  (когда узел и его зеркальный образ связаны непрерывными преобразованиями) дополнительно  $\mathcal{H}^{\mathcal{K}} = \mathcal{H}^{\tilde{\mathcal{K}}}$  — как, например, для узла-восьмерки ( $4_1$  в [6]).

Различные варианты свойства зеркальной симметрии узлов имеют место для многих полиномов узлов [1, 21, 41]. В случае  $\mathcal{R}$ -матричных инвариантов узлов эти свойства следуют из особой симметрии представлений квантовых групп [3, 4].

С другой стороны, обращение ориентации (направления стрелок) на диаграмме узла на ответ никак не влияет. Так и должно быть, поскольку старая (рис. 18, I) и новая (рис. 18, III) диаграммы отвечают проекциям одного и того же узла «на пол» и «на потолок».

#### 4. МЕТОД $\mathcal{R}$ -МАТРИЦ В СЛУЧАЕ КОСЫ. РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ХАРАКТЕРАМ

Метод  $\mathcal{R}$ -матриц из разд. 3 в частности позволяет вычислить инвариант для инварианта узла в виде замыкания косы. При этом получается описание группы кос, двойственное к описанию из разд. 2. В каком смысле — мы обсудим ниже.

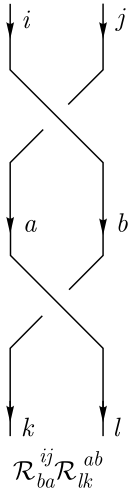


Рис. 19. Последовательное соединение перекрестков

**4.1. Последовательное соединение перекрестков и умножение  $\mathcal{R}$ -матриц.** Двум перекресткам, соединенным как на рис. 19 (мы будем называть такие перекрестки *последовательными*), отвечает свертка  $\mathcal{R}$ -матриц по паре индексов, которую можно записать как произведение подкрученных матриц  $R$  (п. 3.2.5):

$$\sum_{a,b} \mathcal{R}_{ba}^{ij} \mathcal{R}_{lk}^{ab} = \sum_{a,b} R_{ab}^{ij} R_{kl}^{ab} \equiv \sum_J R_J^I R_K^J. \tag{4.1}$$

Здесь пары тензорных индексов  $(ij)$  и  $(kl)$  рассматриваются как составные матричные мультииндексы  $I$  и  $J$ , пробегающие пары значений исходных индексов.

Для сравнения метода  $\mathcal{R}$ -матриц с методом группы кос (разд. 4) нам понадобится матричная запись операторов перекрестка. При этом существенно, что все ненулевые матричные элементы сосредоточены в однотипных блоках. Это делает возможным вычисления, когда каждый индекс бежит от 1 до произвольного  $N$ , т. е. сразу для всей серии  $\mathfrak{su}_N$ . А именно блоки исходной и подкрученной матриц, в которых верхние и нижнее индексы попарно различны и пробегают значения из набора  $\{i, j\}$ , при  $i < j$  имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{(ij)}^{(ij)} &\equiv \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{ij}^{ij} & \mathcal{R}_{ji}^{ij} \\ \mathcal{R}_{ij}^{ji} & \mathcal{R}_{ji}^{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q - q^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{R}_{(ij)}^{(ij)} &\equiv \begin{pmatrix} \mathcal{R}_{ji}^{ij} & \mathcal{R}_{ij}^{ij} \\ \mathcal{R}_{ji}^{ji} & \mathcal{R}_{ij}^{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - q^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i < j = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Если первый или второй перекресток заменить на обратный (см. рис. 8), вместо (4.1) получим, соответственно,

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} \mathcal{R}_{ba}^{ij} \tilde{\mathcal{R}}_{kl}^{ba} &= \sum_{a,b} R_{ab}^{ij} \tilde{R}_{kl}^{ab} \equiv \sum_J R_J^I \tilde{R}_K^J \\ \text{или} \quad \sum_{a,b} \tilde{\mathcal{R}}_{ba}^{ij} R_{kl}^{ba} &\equiv \sum_J \tilde{R}_J^I R_K^J. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Наконец, для двух обратных перекрестков имеем

$$\sum_{a,b} \tilde{\mathcal{R}}_{ba}^{ji} \tilde{\mathcal{R}}_{kl}^{ab} = \sum_{a,b} \tilde{R}_{ba}^{ij} \tilde{R}_{kl}^{ba} \equiv \sum_J \tilde{R}_J^I \tilde{R}_K^J. \tag{4.4}$$

В матричной записи прямые и подкрученные блоки различаются перестановкой столбцов и строк для прямого и обратного перекрестков соответственно

(см. сноску перед определением (3.32)):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_{(ij)}^{(ij)} &\equiv \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{R}}_{ij}^{ij} & \tilde{\mathcal{R}}_{ji}^{ij} \\ \tilde{\mathcal{R}}_{ij}^{ji} & \tilde{\mathcal{R}}_{ji}^{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & q^{-1} - q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \tilde{R}_{(ij)}^{(ij)} &\equiv \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{R}}_{ii}^{ji} & \tilde{\mathcal{R}}_{ji}^{ji} \\ \tilde{\mathcal{R}}_{ij}^{ji} & \tilde{\mathcal{R}}_{ji}^{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q^{-1} - q \end{pmatrix}, \quad i < j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подкрученные блоки  $\mathcal{R}$  в (4.2) и  $\tilde{\mathcal{R}}$  в (4.5) взаимно обратны относительно матричного умножения:

$$\begin{pmatrix} q - q^{-1} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & q^{-1} - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

**4.2. Оператор двунитевой косы.** Двунитевая коса является частным случаем разрезанной диаграммы узла или зацепления (п. 3.3.1). По правилам 2–8 ей отвечает свертка или произведение вида (4.1):

$$\nu \mathfrak{b}_{kl}^{ij} = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_\nu, \\ j_1, \dots, j_\nu}}^{\overline{1, N}} \mathcal{R}_{j_2 i_2}^{ij} \mathcal{R}_{j_3 i_3}^{i_2 j_2} \dots \mathcal{R}_{i_k j_\nu}^{i_\nu j_\nu} = R^\nu|_K^I, \quad I = (ij), \quad K = (kl). \quad (4.7)$$

Назовем (4.7) *оператором двунитевой косы*. В стандартном базисе его матрица состоит из диагональных элементов

$$b_\nu = \nu \mathfrak{b}_{ii}^{ii} = q^\nu, \quad i = \overline{1, N} \quad (4.8)$$

и блоков  $2 \times 2$  вида

$$\begin{aligned} B_\nu &= \begin{pmatrix} \nu \mathfrak{b}_{ij}^{ij} & p \mathfrak{b}_{ji}^{ij} \\ p \mathfrak{b}_{ij}^{ji} & p \mathfrak{b}_{ji}^{ji} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q - 1 & 0 \\ 1 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^\nu & 0 \\ 0 & (-q)^{-\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q - 1 & 0 \\ 1 & q \end{pmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{q^{\nu+1} + (-q)^{-\nu-1}}{q + q^{-1}} & \frac{q^\nu - (-q)^{-\nu}}{q + q^{-1}} \\ \frac{q^\nu - (-q)^{-\nu}}{q + q^{-1}} & \frac{q^{\nu-1} + (-q)^{-\nu+1}}{q + q^{-1}} \end{pmatrix}, \quad i < j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

В частности:

$$\begin{aligned} B_1 &= R^{(ij)}, \quad B_{-1} = R_{(ij)}^{-1}, \\ B_2 &= R^{(ij)} R^{(ij)} = \begin{pmatrix} q^2 - 1 + q^{-2} & q - q^{-1} \\ q - q^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

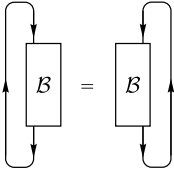


Рис. 20. Нулевое движение Рейдемейстера (R0)

**4.3. Нулевое движение Рейдемейстера. Редуцированный инвариант узла.** Если выбрать одну из нитей косы, то ориентация возникшего при ее замыкании цикла определяется расположением выбранной нити и заданным на ней направлением. Например, при замыкании *правой* нити на рис. 19 цикл ориентирован *против* часовой стрелки. Такому замыканию отвечает свертка двунитевого оператора по *вторым* (верхнему и нижнему) индексам с оператором  $\mathfrak{M} = \tilde{\mathfrak{M}}$  из табл. 11:

$$\nu b_{kl}^{ij} \mathfrak{M}_j^l = \nu b_{kj}^{ij} m_j = \sum_{j=i+1}^N \nu b_{ij}^{ij} m_j + \nu b_{ii}^{ii} m_i + \sum_{j=1}^{i-1} \nu b_{ij}^{ij} m_j = c_\nu \delta_k^i, \quad (4.11)$$

