

КОГЕРЕНТНОСТЬ В РАССЕЯНИИ МАССИВНЫХ СЛАБОВЗАИМОДЕЙСТВУЩИХ НЕЙТРАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ НА ЯДРАХ

*В. А. Бедняков**

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

В работе изложен новый подход к описанию нерелятивистского слабого взаимодействия массивной нейтральной частицы (лептона) и ядра, при котором последнее сохраняет свою целостность. Сечение такого процесса представлено в виде суммы упругого (или когерентного) вклада, когда ядро остается в первоначальном состоянии, и неупругого (некогерентного) вклада, когда ядро оказывается в возбужденном состоянии. Плавный переход от упругого рассеяния к неупругому регулируется зависимостью ядерных нуклонных формфакторов от переданного ядру импульса. Интенсивность слабого взаимодействия задается параметрами, определяющими вклады в амплитуду вероятности скалярных произведений лептонного и нуклонного токов.

Полученные выражения представляют интерес как минимум для задачи прямого детектирования нейтральных массивных слабовзаимодействующих частиц темной материи, поскольку в отличие от общепринятого случая одновременно учитывают упругие и неупругие процессы. Показано, что наличие неупругого вклада, сопровождающегося испусканием характерного излучения от снятия возбуждения ядра (фотонов), оказывается решающим, когда когерентное сечение сильно подавлено или его нельзя зарегистрировать. Первое происходит в силу близости к нулю соответствующей константы взаимодействия или в случае, если переданный ядру импульс слишком велик и условие когерентности не выполняется. Когда доступная измерению энергия отдачи ядра оказывается ниже порога регистрации, когерентное сечение вообще нельзя увидеть. В такой ситуации «неупругие» фотоны представляют собой единственный регистрируемый сигнал взаимодействия частиц темной материи с веществом.

Таким образом, для извлечения максимальной информации о частицах темной материи следует планировать эксперименты по прямому их детектированию в такой постановке, когда возможна регистрация двух сигналов — энергии отдачи ядра и гамма-квантов от снятия ядерного возбуждения.

The paper presents a new approach to the description of the nonrelativistic weak interaction of a massive neutral particle (lepton) and a nucleus, in which the latter retains its integrity. The cross section of such a process is a sum of the elastic (or coherent) contribution, when the nucleus remains in its original state, and inelastic (incoherent) contribution, when the nucleus is in an excited state. Smooth transition from elastic scattering to inelastic scattering is regulated by the

* E-mail: bedny@jinr.ru

dependence of nuclear nucleon form factors on the momentum transferred to the nucleus. The intensity of the weak interaction is given by the parameters that determine the contributions to the probability amplitude of the scalar products of lepton and nucleon currents.

The resulting expressions are of interest at least in the problem of direct detection of neutral massive weakly interacting particles of dark matter, since, in contrast to the generally accepted approach, both elastic and inelastic processes are taken into account simultaneously. It is shown that the presence of an inelastic contribution, accompanied by the emission of a characteristic radiation (photons) from the de-excitation of the nucleus, turns out to be decisive, when the coherent cross section is strongly suppressed or cannot be registered. The first case takes place due to the proximity to zero of the corresponding interaction constant or if the momentum transferred to the nucleus is too great and the coherence condition is not met. When the measurable recoil energy of the nucleus is below the registration threshold, the coherent cross section cannot be seen at all. In such a situation, these “inelastic” photons represent the only available signal of the dark matter particles interaction with matter.

Therefore, in order to extract maximum information about the dark matter particles, one should plan experiments aimed at the direct detection of dark matter particles in such a setting, when it is possible to register both the recoil energy of the nucleus and the gamma quanta from the de-excitation of the nucleus.

PACS: 13.15.+g; 30.Pt; 14.60.St

1. ВВЕДЕНИЕ. ОТ НЕЙТРИНО К МАССИВНОМУ НЕЙТРАЛЬНОМУ ЛЕПТОНУ

В работах [1–3] был сформулирован и достаточно подробно изложен подход к описанию нейтрино-ядерного $\nu A \rightarrow \nu A^{(*)}$ и антинейтрино-ядерного $\bar{\nu} A \rightarrow \bar{\nu} A^{(*)}$ взаимодействий в том случае, когда ядро-мишень A может оставаться в своем первоначальном состоянии или переходить в возбужденное состояние A^* (с сохранением своей целостности). Подход опирался на описание ядра как связанного состояния составляющих его нуклонов на базе многочастичной волновой функции ядра общего вида.

Было показано, что упругое взаимодействие, сохраняющее начальное квантовое состояние ядра, приводит в квадратичному усилению соответствующего наблюдаемого сечения в терминах числа нуклонов. В то же время наблюдаемое суммарное сечение всех остальных (возможных) неупругих процессов, сопровождающихся изменением квантового состояния ядра, обладает, вообще говоря, лишь линейной зависимостью от числа нуклонов. Помимо этого было продемонстрировано, что поведение упругого и неупругого сечений определяется множителями $|F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$ и $1 - |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$ соответственно, где $F_{p/n}(\mathbf{q})$ — нормированный на единицу ядерный формфактор протона/нейтрона. Эти формфакторы регулируют плавный переход от режима упругого (когерентного) к режиму неупругого (некогерентного) (анти)нейтрино-ядерного рассеяния. В общем случае, когда переданный ядру Z -импульс \mathbf{q} не мал или не велик, когерентный

и некогерентный вклады в полное сечение должны рассматриваться одновременно.

Также было отмечено, что упругие и неупругие нейтринные $\nu(\bar{\nu})A$ -процессы благодаря их общей природе, обусловленной слабыми нейтральными токами, оказываются экспериментально неразличимыми, поскольку единственной наблюдаемой величиной является энергия отдачи ядра-мишени. Поэтому в экспериментах, нацеленных (при достаточно высоких энергиях) на изучение когерентного рассеяния (анти)нейтрино путем детектирования только энергии отдачи ядра, может проявляться некогерентный фон, который неотличим от сигнала, когда снимающие возбуждение ядра γ -кванты не поддаются регистрации. Например, если в эксперименте COHERENT [4] с ядром ^{133}Cs при энергии (анти)нейтрино 30–50 МэВ не детектируются γ -кванты от снятия ядерного возбуждения, то в данных этого эксперимента искомые события когерентного упругого рассеяния нейтрино на ядрах (CE ν NS-события) содержатся с неустранимой неупругой (некогерентной) примесью на уровне 15–20%.

В то же время некогерентный вклад может быть измерен (оценен) напрямую путем целенаправленной регистрации фотонов, испущенных возбужденными в результате неупругих процессов ядрами-мишенями [5], причем число таких фотонов пропорционально отношению неупругого νA -сечения к упругому. Эти фотоны должны коррелировать во времени с падающим нейтринным пучком и иметь характерный для ядра A спектр энергий, которые, как правило, значительно больше энергии отдачи ядра, что заметно упрощает их регистрацию. Одновременное детектирование энергии отдачи и γ -квантов от снятия возбуждения ядра позволит выделить «чистый» CE ν NS-вклад, а следовательно, проводить изучение ядерной структуры и вести прецизионный поиск новой физики в нейтринных процессах.

Очевидно, что примененный в работах [1–3, 5] подход к рассеянию нейтрино и антинейтрино на ядрах может быть обобщен на случай, когда вместо безмассового (анти)нейтрино рассматривается массивная нейтральная частица и когда достаточно слабое взаимодействие этой частицы с нуклонами ядра описывается феноменологическим лагранжианом, учитывающим возможные лоренц-структуры (скаляр, псевдоскаляр, вектор и аксиальный вектор). Актуальность рассмотрения такого случая следует, например, из необходимости правильного понимания баланса упругого и неупругого взаимодействий в задаче прямого детектирования массивных слабовзаимодействующих нейтральных частиц темной материи за счет их (нерелятивистского) рассеяния на ядрах-мишенях соответствующего детектора.

Стоит отметить, что рассмотренные в работах [1–3, 5] нейтринные события CE ν NS представляют собой неустранимый фон для экспериментов, нацеленных на прямое детектирование частиц темной материи в наземных условиях (см., например, [6–10]), поскольку главной и по-

ка единственной сигнатурой обоих процессов является энергия отдачи ядер-мишеней. По этой причине рассмотрение этих двух оказавшихся взаимосвязанными процессов в едином подходе представляется целесообразным.

Кроме того, исходя из упомянутого анализа баланса когерентности и некогерентности в нейтринных процессах при энергиях нейтрино в области 30–50 МэВ можно сказать, что для массивных нейтральных частиц роль неупругих (некогерентных) процессов во взаимодействии с ядрами, особенно с учетом эффектов новой физики, вполне может оказаться более значимой.

В ответ на длительное отсутствие положительных результатов* широкого спектра уже имеющихся экспериментов по поиску темной материи появилось множество новых, порой экзотических, предложений как по возможному составу самой темной материи [12–16] и ее необычным свойствам [17–24], так и в направлении более изощренных методов ее детектирования [25–32]. Тем не менее представляется несколько преждевременным в силу его исключительной значимости [6, 10, 33–35] предавать забвению традиционный путь прямого детектирования массивных слабовазимодействующих частиц темной материи без критического анализа общепринятых в этом методе предположений.

Таким образом, первая задача данной работы состоит в обобщении упомянутого выше *безмассового нейтринного* подхода [1–3, 5] на случай взаимодействия *массивных* нейтральных слабовазимодействующих χ -частиц с ядрами $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$ в *нерелятивистском приближении*. Вторая задача состоит в исследовании тех областей параметров (в том числе кинематических), в которых неупругий (некогерентный) процесс $\chi A \rightarrow \chi A^*$ может составлять заметную конкуренцию упругому (когерентному) процессу $\chi A \rightarrow \chi A$, традиционно считающемуся повсеместно доминирующим. Наличие таких областей, в которых главную роль играет неупругий канал, особенно если учесть, что характер χA -взаимодействия, как правило, уже вне рамок Стандартной модели, может послужить объяснением «слепоты» детекторов темной материи, настроенных на поиск событий χA -рассеяния только в упругом канале.

2. КИНЕМАТИКА И СЕЧЕНИЕ УПРУГОГО И НЕУПРУГОГО χA -РАССЕЯНИЯ

В случае взаимодействия двух частиц с образованием двух частиц (процесс $2 \rightarrow 2$)

$$\chi(k) + A(P_n) \rightarrow \chi(k') + A^{(*)}(P'_m) \quad (1)$$

* За исключением результатов DAMA/LIBRA [11], которые игнорируются без адекватного опровержения.

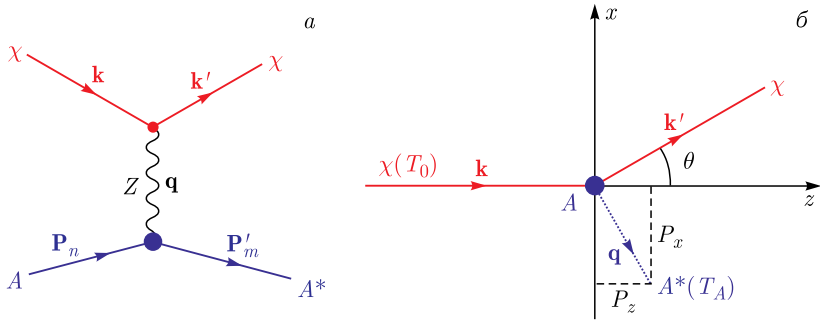


Рис. 1. «Внешний вид» χA -взаимодействия за счет обмена, например, нейтральным Z -бозоном (а). Кинематика этого процесса в лабораторной системе отсчета, в которой ядро A покоится (б)

4-импульсы падающего и уходящего нейтрального массивного лептона (χ -частицы) обозначены как $k = (k_0 = E_\chi, \mathbf{k})$ и $k' = (k'_0 = E'_\chi, \mathbf{k}')$, а 4-импульсы начального и конечного состояний ядра соответственно как $P_n = (P_n^0, \mathbf{P}_n)$ и $P'_m = (P_m^0, \mathbf{P}_m)$ (рис. 1, а). Полная энергия ядерного состояния $|P_n\rangle$ равна $P_n^0 = E_{\mathbf{P}} + \varepsilon_n$, где ε_n — внутренняя энергия n -го квантового состояния ядра. Выражение для сечения процесса (1) имеет (см., например, [1, 3, 36–38]) вид *

$$d\sigma = - \frac{\delta(k_0 + P_n^0 - k'_0 - P_m^0) |\mathcal{M}|^2 |\mathbf{k}'|^2 d|\mathbf{k}'| d\cos\theta}{32\pi k'_0 P_m^0 \sqrt{(k P_n)^2 - m_\chi^2 m_A^2}}. \quad (2)$$

Если χ -частица массой m_χ с импульсом \mathbf{k} налетает вдоль z -оси на покоящееся ядро A и улетает под углом θ к x -оси с импульсом \mathbf{k}' (y -ось всегда можно выбрать перпендикулярной плоскости рассеяния), то 4-импульсы можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} k &= \left(k_0 = \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}|^2}, 0, 0, k_z = |\mathbf{k}| \right), \quad P_n = \left(P_n^0 = m_A + \varepsilon_n, 0, 0, 0 \right), \\ k' &= \left(k'_0 = \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}'|^2}, k'_x = |\mathbf{k}'| \sin\theta, 0, k'_z = |\mathbf{k}'| \cos\theta \right), \\ P'_m &= \left(P_m^0 = \varepsilon_m + \sqrt{m_A^2 + (P_m^x)^2 + (P_m^z)^2}, P_m^x, 0, P_m^z \right) = \\ &= \left(P_m^0 = \varepsilon_m + \sqrt{m_A^2 + \mathbf{q}^2}, -|\mathbf{k}'| \sin\theta, 0, |\mathbf{k}| - |\mathbf{k}'| \cos\theta \right), \end{aligned}$$

где m_A — масса ядра A , а ε_m — энергия возбуждения m -го уровня (состояния) этого ядра. Здесь учтено сохранение компонент импульса по z -оси $k'_z + P_m^z = k_z$ (или $P_m^z = |\mathbf{k}| - |\mathbf{k}'| \cos\theta$) и по x -оси $k'_x + P_m^x = 0$ (или

* Квадрат матричного элемента $|\mathcal{M}_{mn}|^2$ обычно не зависит от угла φ . По нему проведено интегрирование.

$P_m^x = -|\mathbf{k}'| \sin \theta$), а также то, что переданный ядру 4-импульс $q = (q_0, \mathbf{q})$ связан с этими величинами следующим образом:

$$\begin{aligned} q^2 &\equiv (k - k')^2 = 2(m_\chi^2 - (kk')) = \\ &= 2\left(m_\chi^2 - \sqrt{(m_\chi^2 + |\mathbf{k}'|^2)(m_\chi^2 + |\mathbf{k}|^2)} + |\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta\right), \\ q_0 &= k_0 - k'_0 = P_m^0 - P_n^0 = \Delta\varepsilon_{mn} + T_A, \\ \mathbf{q}^2 &= (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = (|\mathbf{k}'| \sin \theta)^2 + (|\mathbf{k}| - |\mathbf{k}'| \cos \theta)^2 = \\ &= |\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}'|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta. \end{aligned} \quad (3)$$

Кинетическая энергия движения ядра отдачи T_A определяется в виде

$$T_A = \sqrt{m_A^2 + \mathbf{q}^2} - m_A. \quad (4)$$

Закон сохранения энергии из формулы для сечения (2), т. е. равенства $k_0 + P_n^0 = k'_0 + P_m^0$, можно переписать в виде

$$\begin{aligned} k_0 + m_A - \Delta\varepsilon_{mn} = \\ = \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}'|^2} + \sqrt{m_A^2 + |\mathbf{k}'|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta}, \end{aligned} \quad (5)$$

где разность энергий ядерных состояний $|m\rangle$ и $|n\rangle$ обозначена следующим образом:

$$\Delta\varepsilon_{mn} \equiv \varepsilon_m - \varepsilon_n. \quad (6)$$

Уравнение (5) в лабораторной системе отсчета задает зависимость величины импульса $|\mathbf{k}'|$ от угла θ между векторами \mathbf{k} и \mathbf{k}' .

Поскольку в лабораторной системе отсчета ядро до взаимодействия считается покоящимся и находящимся в некотором квантовом состоянии $|n\rangle$, с учетом приведенных выше кинематических соотношений сечение (2) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma_{mn}}{d|\mathbf{k}'|d\cos\theta} = \\ = \frac{-i\mathcal{M}_{mn}^2|\mathbf{k}'|^2}{2^5\pi\sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}'|^2}} \frac{\delta\left(k_0 - \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}'|^2} - \Delta\varepsilon_{mn} - T_A(|\mathbf{k}'|, \cos\theta)\right)}{(m_A + \varepsilon_m + T_A(|\mathbf{k}'|))\sqrt{k_0^2(m_A + \varepsilon_n)^2 - m_\chi^2 m_A^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь использованы выражения для квадрата скалярного произведения

$$\begin{aligned} (kP_n)^2 &= (k_0 P_n^0)^2 = k_0^2(m_A + \varepsilon_n)^2, \\ k_0 &= (m_\chi^2 + |\mathbf{k}|)^{1/2} \quad \text{и} \quad q_0 = \Delta\varepsilon_{mn} + T_A(|\mathbf{k}'|, \cos\theta). \end{aligned}$$

Из дельта-функции сохранения энергии выражения (7) также следует, что

$$\begin{aligned} T_A(|\mathbf{k}'|, \cos\theta) &= k_0 - k'_0 - \Delta\varepsilon_{mn} = \\ &= \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}|} - \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}'|^2} - \Delta\varepsilon_{mn}. \end{aligned} \quad (8)$$

Как известно [6, 39–42], оценка скорости массивных частиц темной материи вблизи Земли составляет примерно 10^{-3} от скорости света, т. е. $|\mathbf{v}| = |\mathbf{k}|/m_\chi \simeq 10^{-3}c \simeq 300\text{--}400$ км/с. Поэтому кинетическая энергия этих частиц

$$T_0 \equiv \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m_\chi} = \frac{|\mathbf{k}|^2}{m_\chi^2} \frac{m_\chi}{2} \simeq 10^{-6} \frac{m_\chi c^2}{2}, \quad (9)$$

с которой они налетают на мишень, имеет значения в интервале от 1 кэВ до 10 МэВ, поскольку в настоящее время считается, что масса нерелятивистских частиц (холодной) темной материи находится в интервале от единиц ГэВ/ c^2 до нескольких десятков ТэВ/ c^2 .

Помимо этого для квадрата переданного ядру импульса q^2 имеется следующее приближение:

$$q^2 = -2m_\chi^2 \left(\sqrt{\left(1 + \frac{|\mathbf{k}'|^2}{m_\chi^2}\right) \left(1 + \frac{|\mathbf{k}|^2}{m_\chi^2}\right)} - 1 - \frac{|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|}{m_\chi^2} \cos \theta \right) \simeq -\mathbf{q}^2,$$

$$\mathbf{q}^2 = (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = |\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}'|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta \simeq 2m_A T_A.$$

Последнее приближение следует из формулы (4) при условии $\mathbf{q}^2 \ll m_A^2$, которое (очень) хорошо выполняется в задачах прямого детектирования темной материи, где обычно $m_A \geq 10$ ГэВ/ c^2 , а энергии отдачи ядер не превышают 100–150 кэВ, т. е. $T_A \leq 1,5 \cdot 10^{-4}$ ГэВ. Типичная разность энергий возбуждения находится в области нескольких сотен килоэлектронвольт, т. е. заведомо $\Delta\varepsilon_{mn} \leq 1$ МэВ.