равная единичному оператору с коэффициентом ( $[N]_q$  определено в 1.1)

$$\begin{aligned} c_\nu &= \frac{q^{\nu+1} + (-q)^{-\nu-1}}{q + q^{-1}} \cdot \frac{q^N - q^{-N+2i}}{q - q^{-1}} + q^\nu \cdot q^{-N+2i-1} + \\ &+ \frac{q^{\nu-1} + (-q)^{-\nu+1}}{q + q^{-1}} \cdot \frac{q^{-N+2i-2} - q^{-N}}{q - q^{-1}} = \\ &= q^\nu \frac{q^{N+1} - \mathfrak{q}^{-N+2i+1} + \mathfrak{q}^{-N+2i-3} - q^{-N-1}}{q^2 - q^{-2}} + \mathfrak{q}^{\nu-N+2i-1} + \\ &+ (-q)^{-\nu} \frac{q^{N-1} - \mathfrak{q}^{-N+2i-1} + \mathfrak{q}^{-N+2i-1} - q^{-N+1}}{q^2 - q^{-2}} = \\ &= \frac{q^\nu [N + 1] + (-q)^{-\nu} [N - 1]_q}{[2]_q}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

В свою очередь, при замыкании *левой* нити на рис. 19 цикл ориентирован *по* часовой стрелке, и свертка двунитевого оператора по *первым* (верхнему и нижнему) индексам с оператором  $\mathfrak{M}' = \tilde{\mathfrak{M}}'$  из табл. 11 равна

$$\nu b_{lk}^{ji} \mathfrak{M}'_j^l = \nu b_{kj}^{ij} m'_j = \sum_{j=1}^{i-1} \nu b_{ji}^{ji} m'_j + \nu b_{ii}^{ii} m'_i + \sum_{j=i+1}^N \nu b_{ji}^{ji} m'_j = \tilde{c}_\nu \delta_k^i, \quad (4.13)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{c}_\nu &= \frac{q^{\nu+1} + (-q)^{-\nu-1}}{q + q^{-1}} \cdot \frac{q^N - q^{N-2i+2}}{q - q^{-1}} + q^\nu \cdot q^{N-2i+1} + \\ &+ \frac{q^{\nu-1} + (-q)^{-\nu+1}}{q + q^{-1}} \cdot \frac{q^{N-2i} - q^{-N}}{q - q^{-1}} = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= q^\nu \frac{q^{N+1} - \mathcal{H}^{N-2i+3} + \mathcal{H}^{N-2i-1} - q^{-N-1}}{q^2 - q^{-2}} + \mathcal{H}^{\nu+N-2i-1} + \\
 &\quad + (-q)^{-\nu} \frac{q^{N-1} - \mathcal{H}^{N-2i+1} + \mathcal{H}^{N-2i+1} - q^{-N+1}}{q^2 - q^{-2}} = \\
 &= \frac{q^\nu [N+1]_q + (-q)^{-\nu} [N-1]_q}{[2]_q}. \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

В обоих случаях, с учетом оснащающего множителя по правилам 12, 13,

$$[N]_q c_\nu = [N]_q \tilde{c}_\nu = q^{N\nu} \mathcal{H}^{(\nu)}. \quad (4.15)$$

Совпадение двух ответов отражает инвариантность конструкции относительно еще одной изотопии: *нулевого движения Рейдемейстера* (R0) — поворота замыкающей дуги на  $180^\circ$  в трехмерном пространстве (рис. 20) [1,5]. В отличие от RI–RIII, движение R0 является *нелокальным*, т. е. преобразуется диаграмма в целом, а не ее изолированный фрагмент.

Коэффициент  $c_\nu = \tilde{c}_\nu$  перед единичным оператором в (4.11) или (4.13) называется *редуцированным инвариантом*  $\bar{\mathcal{H}}^{(\nu)}$ . При  $\nu = 2k-1$  (для узла) редуцированный инвариант записывается как

$$\begin{aligned}
 q^{(2k-1)N} \bar{\mathcal{H}}^{(2k-1)} &= \frac{q^{2k-1} (q^{N+1} - q^{-N-1}) - q^{-2k+1} (q^{N-1} - q^{-N+1})}{q^2 - q^{-2}} = \\
 &= q^N \frac{[2k]_q}{[2]_q} - q^{-N} \frac{[2k-2]_q}{[2]_q}, \quad (4.16)
 \end{aligned}$$

а при  $\nu = 2k$  (для двухкомпонентного зацепления) —

$$\begin{aligned}
 q^{2kN} \bar{\mathcal{H}}^{(2k)} &= \frac{q^{2k} (q^{N+1} - q^{-N-1}) + q^{-2k} (q^{N-1} - q^{-N+1})}{q^2 - q^{-2}} = \\
 &= q^N \frac{[4k+2]_q}{[2]_q [2k+1]_q} - q^{-N} \frac{[4k-2]_q}{[2]_q [2k-1]_q}. \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Можно проверить, что в обоих случаях при любых заданных целых  $k$  и  $N$  ответ есть полином Лорана по  $q$ .

Аналогичное явление имеет место и в общем случае [1,40]:

- для всякого узла или зацепления  $\mathcal{K}$  свертка операторов перекрестов для диаграммы с одним разрезом на *любом* ребре равна  $\bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}}$ , где  $\bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}}$  — редуцированный инвариант узла;

- значение полной свертки для той же диаграммы есть инвариант узла  $\mathcal{H}^{\mathcal{K}} = \mathcal{H}^\emptyset \bar{\mathcal{H}}^{\mathcal{K}}$ , где  $\mathcal{H}^\emptyset$  — значение инварианта для тривиального узла.

Таким образом, «склеивать» *последний* разрез всегда можно двумя способами: как по, так и против часовой стрелки — и ответ будет одинаковым, то есть инвариантом R0.

#### 4.4. Инвариантные подпространства и характеры для двунитевых кос.

По правилам 11–13 искомый инвариант узла/зацепления-замыкания двунитевой косы запишется (через введенные выше величины) в виде

$$\mathcal{H}^{(\nu)} = q^{-\nu N} \sum_{i,i,k,l}^{\overline{1,N}} \nu b_{kl}^{ij} \mathfrak{M}'_j \mathfrak{M}^k_i = q^{-\nu N} \text{Tr } R^\nu M_2, \quad (4.18)$$

где оператор  $M_2 = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$  мы назовем *двунитевым замыкающим оператором*. Существенно, что этот оператор коммутирует с подкрученным оператором перекрестка (см. обсуждение в п. 3.4.2):  $M_2 R = R M_2$  — и, следовательно, с оператором двунитевой косы (4.7). Для операторов вида (3.28) и табл. 11 в этом легко убедиться непосредственно. Действительно, в стандартном базисе матрица оператора  $M_2 = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$  диагональна, причем напротив блоков  $2 \times 2$  матрицы  $R$  в  $M_2$  стоят блоки вида  $\text{diag}(m_i m_j, m_j m_i) \sim \mathbb{I}_{2 \times 2}$ . В результате след (4.18) можно вычислять в базисе общих собственных векторов  $R$  и  $M_2$ , где обе матрицы диагональны. Ниже мы найдем этот базис явно.

При вычислении элементов оператора двунитевой косы (4.8), (4.9) мы фактически перешли к базису, где матрица оператора диагональна. Этот базис состоит из собственных векторов двунитевого оператора. Смысл базисных элементов понятен в тензорной записи. А именно: вводя для векторов стандартного базиса обозначения (здесь и далее латинские индексы  $i, j, \dots$ , как и прежде, нумеруют компоненты векторов, а греческие  $\alpha, \beta, \dots$  (заключаются в скобки) — сами базисные векторы):

$$x_i^{(\alpha)} = \delta_i^\alpha, \quad x^{(\alpha\beta)} \equiv x^{(\alpha)} \otimes x^{(\beta)} \Rightarrow x_{ij}^{(\alpha\beta)} = \delta_i^\alpha \delta_j^\beta, \quad i < j, \alpha < \beta = \overline{1, N}, \quad (4.19)$$

автоматически получаем  $N$  векторов с собственным значением  $q$ :

$$R x^{(\alpha\alpha)} = q x^{(\alpha\alpha)} \Leftarrow R_{kl}^{ij} x_{ij}^{(\alpha\alpha)} = R_{\alpha\alpha}^{ij} = q \delta_\alpha^i \delta_\alpha^j. \quad (4.20)$$

Остальные собственные векторы можно найти из условий

$$\mathcal{R} X^{(\alpha\beta)} = \lambda X^{(\alpha\beta)}, \quad X^{(\alpha\beta)} = a x^{(\alpha\beta)} + b x^{(\beta\alpha)}. \quad (4.21)$$

Подстановка (3.27) в (4.21) и решение полученной системы дает:  $\lambda = q$  или  $\lambda = -q^{-1}$  и

$$\begin{aligned} X^{(\alpha)} &= x^{(\alpha\alpha)}, & R X^{(\alpha)} &= q X^{(\alpha)}, \\ X^{(\alpha\beta)} &= x^{(\alpha\beta)} + q x^{(\beta\alpha)}, & R X^{(\alpha\beta)} &= q X^{(\alpha\beta)}, & \alpha < \beta = \overline{1, N}, \\ Y^{(\alpha\beta)} &= x^{(\beta\alpha)} - q x^{(\alpha\beta)}, & R Y^{(\alpha\beta)} &= -q^{-1} Y^{(\alpha\beta)}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

имеем  $N(N+1)/2$  и  $N(N-1)/2$  «симметрических» и «антисимметрических» собственных векторов с собственными значениями  $q$  и  $-q^{-1}$  соответственно.