Итак, как минимум в задаче прямого поиска и детектирования частиц темной материи на основе χA -рассеяния имеются характерные масштабы величин:

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{k}|}{m_\chi} &\simeq 10^{-3}, \quad \Delta\varepsilon_{mn} \leq 1 \text{ МэВ}, \quad 10 \leq m_A \leq 100 \text{ ГэВ}/c^2, \\ 1 &< m_\chi < 10^4 \text{ ГэВ}/c^2, \quad T_A \leq 150 \text{ кэВ}, \\ |\mathbf{q}| &\leq 0,2 \text{ ГэВ}/c, \quad 1 \text{ кэВ} \leq T_0 \leq 10 \text{ МэВ}. \end{aligned} \quad (10)$$

Поэтому здесь вполне достаточно использовать нерелятивистское приближение. Оно же представляется применимым также в задачах регистрации кандидатов на роль частиц темной материи, образованных на ускорителях [27, 43, 44] или ускоренных в космическом пространстве [19, 22, 45–47], когда при довольно больших энергиях этих частиц T_0 переданный ядру импульс $|\mathbf{q}|$ все еще недостаточен для полного развала ядра.

Сечение $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$ рассеяния (7) в нерелятивистском приближении, т. е. при

$$k_0 = (m_\chi^2 + |\mathbf{k}|^2)^{1/2} \simeq m_\chi + \frac{|\mathbf{k}|^2}{2m_\chi} = m_\chi + T_0,$$

$$\sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}'|^2} \simeq m_\chi + \frac{|\mathbf{k}'|^2}{2m_\chi} \quad (11)$$

$$\text{и } T_A(|\mathbf{k}'|, \cos \theta) \simeq \frac{\mathbf{q}^2}{2m_A} = \frac{|\mathbf{k}'|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta}{2m_A},$$

принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \sigma_{mn}}{d|\mathbf{k}'| d \cos \theta} &= \frac{-|i\mathcal{M}_{mn}|^2 |\mathbf{k}'|^2}{2^5 \pi m_A |\mathbf{k}| \sqrt{1 + \frac{m_\chi \varepsilon_n}{m_A T_0}}} \times \\ &\times \frac{\delta \left(T_0 - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{2m_\chi} - \Delta \varepsilon_{mn} - \frac{|\mathbf{k}'|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta}{2m_A} \right)}{(m_A + \varepsilon_m + T_A(|\mathbf{k}'|, \cos \theta)) \left(m_\chi + \frac{|\mathbf{k}'|^2}{2m_\chi} \right)}. \quad (12) \end{aligned}$$

Здесь выполнен переход от релятивистского выражения потока начальных частиц

$$\begin{aligned} \sqrt{w} &\equiv \sqrt{k_0^2 (m_A + \varepsilon_n)^2 - m_\chi^2 m_A^2} = \\ &= m_A |\mathbf{k}| \left[1 + \frac{\varepsilon_n}{m_A} \left(2 + \frac{\varepsilon_n}{m_A} \right) + \frac{m_\chi^2 \varepsilon_n}{|\mathbf{k}|^2 m_A} \left(2 + \frac{\varepsilon_n}{m_A} \right) \right]^{1/2} \quad (13) \end{aligned}$$

к его нерелятивистскому варианту:

$$\begin{aligned} \sqrt{w} &= \sqrt{(m_\chi + T_0)^2 (m_A + \varepsilon_n)^2 - m_\chi^2 m_A^2} \simeq \\ &\simeq m_A |\mathbf{k}| \sqrt{1 + \frac{m_\chi \varepsilon_n}{m_A T_0}} = m_A |\mathbf{k}|. \quad (14) \end{aligned}$$

Последнее равенство в (14) справедливо, если состояние ядра $|n\rangle$ — основное состояние с минимальной энергией, т. е. $\varepsilon_n = 0$.

Кинетическая энергия отдачи ядра T_A из (8), с одной стороны, входит в соотношение

$$T_A(|\mathbf{k}'|, \cos \theta) = T_0 - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{2m_\chi} - \Delta \varepsilon_{mn}, \quad (15)$$

с другой стороны, согласно формуле (11) представляет собой функцию двух независимых переменных — $|\mathbf{k}'|$ и $\cos \theta$, поэтому дельта-функция закона сохранения энергии в выражении (12) также зависит одновременно от этих двух переменных. Выражение для нерелятивистского сечения (12), как и начальную формулу (7), с помощью этой дельта-функции (связывающей независимые $|\mathbf{k}'|$ и $\cos \theta$) можно проинтегрировать либо по $|\mathbf{k}'|$, либо по $\cos \theta$. В результате исчезнет дельта-функция и останется только одна независимая переменная, определяющая дифференциальное сечение интересующего нас процесса. Более удобно использовать дельта-

функцию сохранения энергии для того, чтобы проинтегрировать дважды дифференциальное сечение (12) по переменной $\cos \theta$. Когда $|\mathbf{k}'|$ еще не связано с $\cos \theta$, дельта-функция из (12) имеет вид

$$\delta\left(T_0 - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{2m_\chi} - \Delta\varepsilon_{mn} - \frac{|\mathbf{k}'|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|\cos\theta}{2m_A}\right) \equiv \delta(f(\cos\theta)) = \frac{m_A \delta(\cos\theta - \cos\theta_i)}{|\mathbf{k}'||\mathbf{k}|}, \quad (16)$$

где

$$\cos\theta_i = -\frac{2m_A\left(T_0 - \frac{|\mathbf{k}'|^2}{2m_\chi} - \Delta\varepsilon_{mn}\right) - |\mathbf{k}'|^2 - |\mathbf{k}|^2}{2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|} \quad (17)$$

— решение нерелятивистского уравнения на сохранение энергии $f(\cos\theta_i) = 0$. «Обращение» формулы (17) имеет вид

$$|\mathbf{k}'| = |\mathbf{k}| \frac{r \cos\theta_i + \sqrt{1 - r^2 \sin^2\theta_i - \alpha(1+r)}}{1+r}, \quad \text{где } r = \frac{m_\chi}{m_A}, \quad \alpha = \frac{\Delta\varepsilon_{mn}}{T_0}.$$

Интегрирование сечения (12) по $\cos\theta$ с помощью (16) приводит к выражению

$$\frac{d\sigma_{mn}}{d|\mathbf{k}'|} = \frac{1}{2^5 \pi |\mathbf{k}|^2 \sqrt{1 + \frac{m_\chi \varepsilon_n}{m_A T_0}}} \times \frac{-|\mathcal{M}_{mn}|^2 |\mathbf{k}'|}{(m_A + \varepsilon_m + T_A(|\mathbf{k}'|, \cos\theta_i)) \left(m_\chi + \frac{|\mathbf{k}'|^2}{2m_\chi}\right)}, \quad (18)$$

в котором зависимость $\cos\theta_i$ от $|\mathbf{k}'|$ задана формулой (17).

Следующий этап преобразования формулы для сечения — это переход к дифференцированию по наблюдаемой величине $d\sigma_{mn}/dT_A = (d\sigma_{mn}/d|\mathbf{k}'|)(d|\mathbf{k}'|/dT_A)$, т. е. нужно найти якобиан перехода $d|\mathbf{k}'|/dT_A$. Это можно сделать двумя способами: либо явно (и утомительно) вычислить производную кинетической энергии из формулы (11)

$$\frac{dT_A(|\mathbf{k}'|, \cos\theta(|\mathbf{k}'|))}{d|\mathbf{k}'|} = \frac{1}{m_A} \left\{ |\mathbf{k}'| - |\mathbf{k}| \cos\theta - |\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \frac{d\cos\theta}{d|\mathbf{k}'|} \right\}, \quad (19)$$

подставив в (19) выражение (17) для $\cos\theta_i$ как функцию $|\mathbf{k}'|$, либо просто продифференцировать закон сохранения энергии (15), записанный в виде

$$\frac{|\mathbf{k}'|^2}{2m_\chi} = T_0 - \Delta\varepsilon_{mn} - T_A. \quad (20)$$

В обоих случаях получается простая формула:

$$\frac{dT_A(|\mathbf{k}'|)}{d|\mathbf{k}'|} = -\frac{|\mathbf{k}'|}{m_\chi}. \quad (21)$$

В итоге с учетом (18), (20) и (21) сечение (12) процесса $\chi A_n \rightarrow \chi A_m$ (в нерелятивистском приближении) принимает вид

$$\frac{d\sigma_{mn}}{dT_A}(\chi A_n \rightarrow \chi A_m) = \frac{|i\mathcal{M}_{mn}|^2}{2^6 \pi T_0 m_\chi m_A} C_{mn}^{\text{nonrel}}(T_A), \quad (22)$$

где введен (кинематический) коэффициент порядка единицы:

$$C_{mn}^{\text{nonrel}}(T_A) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{m_\chi \varepsilon_n}{T_0 m_A}}} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_m + T_A}{m_A}} \times \\ \times \frac{1}{1 + \frac{T_0 - \Delta\varepsilon_{mn} - T_A}{m_\chi}} \equiv C_{2,mn} \simeq O(1). \quad (23)$$

С учетом соотношений (10) можно показать, что этот коэффициент действительно мало отличается от единицы и практически не зависит ни от T_A , ни от индексов m и n .

В экспериментальной ситуации (или при расчетах ожидаемого сечения) исходной внешней величиной является энергия отдачи T_A . Поэтому, задав некоторое значение T_A , начальную энергию χ -частицы T_0 и характеристику ядра $\Delta\varepsilon_{mn}$, из закона сохранения энергии (15) можно определить кинетическую энергию улетающей χ -частицы (20), или $|\mathbf{k}'(T_A)|^2 = 2m_\chi(T_0 - \Delta\varepsilon_{mn} - T_A)$. Зная *это* значение $|\mathbf{k}'|^2$ и «его породившее» T_A , из определения нерелятивистской энергии отдачи ядра (формула (11)) получим выражение для угла вылета χ -частицы в лабораторной системе отсчета как функции T_A , $\Delta\varepsilon_{mn}$ и T_0 :

$$\cos \theta(T_A) = \frac{|\mathbf{k}'|^2 + |\mathbf{k}|^2 - 2m_A T_A}{2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'|} = \\ = \frac{m_\chi(2T_0 - \Delta\varepsilon_{mn}) - T_A(m_\chi + m_A)}{2m_\chi \sqrt{T_0(T_0 - \Delta\varepsilon_{mn} - T_A)}}. \quad (24)$$

3. АМПЛИТУДА РАССЕЯНИЯ χ -ЧАСТИЦЫ НА ЯДРЕ

Формализм получения амплитуды рассеяния массивной слабозадействующей нейтральной χ -частицы на ядре (как составной сложной системе) представляет собой обобщение подхода [1–3], впервые предложенного в работе [1] для описания рассеяния нейтрино на ядрах.

Для построения амплитуды рассеяния (рис. 1, *a*) начальное и конечное ядро (как связанную составную систему) будем описывать волновой функцией $|P_i\rangle$. Она отвечает ядру с 4-импульсом P_i , находящемуся

в некотором l -м внутреннем квантовом состоянии ($l = m, n$), и представляет собой суперпозицию свободных нуклонов $|\{p\}\rangle$, «взвешенных» с общей волновой функцией связанного состояния $\tilde{\psi}'_n(\{p\})$. Последняя есть произведение волновой функции $\tilde{\psi}_n(\{p^*\})$, описывающей внутреннюю структуру ядра в его системе покоя (соответствующие импульсы отмечены индексом \star), и волновой функции $\Phi_n(p)$, отвечающей за движение ядра как целого с импульсом $\mathbf{p} = \sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i$ и проекцией спина ядра s :

$$\tilde{\psi}'_n(\{p\}) = \tilde{\psi}_n(\{p^*\})\Phi_n(p), \quad \text{где } p = (\mathbf{p}, s). \quad (25)$$

«Внутренняя» волновая функция зависит от $(A - 1)$ штук 3-импульсов, поскольку сумма всех 3-импульсов равна полному импульсу ядра в целом. Таким образом, для состояния $|P_n\rangle$ будем использовать (антисимметризованное) выражение

$$|P_n\rangle = \int \left(\prod_i^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \Phi_n(p) |\{p^*\}\rangle, \quad \text{где } d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \equiv \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3 \sqrt{2E_{\mathbf{p}_i^*}}}, \quad (26)$$

а функция

$$\Phi_n(p) = (2\pi)^3 \sqrt{2P_n^0} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{P}) \quad (27)$$

соответствует ядру с определенным значением 3-импульса \mathbf{P} и энергией $P_n^0 = E_{\mathbf{p}} + \varepsilon_n$, учитывающей энергию возбуждения ядра ε_n . Символ $\{p^*\}$ обозначает запись $\{p^*\} \equiv (p_1^*, \dots, p_n^*)$, где p_i^* — 4-импульс i -го нуклона в системе центра масс (покоящегося) ядра.

Для ядерных состояний $|n\rangle$, описывающих покоящееся ядро, которое находится в n -м внутреннем квантовом состоянии (n -м уровне), принято условие нормировки

$$\langle m|n\rangle \equiv \int \left(\prod_i^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right) \tilde{\psi}_n(\{p^*\}) \tilde{\psi}_m^*(\{p^*\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) = \delta_{mn}. \quad (28)$$

Для волновых функций ядра $|P_n\rangle$ из (26) оно дает простое нормировочное условие

$$\langle P'_m|P_n\rangle = (2\pi)^3 2P_n^0 \delta^3(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \delta_{mn}. \quad (29)$$

Формальное определение состояния $|n\rangle$, удовлетворяющего (28), можно дать в виде

$$|n\rangle = \int \left(\prod_{i=1}^A d\tilde{\mathbf{p}}_i^* \right) \frac{\tilde{\psi}_n(\{p^*\})}{\sqrt{A!}} \left[(2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right) \right]^{1/2} |\{p^*\}\rangle. \quad (30)$$

На основе волновой функции (26) можно перейти к вычислению амплитуды (вероятности) рассеяния массивной нейтральной χ -частицы на ядре как системе, составленной из взаимодействующих друг с другом нуклонов, с учетом того, что внешнее взаимодействие осуществ-

вляется между (точечной) χ -частицей и бесструктурными нуклонами. Это предположение допустимо, поскольку χ -частица с энергией менее 50–100 МэВ, как правило, не способна «проникнуть внутрь нуклона и увидеть кварки». Поэтому с достаточной точностью можно использовать эффективный 4-фермионный лагранжиан взаимодействия [1–3].

В задаче прямого детектирования частиц темной материи обычно используется эффективный лагранжиан, учитывающий только аксиально-векторное (или спин-зависящее) и скалярное (спин-независящее) взаимодействия между χ -частицей и нуклонами (см., например, [6, 39, 41, 48, 49]). Его можно записать в виде произведения двух токов

$$\mathcal{L}(x) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} L_\mu(x) H^\mu(x). \quad (31)$$

Здесь в терминах нормальных произведений квантово-полевых операторов $\psi_\chi(x)$ и $\psi_{n,p}(x)$

$$L_\mu(x) = \chi_A : \bar{\psi}_\chi(x) \gamma_\mu \gamma_5 \psi_\chi(x) : + \chi_S : \bar{\psi}_\chi(x) \psi_\chi(x) :, \quad (32)$$

$$H^\mu(x) = \sum_{f=n,p} [h_A^f : \bar{\psi}_f(x) \gamma^\mu \gamma_5 \psi_f(x) : + h_S^f : \bar{\psi}_f(x) \psi_f(x) :] \quad (33)$$

даны операторы токов χ -частицы и нуклонов ядра. Эффективные константы связи

$$c_{A,S}^f \equiv \chi_{A,S} h_{A,S}^f$$

задают интенсивность взаимодействия χ -частиц с нуклоном (относительно константы Ферми G_F). В п. 4.3 приведено обобщение эффективного лагранжиана (31) на случай иных допустимых лоренц-инвариантных структур.

С помощью лагранжиана вида (31) \mathbb{S} -матрица $\langle P'_m, k' | \mathbb{S} | P_n, k \rangle$, описывающая вероятность перехода ядра и χ -частицы в результате их взаимодействия из начального состояния $|P_n, k\rangle$ в конечное $\langle P'_m, k'|$, в первом порядке по константе Ферми G_F записывается стандартным образом:

$$\langle P'_m, k' | \mathbb{S} | P_n, k \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(q + P_n - P'_m) i \mathcal{M}_{mn} = \frac{i G_F}{\sqrt{2}} \int d^4x H_{mn}^\mu(x) L_\mu^\chi(x), \quad (34)$$

где $H_{mn}^\mu(x) \equiv \langle P'_m | H^\mu(x) | P_n \rangle$ — амплитуда вероятности (матричный элемент) перехода ядра из состояния $|P_n\rangle$ в состояние $\langle P'_m|$ за счет адронного тока вида $H^\mu(x)$.

После подстановки в правую часть соотношения (34) операторных выражений для токов $H_{mn}^\mu(x)$ и $L_\mu^\chi(x)$, учета явного вида ядерных функций (26), проведения соответствующих выкладок и взятия интеграла по dx^4 , отвечающего сохранению энергии на уровне χ -частица–нуклон, а также введения обозначения для лептонного тока (или тока χ -частицы)

$$l_\mu(k', k, s', s) \equiv \bar{u}_\chi(\mathbf{k}', s') O_\mu u_\chi(\mathbf{k}, s) \quad (35)$$

для матричного элемента из формулы (34) получается следующее выражение:

$$i\mathcal{M}_{mn} = \frac{iG_F}{\sqrt{2}} \sqrt{4P_m^0 P_n^0} l_\mu(k', k, s', s) h_{mn}^\mu(\mathbf{q}). \quad (36)$$

Присутствующий в (36) адронный ток $h_{mn}^\mu(\mathbf{q}) = \langle m | H^\mu(0) | n \rangle$, определенный через функции ядерного состояния в системе покоя ядра, имеет вид*

$$h_{mn}^\mu(\mathbf{q}) = \sum_k^A \frac{\bar{u}(\bar{\mathbf{p}}_k^* + \mathbf{q}, r'_k) O_k^\mu u(\bar{\mathbf{p}}_k^*, r_k)}{\sqrt{4E_{\bar{\mathbf{p}}_k^*} E_{\bar{\mathbf{p}}_k^* + \mathbf{q}}}} \times \\ \times \int \prod_{i=1}^A \frac{d\mathbf{p}_i^* \delta(f(\mathbf{p}_i^*))}{(2\pi)^3} \tilde{\psi}_m^*(\{p_i^{(k)}\}, \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) \tilde{\psi}_n(\{p_i^*\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{i=1}^A \mathbf{p}_i^* \right), \quad (37)$$

где $\bar{\mathbf{p}}_k^*(\mathbf{q})$ — решение уравнения $f(\bar{\mathbf{p}}_k^*) = 0$, которое *зависит от* \mathbf{q} и определяется условием

$$\delta(f(\bar{\mathbf{p}}_k^*)) \equiv \delta \left(-T_A - \Delta\varepsilon_{mn} + \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_k^{*2}} - \sqrt{m^2 + (\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q})^2} \right) \neq 0. \quad (38)$$

Оно возникает из-за необходимости одновременного выполнения закона сохранения энергии на уровне ядра и отдельного нуклона. Технически это объясняется тем, что зависящая от переменной q_0 дельта-функция, отвечающая за сохранение энергии на уровне всего ядра

$$\delta(q_0 + P_{0,n} - P_{0,k}^*) = \delta(q_0 - T_A - \Delta\varepsilon_{mn}) = \delta \left(q_0 - \frac{\mathbf{q}^2}{2m_A} - \Delta\varepsilon_{mn} \right),$$

стоящая слева в формуле (34), должна «уравновешиваться» дельта-функцией сохранения энергии на уровне отдельно взятого (активного) нуклона**

$$\delta(q_0 + p_{0,k}^* - p_{0,k}^*) = \delta \left(q_0 + \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_k^{*2}} - \sqrt{m^2 + (\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q})^2} \right),$$

которая естественным образом возникает справа в формуле (34) после интегрирования по dx^4 и зависит от той же самой переменной q_0 . Поэтому соотношение (38) представляет собой условие одновременного выполнения закона сохранения энергии и *целостности ядра*

$$\sqrt{m^2 + (\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q})^2} - \sqrt{m^2 + \bar{\mathbf{p}}^2} = \frac{\mathbf{q}^2}{2m_A} + \Delta\varepsilon_{mn} = T_A + \Delta\varepsilon_{mn}, \quad (39)$$

* Вывод формулы (37) не зависит от явного вида комбинаций γ -матриц O_k^μ (см. [1–3]).