Видно, что собственные векторы  $R$  являются также собственными векторами  $M_2$ , что сразу следует из выражений для векторов (4.22) и соотношений

$$\begin{aligned} M_2(x^{(\alpha)} \otimes x^{(\beta)}) &= (\mathfrak{M}x^{(\alpha)}) \otimes (\mathfrak{M}x^{(\beta)}) = \mathfrak{m}_\alpha \mathfrak{m}_\beta x^{(\alpha)} \otimes x^{(\beta)}, \\ M_2(x^{(\beta)} \otimes x^{(\alpha)}) &= \mathfrak{m}_\beta \mathfrak{m}_\alpha x^{(\beta)} \otimes x^{(\alpha)}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

В базисе общих собственных векторов  $R$  и  $M_2$  (4.18) выражается через  $[N]_q$  из (1.1) как

$$\begin{aligned} \text{Tr}(R^\nu M_2) &= q^\nu \text{Tr}_{\text{span}\{X^{(\alpha)}, X^{(\alpha\beta)}\}} M_2 + (-q)^{-\nu} \text{Tr}_{\text{span}\{Y^{(\alpha\beta)}\}} M_2 = \\ &= q^\nu \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \leq \beta}}^N \mathfrak{m}_\alpha \mathfrak{m}_\beta + (-q)^{-\nu} \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha < \beta}}^N \mathfrak{m}_\alpha \mathfrak{m}_\beta = \\ &= q^\nu \frac{[N]_q [N+1]_q}{[2]_q} + (-q)^{-\nu} \frac{[N]_q [N-1]_q}{[2]_q}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

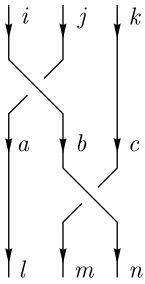
Коэффициенты перед степенями собственных значений суть следы замыкающего оператора по подпространствам собственных векторов с одним и тем же собственным значением. При  $q = 1$ , когда  $M_2$  равен единичному оператору, эти величины дают числа соответствующих собственных векторов:  $N(N+1)/2$ ,  $N(N-1)/2$ .

Полином ХОМФЛИ двунитевого узла или зацепления-замыкания двунитевой косы с  $\nu > 0$  положительными или  $-\nu > 0$  отрицательными перекрестками (см. рис. 6) получается из выражения (4.24) так же, как в случае узла-трилистника (п. 3.5): путем замены  $q^N = A$  в (4.18), (4.24) и аналитического продолжения к произвольным комплексным значениям  $A$ . Ответ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N^{2,\nu}(A, q) &= \left(\frac{q}{A}\right)^\nu \frac{Aq - A^{-1}q^{-1}}{q - q^{-1}} + \left(-\frac{1}{Aq}\right)^\nu \frac{Aq^{-1} - A^{-1}q}{q - q^{-1}} = \\ &= \left(\frac{q}{A}\right)^\nu \frac{S_2^*(A, q)}{S_1^*(A, q)} + \left(-\frac{1}{Aq}\right)^\nu \frac{S_2^*(A, q)}{S_1^*(A, q)}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

где коэффициенты разложения выражены через топологические функции Шура (табл. 2).

**4.5. Многонитевые косы: набор операторов перекрестков.** С помощью представления узла в виде замыкания косы можно свести свертку  $\mathcal{R}$ -матриц к следу от произведения матриц для любой косы [19, 28, 39]. Однако при этом потребуются ввести несколько подкрученных матриц — для перекрестков различных пар нитей. В частности, для фрагмента трехнитевой косы на рис. 21



свертка  $\mathcal{R}$ -матриц переписывается как произведение

$$B_{lmn}^{ijk} \equiv R_{lb}^{ij} R_{mn}^{bk} = R_{ab}^{ij} \delta_c^k \delta_l^a R_{mn}^{bc} \Leftrightarrow B = R \otimes \mathbb{I} \cdot \mathbb{I} \otimes R \equiv R_1 R_2 \quad (4.26)$$

операторов

$$R_1 \equiv R \otimes \mathbb{I} \text{ и } R_2 \equiv \mathbb{I} \otimes R. \quad (4.27)$$

Можно непосредственно убедиться, что операторы  $R_1$  и  $R_2$  не коммутируют, поэтому не найдется базиса из их общих собственных векторов. Тем не менее эти операторы имеют набор общих собственных векторов, который дополняется до базиса базисными векторами общих двумерных инвариантных подпространств. Ниже мы построим такой базис в явном виде.

#### 4.6. Разложение по характерам для трехнитевых кос.

##### 4.6.1. Общие инвариантные подпространства двух операторов перекрестков для трехнитевой косы.

Теперь заметим, что оба оператора перекрестка в трехнитевой косе действуют на тензорные мономы вида  $x^{\alpha\beta\gamma} \equiv x^\alpha \otimes x^\beta \otimes x^\gamma$  как  $x^{\alpha\beta\gamma} \rightarrow x^{\sigma(\alpha\beta\gamma)}$ , где  $\sigma(\alpha\beta\gamma)$  — некоторая перестановка  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ . Поэтому базисные векторы общих инвариантных подпространств этих операторов можно искать в виде

$$\sum_{\sigma \in \text{perm} \{\alpha, \beta, \gamma\}} c_\sigma x^{(\sigma_\alpha \sigma_\beta \sigma_\gamma)}, \quad (4.28)$$

где стоит сумма по всем перестановкам. Такое обобщение аналогичного свойства для двунитевых кос (см. п. 4.2) видно из явных выражений (4.27).

По построению  $R_1$  и  $R_2$  имеют те же собственные значения, что и оператор  $R$ :  $q$  и  $-q^{-1}$ . Для каждой упорядоченной тройки  $(\alpha \leq \beta \leq \gamma)$  найдется общий «симметрический» вектор  $X^{(\alpha\beta\gamma)}$  с собственным значением  $q$ ; при  $(\alpha < \beta < \gamma)$  найдется также «антисимметрический» вектор  $Y^{(\alpha\beta\gamma)}$  с собственным значением  $-q^{-1}$  (явные выражения представлены в табл. 13). Таким образом найдется  $(N(N+1)(N+2))/6$  «симметрических» и  $(N(N-1)(N-2))/6$  «антисимметрических» собственных векторов.

Остается рассмотреть линейное подпространство размерности  $N^3 - (N(N+1)(N+2))/6 - (N(N-1)(N-2))/6 = (2(N^3 - N))/3$ . Это подпространство разлагается в прямую сумму общих двумерных инвариантных подпространств  $R_1$  и  $R_2$ . На каждом из них можно выбрать базис из собственных векторов\*  $R_1$ :

$$R_1 Z_1^{(\alpha\beta\gamma)} = q Z_1^{(\alpha\beta\gamma)}, \quad R_1 Z_2^{(\alpha\beta\gamma)} = -q^{-1} Z_2^{(\alpha\beta\gamma)}, \quad (4.29)$$

\*Каждая из матриц  $R_1$  и  $R_2$  на таком подпространстве должна иметь два различных собственных значения, иначе матрицы коммутируют и одновременно диагонализуются.