** Везде далее, где не сказано обратное, считается, что масса протона равна массе нейтрона: $m = m_p = m_n$.

которое «выбирает» импульс активного нуклона $\vec{p} = (p_L, p_T)$ зависящим от \mathbf{q} в следующем виде [1–3]:

$$p_L = -\frac{|\mathbf{q}|}{2} \left[1 - \sqrt{\beta} \sqrt{1 + \frac{4m_T^2}{\mathbf{q}^2(1-\beta)}} \right], \quad (40)$$

$$\beta = \frac{(T_A + \Delta\varepsilon_{mn})^2}{\mathbf{q}^2}, \quad m_T^2 = m^2 + p_T^2.$$

Согласно условию сохранения целостности ядра (39) в системе покоя ядра активный нуклон «встречает» падающую на ядро (вдоль z -оси) χ -частицу с ненулевым импульсом $p_l = (m, 0, 0, p_L)$ из (40), поэтому s -инвариант в системе покоя ядра (лабораторной системе) следует переписать:

$$s = (k_l + p_l)^2 m_\chi^2 + m^2 + 2mm_\chi \left\{ \sqrt{1 + \frac{2T_0}{m_\chi}} \sqrt{1 + \frac{p_L^2}{m^2}} - \frac{|\mathbf{k}_\chi^l| p_L}{m_\chi m} \right\}. \quad (41)$$

Иными словами, инвариантная энергия s , через которую вычисляются скалярные произведения в системе центра масс – лептон – нуклон, зависит не только от кинетической энергии падающей χ -частицы T_0 , но и от кинетической энергии отдачи ядра T_A , поскольку $\mathbf{q}^2 \simeq 2m_A T_A$. Отметим, что эта поправка в целом невелика, так как $p_L/m \leq 0,1$ [1–3], и в дальнейшем не учитывается.

Аргументами волновых функций связанного состояния ядра $\tilde{\psi}_m^*(\{p_\star^{(k)}\})$ и $\tilde{\psi}_n(\{p_\star\})$ в (37) являются выражения, определяемые как $\{p_\star\} = (p_1^*, \dots, p_A^*)$, где i -й элемент представляет собой пару $p_i^* \equiv (\mathbf{p}_i^*, r_i)$ из 3-импульса (в системе покоя ядра) и спина i -го нуклона. Выражение $\{p_\star^{(k)}\}$ совпадает с $\{p_\star\}$, за исключением k -го элемента, который равен $(\mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}, s_k)$, где \mathbf{q} – переданный χ -частицей (ядру) импульс.

Адронный ток $h_{mn}^\mu(\mathbf{q})$, определенный формулой (37), представляет собой сумму слагаемых типа $\bar{u}(\mathbf{p}_k + \mathbf{q}, s_k) O_k^\mu u(\mathbf{p}_k, r_k)$, отвечающих рассеянию χ -частицы на отдельно взятом k -м нуклоне, который до взаимодействия обладал 3-импульсом \mathbf{p}_k и проекцией спина на некоторое выделенное направление r_k . Амплитуда вероятности найти этот нуклон в начальном ядерном состоянии $|P_n\rangle$ именно с этими квантовыми числами определяется волновой функцией $\tilde{\psi}_n(\{p_\star\})$, заданной в импульсном представлении и зависящей от импульсов нуклонов в систем покоя ядра. Рассеянный («принявший взаимодействие», активный) нуклон имеет 3-импульс, равный $\mathbf{p}_k + \mathbf{q}$, и уже, вообще говоря, произвольную проекцию спина на выделенное направление s_k . Соответствующая амплитуда вероятности нахождения нуклона в конечном ядре $|P_m\rangle$ именно с такими квантовыми числами задается выражением $\tilde{\psi}_m^*(\{p_\star^{(k)}\})$. Все 3-импульсы остальных нуклонов-спектаторов (не участвовавших во взаимодействии

с χ -частицей) остаются неизменными и выпадают из рассмотрения за счет правил нормировки волновых функций ядра.

Для преобразования адронного тока (37), как и в работах [1–3], *предположим*, что волновая функция $\tilde{\psi}_n$ представима в виде произведения импульсной $\tilde{\psi}_n$ и спиновой χ_n компонент:

$$\tilde{\psi}_n(\{p^*\}) = \tilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}^*\})\chi_n(\{r\}), \quad (42)$$

первая из которых зависит от импульсных переменных $\{\mathbf{p}^*\} = (\mathbf{p}_1^*, \dots, \mathbf{p}_A^*)$, а вторая — от спиновых $\{r\} = (r_1, \dots, r_A)$. Из выражения (37) видно, что в него входят произведения спиновых функций

$$\lambda^{mn}(r', r) \equiv \lambda_{r'r}^{mn} \equiv \chi_m^*(\{r^{(k)}\})\chi_n(\{r\}), \quad (43)$$

где $\{r^{(k)}\}$ совпадает с $\{r\}$, за исключением k -го элемента, который равен r'_k .

Очевидно, что после взаимодействия активного (k -го) нуклона с χ -частицей его спиновое состояние либо не меняется (индекс $r'_k = r_k$), либо меняется ($r'_k \neq r_k$). В первом случае согласно условию нормировки (28) произведение спиновых функций (43) примет вид $\chi_m^*(\{r\})\chi_n(\{r\}) = \delta_{mn}$, который означает, что ядро *не изменилось*, т. е. после взаимодействия осталось в своем первоначальном состоянии ($m = n$). Во втором случае произведение спиновых функций (43) будет отлично от 0, только если индекс r'_k , *не равный* r_k , в точности будет соответствовать определению спинового $|m\rangle$ -состояния ядра A^* . Иными словами, в интересующих нас случаях можно считать, что произведение спиновых волновых функций из (43) фактически не зависит от индексов m, n :

$$\lambda^{mn}(r', r) = \delta_{mn}\delta_{r'r} + (1 - \delta_{mn})(1 - \delta_{r'r}). \quad (44)$$

С учетом этих допущений и $\bar{\mathbf{p}} = f(\mathbf{q})$ из (38) выражение (37) переписывается в виде

$$h_{mn}^\mu(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^A \frac{\bar{u}(\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}, r'_k) O_k^\mu u(\bar{\mathbf{p}}, r_k)}{\sqrt{4E_{\bar{\mathbf{p}}} E_{\bar{\mathbf{p}}+\mathbf{q}}}} \lambda^{mn}(r', r) \times \\ \times \int \left[\prod_{i=1}^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right] \delta(f(\mathbf{p}^*)) \tilde{\psi}_m^*(\{\mathbf{p}^*\}, \mathbf{p}_k^* + \mathbf{q}) \tilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}^*\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{l=1}^A \mathbf{p}_l^* \right). \quad (45)$$

Многомерный интеграл в этой формуле можно представить в виде матричного элемента оператора $\widehat{\mathbf{X}}_k$, осуществляющего 3-мерный сдвиг

* Для соответствия с работами [1–3] будем считать, что произведение $\chi_m^*(\{r^{(k)}\})\chi_n(\{r\})$, как и $\chi_n^*(\{r\})\chi_n(\{r\})$, равно единице. Справедливость этого предположения представляет собой предмет отдельного исследования.

k -го нуклона:

$$f_{mn}^k(\mathbf{q}) \equiv \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle = \int \left[\prod_{i=1}^A \frac{d\mathbf{p}_i^*}{(2\pi)^3} \right] \delta(f(\mathbf{p}_k^*)) \tilde{\psi}_m^*(\{\mathbf{p}_*^{(k)}\}) \tilde{\psi}_n(\{\mathbf{p}_*\}) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{l=1}^A \mathbf{p}_l^* \right), \quad (46)$$

где дельта-функция $\delta(f(\mathbf{p}_k^*))$ обеспечивает сохранение целостности ядра после сдвига оператором $\hat{\mathbf{X}}_k$ импульса активного k -го нуклона, вызванного внешним воздействием.

В результате с учетом формул (45) и (46) для матричного элемента (36), определяющего вероятность процесса $\chi_s A_n \rightarrow \chi_{s'} A_m$, получаем выражение

$$i\mathcal{M}_{mn}^{s's'r'r}(\mathbf{q}) = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{m_A}{m} C_{1,mn}^{1/2} \sum_{k=1}^A f_{mn}^k(\mathbf{q}) \lambda^{mn}(r', r) (l_{s's} h_{r'r}^k), \quad (47)$$

где

$$(l_{s's} h_{r'r}^k) \equiv l_\mu(k', k, s', s) \bar{u}(\bar{\mathbf{p}} + \mathbf{q}, r'_k) O_k^\mu u(\bar{\mathbf{p}}, r_k) \quad (48)$$

представляет собой скалярное произведение лептонного и k -го нуклонного токов, заключающее в себе всю специфику происходящего между ними взаимодействия. В формуле (47) учтено, что возникающий по ходу дела общий кинематический множитель можно переписать, «выделив из него» лидирующий фактор m_A/m , где m и m_A — массы нуклона и ядра, и введя поправку $C_{1,mn}$, величина которой с хорошей точностью близка к единице:

$$C_{1,mn}^{1/2} = \sqrt{\frac{P_n^0 P_m^0 m}{m_A m_A} \frac{m}{E_{\bar{\mathbf{p}}} E_{\bar{\mathbf{p}}+\mathbf{q}}}} \sim O(1). \quad (49)$$

Итак, матричный элемент, или амплитуда вероятности процесса $\chi A_n \rightarrow \chi A_m^{(*)}$ (47), представляет собой сумму индивидуальных лептон-нуклонных амплитуд вероятности, пропорциональных соответствующим скалярным произведениям токов $(l_{s's} h_{r'r}^k)$, взвешенных с двумя множителями, каждый из которых не сильно отличается от единицы. Множитель $\lambda^{mn}(r', r)$ (см. (44)) практически не зависит от $|n\rangle$ - и $|m\rangle$ -состояний ядра, однако он (как будет показано далее) «контролирует» начальное (r) и конечное (r') значения (удвоенной) проекции спина активного нуклона ядра на некоторую заранее выбранную ось. Второй множитель $f_{mn}^k(\mathbf{q})$ определяет нуклонный формфактор перехода ядра из $|n\rangle$ -состояния в $|m\rangle$ -состояние.

Выражение $\langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle$ из (46) представляет собой обобщение фактора $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$, использованного Фридманом [50]. Принципиальная разница между $\langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle$ и $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$ состоит в том, что, когда «работает» $e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}_k}$, явно считается, что k -й нуклон имеет вполне определенное положение в ядре, заданное координатой \mathbf{x}_k («прибит» в точке \mathbf{x}_k). Однако рассеяние

на одном свободном нуклоне не может привести к тому, что все ядро будет двигаться как единое целое, поскольку нуклоны должны быть связаны друг с другом, иначе ядро развалится. Используемые здесь волновые функции связанного состояния ядра не опираются на предположение о фиксации пространственных положений нуклонов в ядре, и по этой причине матричный элемент $\langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle$ не зависит от числа k [1–3]. Более того, именно величина $f_{mn}^k(\mathbf{q}) = \langle m | e^{i\mathbf{q}\hat{\mathbf{x}}_k} | n \rangle$ является ключевой для установления взаимосвязи когерентного и некогерентного режимов в χ -ядерном рассеянии (п. 4.1).

4. СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ χ -ЧАСТИЦЫ НА ЯДРЕ

4.1. Когерентный и некогерентный вклады в сечение рассеяния $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$. Наблюдаемое дифференциальное сечение процесса $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$ можно получить, усреднив дифференциальное сечение, определяющее вероятность перехода ядра из $|n\rangle$ -состояния в $|m\rangle$ -состояние (формулы (22) и (23)), по всем потенциально возможным начальным (внутренним) состояниям ядра-мишени $|n\rangle$ и просуммировав по всем допустимым конечным состояниям ядра-отдачи $|m\rangle$:

$$\frac{d\sigma}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}) = \sum_{m,n} \omega_n \frac{d\sigma_{mn}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}), \text{ где } \sum_n \omega_n = 1 \quad (50)$$

представляет собой полную сумму вероятностей всех возможных начальных состояний ядра A . Входящий в выражение (22) матричный элемент процесса $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$ был задан формулой (47). Если в ней выполнено суммирование по «внутренним» спиновым индексам (активного) нуклона и удержаны «внешние» спиновые индексы χ -частицы, то (47) приобретает вид

$$i\mathcal{M}_{mn}^{s's}(\mathbf{q}) = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{m_A}{m} C_{1,mn}^{1/2} \sum_{k=1}^A \sum_{r',r} f_{mn}^k(\mathbf{q}) (l_{s's} h_{r'r}^k) \lambda^{mn}(r', r). \quad (51)$$

В связи с этим напомним, что аналогичный матричный элемент для рассеяния (анти)нейтрино на ядре рассматривался [1–3] при фиксированных значениях спиральности (проекции спина на направление импульса) лептона. Поскольку спиральность нейтрино всегда отрицательна ($s' = s = -1$), а спиральность антинейтрино всегда положительна ($s' = s = +1$), то индексы s', s всегда были заданы для (анти)нейтринного матричного элемента типа (51) «извне». Следуя этой логике, был определен вид (51) для матричного элемента. Он отвечает χA -взаимодействию, когда χ -частица имеет фиксированные значения проекции ее начального (s) и конечного (s') спина на некоторое выделенное направление. Суммирование по проекциям спина активного нуклона $\sum_{r'r}$ осуществляет-

ся «внутри» матричного элемента (т. е. на уровне нуклонных амплитуд), а не на уровне квадрата матричного элемента, как обычно делается для реальных (или потенциально регистрируемых) частиц конечного состояния. Обоснованием такого суммирования является невозможность определения спина активного нуклона до и после взаимодействия. Например, матричный элемент $i\mathcal{M}_{mn}^{-+}$ описывает процесс, когда налетает χ -частица с проекцией спина $s = +1$, а улетает с проекцией спина $s' = -1$. Поскольку мы не можем (даже в принципе) узнать, с какой проекцией спина ее «принял» активный нуклон и с какой «отправил дальше», то вынуждены учесть все возможные проекции спина этого активного нуклона, т. е. просуммировать по $r = \pm$ и $r' = \pm$.

Подставляя формулу (51) в выражение для сечения (50), получим

$$\frac{d\sigma_{s's}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}) = \frac{G_F^2 m_A}{2^7 \pi m^2 T_0 m_\chi} \left[T_{m=n}^{s's} + T_{m \neq n}^{s's} \right], \quad (52)$$

где

$$T_{m=n}^{s's} = \sum_{k,j}^A \sum_n \omega_n \left[C_{1,mn} C_{nn}^{\text{nonrel}} f_{nn}^k f_{nn}^{j*} \sum_r (l_{s's} h_{rr}^k) \sum_x (l_{s's} h_{xx}^j)^* \right], \quad (53)$$

$$T_{m \neq n}^{s's} = \sum_{k,j}^A \sum_n \omega_n \left[\sum_{m \neq n} C_{1,mn} C_{mn}^{\text{nonrel}} f_{mn}^k f_{mn}^{j*} \sum_{r'r} \lambda_{r'r}^{mn} (l_{s's} h_{r'r}^k) \times \left(\sum_{x'x} \lambda_{x'x}^{mn} (l_{s's} h_{x'x}^j) \right)^\dagger \right]. \quad (54)$$

Здесь $T_{m=n}$ — вклад в сечение, отвечающий сохранению ядра его первоначального состояния, при этом проекция спина взаимодействующего (активного) нуклона не меняется. Согласно (44), $\lambda^{nn}(r', r) = \delta_{r'r}$, спиновые амплитуды выпадают из дальнейшего рассмотрения. Ключевую роль в выражении (52) играют скалярные произведения 4-векторов лептонных и нуклонных токов $(l_{s's} h_{r'r}^{p/n})$, определенные формулой (48).

Вводя обозначения

$$g_{\text{coh}}^{p/n} = C_{1,nn}^{p/n} C_{nn}^{\text{nonrel}} \quad \text{и} \quad g_{\text{inc}}^{p/n} = C_{1,mn}^{p/n} C_{mn}^{\text{nonrel}} \quad (55)$$

и учитывая вид формул (23) и (49), с хорошей степенью достоверности можно считать, что эти величины имеют постоянные значения порядка единицы и практически не зависят от энергии отдачи ядра T_A и ядерных индексов m, n . С учетом этого факта суммирование по индексу n в формуле (53) ведет к возникновению формфакторов, усредненных по

всем возможным начальным состояниям ядра, т. е.

$$\sum_n \omega_n f_{nn}^k f_{nn}^{j*} = \begin{cases} |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2, & \text{когда } (k, j) = (p, p) \text{ или } (k, j) = (n, n); \\ F_p(\mathbf{q}) F_n^*(\mathbf{q}), & \text{когда } (k, j) = (p, n); \\ F_n(\mathbf{q}) F_p^*(\mathbf{q}), & \text{когда } (k, j) = (n, p). \end{cases} \quad (56)$$

Иными словами, левая часть этого соотношения равна квадрату модуля ядерного протонного или нейтронного формфактора $|F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$, если индексы суммирования k и j соответствуют либо паре протонов, либо паре нейтронов. Если же эти индексы не соответствуют одновременно паре одинаковых нуклонов, то имеет место произведение ядерных формфакторов протона и нейтрона в виде $F_p(\mathbf{q}) F_n^*(\mathbf{q})$ или $F_n(\mathbf{q}) F_p^*(\mathbf{q})$. По этой причине выражение (53) можно представить как квадрат модуля суммы вкладов протонов и нейтронов:

$$\begin{aligned} T_{m=n}^{s's}(\mathbf{q}) &= \left| \sum_k^Z \sqrt{g_{\text{coh}}^p} \sum_r (l_{s's} h_{rr}^p(\mathbf{q})) F_p(\mathbf{q}) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_j^N \sqrt{g_{\text{coh}}^n} \sum_r (l_{s's} h_{rr}^n(\mathbf{q})) F_n(\mathbf{q}) \right|^2 = \\ &= \left| \sum_{f=p,n} \sqrt{g_{\text{coh}}^f} \sum_{k=1}^{A_f} \sum_r (l_{s's} h_{rr}^f(\mathbf{q})) F_f(\mathbf{q}) \right|^2. \end{aligned} \quad (57)$$

Здесь A_f обозначает полное число нуклонов типа $f = p, n$ в ядре.

Второе слагаемое в формуле для сечения (52), $T_{m \neq n}$, заданное выражением (54), содержит суммирование по индексам ядра m, n . Для выполнения этого суммирования учтем условие (44) о независимости $\lambda^{mn}(r', r)$ от индексов m, n при $m \neq n$. Будем (времененно) считать [1–3], что они равны средним их значениям для протонов и нейтронов, а также для них выполняется «условие нормировки»:

$$\lambda_{r'r}^{mn} \simeq \lambda_{r'r}^{p/n} \text{ и } \lambda_{r'r}^f [\lambda_{x'x}^f]^* \equiv \delta_{r'x'} \delta_{rx} |\lambda_{r'r}^f|^2. \quad (58)$$

Тогда можно выполнить суммирование по m, n в формуле (54), поскольку произведения спиновых волновых функций $\lambda_{r'r}^f [\lambda_{x'x}^f]^*$ можно вынести за знак суммы.

Если индексы k и j в формуле (54) «указывают» на один и тот же нуклон, скажем на протон, суммирование дает следующее:

$$\begin{aligned} \sum_n \omega_n \sum_{m \neq n} f_{mn}^k f_{mn}^{k*} &= \sum_n \omega_n \left[\sum_m f_{mn}^k f_{mn}^{k*} - f_{nn}^k f_{nn}^{k*} \right] = \\ &= \sum_n \omega_n \left[\langle n | e^{i\mathbf{q}\mathbf{X}_k} \sum_m |m\rangle \langle m| e^{-i\mathbf{q}\mathbf{X}_k} |n\rangle \right] - |F_p(\mathbf{q})|^2 = 1 - |F_p(\mathbf{q})|^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Если $k \neq j$, но все еще «указывает» на протоны (индекс p), то можно записать

$$\sum_n \omega_n \sum_{m \neq n} f_{mn}^k f_{mn}^{j*} = \langle \text{cov} (e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}) \rangle_p, \quad (60)$$

где введен оператор ковариации операторов сдвига $e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}$ и $e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}$ по состоянию $|n\rangle$ в виде

$$\text{cov}_{nn}(e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}) \equiv \langle n | e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k} e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle - \langle n | e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k} | n \rangle \langle n | e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j} | n \rangle. \quad (61)$$

Символ усреднения $\langle \dots \rangle$ в формуле (60) определен следующим образом:

$$\langle \text{cov} (e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}) \rangle_p \equiv \sum_n \omega_n \text{cov}_{nn}(e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}). \quad (62)$$

Выражение (62) обращается в нуль при малых переданных импульсах и при больших:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \langle \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}) \rangle_p = 0, \quad \lim_{q \rightarrow \infty} \langle \text{cov} (e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}, e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}) \rangle_p = 0. \quad (63)$$

Аналогичное рассмотрение проходит для нейтронов и обобщается на совместный случай протонов и нейтронов. Если, например, k отвечает протону, а j — нейтрону ($k \neq j$), то их ковариация такова:

$$\sum_n \omega_n \sum_{m \neq n} f_{mn}^k f_{mn}^{j*} = \langle \text{cov} (e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}) \rangle_{pn}. \quad (64)$$

Считается, что, когда корреляции между нуклонами в ядре достаточно слабые, ковариационными функциями типа (60) можно пренебрегать. Например, в моделях ядерных оболочек, где многочастичные волновые функции ядер конструируются в виде произведения одночастичных волновых функций [51, 52], ковариация (60) обращается тождественно в нуль. В пользу малости ковариации (60) говорит тот факт, что неупругое сечение рассеяния с хорошей точностью можно аппроксимировать линейной зависимостью от числа рассеивателей.

Таким образом, в дальнейшем рассмотрении ковариационными вкладами в наблюдаемое сечение $d\sigma/dT_A$ типа (60) и (64) пренебрегается, т. е. все ковариационные вклады взяты равными нулю. Это существенным образом упрощает следующие вычисления.

С учетом этих предположений, соотношений (59) и принятого допущения о том, что при $k \neq j$ все корреляторы типа (60) и (64) обращаются в нуль

$$\begin{aligned} \langle \text{cov} (e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}) \rangle_p &= \langle \text{cov} (e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}) \rangle_n = \\ &= \langle \text{cov} (e^{iq\hat{\mathbf{X}}_k}, e^{-iq\hat{\mathbf{X}}_j}) \rangle_{pn} = 0, \end{aligned}$$

слагаемое (54) можно представить окончательно в виде суммы по протонам и нейтронам:

$$T_{m \neq n}^{s's} = \sum_{f=p,n} g_{\text{inc}}^f [1 - |F_f(\mathbf{q})|^2] \sum_{k=1}^{A_f} \sum_{r'r} |\lambda_{r'r}^f|^2 |(l_{s's}^f h_{r'r}^f(\mathbf{q}))|^2. \quad (65)$$

Таким образом, измеряемое дифференциальное сечение (52) процесса $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$ можно записать в виде двух принципиально отличающихся друг от друга слагаемых:

$$\frac{d\sigma_{s's}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}) = \left[\frac{G_F^2 m_A}{2^7 \pi m^2 T_0 m_\chi} \right] \{ T_{m=n}^{s's} + T_{m \neq n}^{s's} \} \equiv \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}}{dT_A} + \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}}{dT_A}, \quad (66)$$

где

$$\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}}{dT_A} = c_A(T_0, m_A, m_\chi) g_i \sum_{f=n,p} \sum_{k=1}^{A_f} \sum_{r'r} |\lambda_{r'r}^f|^2 |(l_{s's}^f h_{r'r}^f(\mathbf{q}))|^2 [1 - |F_f(\mathbf{q})|^2],$$

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}}{dT_A} = c_A(T_0, m_A, m_\chi) g_c \left| \sum_{f=n,p} \sum_{k=1}^{A_f} \sum_r (l_{s's}^f h_{r'r}^f(\mathbf{q})) F_f(\mathbf{q}) \right|^2.$$

Поправочные коэффициенты $g_{c/i}$ в выражениях (66) определены путем усреднения по нуклонам и факторизации из-под двойного суммирования \sum_{mn} параметров из (55). Квадраты ядерных формфакторов $|F_{p/n}|^2$ для протонов и нейтронов определены соотношением (56). В формулах (66) введен универсальный общий множитель

$$c_A \equiv c_A(T_0, m_A, m_\chi) \equiv \frac{G_F^2 m_A}{2^6 \pi m^2 (2T_0 m_\chi)} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{1}{2^4 m^2 |\mathbf{k}'|^2}, \quad (67)$$

в котором явно выделена зависимость от начальной энергии T_0 падающей на покоящееся ядро χ -частицы, а интенсивность гипотетического взаимодействия χ -частицы с нуклонами (пропорциональная G_F^2) «спрятана в недрах» соответствующих скалярных произведений токов.

При получении основных формул (66) данного раздела было сделано упрощающее предположение о возможности пренебрежения всеми корреляционными вкладами типа (60) и (64). Вторым предположением является использование условия нормировки (44) для спиновых амплитуд.

Отметим, что первое и второе слагаемые в формулах (52) и (66) отвечают соответственно упругому и неупругому взаимодействию χ -частицы с ядром. Первое слагаемое (когда $\sum_{m=n}$) содержит оба индекса — k и j , что приводит к квадратичной зависимости сечения от числа нуклонов

в ядре. Второе слагаемое (когда $\sum_{m \neq n}$) в хорошем приближении пропорционально δ_{kj} , что автоматически приводит к линейной зависимости сечения от числа нуклонов в ядре. Суммирование на уровне амплитуд рассеяния на индивидуальных нуклонах (что традиционно связывается с понятием когерентности) явно прослеживается в первом слагаемом выражения (66). Здесь каждый нуклон (протон и/или нейтрон) входит в сумму «взвешенным» с соответствующим ему ядерным формфактором $F_{p/n}(\mathbf{q})$. Это слагаемое отвечает случаю, когда ядро не меняет свое спиновое состояние (проекцию спина на некоторое заданное направление), что видно из характера суммирования по проекциям спинов нуклонов, участвующих во взаимодействии, т. е. $\sum_r (l h_{rr}^{p/n})$. Все активные нуклоны сохраняют ориентацию спина после взаимодействия ($r' \equiv r$).

Второе слагаемое в (66) традиционно ассоциируется с некогерентным вкладом в сечение. В него входит квадрат произведения спиновых амплитуд ядра $|\chi_{r'r}^{p/n}|^2$, который согласно принятому условию (44) с хорошей точностью должен быть равен единице [1–3]:

$$|\chi_{r'r}^{p/n}|^2 \rightarrow 1. \quad (68)$$

Итак, дифференциальные сечения (52) процесса рассеяния массивной χ -частицы на ядре $\chi_s A \rightarrow \chi_{s'} A^{(*)}$ (с изменением индекса ее спина с s на s') в терминах скалярных произведений лептонного и нуклонного токов ($l_{s's} h_{r'r}^f$) принимают вид

$$\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}}{dT_A} = c_A(T_0, m_A, m_\chi) g_i \sum_{f=p,n} [1 - |F_f(\mathbf{q})|^2] \sum_{k=1}^{A_f} \times \\ \times \left[\sum_{r'=\pm} |(l_{s's} h_{r'r'}^{\eta,f})|^2 + \sum_{r'=\pm} |(l_{s's} h_{r'r'}^{\eta,f})|^2 \right], \quad (69)$$

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}}{dT_A} = c_A(T_0, m_A, m_\chi) g_c \left| \sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) \sum_{k=1}^{A_f} [(l_{s's} h_{r'r}^{\eta,f}) + (l_{s's} h_{r'r}^{\eta,f})] \right|^2,$$

где явно выделены суммы по начальным проекциям спина нуклона на направление движения χ -частицы, что отмечено индексом η у адронных токов в скалярных произведениях. Далее, поскольку скалярные произведения ($l_{s's} h_{r'r}^f$) зависят только от типа активного нуклона (f -индекс означает протон или нейтрон) и не зависят от номера активного нейтрона в ядре (индекса суммирования k), то в формулах (69) можно провести простое суммирование по этому индексу, т. е. отдельно просуммировать по всем протонам и всем нейтронам в ядре (с учетом их проекций спина).

Тогда формулы (69) принимают вид

$$\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}}{dT_A} = c_A(T_0, m_A, m_\chi) g_i \sum_{f=p,n} [1 - |F_f(\mathbf{q})|^2] \times \\ \times \left[A_+^f \sum_{r'=\pm} |(l_{s's} h_{r'+}^{\eta,f})|^2 + A_-^f \sum_{r'=\pm} |(l_{s's} h_{r'-}^{\eta,f})|^2 \right], \quad (70)$$

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}}{dT_A} = c_A(T_0, m_A, m_\chi) g_c \left| \sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) [A_+^f (l_{s's} h_{++}^{\eta,f}) + A_-^f (l_{s's} h_{--}^{\eta,f})] \right|^2,$$

где A_\pm^f — число нуклонов f -типа ($f = p, n$) с проекцией спина ± 1 на выделенное направление (например, прилета χ -частицы).

Чтобы завершить вывод формулы для дифференциального сечения процесса $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$ согласно (70), необходимо иметь явные выражения для скалярных произведений $(l_{s's} h_{r'r}^{p/n})$ взаимодействующих лептонного и нуклонного токов. Эти величины получены в отдельной работе [53] и приведены в п. 4.2.

4.2. Набор скалярных произведений для рассеяния $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$. В данном пункте приведены скалярные произведения для всех комбинаций χ -лептонных и нуклонных токов, отвечающие всем возможным спиральностям лептона и всем возможным проекциям спина нуклона на заданное направление. Все скалярные произведения вычислены в системе центра масс (с. ц. м.) лептона и (активного) нуклона в так называемом *смешанном $\chi\eta$ -базисе*, когда токи для χ -частицы взяты в χ -базисе спиральности (по аналогии с нейтрино), а нуклонные токи взяты в η -базисе (или σ_3 -базисе, т. е. квантованы по направлению импульса падающей на ядро χ -частицы). Процедура получения этих скалярных произведений подробно изложена в работе [53]. Они необходимы для самосогласованного вычисления когерентных и некогерентных сечений рассеяния $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$ и определяются выражениями

$$(l_{s's}^i h_{r'r}^k) \equiv \sum_{\mu,\nu}^4 J_{s's}^{i,\mu}(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} J_{r'r}^{k,\nu}(\mathbf{p}'),$$

где индексы s и r обозначают фиксированные значения начальных спиновых состояний лептона и нуклона, а индексы s' и r' — их конечные состояния. Индексами i и k обозначены векторные ($J^{v,\mu} \equiv V^\mu$), аксиально-векторные ($J^{a,\mu} \equiv A^\mu$), скалярные ($J^s \equiv S$) и псевдоскалярные ($J^p \equiv P$) лептонные (аргумент \mathbf{k}') и нуклонные (аргумент \mathbf{p}') токи. Например, для скалярного произведения аксиально-аксиальных токов

имеется выражение

$$(l_{s' s}^a h_{r' r}^a) = \sum_{\mu, \nu} A_{s' s}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{r' r}^\nu(\mathbf{p}'). \quad (71)$$

Скалярные произведения выражены через массы нуклона и χ -частицы

$$m, m_\chi \text{ и параметры } \lambda_\pm = \sqrt{E_p \pm m}, \quad \xi_\pm = \sqrt{E_\chi \pm m_\chi},$$

а также угол упругого рассеяния χ -лептона на нуклоне в с.ц.м., т.е. угол θ между направлением начального импульса лептона \mathbf{k} и направлением его конечного импульса \mathbf{k}' , где $\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{k}' + \mathbf{p}' = 0$. Кроме того, справедливо следующее:

$$\begin{aligned} E_\chi &\equiv \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}|^2} = \sqrt{m_\chi^2 + |\mathbf{k}'|^2} = \frac{s + m_\chi^2 - m^2}{2\sqrt{s}}, \\ E_p &\equiv \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}'|^2} = \frac{s + m^2 - m_\chi^2}{2\sqrt{s}}, \\ |\mathbf{p}| &= \sqrt{E_p^2 - m^2} = \lambda_+ \lambda_- = |\mathbf{k}| = \sqrt{E_\chi^2 - m_\chi^2} = \xi_+ \xi_- = \frac{\lambda(s, m^2, m_\chi^2)}{2\sqrt{s}}. \end{aligned} \quad (72)$$

Здесь p и k — 4-импульсы нуклона и χ -частицы*. Инвариантный квадрат полной энергии в с.ц.м. имеет вид

$$s = (p + k)^2 = (p_0 + k_0)^2 - (\mathbf{p} + \mathbf{k})^2 \Big|_{\text{с.ц.м.}} = (k_0 + p_0)^2 = (E_\chi + E_p)^2. \quad (73)$$

В лабораторной системе отсчета (л.с.), где нуклон покоится, $p_l = (m, \mathbf{p}_l = \mathbf{0})$, он таков:

$$s = (k_l + p_l)^2 \Big|_{\text{л.с.}} = m_\chi^2 + m^2 + 2k_l p_l = m_\chi^2 + m^2 + 2m\sqrt{m_\chi^2 + [\mathbf{k}_\chi^l]^2}. \quad (74)$$

Из (73) и (74) следует зависимость импульса \mathbf{k} и кинетической энергии $T_* = |\mathbf{k}^2|/2m_\chi$ падающей χ -частицы в с.ц.м. от величины ее импульса $\mathbf{k}_\chi^l \equiv \mathbf{k}_l$ в л.с.:

$$|\mathbf{k}| = |\mathbf{k}_\chi^l| \frac{m}{\sqrt{s}} \text{ и } T_* = T_0 \frac{m^2}{s}, \text{ где } T_0 = \frac{|\mathbf{k}_\chi^l|^2}{2m_\chi}. \quad (75)$$

Угол рассеяния присутствует в переданном нуклону 3-импульсе:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^2 &= (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 = |\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{k}'|^2 - 2|\mathbf{k}||\mathbf{k}'| \cos \theta = \\ &= 2|\mathbf{k}|^2(1 - \cos \theta) \equiv \mathbf{q}_{\max}^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (76)$$

* Кинематическая λ -функция определена выражением $\lambda^2(s, m^2, m_\chi^2) \equiv s^2 + m^4 + m_\chi^4 - 2sm^2 - 2sm_\chi^2 - 2m^2m_\chi^2 = (s - (m + m_\chi)^2)(s - (m - m_\chi)^2)$.

Отсюда с учетом нерелятивистского приближения $\mathbf{q}^2 \simeq 2m_A T_A$ следует

$$\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{\mathbf{q}^2}{\mathbf{q}_{\text{imax}}^2} \simeq \frac{T_A}{T_A^{\text{max}}}, \quad \text{где } T_A^{\text{max}} = \frac{4m_\chi m^2 T_0}{sm_A}. \quad (77)$$

Тогда, зная m_χ , массу нуклона m и T_0 в л. с., можно найти

$$s = (k_l + p_l)^2|_{\text{л.с.}} = m_\chi^2 + m^2 + 2mm_\chi \sqrt{1 + \frac{2T_0}{m_\chi}}, \quad (78)$$

вычислить (в с. ц. м. лептона и нуклона) все необходимые энергии и импульсы (72). Затем с учетом определения угла θ (77) параметрами T_0 (начальная кинетическая энергия χ -частицы) и T_A (кинетическая энергия отдачи ядра) — заданными условиями рассеяния лептона *на ядре* — полностью определяется вся кинематика (внутреннего) упругого рассеяния лептона на нуклоне в их с. ц. м., а за ней и все скалярные произведения.