Таблица 13. Векторы выделенного базиса в общих инвариантных подпространствах  $R_1$  и  $R_2$ : коэффициенты разложения по тензорным мономам  $x^\alpha \otimes x^\beta \otimes x^\gamma$  при различных соотношениях между  $\alpha, \beta, \gamma$ . Указаны также выражения для внедиагонального элемента  $r_{12}$  в  $R_2$  как функции нормировочных множителей смешиваемых векторов (см. пояснения в тексте)

$c_\sigma$		$\alpha = \overline{1, N}$
$\sigma$	$\alpha\alpha\alpha$	
$X$	1	

$c_\sigma$		$\alpha < \beta = \overline{1, N}$
$\sigma$	$\alpha\beta\alpha \quad \beta\alpha\alpha$	
$X$	1 $q$ $q^2$	
$Z_1$	$q^2[2]_q$ -1 - $q$	$\times z_1,$
$Z_2$	0 $q$ -1	$\times z_2,$

$r_{12} = z_1 z_2^{-1} q[3]_q/[2]_q.$

$c_\sigma$		$\alpha < \beta < \gamma = \overline{1, N}$
$\sigma$	$\alpha\beta\gamma \quad \beta\alpha\gamma \quad \beta\gamma\alpha \quad \gamma\alpha\beta \quad \gamma\beta\alpha$	
$X$	1 $q$ $q$ $q^2$ $q^3$	
$Y$	$-q^3$ $q^2$ $q^2$ - $q$ -1 1	
$Z_1$	$q^2$ 0 $q^3$ -1 - $q$	$\times z_1,$
$Z_2$	$q$ $q^3[2]_q$ -1 $q^5$ $-q^2[2]_q$ $-q^4$	$\times z_2,$

$r_{12} = z_1 z_2^{-1} q/[2]_q;$

$c_\sigma$		$r_{12} = \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^{-1} q/[2]_q.$
$\tilde{Z}_1$	0 $q$ 0 -1 $q^2$ - $q$	
$\tilde{Z}_2$	$q^2[2]_q$ $q^4$ $-q[2]_q$ $-q^3$ $-q^3$ $q^2$	$\times \tilde{z}_1,$ $\times \tilde{z}_2,$

которые  $R_2$  «смешивает» как

$$R_2 Z_i^{(\alpha\beta\gamma)} = \sum_{j=1}^2 r_{ij} Z_j^{(\alpha\beta\gamma)}, \quad i = \overline{1, 2}. \quad (4.30)$$

При подстановке (4.28) в (4.29) и (4.30) получаем систему уравнений на неопределенные коэффициенты. Для  $\alpha = \beta < \gamma$  система имеет единственное решение с точностью до умножения каждого из векторов на произвольный множитель. Для  $\alpha < \beta < \gamma$  семейство решений системы содержит дополнительный свободный параметр, т. е. векторы  $Z_1^{(\alpha\beta\gamma)}$  или  $Z_2^{(\alpha\beta\gamma)}$  для данных  $(\alpha\beta\gamma)$  образуют двумерное линейное пространство. При некотором значении параметра выражения имеют особенно простой вид (см. табл. 13)\*. Диагональные матричные элементы  $r_{11}$  и  $r_{22}$  и произведение внедиагональных  $r_{21}r_{12}$  таким образом находятся однозначно (см. (4.32) ниже), а  $r_{12}$  и  $r_{21}$  по отдельности зависят от нормировки базисных векторов (см. формулы в табл. 13; выбор в (4.32) таков, что  $r_{21} = r_{12}$ ).

**4.6.2. Универсальные блоки в трехнитевых  $\mathcal{R}$ -матрицах.** Существенное свойство операторов перекрестков состоит в том, что *одни и те же* собственные значения  $q$ ,  $-q^{-1}$  и матричные элементы (4.29), (4.30) получаются для *произвольных* значений  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — и, более того, для произвольных векторов из подпространств

$$\begin{aligned} V_X &= \text{span} \{X^{(\alpha\beta\gamma)}\}_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq N}, & V_Y &= \text{span} \{Y^{(\alpha\beta\gamma)}\}_{1 < \alpha < \beta < \gamma < N}, \\ V_{Z_1} &= \text{span} \{Z_1^{(\alpha\beta\gamma)}\}_{1 \leq \alpha \leq \beta < \gamma \leq N}, & V_{Z_2} &= \text{span} \{Z_2^{(\alpha\beta\gamma)}\}_{1 \leq \alpha \leq \beta < \gamma \leq N}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

А именно: на *произвольных* векторах  $X \equiv X^{(\alpha\beta\gamma)}$ ,  $Y = Y^{(\alpha\beta\gamma)}$  и  $Z_{1,2} = Z_{1,2}^{(\alpha\beta\gamma)}$  (в нормировке, где  $r_{21} = r_{12}$ ) операторы перекрестков действуют как

$$\begin{aligned} R_1 X &= R_2 X = qX, & R_1 Y &= R_2 Y = -q^{-1}Y, \\ R_1 \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}, \\ R_2 \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2[2]_q} & \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \frac{q^2}{[2]_q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

\*См. комментарий в п. 5.1.3.

Полученные блоки  $2 \times 2$  совпадают с матрицами двух образующих трехнитевой алгебры Гекке (для  $\lambda = q/A$  и  $\mu = -1/(qA)$ , см. п. 2.1.8) в двумерном представлении, которые мы независимо вычислили в п. 2.2.3. В свою очередь, два семейства собственных векторов соответствуют двум различным одномерным представлениям.

Как следствие, аналогичным свойством универсальности обладает оператор произвольной трехнитевой косы (обозначение см. в п. 2.2.3 и на рис. 4):

$$\mathfrak{b}^{\{\nu\}} = \mathfrak{b}^{(\nu_{1,1}, \nu_{1,2} | \dots | \nu_{L,1}, \nu_{L,2})} = \prod_{i=1}^L R_1^{\nu_{i,1}} R_2^{\nu_{i,2}}. \quad (4.33)$$

То есть для вычисления всех матричных элементов оператора трехнитевой косы (4.33) достаточно рассмотреть по одному вектору каждого из подпространств (4.31).

Здесь как раз проявляется инвариантность операторов перекрестка относительно действия квантовой обертывающей алгебры Ли, которую мы обсудили в п. 3.1.

**4.6.3. Разложение по характеристам для трехнитевых кос.** Как и в случае двунитевых кос, все векторы  $X^{(\alpha\beta\gamma)}$ ,  $Y^{(\alpha\beta\gamma)}$  и  $Z_{1,2}^{(\alpha\beta\gamma)}$  также являются собственными векторами замыкающего оператора трехнитевой косы  $M_3 = \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M} \otimes \mathfrak{M}$ , причем последний (отличие от оператора косы) имеет различные собственные значения в зависимости от  $(\alpha\beta\gamma)$ :

$$\begin{aligned} M_3 X^{(\alpha\beta\gamma)} &= m_\alpha m_\beta m_\gamma X^{(\alpha\beta\gamma)}, \\ M_3 Y^{(\alpha\beta\gamma)} &= m_\alpha m_\beta m_\gamma Y^{(\alpha\beta\gamma)}, \\ M_3 Z_{1,2}^{(\alpha\beta\gamma)} &= m_\alpha m_\beta m_\gamma Z_{1,2}^{(\alpha\beta\gamma)}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

где  $m_\alpha$  даны в табл. 11.

Искомый инвариант узла вычисляется как след по пространству  $V \otimes V \otimes V = V_X \oplus V_Y \oplus V_{Z_1} \oplus V_{Z_2}$ , который в силу описанных выше свойств операторов (косы и замыкающего) разлагается как

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{V \otimes V \otimes V} (M_3 h^{\{\nu\}}) &= \\ &= q^w \text{Tr}_{V_X} M_3 + \text{tr} B_2^{(\nu)} \text{Tr}_{V_Z} M_3 + (-q)^{-w} \text{Tr}_{V_Y} M_3, \end{aligned} \quad (4.35)$$

где  $B_2^{(\nu)}$  (матрица  $2 \times 2$ ) есть результат подстановки (4.32) в (4.33), а  $V_Z$  — произвольное подпространство  $V_Z \in V_{Z_1} \otimes V_{Z_2}$  размерности  $\dim V_Z = \dim V_{Z_1} = \dim V_{Z_2}$ . С помощью (4.34, табл. 11) получаем явные формулы

для следов по инвариантным подпространствам:

$$\begin{aligned} \text{Tr}_X M_3 &= \sum_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq N} m_\alpha m_\beta m_\gamma = \frac{[N]_q [N+1]_q [N+2]_q}{[2]_q [3]_q}, \\ \text{Tr}_X M_3 &= \sum_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq \gamma \leq N} m_\alpha m_\beta m_\gamma = \frac{[N]_q [N-1]_q [N-2]_q}{[2]_q [3]_q}, \\ \text{Tr}_Z M_3 &= \sum_{1 \leq \alpha \leq \beta < \gamma \leq N} m_\alpha m_\beta m_\gamma = \frac{[N]_q [N+1]_q [N-1]_q}{[3]_q}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

При  $q = 1$  величины (4.36) равны размерностям инвариантных подпространств  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ .

Полином ХОМФЛИ трехнитевого узла получается из (4.35) прежним путем: после учета оснащающего множителя и замены  $A = q^N$  [28]:

$$\begin{aligned} H^{\{\nu\}} &= A^{-w} \left\{ q^{-w} \frac{S_{[3]}^*}{S_{[1]}^*} + \text{tr} \prod_{i=1}^L \left[ \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & -q^{-1} \end{pmatrix}^{\nu_{i,1}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{q^2 [2]_q} \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & \\ \frac{\sqrt{[3]_q}}{[2]_q} & q^2 \end{pmatrix}^{\nu_{i,2}} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{S_{[2,1]}^*}{S_{[1]}^*} + (-q)^{-w} \frac{S_{[1^3]}^*}{S_{[1]}^*} \right\}, \quad (4.37) \end{aligned}$$

$$\{\nu\} = \{(\nu_{i,1}, \nu_{i,2})\}_{i=1}^L, \quad \nu_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}; \quad w = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^2 \nu_{i,j},$$

где в качестве коэффициентов стоят отношения топологических функций Шура (см. табл. 2) [28].