Далее в этом пункте приведены выражения для всех скалярных произведений из работы [53]. Набор скалярных произведений *аксиально-векторных* токов ($l^a h^a$) согласно (71) имеет вид

$$\begin{aligned} (l_{\pm\pm}^a h_{\pm\pm}^a) &= -4 \cos \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right], \\ (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a) &= +4 \cos \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (m_\chi + \xi_-^2) \left(m + \lambda_-^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \right], \\ (l_{\pm\pm}^a h_{\pm\mp}^a) &= \mp 4 \sin \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + \right. \\ &\quad \left. + (m_\chi + \xi_-^2) \left(2m + \lambda_-^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right) \right] e^{\mp i\varphi}, \\ (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a) &= \mp 4 \sin \frac{\theta}{2} \left[\xi_+ \xi_- \lambda_+ \lambda_- \cos^2 \frac{\theta}{2} + (m_\chi + \xi_-^2) \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] e^{\pm i\varphi}, \\ (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\mp}^a) &= \mp 4 m_\chi \left(m + \lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \sin \frac{\theta}{2} e^{\mp i\varphi}, \\ (l_{\pm\mp}^a h_{\pm\pm}^a) &= \mp 4 m_\chi \sin \frac{\theta}{2} \left(\lambda_-^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - m \right) e^{\mp i\varphi}, \\ (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^a) &= -4 m_\chi \cos \frac{\theta}{2} \left(2m + \lambda_-^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right), \\ (l_{\mp\mp}^a h_{\pm\mp}^a) &= +4 m_\chi \lambda_-^2 \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{\mp 2i\varphi}. \end{aligned}$$

В нерелятивистском приближении* эти скалярные произведения сильно упрощаются:

$$\begin{aligned} (l_{\pm\pm}^a h_{\pm\pm}^a) &= -m_c^2, & (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\mp}^a) &= +m_c^2, & (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^a) &= -2m_c^2, \\ (l_{+-}^a h_{\mp\mp}^a) &= \mp m_s^2 e^{-i\varphi}, & (l_{-+}^a h_{\mp\mp}^a) &= \mp m_s^2 e^{+i\varphi}, \\ (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a) &= \mp 2m_s^2 e^{\mp i\varphi}, & (l_{\pm\pm}^a h_{\mp\pm}^a) &= (l_{\pm\mp}^a h_{\mp\pm}^a) &= 0. \end{aligned} \quad (79)$$

Введем удобные обозначения, которые будут использоваться далее:

$$m_c^2 \equiv 4m_\chi m \cos \frac{\theta}{2}, \quad m_s^2 \equiv 4m_\chi m \sin \frac{\theta}{2}. \quad (80)$$

Набор скалярных произведений *векторных токов* $(l_{s's}^v h_{r'r}^v) = V_{s's}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{r'r}^\nu(\mathbf{p}')$ в нерелятивистском приближении таков:

$$\begin{aligned} (l_{\pm\pm}^v h_{\pm\pm}^v) &= (l_{\pm\pm}^v h_{\mp\mp}^v) = m_c^2, & (l_{+-}^v h_{\mp\mp}^v) &= +m_s^2 e^{-i\varphi}, \\ (l_{-+}^v h_{\mp\mp}^v) &= -m_s^2 e^{+i\varphi}, \\ (l_{\pm\pm}^v h_{+-}^v) &= (l_{\mp\mp}^v h_{-+}^v) = (l_{+-}^v h_{\mp\pm}^v) = (l_{-+}^v h_{\mp\pm}^v) = 0. \end{aligned}$$

Скалярные произведения *векторно-аксиальных* и *аксиально-векторных* токов в нерелятивистском приближении полностью обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} (l_{s's}^v h_{r'r}^a)_{\text{nonrel}} &= V_{s's}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{r'r}^\nu(\mathbf{p}') \simeq 0, \\ (l_{s's}^a h_{r'r}^v)_{\text{nonrel}} &= A_{s's}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} V_{r'r}^\nu(\mathbf{p}') \simeq 0. \end{aligned}$$

В нерелятивистском приближении «выживают» только скалярные произведения *скалярных токов* $(l_{s's}^s h_{r'r}^s) = S_{s's}(\mathbf{k}') S_{r'r}(\mathbf{p}')$, отвечающих сохранению проекции спина нуклона на выбранное направление, все остальные произведения скаляров обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} (l_{\pm\pm}^s h_{\pm\pm}^s) &= (l_{\pm\pm}^s h_{\mp\mp}^s) = m_c^2, & (l_{+-}^s h_{\mp\mp}^s) &= +m_s^2 e^{-i\varphi}, \\ (l_{-+}^s h_{\mp\mp}^s) &= -m_s^2 e^{+i\varphi}, \\ (l_{+-}^s h_{\mp\pm}^s) &= (l_{-+}^s h_{\mp\pm}^s) = (l_{\mp\mp}^s h_{+-}^s) = (l_{\mp\mp}^s h_{-+}^s) = 0. \end{aligned} \quad (81)$$

Эти выражения полностью совпадают с аналогичными для случая векторных токов. Скалярные произведения *скалярно-псевдоскалярных*, *псевдоскалярно-скалярных* и *псевдоскалярных* токов в нерелятивистском приближении обращаются в нуль:

$$\begin{aligned} (l_{s's}^s h_{r'r}^p) &= S_{s's}(\mathbf{k}') P_{r'r}(\mathbf{p}') = (l_{s's}^p h_{r'r}^s)_{\text{nonrel}} = 0, \\ (l_{s's}^p h_{r'r}^s) &= P_{s's}(\mathbf{k}') S_{r'r}(\mathbf{p}') = (l_{s's}^s h_{r'r}^p)_{\text{nonrel}} = 0, \\ (l_{s's}^p h_{r'r}^p) &= P_{s's}(\mathbf{k}') P_{r'r}(\mathbf{p}') = (l_{s's}^p h_{r'r}^p)_{\text{nonrel}} = 0. \end{aligned}$$

Скалярные произведения лептонного (χ -частицы) и нуклонного токов для любых значений проекций спинов нуклона ($r', r = \pm 1$) и

* Формально за счет условия $\xi_-^2 = E_\chi - m_\chi \rightarrow 0$ и $\lambda_-^2 = E - m \rightarrow 0$.

χ -частицы ($s', s = \pm 1$), отвечающие взаимодействию массивной нейтральной χ -частицы с нуклоном по каналу нейтрального слабого тока, определены следующим образом [53]:

$$(l_{s'r'}^w h_{r'r}^{w,f}) = \alpha_f(l_{s's}^v h_{r'r}^v) + \beta_f(l_{s's}^v h_{r'r}^a) + \gamma_f(l_{s's}^a h_{r'r}^v) + \delta_f(l_{s's}^a h_{r'r}^a), \quad (82)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_f &= \chi_V h_V^f = +g_V^f, & \beta_f &= \chi_V h_A^f = -g_A^f, \\ \gamma_f &= \chi_A h_V^f = -g_V^f, & \delta_f &= \chi_A h_A^f = +g_A^f. \end{aligned}$$

Индекс f обозначает нейтрон или протон. Справа даны значения этих констант для нейтрино Стандартной модели (поскольку у нейтрино $\chi_V = -\chi_A = 1$). В нерелятивистском приближении скалярные произведения для слабого нейтрального тока массивной частицы (82) имеют вид

$$\begin{aligned} (l_{\pm\pm}^w h_{\pm\pm}^{w,f}) &= m_c^2(\alpha_f - \delta_f), & (l_{\pm\pm}^w h_{\mp\mp}^{w,f}) &= m_c^2(\alpha_f + \delta_f), \\ (l_{\mp\mp}^w h_{\mp\mp}^{w,f}) &= -2m_c^2\delta_f, \\ (l_{\mp\mp}^w h_{\mp\mp}^{w,f}) &= \pm m_s^2 e^{\mp i\varphi}(\alpha_f - \delta_f), & (l_{\pm\mp}^w h_{\pm\mp}^{w,f}) &= \pm m_s^2 e^{\mp i\varphi}(\alpha_f + \delta_f), \\ (l_{\pm\pm}^w h_{\pm\mp}^{w,f}) &= \mp 2m_s^2 e^{\mp i\varphi}\delta_f, & (l_{\pm\pm}^w h_{\mp\pm}^{w,f}) &= (l_{\pm\mp}^w h_{\mp\mp}^{w,f}) \simeq 0. \end{aligned} \quad (83)$$

Приведенный в данном пункте набор скалярных произведений, отвечающих взаимодействию χ -частицы и нуклона, представляет собой основу для вычисления когерентных (упругих) и некогерентных (неупругих) сечений взаимодействия χ -частицы с ядром в нерелятивистском приближении.

4.3. Раскрытие скалярных произведений в сечениях рассеяния $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$. Согласно результатам п. 4.1 выражение для наблюдаемого дифференциального сечения $d\sigma/dT_A(\chi A \rightarrow \chi A^{(*)})$ содержит некогерентное (неупругое) и когерентное (или упругое) слагаемые. Они приведены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}(\mathbf{q})}{g_c c_A dT_A} &= \left| \sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) [A_+^f(l_{s's} h_{++}^{\eta,f}) + A_-^f(l_{s's} h_{--}^{\eta,f})] \right|^2, \\ \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}(\mathbf{q})}{g_i c_A dT_A} &= \sum_{f=p,n} [1 - |F_f(\mathbf{q})|^2] \times \\ &\times \left[A_+^f \sum_{r'=\pm} |(l_{s's} h_{r'+}^{\eta,f})|^2 + A_-^f \sum_{r'=\pm} |(l_{s's} h_{r'-}^{\eta,f})|^2 \right]. \end{aligned} \quad (84)$$

Здесь A_{\pm}^f — число нуклонов f -типа с проекцией спина ± 1 на выделенное направление (например, прилета χ -частицы), а также для удобства введен универсальный общий множитель $c_A \equiv c_A(T_0, m_A, m_\chi)$ из (67).

Спиральности χ -частицы (в более общем виде проекции спина на некоторое направление) в начальном (s) и конечном (s') состояниях считаются фиксированными в (84). По ним в дальнейшем можно провести усреднение (суммирование).

Формулы (84) удобно переписать в терминах полного числа нуклонов f -типа, A_f и разности числа нуклонов ΔA_f , имеющих положительную и отрицательную проекции спина на выделенное направление. С помощью простого преобразования

$$A_{\pm}^f = \frac{1}{2}(A_f \pm \Delta A_f), \quad \text{где } A_f \equiv A_+^f + A_-^f \quad \text{и} \quad \Delta A_f \equiv A_+^f - A_-^f, \quad (85)$$

сечения (84) принимают *ключевую* для дальнейшего рассмотрения форму:

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}(\mathbf{q})}{g_c c_A dT_A} = \left| \sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) \frac{A_f}{2} Q_{s's}^f \right|^2, \quad (86)$$

$$\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}(\mathbf{q})}{g_i c_A dT_A} = \sum_{f=p,n} [1 - F_f^2(\mathbf{q})] \frac{A_f}{2} \left[Q_+^{s's} + \frac{\Delta A_f}{A_f} Q_-^{s's} \right].$$

Таким образом, *когерентное* (упругое) и *некогерентное* (неупругое) χA -сечения определяются соответственно следующими комбинациями скалярных произведений:

$$Q_{s's}^f \equiv Q_{s's}^f \equiv \widehat{Q}_+^{s's} + \frac{\Delta A_f}{A_f} \widehat{Q}_-^{s's}, \quad \text{где } \widehat{Q}_{\pm}^{s's} \equiv (l_{s's}^f h_{++}^f) \pm (l_{s's}^f h_{--}^f), \quad (87)$$

$$\text{и } Q_{\pm}^{s's} \equiv \sum_{r'=\pm} |(l_{s's}^f h_{r'+}^f)|^2 \pm \sum_{r'=\pm} |(l_{s's}^f h_{r'-}^f)|^2. \quad (88)$$

В формуле (88) верхние индексы отвечают проекциям спина χ -частицы, а нижний — проекции спина нуклона на выделенное направление. Видно, что $Q_+^{s's}$ представляет собой полную сумму *квадратов* скалярных произведений по всем проекциям спина нуклона для фиксированной пары спиральностей лептона s' и s . Как правило, если ядро имеет суммарный нулевой спин, то $\Delta A_f = 0$. Отметим также, что (за исключением, может быть, самых легких ядер) практически всегда $\Delta A_f \ll A_f$.

Поскольку основной акцент данной работы сосредоточен на нерелятивистском приближении, напомним, что под *нерелятивистским* приближением будем понимать случай, когда кинетическая энергия χ -частицы намного меньше ее энергии покоя (при $c = 1$), т. е.

$$T_0 \equiv \frac{|\mathbf{k}_{\chi}^l|^2}{2m_{\chi}} \simeq 10^{-6} c^2 m_{\chi} \ll m_{\chi} \quad \text{или} \quad \frac{T_0}{m_{\chi}} \simeq \frac{|\mathbf{k}_{\chi}^l|^2}{m_{\chi}^2} \simeq 10^{-6} \ll 1. \quad (89)$$

В этом приближении квадрат полной энергии лептона и (активного) нуклона в л. с. (где ядро/нуклон покоится) имеет вид

$$s = m_\chi^2 + m^2 + 2mm_\chi \sqrt{1 + [\mathbf{k}_\chi^l]^2/m_\chi^2} \equiv (m_\chi + m)^2 + 2mT_0.$$

Здесь второе слагаемое, пропорциональное T_0 , значительно меньше первого (и сохраняется лишь в качестве старшего вклада по параметру малости T_0/m).

4.3.1. Скалярное χA -взаимодействие. Под скалярным будем понимать взаимодействие χ -частицы с нуклонами, которое приводит к скалярным произведениям скалярного лептонного и скалярного нуклонного токов в виде

$$(l_{s's}^s h_{r'r'}^{s,f}) = c_S^f \bar{u}_\chi(s', k') u_\chi(s, k) \times \bar{u}_f(r', p') u_f(r, p) = c_S^f S_{s's}(\mathbf{k}') S_{r'r}(\mathbf{p}'), \quad (90)$$

где эффективные константы связи $c_S^f \equiv \chi_S h_S^f$ из (32) и (33) задают интенсивность этого взаимодействия (в обозначениях G_F). В *нерелятивистском приближении* эти скалярные произведения даются формулами (81). Для расчета *когерентных* сечений нужны следующие комбинации скалярных произведений:

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_+^{\mp\mp} &= (l_{\mp\mp} h_{++}^n) + (l_{\mp\mp} h_{--}^n) = m_c^2 + m_c^2 = 2m_c^2, \\ \widehat{Q}_-^{\mp\mp} &= (l_{\mp\mp} h_{++}^n) - (l_{\mp\mp} h_{--}^n) = m_c^2 - m_c^2 = 0, \\ \widehat{Q}_+^{\mp\pm} &= (l_{\mp\pm} h_{++}^n) + (l_{\mp\pm} h_{--}^n) = \mp m_s^2 e^{\pm i\varphi} + (\mp m_s^2 e^{\pm i\varphi}) = \mp 2m_s^2 e^{\pm i\varphi}, \\ \widehat{Q}_-^{\mp\pm} &= (l_{\mp\pm} h_{++}^n) - (l_{\mp\pm} h_{--}^n) = \mp m_s^2 e^{\pm i\varphi} - (\mp m_s^2 e^{\pm i\varphi}) = 0. \end{aligned}$$

С помощью этих комбинаций по формулам (86) и (87) вычисляются сечения *когерентного* рассеяния через величины

$$\begin{aligned} Q_f^{\mp\mp} &= \widehat{Q}_+^{\mp\mp} + \frac{\Delta A_f}{A_f} \widehat{Q}_-^{\mp\mp} = 2m_c^2 \\ \text{и } Q_f^{\mp\pm} &= \widehat{Q}_+^{\mp\pm} + \frac{\Delta A_f}{A_f} \widehat{Q}_-^{\mp\pm} = \mp 2m_s^2 e^{\pm i\varphi}. \end{aligned}$$

Набор нерелятивистских сечений *когерентного* χA -рассеяния в канале взаимодействия скалярных токов без изменения спиральности χ -частицы (первая формула) и с изменением этой спиральности на противоположную (вторая формула) можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\mp\mp}(\mathbf{q})}{dT_A} &= c_A \left| \sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) A_f c_S^f m_c^2 \right|^2 = \\ &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \left[\sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) A_f c_S^f \right]^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\mp\pm}(\mathbf{q})}{dT_A} &= c_A \left| \sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) A_f c_S^f m_s^2 \right|^2 = \\ &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \sin^2 \theta \frac{m_\chi^2}{2 |\mathbf{k}_\chi^l|^2} \left[\sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) A_f c_S^f \right]^2, \quad (91) \end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{tot}}(\mathbf{q})}{dT_A} = \frac{1}{2} \sum_{s's'} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \left[\sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) A_f c_S^f \right]^2.$$

Последняя формула дает полное (усредненное по начальным спиральностям лептона и просуммированное по конечным его спиральностям) когерентное сечение χA -рассеяния за счет взаимодействия скалярных токов в нерелятивистском пределе. Здесь использовано

$$c_A (4m_\chi m)^2 = (4m_\chi m)^2 \frac{G_F^2 m_A}{2^6 \pi m^2 |\mathbf{k}_\chi^l|^2} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2}, \quad (92)$$

а также считается, что $g_c \simeq 1$.

Некогерентные χA -сечения определяются общими формулами (86) и (88) и зависят только от квадратов скалярных произведений скалярных токов через параметры

$$\begin{aligned} Q_\pm^{s's} &\equiv S_+^{s's} \pm S_-^{s's}, \\ S_\pm^{s's} &\equiv \sum_{r'=\pm} |(l_{s's}^s h_{r'\pm}^f)|^2 = |(l_{s's}^s h_{\pm\pm}^f)|^2 + |(l_{s's}^s h_{\mp\pm}^f)|^2. \end{aligned}$$

В нерелятивистском пределе для квадратов этих скалярных произведений имеем

$$\begin{aligned} |(l_{--}^s h_{--}^s)|^2 &= |(l_{++}^s h_{--}^s)|^2 = |(l_{--}^s h_{++}^s)|^2 = |(l_{++}^s h_{++}^s)|^2 = m_c^4, \\ |(l_{+-}^s h_{--}^s)|^2 &= |(l_{+-}^s h_{++}^s)|^2 = |(l_{-+}^s h_{--}^s)|^2 = |(l_{-+}^s h_{++}^s)|^2 = m_s^4, \quad (93) \\ |(l_{-+}^s h_{+-}^s)|^2 &= |(l_{+-}^s h_{-+}^s)|^2 = |(l_{-+}^s h_{-+}^s)|^2 = |(l_{+-}^s h_{+-}^s)|^2 = 0, \\ |(l_{--}^s h_{+-}^s)|^2 &= |(l_{++}^s h_{+-}^s)|^2 = |(l_{--}^s h_{-+}^s)|^2 = |(l_{++}^s h_{-+}^s)|^2 = 0. \end{aligned}$$

Тогда получается, что $Q_+^{\mp\mp} = 2m_c^4$, $Q_+^{\mp\pm} = 2m_s^4$, $Q_+^{\pm\mp} = Q_+^{\pm\pm} = 0$. В результате набор сечений *некогерентного* χA -рассеяния за счет взаимодействия скалярных токов без изменения спиральности χ -частицы (первая формула) и с изменением этой спиральности на противоположную (вторая формула) согласно формуле из (86), а также полное χA -сечение (последняя формула) таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\pm\pm}(\mathbf{q})}{dT_A} &= c_A \sum_{f=p,n} A^f [1 - F_f^2(\mathbf{q})] [c_S^f]^2 m_c^4 = \\ &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \cos^2 \theta \frac{m_\chi^2}{2 |\mathbf{k}_\chi^l|^2} \sum_{f=p,n} A^f [c_S^f]^2 [1 - F_f^2(\mathbf{q})], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\pm\mp}(\mathbf{q})}{dT_A} &= c_A \sum_{f=p,n} A^f [1 - F_f^2(\mathbf{q})] [c_S^f]^2 m_s^4 = \\
 &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \sum_{f=p,n} A^f [c_S^f]^2 [1 - F_f^2(\mathbf{q})], \quad (94) \\
 \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\text{tot}}}{dT_A} &= \frac{1}{2} \sum_{s',s} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \sum_{f=p,n} A^f [c_S^f]^2 [1 - F_f^2(\mathbf{q})].
 \end{aligned}$$

Здесь учтено соотношение (92) и принято $g_i \simeq 1$.

В формулах (91) и (94) представлен достаточно в общем виде полный набор выражений для сечений χA -рассеяния за счет взаимодействия скалярного лептонного и скалярного нуклонного токов в нерелятивистском приближении. Полное (измеряемое экспериментально) сечение такого взаимодействия выражается в виде суммы когерентного и некогерентного сечений:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{\text{nonrel}}^{\text{scalar}}(\chi A \rightarrow \chi A^*)}{dT_A} &= \frac{1}{2} \sum_{s's} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}}{dT_A} + \frac{1}{2} \sum_{s's} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}}{dT_A} = \\
 &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \left\{ \sum_{f=p,n} A^f [c_S^f]^2 [1 - F_f^2(\mathbf{q})] + \left[\sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) A_f c_S^f \right]^2 \right\}. \quad (95)
 \end{aligned}$$

В предположении об одинаковости ядерных протонных и нейтронных формфакторов, т. е. $F_p(\mathbf{q}) = F_n(\mathbf{q}) \equiv F(\mathbf{q})$, а также *изоскалярного* характера скалярного взаимодействия, т. е. $c_S^n = c_S^p \equiv c_S$, получают простые формулы для измеряемых сечений, включающие в себя слагаемые, пропорциональные соответственно $A^2 = [A_p + A_n]^2$ и $A = A_p + A_n$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma^{\text{tot}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*) &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} c_S^2 \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \left\{ F^2(\mathbf{q}) A^2 + [1 - F^2(\mathbf{q})] A \right\}, \\
 \frac{d\sigma^{\mp\mp}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{d\sigma^{\text{tot}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*), \\
 \frac{d\sigma^{\mp\pm}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*) &= \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{d\sigma^{\text{tot}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*).
 \end{aligned}$$

Отношение полных (дифференциальных) сечений некогерентного (94) и когерентного (91) χA -рассеяния за счет скалярного взаимодействия в нерелятивистском приближении имеет простой вид:

$$R_{\text{scalar}}(m_A, T_A) \equiv \frac{\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\text{tot}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*)}{\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{tot}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A)} = \frac{1 - F^2(\mathbf{q})}{F^2(\mathbf{q}) A}. \quad (96)$$

Из этого отношения видно, что оно равно единице, т. е. некогерентный и когерентный вклады в сечение равны, когда $F^2(\mathbf{q}) = (A + 1)^{-1}$. Например, на водородной мишени ($A = 1$) квадрату ядерного формфактора достаточно «упасть» до значения $1/2$, чтобы *скалярно-изоскалярный* когерентный вклад в сечение сравнялся с некогерентным вкладом.

4.3.2. Аксиально-векторное χA -взаимодействие. Под *аксиально-векторным* (или *аксиальным*) будем понимать взаимодействие χ -частицы с нуклонами, которое приводит к следующему виду скалярных произведений (71):

$$\begin{aligned} (l_{s's}^a h_{r'r}^{a,f}) &= \chi_A \bar{u}_\chi(s', k') \gamma_\mu \gamma_5 u_\chi(s, k) h_A^f \bar{u}_f(r', p') \gamma^\mu \gamma_5 u_f(r, p) = \\ &= c_A^f \sum_{\mu, \nu} A_{s's}^\mu(\mathbf{k}') g_{\mu\nu} A_{r'r}^\nu(\mathbf{p}'), \quad (97) \end{aligned}$$

где эффективные константы связи $c_A^f \equiv \chi_A h_A^f$ задают интенсивность этого взаимодействия. Все необходимые скалярные произведения приведены в п. 4.2.

В *нерелятивистском* приближении входящие в *когерентные* сечения комбинации (87) скалярных произведений аксиального χA -взаимодействия из (79) таковы:

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{\mp\mp}^{\mp\mp} &= (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a) + (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a) = \pm m_c^2 + (\mp m_c^2) = 0, \\ \widehat{Q}_{\mp\mp}^{\mp\mp} &= (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a) - (l_{\mp\mp}^a h_{\mp\mp}^a) = \pm m_c^2 - (\mp m_c^2) = \pm 2m_c^2, \\ \widehat{Q}_{\mp\pm}^{\mp\pm} &= (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^a) + (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^a) = m_s^2 e^{\pm i\varphi} + (-m_s^2 e^{\pm i\varphi}) = 0, \\ \widehat{Q}_{\mp\pm}^{\mp\pm} &= (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^a) - (l_{\mp\pm}^a h_{\mp\pm}^a) = m_s^2 e^{\pm i\varphi} - (-m_s^2 e^{\pm i\varphi}) = 2m_s^2 e^{\pm i\varphi}. \end{aligned}$$

Отсюда для всех возможных комбинаций спиральности лептона имеем четыре величины из (87):

$$Q_f^{\mp\mp} = \pm 2m_c^2 \frac{\Delta A_f}{A_f} \quad \text{и} \quad Q_f^{\mp\pm} = 2m_s^2 e^{\pm i\varphi} \frac{\Delta A_f}{A_f}.$$

В результате *когерентные* χA -сечения (86) за счет взаимодействия *аксиальных* токов как без изменения спиральности χ -частицы (верхняя формула), так и с изменением спиральности на противоположную (средняя формула), а также полное *когерентное* сечение (последняя формула) в *нерелятивистском* приближении приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\mp\mp}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} &= c_A m_c^4 \left[\sum_{f=p,n} c_A^f F_f \Delta A_f \right]^2 = \\ &= \cos^2 \theta \frac{G_F^2 m_A}{2} \frac{m_\chi^2}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} [c_A^p F_p(\mathbf{q}) \Delta A_p + c_A^n F_n(\mathbf{q}) \Delta A_n]^2, \end{aligned}$$

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\mp\pm}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} = \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} [c_A^p F_p(\mathbf{q}) \Delta A_p + c_A^n F_n(\mathbf{q}) \Delta A_n]^2, \quad (98)$$

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{axial}}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} = \frac{1}{2} \sum \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}}{g_c dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \left[\sum_{f=p,n} c_A^f \Delta A_f F_f(\mathbf{q}) \right]^2.$$

В формуле для *некогерентных* сечений (86) и (88) в *нерелятивистском приближении* остается зависимость только от квадратов скалярных произведений

$$\begin{aligned} |(l_{++}^a h_{--}^a)|^2 &= |(l_{--}^a h_{++}^a)|^2 = |(l_{++}^a h_{++}^a)|^2 = |(l_{--}^a h_{--}^a)|^2 = m_c^4, \\ |(l_{++}^a h_{+-}^a)|^2 &= |(l_{--}^a h_{+-}^a)|^2 = |(l_{+-}^a h_{+-}^a)|^2 = |(l_{+-}^a h_{++}^a)|^2 = 0, \\ |(l_{+-}^a h_{--}^a)|^2 &= |(l_{+-}^a h_{++}^a)|^2 = |(l_{+-}^a h_{++}^a)|^2 = |(l_{+-}^a h_{--}^a)|^2 = m_s^4, \\ |(l_{++}^a h_{+-}^a)|^2 &= |(l_{--}^a h_{+-}^a)|^2 = 4m_s^4, \quad |(l_{+-}^a h_{+-}^a)|^2 = |(l_{+-}^a h_{+-}^a)|^2 = 4m_c^4, \end{aligned}$$

на основе которых выражения (88) приобретают следующий вид:

$$Q_+^{\mp\mp} = 2(m_c^4 + 2m_s^4), \quad Q_+^{\mp\pm} = 2(2m_c^4 + m_s^4), \quad Q_-^{\mp\mp} = \pm 4m_s^4, \quad Q_-^{\mp\pm} = \mp 4m_c^4.$$

В результате сечения *некогерентного* χA -взаимодействия (86) за счет *аксиальных токов* без изменения спиральности χ -частицы (первая формула) и с изменением спиральности на противоположную (вторая формула) и полное χA -сечение (последняя формула) в *нерелятивистском приближении* выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\mp\mp}(\mathbf{q})}{dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} g_i \sum_{f=p,n} [c_A^f]^2 A_f [1 - F_f^2(\mathbf{q})] \times \\ &\quad \times \left[1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \pm \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{2\Delta A_f}{A_f} \right], \\ \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\mp\pm}(\mathbf{q})}{dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} g_i \sum_{f=p,n} [c_A^f]^2 A_f [1 - F_f^2(\mathbf{q})] \times \\ &\quad \times \left[1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \mp \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{2\Delta A_f}{A_f} \right], \\ \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\text{axial}}}{dT_A} &= \frac{1}{2} \sum_{s',s} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} g_i \sum_{f=p,n} [c_A^f]^2 A_f [1 - F_f^2(\mathbf{q})] 3. \end{aligned} \quad (99)$$

Экспериментально измеряемое полное сечение χA -рассеяния за счет взаимодействия чисто аксиальных лептонного и нуклонного токов имеет вид

суммы двух слагаемых:

$$\frac{d\sigma_{\text{nonrel}}^{\text{axial}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*) = \frac{1}{2} \sum_{s's'} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}}{dT_A} + \frac{1}{2} \sum_{s's'} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}}{dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^t|^2} \times \\ \times \left\{ 3g_i \sum_{f=p,n} [c_A^f]^2 A_f [1 - F_f^2(\mathbf{q})] + g_c \left[\sum_{f=p,n} c_A^f \Delta A_f F_f(\mathbf{q}) \right]^2 \right\}. \quad (100)$$

Отношение *аксиальных* полных сечений некогерентного и когерентного χA -рассеяния в *нерелятивистском приближении* таково:

$$\frac{\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\text{tot}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*)}{\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{tot}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A)} = 3 \frac{g_i \sum_{f=p,n} [c_A^f]^2 A_f [1 - F_f^2(\mathbf{q})]}{g_c \left[\sum_{f=p,n} c_A^f \Delta A_f F_f(\mathbf{q}) \right]^2} \simeq \\ \simeq \frac{3A[1 - F^2(\mathbf{q})]}{F^2(\mathbf{q}) [\Delta A_p + \Delta A_n]^2}. \quad (101)$$

Последнее приближение в этой формуле отвечает предположению об одинаковости ядерных протонных и нейтронных формфакторов, т.е. $F_p(\mathbf{q}) = F_n(\mathbf{q}) \equiv F(\mathbf{q})$, изоскалярности рассматриваемого аксиально-векторного взаимодействия, т.е. $c_A^n = c_A^p$ (а также $g_i \simeq g_c$).

Из отношения (101) видно, что в случае *чисто аксиального* взаимодействия лептонных и нуклонных токов в *нерелятивистском* приближении неупругое (некогерентное) сечение может значительно превышать упругое (когерентное), за исключением, может быть, очень легких ядер с большим спином, когда $\Delta A_f \simeq A_f$. Когерентное сечение полностью обращается в нуль для ядер с нулевым спином. Величина $\Delta \equiv \Delta A_p + \Delta A_n$ фактически играет роль полного спина ядра, и в этом случае когерентность «наигрывается» именно на разности проекций спина нуклонов в ядре. Поэтому только в области (весьма) малых передач, в которой формфактор мало отличен от единицы, неупругое сечение можно считать подавленным. Даже когда $|F_f(\mathbf{q})|^2 \simeq 1/2$, неупругое сечение доминирует над упругим почти на два порядка.

Завершая этот пункт, отметим, что в отличие от нерелятивистского приближения (98) в релятивистском случае когерентные χA -сечения для чисто аксиального взаимодействия не исчезают для ядер с нулевым спином (точнее, когда $\Delta A_f = 0$).

4.3.3. Слабое χA -взаимодействие. Скалярные произведения $(l_{s's}^w h_{r'r}^w)$, отвечающие взаимодействию массивной нейтральной χ -частицы с нуклоном по каналу *нейтрального слабого тока*, были заданы выражением (82). В *нерелятивистском* приближении они представлены формулами (83).

Согласно определению сечений *когерентного* χA -рассеяния (86) нужно вычислить вспомогательные величины (87), которые в *данном* приближении таковы:

$$\begin{aligned}\widehat{Q}_+^{\mp\mp} &= (l_{\mp\mp}^w h_{++}^w) + (l_{\mp\mp}^w h_{--}^w) = m_c^2(\alpha \pm \delta) + m_c^2(\alpha \mp \delta) = +2m_c^2\alpha, \\ \widehat{Q}_-^{\mp\mp} &= (l_{\mp\mp}^w h_{++}^w) - (l_{\mp\mp}^w h_{--}^w) = m_c^2(\alpha \pm \delta) - m_c^2(\alpha \mp \delta) = \pm 2m_c^2\delta, \\ \widehat{Q}_+^{\mp\pm} &= (l_{\mp\pm}^w h_{++}^w) + (l_{\mp\pm}^w h_{--}^w) = \\ &= \mp m_s^2 e^{\pm i\varphi}(\alpha \mp \delta) + (\mp m_s^2 e^{\pm i\varphi}(\alpha \pm \delta)) = \mp 2m_s^2 e^{\pm i\varphi} \alpha, \\ \widehat{Q}_-^{\mp\pm} &= (l_{\mp\pm}^w h_{++}^w) - (l_{\mp\pm}^w h_{--}^w) = \\ &= \mp m_s^2 e^{\pm i\varphi}(\alpha \mp \delta) - (\mp m_s^2 e^{\pm i\varphi}(\alpha \pm \delta)) = +2m_s^2 e^{\pm i\varphi} \delta.\end{aligned}$$

Тогда для четырех вспомогательных величин из (87) имеем

$$\begin{aligned}Q_f^{\mp\mp} &= \widehat{Q}_+^{\mp\mp} + \frac{\Delta A_f}{A_f} \widehat{Q}_-^{\mp\mp} = \\ &= 2m_c^2\alpha_f + \frac{\Delta A_f}{A_f} (\pm 2m_c^2\delta_f) = 2m_c^2 \left[\alpha_f \pm \delta_f \frac{\Delta A_f}{A_f} \right], \\ Q_f^{\mp\pm} &= \widehat{Q}_+^{\mp\pm} + \frac{\Delta A_f}{A_f} \widehat{Q}_-^{\mp\pm} = \\ &= \mp 2m_s^2 e^{\pm i\varphi} \alpha_f + \frac{\Delta A_f}{A_f} 2m_s^2 e^{\pm i\varphi} \delta_f = \mp 2m_s^2 e^{\pm i\varphi} \left[\alpha_f \mp \delta_f \frac{\Delta A_f}{A_f} \right].\end{aligned}$$

В результате на основе (86) получается набор *когерентных* χA -сечений для *нерелятивистского взаимодействия слабых токов*:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\mp\mp}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \left[\sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) A_f \left(\alpha_f \pm \delta_f \frac{\Delta A_f}{A_f} \right) \right]^2, \\ \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\mp\pm}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} &= \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \left[\sum_{f=p,n} F_f(\mathbf{q}) A_f \left(\alpha_f \mp \delta_f \frac{\Delta A_f}{A_f} \right) \right]^2, \\ \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{tot}}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} &= \frac{1}{2} \sum_{s'_s} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s'_s}}{g_c dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \times \\ &\times \left(\left[\sum_{f=p,n} \alpha_f A_f F_f(\mathbf{q}) \right]^2 + \left[\sum_{f=p,n} \delta_f \Delta A_f F_f(\mathbf{q}) \right]^2 \right).\end{aligned}\tag{102}$$

Последняя формула в (102) отвечает полному когерентному χA -сечению (усредненному по начальным спиральностям лептона и просуммированному по конечным спиральностям).

Из формул (102) видно, что характерный для когерентного рассеяния (анти)нейтрино общий множитель $\cos^2 \theta/2 \simeq 1 - (T_A/T_A^{\text{max}})$ из первой

формулы (102) отвечает случаю сохранения спиральности падающей χ -частицы после взаимодействия (что всегда характерно для нейтрино и антинейтрино). Когда же спиральность χ -частицы меняется (что возможно благодаря ее массивности), во второй формуле (102) возникает другой общий множитель $\sin^2 \theta/2 \simeq (T_A/T_A^{\max})$, который в полном когерентном сечении (последняя формула из (102) полностью компенсирует $\cos^2 \theta/2$, сводя на нет возникающую в данном месте кинематическую зависимость общего множителя полного когерентного сечения от внешней переменной T_A .

Возможны нижеследующие «упрощения» формул (102) для когерентных χA -сечений.

1) Ядерные формфакторы протонов и нуклонов — одинаковы, т. е. $F_p(\mathbf{q}) = F_n(\mathbf{q}) = F(\mathbf{q})$:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\mp\mp}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} F^2(\mathbf{q}) \left[\sum_{f=p,n} A_f \left(\alpha_f \pm \delta_f \frac{\Delta A_f}{A_f} \right) \right]^2, \\ \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\mp\pm}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} F^2(\mathbf{q}) \left[\sum_{f=p,n} A_f \left(\alpha_f \mp \delta_f \frac{\Delta A_f}{A_f} \right) \right]^2, \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{tot}}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} &= \frac{1}{2} \sum_{s's'} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}}{g_c dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} F^2(\mathbf{q}) \times \\ &\times \left(\left[\sum_{f=p,n} \alpha_f A_f \right]^2 + \left[\sum_{f=p,n} \delta_f \Delta A_f \right]^2 \right) = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} F^2(\mathbf{q}) \times \\ &\times \left[\sum_{f=p,n} A_f^2 \left\{ \alpha_f^2 + \delta_f^2 \frac{\Delta A_f^2}{A_f^2} \right\} + 2A_p A_n \left\{ \alpha_p \alpha_n + \delta_p \delta_n \frac{\Delta A_p}{A_p} \frac{\Delta A_n}{A_n} \right\} \right]. \end{aligned}$$

2) Ядро-мишень имеет нулевой суммарный спин (точнее, $\Delta A_f = 0$). Тогда нерелятивистские слабые когерентные χA -сечения (при $\Delta A_f = 0$) имеют вид

$$\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\mp\mp}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} = \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{tot}}(\mathbf{q})}{g_c dT_A}, \quad \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\mp\pm}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} = \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{tot}}(\mathbf{q})}{g_c dT_A}, \quad (104)$$

$$\text{где } \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{tot}}(\mathbf{q})}{g_c dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} [\alpha_p A_p F_p(\mathbf{q}) + \alpha_n A_n F_n(\mathbf{q})]^2.$$

Отсюда следует, что в нерелятивистском случае в когерентном χA -сечении на ядре с нулевым полным спином «работает» только «векторная составляющая» слабого тока, пропорциональная параметру α_f , и полностью выпадает зависимость от δ_f . Отметим также, что в нерелятивист-

ском приближении отсутствует вклад от интерференции чисто векторной и чисто аксиально-векторной составляющих слабого взаимодействия.

Для вычисления *нерелятивистского некогерентного* сечения χA -рассеяния за счет *слабого взаимодействия* следует использовать общие выражения (86), где ключевые факторы $Q_{\pm}^{s's}$ из (88) определяются через квадраты скалярных произведений слабого тока в нерелятивистском приближении (83). С помощью этих квадратов скалярных произведений факторы $Q_{\pm}^{s's}$ таковы:

$$\begin{aligned}
 Q_{\mp}^{\mp\mp} &= \sum_{r'r=\pm} |(l_{\mp\mp} h_{r'r}^f)|^2 = 2(4m_{\chi}m)^2 \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} \alpha^2 + \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta^2 \right], \\
 Q_{\mp}^{\mp\pm} &= \sum_{r'r=\pm} |(l_{\mp\pm} h_{r'r}^f)|^2 = 2(4m_{\chi}m)^2 \left[\sin^2 \frac{\theta}{2} \alpha^2 + \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta^2 \right], \\
 Q_{-}^{++} &= -Q_{-}^{--} = \sum_{r'=\pm} |(l_{++} h_{r',+}^f)|^2 - \sum_{r'=\pm} |(l_{++} h_{r',-}^f)|^2 = \\
 &= -4\delta(4m_{\chi}m)^2 \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} \alpha + \sin^2 \frac{\theta}{2} \delta \right], \\
 Q_{-}^{+-} &= -Q_{-}^{-+} = \sum_{r'=\pm} |(l_{+-} h_{r',+}^f)|^2 - \sum_{r'=\pm} |(l_{+-} h_{r',-}^f)|^2 = \\
 &= 4\delta(4m_{\chi}m)^2 \left[\sin^2 \frac{\theta}{2} \alpha + \cos^2 \frac{\theta}{2} \delta \right].
 \end{aligned}$$

В результате после подстановки в (86) полученных выше выражений сечения *некогерентного* χA -рассеяния в *нерелятивистском приближении* принимают вид

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\mp\mp}(\mathbf{q})}{g_i dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_{\chi}^2}{|\mathbf{k}_{\chi}^l|^2} \sum_{f=p,n} [1 - F_f^2(\mathbf{q})] A_f \times \\
 &\times \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} \alpha_f^2 + \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta_f^2 \pm \frac{2\Delta A_f}{A_f} \delta_f \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} \alpha_f + \sin^2 \frac{\theta}{2} \delta_f \right] \right\}, \\
 \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\mp\pm}(\mathbf{q})}{g_i dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_{\chi}^2}{|\mathbf{k}_{\chi}^l|^2} \sum_{f=p,n} [1 - F_f^2(\mathbf{q})] A_f \times \tag{105} \\
 &\times \left\{ \sin^2 \frac{\theta}{2} \alpha_f^2 + \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta_f^2 \mp \frac{2\Delta A_f}{A_f} \delta_f \left[\sin^2 \frac{\theta}{2} \alpha_f + \cos^2 \frac{\theta}{2} \delta_f \right] \right\}, \\
 \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\text{tot}}(\mathbf{q})}{g_i dT_A} &= \frac{1}{2} \sum_{s's} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_{\chi}^2}{|\mathbf{k}_{\chi}^l|^2} \sum_{f=p,n} A_f [1 - F_f^2(\mathbf{q})] [\alpha_f^2 + 3\delta_f^2].
 \end{aligned}$$

Видно, что полностью отсутствуют «интерференционные» слагаемые, пропорциональные β - и γ -константам связи слабых токов. «Выживает» только зависимость от чисто векторной и чисто аксиально-векторной α - и δ -констант связи. Далее, в полном некогерентном χA -сечении выпадает зависимость от ядерного спинового фактора ΔA_f даже тогда, когда он ненулевой. Отметим, что при $\alpha_f = 0$ и $\delta_f = 1$ (т.е. при отсутствии векторного вклада) эти выражения полностью совпадают с аналогичными формулами для чисто аксиально-аксиального взаимодействия (99).