**4.7. Инвариантные подпространства и неприводимые представления  $\mathfrak{su}_N$ .** **4.7.1. Пространства кратностей.** Как мы уже упоминали в разд. 3, вид разложений (4.25), (4.37) неслучаен: как использованные при вычислении базисные векторы, так и весовые коэффициенты имеют важный смысл с точки зрения алгебры Ли и ее представления, связанных с данным инвариантом узла.

По Правилу 7 с каждой нитью косы связано пространство  $V$  некоторого представления  $Q$  алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  (и одновременно ее квантовой обертывающей  $U_q(\mathfrak{g})$ ). Тогда по правилу 5 с сечением косы связано тензорное произведение представлений:  $Q \otimes Q$  (2 нити),  $Q \otimes Q \otimes Q$  (3 нити) и т.д. Пространство этого представления  $(V \otimes V, V \otimes V \otimes V, \dots)$  разлагается в прямую сумму



подпространств *неприводимых представлений*  $Y \vdash Q$ : т. е. действие произвольного элемента алгебры во *всем* сечении косы с помощью коумножения  $\Delta(g), \Delta^{\circ 2}(g), \dots$  от  $\forall g \in \mathfrak{g}$  (см. п. 3.2.4) не выводит за пределы каждого из этих подпространств. На каждом пространстве неприводимого представления можно выбрать базис из общих собственных векторов максимальной коммутативной подалгебры  $\mathfrak{g}$  [3,4]. Таким образом, действие алгебры Ли на сечении косы порождает на связанном с ним пространстве представления канонический базис.

Тот же самый базис получается как базис в общих инвариантных подпространствах всех операторов перекрестков и замыкающего оператора для косы с данным числом нитей.

Замечательно, что элементы  $g$  алгебры  $\mathfrak{g}$  (точнее, их образы в обертывающей при коумножении —  $\Delta^{\circ m}(g)$  для косы из  $m + 1$  нитей, см. п. 3.2.4) и операторы перекрестков ( $\mathcal{R}$ -матрицы) действуют на векторы канонического базиса «ортогонально» друг другу:  $\Delta^{\circ m}(g)$  действуют внутри пространств неприводимых представлений, а  $\mathcal{R}$ -матрицы могут смешивать *только* векторы из изоморфных представлений с одинаковыми наборами собственных значений операторов максимальной коммутативной подалгебры (рис. 22). Неприводимые общие инвариантные подпространства  $\mathcal{R}$ -матриц называются *пространствами кратностей* — говорят, что  $\mathcal{R}$ -матрицы действуют на пространствах *кратностей* неприводимых представлений в разложении тензорной степени.

Мы разобрали простейший нетривиальный пример в п. 4.6.2:  $\mathcal{R}$ -матрицы «смешивали»  $Z_1^{(\alpha\beta\gamma)}$  и  $Z_2^{(\alpha\beta\gamma)}$  для одинаковых  $(\alpha\beta\gamma)$ , а  $\Delta^{\circ 2}(g)$  «смешивали бы»  $Z^{(\alpha\beta\gamma)}$  с различными  $(\alpha\beta\gamma)$  — причем так, что  $\Delta^{\circ 2}(g)R_i Z^{(\alpha\beta\gamma)} = R_i \Delta^{\circ 2}(g) Z^{(\alpha\beta\gamma)}$  — в силу определяющего свойства  $\mathcal{R}$ -матрицы (3.25). В данном случае (4.32) описывает действие матриц  $R_1$  и  $R_2$  на двумерном пространстве кратностей. Остальные случаи из пп. 4.4, 4.6.2 устроены проще: на каждый вектор  $X^{(\alpha\beta)}$  или  $Y^{(\alpha\beta)}$  (для 2 нитей), либо  $X^{(\alpha\beta\gamma)}$  или  $Y^{(\alpha\beta\gamma)}$  (для 3 нитей) натянуто одномерное пространство кратностей: например,  $\Delta^{\circ 2}(g)$  «смешивают»  $N(N + 1)(N + 2)/6$  векторов  $X^{(\alpha\beta\gamma)}$  с различными  $(\alpha\beta\gamma)$ , зато каждый из этих векторов является собственным для *обеих*  $R_1$  и  $R_2$ .

Таким образом, мы получили прямую иллюстрацию к обсуждению из п. 3.2: набор операторов перекрестков в сечении косы (матриц  $R_i$ ) есть набор нетривиальных инвариантных операторов относительно действия алгебры Ли на тензорном произведении представлений  $Q$ , связанных с нитями косы.

**4.7.2. Характеристики.** Теперь вспомним, что все векторы обсуждавшегося базиса являются собственными векторами замыкающего оператора (этот оператор получается коумножением от элемента максимальной коммутативной

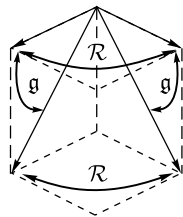


Рис. 22. Иллюстрация к действию  $\mathcal{R}$ -матрицы на пространствах неприводимых представлений и на пространствах кратностей

подалгебры алгебры  $\mathfrak{g}$ , см. п. 3.4.2). Это свойство позволяет рассматривать след замыкающего оператора как производящую функцию для элементов канонического базиса.

В выражения для инвариантов типа (4.18), (4.35) входит след не самого замыкающего оператора, а его произведения с операторами перекрестков — матрицами  $R$ . Однако, благодаря свойству  $\mathfrak{g}$ -инвариантности (п. 4.7.1), в каноническом базисе все матрицы  $R$  распадаются на множество идентичных блоков. При каждом из различных блоков «собирается» коэффициент: след замыкающего оператора по некоторому подпространству. Как можно увидеть из обсуждения в п. 4.7.1, эти подпространства являются пространствами неприводимых представлений алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  (и обертывающей от нее), действующей в сечении косы. Выше мы показали, как это происходит для кос из 2 (п. 4.4) и 3 (п. 4.6) нитей.

Таким образом, коэффициенты в (4.18), (4.35) являются производящими функциями для векторов канонического базиса для действия алгебры Ли в сечении косы.

Такие производящие функции называются *характерами* представлений. В теории представлений рассматривают различные варианты характеров  $\chi_Q$ , но все эти величины обладают существенным свойством: они умножаются и складываются при тензорном умножении и прямой сумме соответствующих представлений. В частности, разложение тензорного произведения в прямую сумму неприводимых представлений связано с тождеством на характеры (ср. с п. 2.3):

$$Q_1 \otimes Q_2 = \bigoplus_{Y \vdash Q_1 \otimes Q_2} Y \Rightarrow \chi_{Q_1} \chi_{Q_2} = \sum_{Y \vdash Q_1 \otimes Q_2} \chi_Y \quad (4.38)$$

( $Y \vdash Q_1 \otimes Q_2$  значит, что индекс  $Y$  бежит по всем неприводимым представлениям в разложении  $Q_1 \otimes Q_2$ ). Если найдется такой оператор  $M$ , что для *каждого* из представлений  $Q$  в (4.38)  $\chi_Q = \text{Tr}_{V_Q} M$  ( $V_Q$  — пространство этого представления), то (4.38) следует из тождеств линейной алгебры:

$$\text{Tr}_{V_1 \otimes V_2} M = \text{Tr}_{V_1} M \cdot \text{Tr}_{V_2} M, \quad \text{Tr}_{V_1 \oplus V_2} M = \text{Tr}_{V_1} M + \text{Tr}_{V_2} M. \quad (4.39)$$

Именно так было в наших случаях: в качестве  $M$  был замыкающий оператор для группы кос с данным числом нитей.

## 5. ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ: ЧТО ДАЛЬШЕ?

**5.1. Проблема вычисления раскрашенных полиномов.** В п. 3.3.3 мы говорили, что в рамках  $\mathcal{R}$ -матричной конструкции с узлом (либо с каждой компонентой зацепления) связано некоторое представление некоторой квантовой группы. В основном изложении мы ограничились фундаментальным

Таблица 14. Квантово-групповые инварианты узлов и их ближайшие родственники

Фактор-группы		[42, 43]	
Суперконформные алгебры $W_N$			
Алгебры Ли			
Исключительные [44]		Тип полиномов	
Универсальные (Фогеля)		<b>Универсальные</b> [45]	
su		<b>Некомпактные</b> [46, 47]	
so, sp			
<b>ХОМФЛИ</b>		<b>Раскрашенные</b>	Интегральные
<b>Джонса</b> su <sub>2</sub>	<b>Александера</b> su <sub>N</sub> → 0	Фундаментальное/ Другие конечно-мерные	$q \neq \sqrt{\Gamma}$ $q \rightarrow 1$ <b>спец-полиномы</b> [48]
[6, 49]			
			Циклические

представлением  $U_q(\mathfrak{su}_N)$  — когда получаются простые полиномы ХОМФЛИ. Ниже мы кратко обсудим более общий случай: основные проблемы «раскрашенной»  $\mathcal{R}$ -матричной техники и пути их решения и актуальные (на момент написания текста) достижения.