Экспериментально измеряемое полное сечение χA -рассеяния за счет взаимодействия слабых лептонного и нуклонного токов в нерелятивистском приближении таково:

$$\frac{d\sigma_{\text{nonrel}}^{\text{weak}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*) = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \left\{ g_i \sum_{f=p,n} A^f [1 - F_f^2(\mathbf{q})] [\alpha_f^2 + 3\delta_f^2] + g_c \left(\left[\sum_{f=p,n} \alpha_f A_f F_f(\mathbf{q}) \right]^2 + \left[\sum_{f=p,n} \delta_f \Delta A_f F_f(\mathbf{q}) \right]^2 \right) \right\}. \quad (106)$$

Рассмотрим два «упрощения» полученных некогерентных χA -сечений (105).

1) Ядерные формфакторы нуклонов и протонов — одинаковы. В отличие от когерентного случая такое упрощение не сильно помогает: зависимость от формфактора просто выносится из-под знака суммирования по f и получаются формулы

$$\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\mp\mp}(\mathbf{q})}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} [1 - F^2(\mathbf{q})] \sum_{f=p,n} A_f \times \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} \alpha_f^2 + \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta_f^2 \pm \frac{2\Delta A_f}{A_f} \delta_f \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} \alpha_f + \sin^2 \frac{\theta}{2} \delta_f \right] \right\},$$

$$\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\mp\pm}(\mathbf{q})}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} [1 - F^2(\mathbf{q})] \sum_{f=p,n} A_f \times \quad (107)$$

$$\left\{ \sin^2 \frac{\theta}{2} \alpha_f^2 + \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta_f^2 \mp \frac{2\Delta A_f}{A_f} \delta_f \left[\sin^2 \frac{\theta}{2} \alpha_f + \cos^2 \frac{\theta}{2} \delta_f \right] \right\},$$

$$\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\text{tot}}(\mathbf{q})}{g_i dT_A} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} [1 - F^2(\mathbf{q})] \sum_{f=p,n} A^f [\alpha_f^2 + 3\delta_f^2].$$

2) Если ядро-мишень имеет нулевой суммарный спин — $\Delta A_f = 0$, то формулы таковы:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\mp\mp}(\mathbf{q})}{g_i dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \times \\ &\quad \times \sum_{f=p,n} [1 - F_f^2(\mathbf{q})] A_f \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} \alpha_f^2 + \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \delta_f^2 \right\}, \\ \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\mp\pm}(\mathbf{q})}{g_i dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \times \\ &\quad \times \sum_{f=p,n} [1 - F_f^2(\mathbf{q})] A_f \left\{ \sin^2 \frac{\theta}{2} \alpha_f^2 + \left(1 + \cos^2 \frac{\theta}{2}\right) \delta_f^2 \right\}, \\ \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\text{tot}}(\mathbf{q})}{g_i dT_A} &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} \sum_{f=p,n} A^f [1 - F_f^2(\mathbf{q})] [\alpha_f^2 + 3\delta_f^2]. \end{aligned} \quad (108)$$

Отношение полных *нерелятивистских* сечений некогерентного (105) и когерентного (102) χA -рассеяния за счет слабого взаимодействия выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\text{tot}}(\chi A \rightarrow \chi A^*)}{dT_A}}{\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{tot}}(\chi A \rightarrow \chi A)}{dT_A}} &= \\ &= \frac{g_i [1 - F^2(\mathbf{q})] \sum_{f=p,n} A^f [\alpha_f^2 + 3\delta_f^2]}{g_c F^2(\mathbf{q}) \left[\sum_{f=p,n} A_f^2 \left\{ \alpha_f^2 + \delta_f^2 \frac{\Delta A_f^2}{A_f^2} \right\} + 2A_p A_n \left\{ \alpha_p \alpha_n + \delta_p \delta_n \frac{\Delta A_p}{A_p} \frac{\Delta A_n}{A_n} \right\} \right]}. \end{aligned} \quad (109)$$

Это отношение «переходит» в чисто аксиальный случай χA -взаимодействия (когда $\alpha_f = 0$, см. формулу (101)), а также в чисто скалярный случай χA -взаимодействия (когда $\delta_f = 0$, см. формулу (96)), совпадающим в нерелятивистском приближении с чисто векторным.

Данный пункт завершает основную часть настоящей работы, в нем получены выражения для сечений упругого и неупругого рассеяния массивной нейтральной (слабовзаимодействующей) χ -частицы с ядром $\chi A \rightarrow \chi A^{(*)}$, когда последнее сохраняет свою целостность (т. е. при энергиях χ -частицы, как правило, не превышающих 100 МэВ). В нерелятивистском приближении рассмотрены чисто скалярное, аксиально-векторное и обобщенного вида слабое взаимодействие χ -частицы с нуклонами ядра.

С практической точки зрения эти новые формулы представляют интерес для правильного понимания баланса когерентности и некогерентности в задачах прямого поиска галактических частиц темной материи,

когда сигнатурой искомым событий являются акты взаимодействия этих частиц с ядрами-мишенями. Исследованию именно этого вопроса посвящена отдельная работа [54]. С теоретической точки зрения новые выражения для рассеяния массивных лептонов представляют известный интерес как обобщение упомянутых выше формул [1–3] для случая когерентного и некогерентного рассеяния безмассовых нейтрино и анти-нейтрино на ядра.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ И ОБСУЖДЕНИЯ РАССЕЯНИЯ χ -ЧАСТИЦЫ НА ЯДРЕ

Полный набор выражений для сечений *когерентного* и *некогерентного* рассеяния за счет слабого χA -взаимодействия в нерелятивистском приближении дается формулами (103) и (107). Для численных оценок будем применять выражение для экспериментально измеряемого сечения χA -рассеяния, представляющего собой сумму двух сечений, усредненных по начальным и просуммированных по конечным проекциям спина χ -лептона*:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{nonrel}}^{\text{weak}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*) &= \frac{1}{2} \sum_{s's} \frac{d\sigma_{\text{inc}}^{s's}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*) + \frac{1}{2} \sum_{s's} \frac{d\sigma_{\text{coh}}^{s's}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A) = \\ &= \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}'_\chi|^2} \left\{ [1 - F^2(\mathbf{q})] \sum_{f=p,n} A_f [\alpha_f^2 + 3\delta_f^2] + \right. \\ &\quad \left. + F^2(\mathbf{q}) \left[\left[\sum_{f=p,n} \alpha_f A_f \right]^2 + \left[\sum_{f=p,n} \delta_f \Delta A_f \right]^2 \right] \right\}. \quad (110) \end{aligned}$$

Будем использовать вид ядерного формфактора Хельма [55] для протонов и нейтронов

$$\begin{aligned} F_{p/n}(\mathbf{q}) = F(\mathbf{q}) &= 3 \frac{j_1(qR_0)}{qR_0} \exp\left(-\frac{(sq)^2}{2}\right), \\ j_1(x) &= \frac{\sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}, \quad s = 0,9 \text{ фм}, \quad R_0 = 1,14A^{1/3} \text{ фм}, \end{aligned}$$

а также следующие обозначение и значения**:

$$q^2 \simeq 2m_A T_A, \quad G_F = 1,166378 \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2} \quad \text{и} \quad m = 0,938 \text{ ГэВ} \simeq 1 \text{ ГэВ}.$$

* Везде далее в вычислениях для простоты будем считать, что $g_i \simeq g_c \simeq 1$.

** Постоянные величины: 1 фм = 1/0,1973 ГэВ = 1/197,3 МэВ, ГэВ = 10³ МэВ, МэВ = 1.

Согласно определению скалярного произведения для слабых токов общего вида

$$(l_{s's}^w h_{r'r}^{w,f}) = \alpha_f (l_{s's}^v h_{r'r}^v) + \beta_f (l_{s's}^v h_{r'r}^a) + \gamma_f (l_{s's}^a h_{r'r}^v) + \delta_f (l_{s's}^a h_{r'r}^a) \quad (111)$$

эффеkтивные константы связи, имеющие вид

$$\alpha_f = \chi_V h_V^f, \quad \beta_f = \chi_V h_A^f, \quad \gamma_f = \chi_A h_V^f, \quad \delta_f = \chi_A h_A^f,$$

являются свободными параметрами. Для нейтрино в Стандартной модели (СМ) справедливо $\chi_V = -\chi_A = 1$, для нуклонов в СМ —

$$h_V^p = g_V^p = \frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_W, \quad h_V^n = g_V^n = -\frac{1}{2};$$

$$h_A^p = g_A^p = \frac{g_A}{2}, \quad h_A^n = g_A^n = -\frac{g_A}{2}.$$

Тогда в СМ эффеkтивные параметры таковы:

$$\alpha_f = \chi_V h_V^f = +g_V^f, \quad \delta_f = \chi_A h_A^f = +g_A^f,$$

$$\gamma_f = \chi_A h_V^f = -g_V^f, \quad \beta_f = \chi_V h_A^f = -g_A^f.$$

С учетом $\sin^2 \theta_W = 0,23865$ и $g_A = 1,27$ в СМ получаются следующие численные значения:

$$\alpha_p = +\frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_W = -\gamma_p \simeq 0,02, \quad \delta_p = \frac{g_A}{2} = -\beta_p \simeq 0,64;$$

$$\alpha_n = -\frac{1}{2} = -\gamma_n = -0,5, \quad \delta_n = -\frac{g_A}{2} = -\beta_n \simeq -0,64. \quad (112)$$

В системе покоя ядра *при вычислениях сечений и их отношений* варьируются *только* кинетическая (регистрируемая) энергия отдачи ядра T_A в интервале от $T_A^{\min} = \varepsilon_A^{\text{порог}} > 0$ до некоторого максимального для данного ядра значения T_A^{\max} , которое определяется из условия обращения квадрата формфактора $|F(T_A)|^2$ ядра в нуль.

Энергия падающей на (покоящееся) ядро χ -частицы $T_0 = |\mathbf{k}_\chi^l|^2 / 2m_\chi$, или величина квадрата импульса $|\mathbf{k}_\chi^l|^2$, которая фигурирует в выражениях (103) и (107), определяется из связи между T_0 и T_A через угол θ вылета χ -частицы в л. с. (24):

$$\cos \theta(T_A) = \frac{m_\chi(2T_0 - \Delta\varepsilon_{mn}) - T_A(m_\chi + m_A)}{2m_\chi \sqrt{T_0(T_0 - \Delta\varepsilon_{mn} - T_A)}}. \quad (113)$$

Максимальное значение T_A достигается тогда, когда падающая на ядро χ -частица «отражается» строго в противоположном направлении, т. е. когда $\cos \theta(T_A) = -1$. Тогда из этого условия для упругого случая (когда $\Delta\varepsilon_{mn}$) получается *минимальное* значение

$$T_0 = T_A \frac{(m_\chi + m_A)^2}{4m_\chi m_A} = T_A \frac{(1+r)^2}{4r}, \quad \text{где } r \equiv \frac{m_\chi}{m_A}, \quad (114)$$

при котором еще возможно данное значение T_A (максимальная эффективность передачи импульса-энергии).

Отношение полных *нерелятивистских* сечений некогерентного (105) и когерентного (102) χA -рассеяния за счет слабого взаимодействия выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 R_w^{\text{tot}}(A, \mathbf{q}) &\equiv \frac{\frac{d\sigma_{\text{inc}}^{\text{tot}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*)}{\frac{d\sigma_{\text{coh}}^{\text{tot}}}{dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A)} = \\
 &= \frac{[1 - F^2(\mathbf{q})] \sum_{f=p,n} A^f [\alpha_f^2 + 3\delta_f^2]}{F^2(\mathbf{q}) \left[\left[\sum_{f=p,n} \alpha_f A_f \right]^2 + \left[\sum_{f=p,n} \delta_f \Delta A_f \right]^2 \right]} = \\
 &= AR_A(\mathbf{q}) \frac{A^p [\alpha_p^2 + 3\delta_p^2] + A^n [\alpha_n^2 + 3\delta_n^2]}{[\alpha_p A_p + \alpha_n A_n]^2 + [\delta_p \Delta A_p + \delta_n \Delta A_n]^2}. \quad (115)
 \end{aligned}$$

Здесь введено обозначение для отношения «чисто ядерных» частей формулы (115):

$$R_A(\mathbf{q}) = R_A(T_A) \equiv \frac{1 - F_A^2(\mathbf{q})}{AF_A^2(\mathbf{q})} = \frac{1 - F_A^2(T_A)}{AF_A^2(T_A)}. \quad (116)$$

Эти величины вместе с квадратом соответствующих формфакторов и модулем переданного импульса представлены на рис.2 как функции энергии отдачи ядра T_A . Из рис.2 видно, что с ростом переданной ядру энергии (кинетической энергии отдачи ядра) T_A квадрат ядерного формфактора $|F(T_A)|^2$ монотонно уменьшается. Как только $|F(T_A)|^2$ достаточно близко приближается к нулю, «эффект когерентности» (вместе с когерентным вкладом в общее сечение) быстро ослабевает и полностью исчезает, когда $|F(T_A)|^2 \simeq 0^*$. Одновременно с этим отношение $R_A(T_A)$ стремительно растет, что фактически означает переход к полному доминированию «эффекта некогерентности» (вместе с некогерентным вкладом в общее сечение). Для разных ядер это происходит при разных значениях T_A и q , грубо говоря, обратно пропорциональных атомному номеру ядра A . Так «работает» ядро «в чистом виде», регулируя переход от когерентности к некогерентности.

Второй множитель в формуле (115), записанный в виде

$$R_I(A, \alpha, \delta) \equiv (A_p + A_n) \frac{A^p (\alpha_p^2 + 3\delta_p^2) + A^n (\alpha_n^2 + 3\delta_n^2)}{(\alpha_p A_p + \alpha_n A_n)^2 + (\delta_p \Delta A_p + \delta_n \Delta A_n)^2}, \quad (117)$$

* Как уже упоминалось, для каждого из ядер этот момент определяет T_A^{max} на соответствующих графиках (рис. 2).

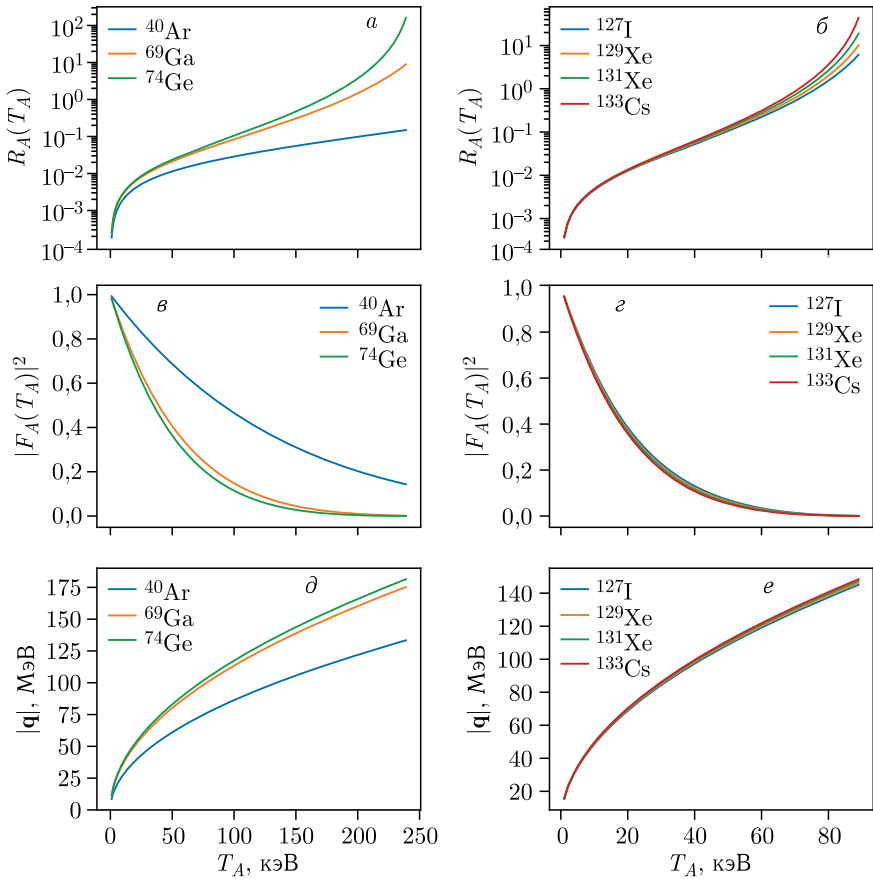


Рис. 2. «Ядерные» отношения $R_A(T_A)$ (116) (*a*, *б*), квадраты ядерных формфакторов $|F_A(T_A)|^2$ (*в*, *г*) и абсолютные значения переданного ядру импульса $|q|$ (*д*, *е*) для ряда ядер-мишеней как функция энергии отдачи ядра T_A

аккумулирует всю зависимость от характера взаимодействия χ -лептона с нуклонами. Он определяется балансом эффективных констант связи слабых токов $\alpha_{p/n}$ и $\delta_{p/n}$, «взвешенным» с протон-нейтронной структурой конкретного ядра. Он может как усиливать, так и ослаблять представленный на рис. 2 «чистый» эффект ядерной структуры. Значения этого множителя в рамках СМ для ряда ядер-мишеней приведены в таблице.