**5.1.1.  $\mathcal{R}$ -матрицы и коэффициенты Рака.** Для непосредственного вычисления раскрашенных полиномов узлов с помощью  $\mathcal{R}$ -матриц необходимы явные формулы элементов последних в выбранных представлениях. Если для собственных значений  $\mathcal{R}$ -матриц известна простая общая формула [50], то с универсальными блоками (см. п. 4.6) дело обстоит гораздо сложнее.

Недиагональные блоки  $\mathcal{R}$ -матриц получаются из соответствующих диагональных при замене базиса с помощью некоторых матриц. Их элементы, *коэффициенты Рака*, относятся к числу основных и весьма трудновычисляемых специальных функций теории представлений. Определение этих величин довольно прямолинейно и конструктивно, они неплохо поддаются символьным компьютерным вычислениям. Однако при этом обнаруживается ряд технических трудностей и подводных камней, а сложность вычислений быстро нарастает [51].

С другой стороны, теория  $\mathcal{R}$ -матричных инвариантов узлов сама по себе может быть источником знаний о коэффициентах Рака: например, ряд интересных соотношений удастся установить из сравнения различных  $\mathcal{R}$ -матричных представлений для одних и тех же инвариантов [52].

**5.1.2. Каблирование узлов и  $\mathcal{R}$ -матриц.** Альтернативный подход [15] основан на формуле *коумножения*

$$\mathcal{R}((Y_1 \otimes Y_2) \otimes Y_3) = \mathbb{I} \otimes \mathcal{R}(Y_2 \otimes Y_3) \cdot \mathcal{R}(Y_1 \otimes Y_3) \otimes \mathbb{I} \quad (5.1)$$

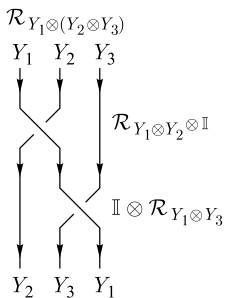


Рис. 23. Каблирование (коумножение) для  $\mathcal{R}$ -матрицы

(рис. 23), которая играет для  $\mathcal{R}$ -матриц ту же роль, что и формула (3.14) для элементов алгебры (или универсальной обертывающей). Вместе со свойством инвариантности пространств неприводимых представлений относительно действия универсальной  $\mathcal{R}$ -матрицы (см. пп. 3.1.2, 4.7.1) свойство (5.1) позволяет последовательно вычислять раскрашенные полиномы: «более сложные» как линейные комбинации «более простых». В первых работах раскрашенные полиномы вводились [1] и успешно использовались для классификации узлов [14] именно таким образом.

На определенном этапе процедура каблирования для полиномов ХОМФЛИ составила серьезную конкуренцию методу раскрашенных  $\mathcal{R}$ -матриц и позволила заметно продвинуться по сравнению с ним [15]. Сейчас, с развитием техники старших весов [51, 53, 54], процедура каблирования утрачивает свою актуаль-

ность как средство вычисления раскрашенных полиномов, однако приобретает самостоятельную ценность для изучения инвариантов узлов.

**5.1.3. Блоки  $\mathcal{R}$ -матриц.** В п. 4.6.2 мы описали и явно построили в частных случаях базис из векторов в общих инвариантных подпространствах матриц  $R$  в сечении косы. Тот же базис оказался каноническим относительно действия алгебры Ли в сечении косы, как мы обсудили в п. 4.7.1. Однако уже в простейшем примере из п. 4.6.1 мы упомянули произвол в выборе базисных векторов на некоторых двумерных общих инвариантных подпространствах. Оказывается, что тот же произвол содержится и в определении канонического базиса в представлениях алгебры Ли в этих случаях. Такой произвол присутствует всякий раз, когда в разложении тензорного произведения представлений на неприводимые возникает (хотя бы двумерное) пространство кратностей (см. п. 4.7.1). Эта неоднозначность служит серьезным препятствием для явных вычислений в теории представлений. Причем в случае раскрашенных матриц (для старших представлений) такое вырождение канонического базиса может иметь место уже для двунитовой косы [55, 56].

В п. 4.6.1 мы нашли базис, выделенный среди «прочих равных»: в котором блоки  $2 \times 2$  в матрицах  $R$  имели особенно простой вид. Замечательно, что такое снятие вырождения имеет место и в других случаях: вид матриц  $R$  резко упрощается в одном из многих базисов, на первый взгляд, ничем не выделенном с точки зрения представлений алгебры Ли. Для раскрашенных матриц это явление, в частности, можно продемонстрировать с помощью каблирования (п. 5.1.2): см. простейший пример в [15].

Последние компьютерные вычисления элементов матриц  $R$  (коэффициентов Рака, п. 5.1.1) вместе с анализом полученных выражений позволили исследовать несколько интересных случаев « $\mathcal{R}$ -матричного» снятия вырождения при разложении произведения представлений по неприводимым с нетривиальными кратностями [57].

\*\*\*

Несмотря на все описанные трудности, список ответов для раскрашенных  $\mathcal{R}$ -матриц, которые удалось так и или иначе получить и записать в пригодном для анализа виде, постоянно пополняется [49].

**5.2. Полиномы узлов как функции собственных значений  $\mathcal{R}$ -матриц.** В п. 2.2 мы получили выражение (2.34) для операторов перекрестков (как мы теперь знаем из разд. 4,  $\mathcal{R}$ -матриц), где все матричные элементы операторов были представлены как функции их собственных значений. Эти выражения получились как следствие уравнения Янга–Бакстера (2.12) — как раз того условия топологической инвариантности (RIII, рис. 9), которое достигается с помощью  $\mathcal{R}$ -матриц в качестве операторов перекрестков. Подобные выражения известны и в более общих случаях, и ожидание, что они всегда (или часто) найдутся, называют *гипотезой о собственных значениях  $\mathcal{R}$ -матриц* [58]:

Квантово-групповые полиномы узлов полностью выражаются через общие собственные значения операторов перекрестков ( $\mathcal{R}$ -матриц) для представления узла в виде замыкания косы.

На языке теории представлений то же утверждение значит, что через собственные значения  $\mathcal{R}$ -матрицы выражаются коэффициенты Рака (п. 5.1). В свою очередь, гипотеза о собственных значениях может дополнить набор средств вычисления коэффициентов Рака и раскрашенных полиномов из предыдущих разделов [51].

Для матриц перекрестков размера  $2 \times 2$  эта система уравнений на матричные элементы (2.12) легко решается и приводит к явным формулам (2.17) для матрицы оператора второго перекрестка в выбранном базисе. Аналогичное вычисление можно проделать для блоков  $2 \times 2$  в случае различных представлений на нитях и для блоков размера  $3 \times 3$  [15]. Тем не менее гипотеза о собственных значениях сперва была предложена и долгое время проверялась чисто эмпирически, как и явные формулы для блоков размером до  $5 \times 5$  (см. ссылки в [58]). Недавно все это удалось вывести (для блоков произвольного размера) для симметрических представлений с помощью их специфических симметрий [59]. В настоящее время исследуется обратная задача: поиска новых симметрий более общих представлений с помощью гипотезы о собственных значениях, когда есть ее независимые подтверждения [60].

**5.3. Квантово-групповая систематика полиномов узлов.** Развитие  $\mathcal{R}$ -матричных методов в теории узлов прежде всего позволяет пересмотреть каталог полиномов из табл. 1.

**5.3.1. Раскрашенные полиномы: обыкновенные и экзотические.** Основу классификации по-прежнему составляют (раскрашенные) полиномы ХОМФЛИ и Кауффмана, причем полиномы Джонса и Александера возникают как частные случаи первых. Эти полиномы получаются из квантовых  $\mathcal{R}$ -матриц для конечномерных представлений основных (*регулярных*) серий алгебр Ли:  $a_n \equiv \mathfrak{su}_{n-1}$  (ХОМФЛИ),  $b_n \equiv \mathfrak{so}_{2n+1}$ ,  $c_n \equiv \mathfrak{sp}_{2n}$ ,  $d_n \equiv \mathfrak{so}_{2n}$  (Кауффмана). Также можно рассмотреть  $\mathcal{R}$ -матричные полиномы узлов, связанные с другими (*исключительными*) алгебрами Ли [44,45]:  $e_6, e_7, e_8, f_4, g_2$ . «Раскраска» полинома отвечает выбору представления алгебры (разбор явных формул можно найти, например, в обзоре [39]); в частности, простые (нераскрашенные) полиномы отвечают фундаментальному (векторному) представлению.

**5.3.2. Универсальные полиномы.** Для некоторых представлений (на данный момент для фундаментального и присоединенного) удастся рассмотреть сразу все алгебры Ли\* и ввести так называемые *универсальные* полиномы, описывающие непрерывные переходы между полиномами для различных алгебр (см. [45] и приведенные там ссылки).

---

\*Точнее, все алгебры Ли, входящие в классификацию Картана [31].

**5.3.3. Полиномы для особенных «квантований».** В п. 3.2.4 мы убедились, что  $\mathcal{R}$ -матричный полином узла на самом деле связан не просто с алгеброй Ли  $\mathfrak{g}$ , а с ее универсальной квантовой обертывающей  $U_q(\mathfrak{g})$ . При этом все сказанное до сих пор, строго говоря, относилось к случаю общего положения «квантового» параметра  $q$ : исключая значения  $q$  в корнях единицы,  $q = \exp((2\pi i)/k)$  для  $k \in \mathbb{Z}$ . В последнем случае представления квантовых универсальных обертывающих существенно отличаются от представлений соответствующих «классических» алгебр Ли [61]. Тем не менее для представлений в корнях единицы по-прежнему справедливо выражение для  $\mathcal{R}$ -матрицы в виде формального ряда по образующим алгебры, что, в принципе, позволяет вычислять соответствующие полиномы узлов в духе [39]. Однако даже для тех представлений, которые сохраняют свои свойства в корнях единицы, полиномы в этих особых точках приобретают ряд специфических свойств [62, 63].

Особняком стоит случай  $q = 1$ . Тогда для образующих квантовой группы восстанавливаются соотношения обычной алгебры Ли (коммутации и произведения, см. п. 3.2.3). Однако соответствующие инварианты (*специальные полиномы*) можно получить, только переходя к пределу при  $q \rightarrow 1$  в общих выражениях для «квантовых» инвариантов. Специальные полиномы являются в некотором смысле простейшими среди полиномиальных инвариантов узлов. Тем не менее именно с этим пределом связан ряд замечательных наблюдений, которые позволяют обнаружить новые структуры в квантово-групповых полиномах, в том числе для произвольных  $q$  [48].

**5.3.4. Полиномы для «конформных»  $\mathcal{R}$ -матриц.** Под (раскрашенными) полиномами узлов традиционно понимают инварианты, связанные с конечномерными представлениями квантовых групп. Именно такие полиномы допускают тензорные или матричные выражения типа обсуждавшихся в разд. 2, 3, где каждый индекс пробегает дискретный набор базисных векторов в пространстве представления.

Оказывается, квантовые  $\mathcal{R}$ -матрицы возникают также в более сложных случаях — для «гибридов» рассмотренных выше квантовых групп и бесконечных групп общекординатных (конформных) преобразований двумерных поверхностей. В этом контексте возникают новые инварианты узлов [42, 43].

Также при изучении конформных отображений возникают не обсуждавшиеся ранее бесконечномерные представления квантовых обертывающих. В пространствах таких представлений базисные векторы задаются непрерывным параметром, и интегралы по нему занимают место тензорных сверток, в частности, в выражениях для инвариантов узлов. Свойства таких инвариантов обсуждаются, например, в [46, 47].

**Благодарности.** Автор глубоко обязан А. Ю. Морозову и А. Д. Миронову за многолетнее кропотливое научное руководство его научной работой, а также Е. С. Суловой и В. В. Слепцовой (Насоновой) за создание условий для таковой. Автор благодарен Э. Т. Ахмедову, П. И. Дунину-Барковскому,

Д. В. Васильеву, Е. А. Выродову, Д. В. Галахову, А. А. Морозову, А. Ю. Орлову, И. В. Полюбину, А. В. Пополитову, А. А. Рослому и А. В. Слепцову за проявленный интерес к работе, внимательное прочтение черновики настоящего текста и многочисленные критические замечания. Автор также благодарен Н. Я. Амбургу, Г. Б. Аминову, С. Б. Артамонову, И. А. Даниленко, А. В. Забродину, О. С. Круглинской, Н. А. Немкову, С. А. Миронову, Ш. Р. Шакирову и другим участникам семинара лаборатории методов математической физики ИТЭФ за регулярные увлекательные и полезные обсуждения. Автор также благодарен И. В. Тютину за подробный разбор вводного примера.

Автор особенно благодарен И. А. Дынникову, А. В. Малютину и М. Э. Казаряну за проявленное глубокое внимание к работе автора и ценные обсуждения.

Автор благодарен Э. Т. Ахмедову, М. И. Высотскому, А. В. Маршакову, В. А. Новикову, а также Т. В. Углову и другим организаторам молодежной конференции ИТЭФ за возможность выступить перед новой, разнообразной и внимательной аудиторией.

Автор хотел бы также поблагодарить людей, открывших ему путь в науку, в особенности: А. А. Абрикосова, Д. А. Александрова, М. В. Данилова, Н. В. З. Нозика, Н. Острикова, В. П. Слободянина, Т. В. Углова, В. В. Шанькова и С. А. Шаракина.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 16-12-10344).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kauffman L. H.* The Interface of Knots and Physics. Singapore: World Sci., 2001. 788 p.
2. *Baxter R. J.* Exactly Solved Models in Planar Mechanics. London: Acad. Press, 1989. 502 p.
3. *Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* Квантование групп Ли и алгебр Ли // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. С. 178–206.
4. *Демидов Е.* Квантовые группы. М.: Факториал, 1998. 128 с; <http://fot.pskgu.ru/ebooks/demidoval.html>.
5. *Мантуров В. О.* Теория узлов. М.; Ижевск: Ин-т комп. исслед., 2005. 512 с.
6. *Bar-Natan D., Scott M. et al.* The Knot Atlas. <http://katlas.org>.
7. *Alexander J. W.* Topological Invariants of Knots and Links // Trans. AMS. 1928. V. 30. P. 275–306.
8. *Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J.* Introduction to Vassiliev Knot Invariants. Cambridge Univ. Press, 2012. arXiv:1103.5628v3.
9. *Jones V. F. R.* A Polynomial Invariant for Knots via von Neumann Algebra // Bull. AMS. 1985. V. 12. P. 103–111.
10. *Freyd P., Yetter D., Hoste J., Lickorish W. B. R., Millett K., Ocneanu A.* A New Polynomial Invariant of Knots and Links // Ibid. P. 239–246.



11. *Przytycki J. H., Traczyk P.* Invariants of Links of Conway Type // *Kobe J. Math.* 1988. V. 4. P. 115–139.
12. *Kwon B. H.* On the HOMFLY Polynomial of 4-Plat Presentations of Knots. arXiv:1309.5052.
13. *Kauffman L.* State Models and the Jones Polynomial // *Topology.* 1987. V. 26. P. 395–407.
14. *Morton H. R., Ryder H. J.* Mutants and  $su(3)_q$  Invariants // *Geom. Topol. Monogr.* 1998. V. 1. P. 365–381; arXiv:9810197.
15. *Анохина А. С., Морозов А. А.* Процедура каблирования для полиномов ХОМФЛИ // *ТМФ.* 2014. Т. 178. С. 3–68; arXiv:1307.2216.
16. *Nawata S., Ramadevi P., Singh V. K.* Colored HOMFLY Polynomials Can Distinguish Mutant Knots. arxiv:1504.00364.
17. *Bishler L., Dhara S., Grigoryev T., Mironov A., Morozov A., Morozov An., Ramadevi P., Singh V. K., Sleptsov A.* Distinguishing Mutant Knots. arXiv:2007.12532.
18. *Анохина А. С.* Полиномы узлов из  $\mathcal{R}$ -матриц: при чем здесь физика? // *ЭЧАЯ.* 2020. Т. 51. С. 223–314.
19. *Reshetikhin N. Y., Turaev V. G.* Ribbon Graphs and Their Invariants Derived from Quantum Groups // *Commun. Math. Phys.* 1990. V. 127. P. 1–26.
20. *Kaul R. K.* Chern–Simons Theory, Colored-Oriented Braids and Link Invariants // *Commun. Math. Phys.* 1994. V. 162. P. 289–320; arXiv:9305032.
21. *Khovanov M.* A Categorification of the Jones Polynomial // *Duke Math. J.* 2000. V. 101. P. 359–426.
22. *Dunfield N. M., Gukov S., Rasmussen J.* The Superpolynomial for Knot Homologies // *Exp. Math.* 2006. V. 15. P. 129–159; arXiv:0505662.
23. *Bar-Natan D.* On the Vassiliev Knot Invariants // *Topology.* 1995. V. 34. P. 423–472.
24. *Bonatsos D., Daskaloyannis C.* Quantum Groups and Their Applications in Nuclear Physics // *Prog. Part. Nucl. Phys.* 1999. V. 43. P. 537–618; arXiv:9909003.
25. *Морозов А. Ю.* Унитарные интегралы и связанные с ними матричные модели // *ТМФ.* 2010. Т. 162, № 1. С. 3–40; arXiv:0906.3518.
26. *Морозов А. Ю.* Интегрируемость и матричные модели // *УФН.* 1994. Т. 164, № 1. С. 3–62.
27. *Chan C. T., Mironov A., Morozov A., Sleptsov A.* Orthogonal Polynomials in Mathematical Physics // *Rev. Math. Phys.* 2018. V. 30, No. 6. P. 1840005; arXiv:1712.03155.
28. *Mironov A., Morozov A., Morozov An.* Character Expansion for HOMFLY Polynomials. II. Fundamental Representation. Up to Five Strands in Braid // *JHEP.* 2012. V. 03, No. 034; arXiv:1112.2654.
29. *Шапиро Д.* Представления групп и их применение в физике. Новосибирск: КТФ НГУ, 2004. 123 с.; <http://ind.pskgu.ru/ebooks/shapirodaal2.html>.
30. *Исаев А. П., Рубаков В. А.* Теория групп и симметрий. М.: URSS, 2018. 504 с.; <http://ind.pskgu.ru/ebooks/shapirodaal2.html>.
31. *Georgi H.* Lie Algebras in Particle Physics. From Isospin to Unified Theories. Boulder: Westview Press, 1999. 344 p.
32. *Jones V. F. R.* Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials // *Ann. Math.* 1989. V. 126. P. 335–388.
33. *Дрифельд В. Г.* Квантовые группы // *Зап. науч. семинара ЛОМИ.* 1986. Т. 155. С. 18–49.

34. *Francesco P. D., Mathieu P., Sènèchal D.* Conformal Field Theory. New York: Springer, 1997. 890 p.
35. *Kirillov A. N., Reshetikhin N.*  $q$ -Weyl Group and a Multiplicative Formula for Universal  $\mathcal{R}$ -Matrices // Commun. Math. Phys. 1990. V. 134. P. 527–533.
36. *Rosso M., Jones V.* On the Invariants of Torus Knots Derived from Quantum Groups // J. Knot Theory Ramif. 1993. V. 2. P. 97–112.
37. *Jimbo M.* A  $q$ -Analogue of  $U_q(\mathfrak{gl}(N + 1))$ , Hecke Algebra and the Yang–Baxter Equation // Lett. Math. Phys. 1986. V. 11. P. 247–252.
38. *Turaev V. G.* The Yang–Baxter Equation and Invariants of Links // Invent. Math. 1988. V. 92. P. 527–533.
39. *Morozov A., Smirnov A.* Chern–Simons Theory in the Temporal Gauge and Knot Invariants through the Universal Quantum  $\mathcal{R}$ -Matrix // Nucl. Phys. B. 2010. V. 835. P. 284–313; arXiv:1001.2003.
40. *Kirillov A. N., Reshetikhin N. Y.* Representations of the Algebra  $U_q(\mathfrak{sl}(2))$ ,  $q$ -Orthogonal Polynomials and Invariants of Links // Infinite Dimensional Lie Algebras and Groups. Singapore: World Sci., 1989. P. 285–339; <https://math.berkeley.edu/reshetik/Publications/q6j-KR.pdf>.
41. *Khovanov M., Rozansky L.* Matrix Factorizations and Link Homology // Fund. Math. 2008. V. 199. P. 1–91; arXiv:0401268.
42. *Ramadevi P., Govindarajan T., Kaul R.* Knot Invariants from Rational Conformal Field Theories // Nucl. Phys. B. 1994. V. 422. P. 291–306; arXiv:9312215.
43. *Alekseev O., Novaes F.* Wilson Loop Invariants from  $W_N$  Conformal Blocks // Nucl. Phys. B. Commun. 2015. V. 901. P. 461–479; arXiv:1505.06221.
44. *Bracken A. J., Gould M. D., Zhang R. B.* Quantum Group Invariants and Link Polynomials // Commun. Math. Phys. 1991. V. 137, No. 1. P. 13–21.
45. *Mironov A., Morozov A.* Universal Racah Matrices and Adjoint Knot Polynomials. I. Arborescent Knots // Phys. Lett. B. 2016. V. 755. P. 47–57; arXiv:1511.09077.
46. *Галахов Д. М., Миронов А. Д., Морозов А. Ю.*  $SU(2)/SL(2)$ -инварианты узлов и монодромии Концевича–Сойбельмана // ТМФ. 2016. Т. 187, № 2. С. 263–282; arXiv:1510.05366.
47. *Galakhov D., Melnikov D., Mironov A., Morozov A.* Knot Invariants from Virasoro Related Representation and Pretzel Knots // Nucl. Phys. B. 2015. V. 899. P. 194–228; arXiv:1502.02621.
48. *Sleptsov A.* Hidden Structures of Knot Invariants // Intern. J. Mod. Phys. A. 2014. V. 29, No. 29.
49. *Morozov A., Sleptsov A. et al.* The Knotbook. [www.knotbook.org](http://www.knotbook.org).
50. *Gould M. D., Zhang Y. Z.* Quantum Affine Lie Algebras, Casimir Invariants and Diagonalization of the Braid Generator // J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 6757–6773; arXiv:9311041.
51. *Dhara S., Mironov A., Morozov A., Morozov A., Ramadevi P., Singh V. K., Sleptsov A.* Multicolored Links from 3-Strand Braids Carrying Arbitrary Symmetric Representations // Ann. Henri Poincaré. 2019. V. 20, No. 12. P. 4033–4054; arXiv:1805.03916.
52. *Mironov A., Morozov A., Morozov A., Sleptsov A.* Racah Matrices and Hidden Integrability in Evolution of Knots // Phys. Lett. B. 2016. V. 760. P. 45–58; arXiv:1605.04881.
53. *Bai C., Jiang J., Liang J., Mironov A., Morozov A., Morozov A., Sleptsov A.* Quantum Racah Matrices up to Level 3 and Multicolored Link Invariants // J. Geom. Phys. 2018. V. 132. P. 155–180; arXiv:1801.09363.

54. *Mironov A., Morozov A., Morozov An., Sleptsov A.* Quantum Racah Matrices and 3-Strand Braids in Irreps  $R$  with  $|R| = 4$  // JETP Lett. 2016. V.104. P.56–61; arXiv:1605.03098.
55. *Jie Gu H.J.* A Note on Colored HOMFLY Polynomials for Hyperbolic Knots from WZW Models // Commun. Math. Phys. 2015. V. 338. P.393–456; arXiv:1407.5643.
56. *Mironov A., Morozov A., Morozov An., Ramadevi P., Singh V.K., Sleptsov A.* Tabulating Knot Polynomials for Arborescent Knots // J. Phys. A: Math. Theor. 2017. V. 50, No.085201; arXiv:1601.04199.
57. *Bishler L., Morozov A., Sleptsov A., Shakirov S.* On the Block Structure of the Quantum  $\mathcal{R}$ -Matrix in the Three-Strand Braids // Intern. J. Mod. Phys. A. 2018. V.33, No. 17. P.1850105; arXiv:1712.07034.
58. *Dhara S., Mironov A., Morozov A., Morozov An., Ramadevi P., Singh V.K., Sleptsov A.* Eigenvalue Hypothesis for Multi-Strand Braids // Phys. Rev. D. 2018. V.97, No.12. P.126015; arXiv:1711.10952.
59. *Morozov An., Sleptsov A.* New Symmetries for the  $U_q(sl_n)$  6-j Symbols from the Eigenvalue Conjecture // JETP Lett. 2018. V. 108. P.697–704; arXiv:1905.01876.
60. *Alekseev V., Morozov An., Sleptsov A.* Interplay between Symmetries of Quantum 6-j Symbols and the Eigenvalue Hypothesis. arXiv:1909.07601. 2019.
61. *Klimyk A., Schmüdgen K.* Quantum Groups and Their Representations. Berlin; Heidelberg: Springer, 2012. 552 p.
62. *Kononov Ya., Morozov A.* Factorization of Colored Knot Polynomials at Roots of Unity // Phys. Lett. B. 2015. V. 747. P.500–510; arXiv:1505.06170.
63. *Calegari F., Garoufalidis S., Zagier D.* Bloch Groups, Algebraic  $K$ -Theory, Units, and Nahm's Conjecture. arXiv:1712.04887. 2017.