Влияние «зарядово-ядерного» фактора (117) из таблицы, усиливающее более чем в 10 раз «эффект некогерентности», продемонстрировано на рис. 4, *a* и *б*, где показаны отношения (115) для эффективных констант связи $\alpha_{p/n}$ и $\delta_{p/n}$ из СМ. В качестве «реперных» графиков на рис. 4, *в* и *г*

Характеристики некоторых ядер-мишеней и соответствующие им величины $R_I(A, \alpha, \delta)$ с $\alpha_{p/n}, \delta_{p/n}$ в рамках СМ из (112). Здесь $Z = A_p$, $N = A_n$ и $\Delta A_p \equiv \Delta Z = Z_+ - Z_-$, $\Delta A_n \equiv \Delta N = N_+ - N_-$. Индексы \pm обозначают направления спина нуклонов по отношению к некоторой выбранной оси квантования

${}^A\text{Ядро}(Z, N)$	Z_+	Z_-	ΔZ	N_+	N_-	ΔN	Спин	$R_I(A, \alpha, \delta)$
${}^4\text{He}(2, 2)$	1	1	0	1	1	0		23,44
${}^{12}\text{C}(6, 6)$	3	3	0	3	3	0		23,44
${}^{19}\text{F}(9, 10)$	5	4	1	5	5	0	$\frac{1}{2} = \frac{\Delta Z}{2}$	20,71
${}^{40}\text{Ar}(18, 22)$	9	9	0	11	11	0		19,22
${}^{74}\text{Ge}(32, 42)$	16	16	0	21	21	0		18,00
${}^{127}\text{I}(53, 74)$	27	26	1	39	35	4	$\frac{5}{2} = \frac{\Delta Z}{2} + \frac{\Delta N}{2}$	17,01
${}^{129}\text{Xe}(54, 75)$	27	27	0	38	37	1	$\frac{1}{2} = \frac{\Delta Z}{2} + \frac{\Delta N}{2}$	17,13
${}^{131}\text{Xe}(54, 77)$	27	27	0	40	37	3	$\frac{3}{2} = \frac{\Delta Z}{2} + \frac{\Delta N}{2}$	16,72
${}^{133}\text{Cs}(55, 78)$	28	27	1	46	32	6	$\frac{7}{2} = \frac{\Delta Z}{2} + \frac{\Delta N}{2}$	16,07

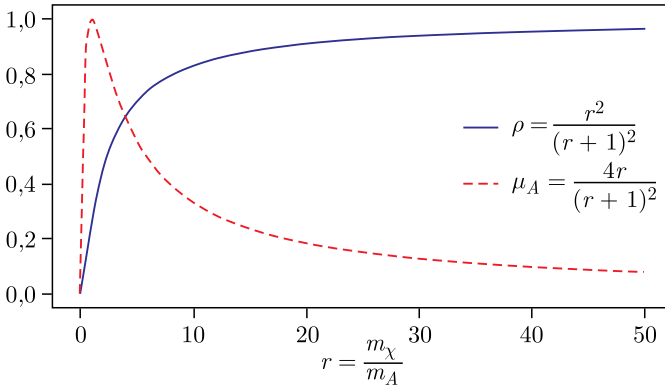


Рис. 3. Зависимость кинематических факторов ρ и μ_A от отношения $r = m_\chi/m_A$

приведены зависимости квадратов ядерных фомфакторов от T_A . По ним можно судить о максимальном значении T_A для того или иного ядра. На рис. 4, d и e показана T_A -зависимость измеряемых полных сечений (110), вычисленных по формуле

$$\frac{d\sigma_{\text{nonrel}}^{\text{weak}}}{\rho dT_A}(\chi A \rightarrow \chi A^*) = \frac{G_F^2 m_A^2}{2\pi T_A^{\text{max}}} \{ F^2(T_A) \times \\ \times [(\alpha_p A_p + \alpha_n A_n)^2 + (\delta_p \Delta A_p + \delta_n \Delta A_n)^2] + \\ + (1 - F^2(T_A)) [A^p(\alpha_p^2 + 3\delta_p^2) + A^n(\alpha_n^2 + 3\delta_n^2)] \}, \quad (118)$$

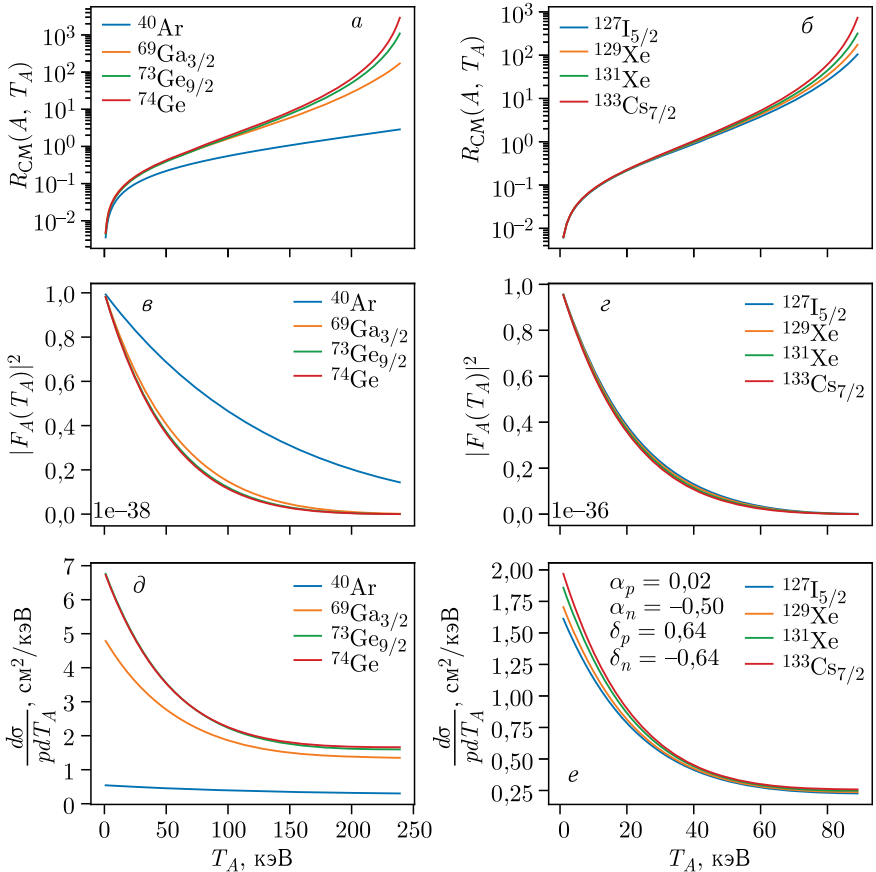


Рис. 4. Отношение $R_{CM}^{\text{tot}}(A, T_A)$ (115) полных *нерелятивистских* сечений некогерентного и когерентного χA -рассеяния за счет слабого СМ-взаимодействия с параметрами из (112) (а, б), квадраты ядерных формфакторов $|F(T_A)|^2$ (в, г) и измеряемые полные дифференциальные сечения (118) (д, е) для ряда ядер-мишеней как функция энергии отдачи ядра T_A

где в $\rho \equiv r^2/(1+r)^2$ (рис. 3) с учетом определения $r = m_\chi/m_A$ из (114) «спрятана» вся кинематическая зависимость от массы χ -лептона. Действительно, правая часть формулы (118) не зависит от m_χ . Явный вид этого выражения обусловлен тем, что для расчета сечений (110) необходимо знать помимо T_A также T_0 , минимальное значение которого для данного T_A определяется формулой (114). Поэтому ключевой размерный множитель всех сечений из формулы (110)

$$\frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi^2}{|\mathbf{k}_\chi^l|^2} = \frac{G_F^2 m_A}{4\pi} \frac{m_\chi}{2T_0} = \frac{G_F^2 m_A^2}{2\pi T_A} \rho$$

в выражении (118) содержит одно *универсальное* значение $T_0^{\min 4 \max}$, которое обеспечивает возможность достижения максимального значения T_A^{\max} , представленного на графиках (см. рис. 3) и определяемого из условия $F_A(T_A^{\max}) \simeq 0$:

$$T_0^{\min 4 \max} = \frac{T_A^{\max}}{\mu_A}, \quad \text{где} \quad \mu_A \equiv \frac{4r}{(1+r)^2}. \quad (119)$$

Для иллюстрации характера поведения χA -сечений в зависимости от T_A такой выбор начальной энергии T_0 , гарантирующий достижимость T_A^{\max} , является вполне достаточным.

Из рис. 4, полученного для эффективных констант связи СМ (112) при (вспомогательно-упрощающем) условии (119), видно следующее. Когда с ростом кинетической энергии отдачи ядер T_A квадраты ядерных формфакторов *тяжелых ядер* спадают до нуля (почти полностью теряется когерентность, рис. 4, *з*), величина измеряемого полного сечения (сумма когерентного и некогерентного, рис. 4, *е*) уменьшается примерно на порядок и насыщается главным образом некогерентным вкладом (рис. 4, *б*). Кроме того, можно отметить, что для *этих же ядер* уже «на половине интервала» по T_A (при 40 кэВ) некогерентный вклад достигает когерентный при уменьшении измеряемого полного сечения примерно в 5 раз, что незначительно.

Совершенно иная ситуация для легких ядер (рис. 5). Здесь «когерентность» сохраняется достаточно долго (чем легче ядро, тем дольше). Квадраты ядерных формфакторов спадают медленно, достигая области $F_A(T_A) \simeq 0$ при весьма больших значениях энергии отдачи T_A (чем легче ядро, тем больше значение T_A^{\max}). Такие большие значения T_A , видимо, с одной стороны, должны быть хорошо наблюдаемыми, а с другой — могут быть уже не совместимы с сохранением целостности ядер ($q \geq 300$ МэВ/с). При этом величины для их полных сечений заметно меньше, чем для тяжелых ядер, и меняются слабо. Промежуточная ситуация складывается для ядер типа Ga-Ge ($A \simeq 70$). По характеру зависимости от T_A она похожа на случай тяжелых ядер с главным отличием в масштабе величины энергии отдачи. Здесь она заметно больше ($T_A^{\max} \simeq 200$ кэВ).

На рис. 4 и 5 видно главное свойство подхода [1–3]: с ростом энергии отдачи ядра T_A происходит плавный, хорошо контролируемый переход от доминирования упругого χA -взаимодействия к доминированию χA -неупругого при нерелятивистском рассеянии *массивной* χ -частицы на ядре.

Поскольку результаты экспериментов по прямому поиску темной материи обычно интерпретируются в терминах спин-независимого и спин-зависимого сечений взаимодействия частицы темной материи с нуклонами, то рассмотрим подробнее следствия подхода [1–3] именно для этих двух типов взаимодействия.

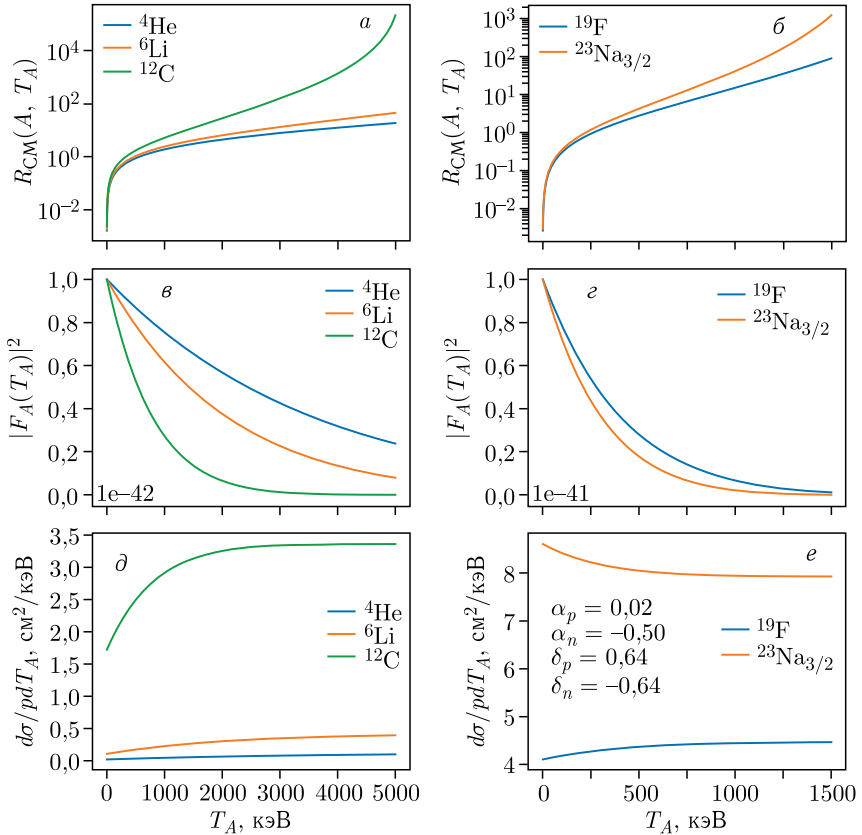


Рис. 5. Отношение $R_{\text{CM}}^{\text{tot}}(A, T_A)$ (115) полных *нерелятивистских* сечений некогерентного и когерентного χA -рассеяния за счет слабого СМ-взаимодействия с параметрами из (112) (а, б), квадраты ядерных формфакторов $|F(T_A)|^2$ (в, г) и измеряемые полные дифференциальные сечения (118) (д, е) для ряда легких ядер-мишеней как функция энергии отдачи ядра T_A

Скалярное, в терминологии прямого поиска темной материи *спин-независящее*, взаимодействие в нерелятивистском приближении имеет такой же вид, как чисто векторное, когда в общей формуле для скалярного произведения (111) отличными от нуля остаются только эффективные константы связи α_p и α_n . Тогда обе аксиальные константы связи следует взять нулевыми ($\delta_p = \delta_n = 0$) в выражении (115), которое после смены обозначений $a_p \equiv \alpha_p$ и $a_n \equiv \alpha_n$ принимает вид

$$R_{\text{scalar}}^{\text{tot}}(A, T_A) = R_A(T_A)(A_p + A_n) \frac{A_p a_p^2 + A_n a_n^2}{(A_p a_p + A_n a_n)^2}. \quad (120)$$

В изоскалярном случае, когда $a_p = a_n$, зависимость от этих констант полностью сокращается и эта формула принимает вид выражения (116): $R_{\text{scalar}}^{\text{tot}}(A, T_A) = R_A(T_A)$. Для различных ядер она показана на рис. 6 вместе с соответствующими полными сечениями.

Если один из параметров значительно меньше другого, как в СМ, где $\alpha_p \ll \alpha_n$ (или для простоты $\alpha_p \simeq 0$), то

$$R_{\text{scalar}}^{\text{tot}}(A, T_A) = R_A(T_A) \frac{A_p + A_n}{A_n} = \frac{1 - F_A^2(T_A)}{A_n F_A^2(T_A)},$$

что также не зависит от α_n и отличается от $R_A(T_A)$ только множителем порядка 2.

В *анти*изоскалярном варианте, когда $a_n = -a_p$ и $p = A_n/A_p$, получается

$$R_{\text{scalar}}^{\text{tot}}(A, T_A) = R_A(T_A)(A_p + A_n) \frac{A_p a_p^2 + A_n a_n^2}{(A_p a_p - A_n a_n)^2} = R_A(T_A) \left(\frac{p+1}{p-1} \right)^2.$$

Из таблицы видно, что для самых легких ядер в данном случае когерентный вклад просто отсутствует, поскольку число протонов совпадает с числом нейтронов и $p = 1$. И далее, чем тяжелее ядро-мишень, тем больше величина p и тем меньше отличие $R_{\text{scalar}}^{\text{tot}}(A, T_A)$ от R_A , представленного на рис. 7.

Из рис. 6 и 7 видна «основная тенденция»: с ростом T_A происходит плавная смена «наполнения» полного измеряемого сечения — упругий (когерентный) вклад заменяется неупругим (некогерентным). При этом само сечение уменьшается, однако не более чем на порядок величины, что, с нашей точки зрения, практически не снижает вероятность его измерения (регистрации). То есть полное ожидаемое для регистрации число событий остается в зоне достижимости типового эксперимента. Однако эти события меняют свое происхождение. Если прибор настроен на регистрацию только упругого рассеяния, то при возрастании T_A он начинает терять возможность вообще что-либо видеть (упругих процессов становится все меньше и меньше). Одновременно заметно растет число неупругих процессов, которые такой прибор не способен видеть (скажем, он не может регистрировать фотоны от девозбуждения ядер). Получается ситуация, когда есть искомые взаимодействия, но прибор их не может видеть, не замечает. Отметим, что в отличие от утверждений из работ [56] и [57]* скалярное χA -взаимодействие в рассмотренном варианте вполне может давать заметный вклад в χA -неупругое сечение.

Обратимся к чисто *аксиально-векторному* χA -взаимодействию, которое в терминологии прямого поиска темной материи носит название

* Здесь утверждается, что скалярное взаимодействие заметно слабее спин-зависящего, поскольку начальное и конечное состояния ядра меняются, поэтому следует рассматривать случай только спин-зависящего взаимодействия.

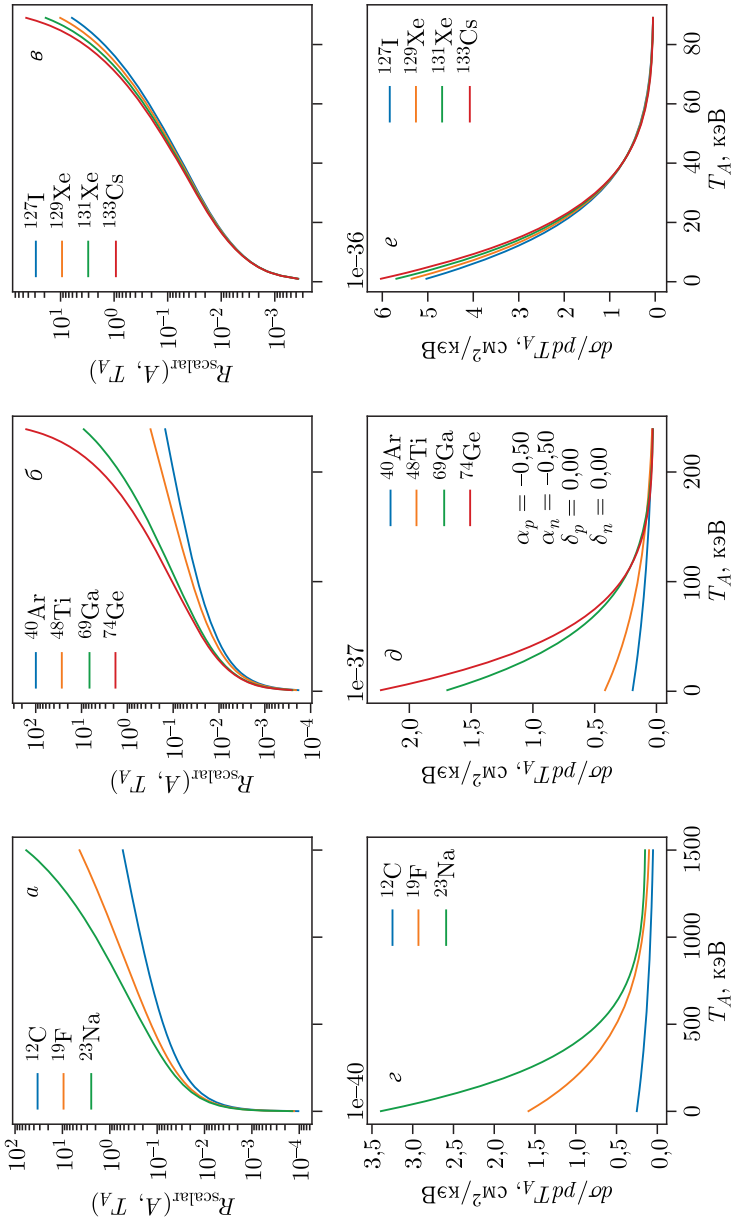


Рис. 6. Отношение (а, б, в) $R^{\text{scalar}}(A, T_A)$ (120) полных *нерелятивистских* сечений некогерентного и когерентного χ -А-рассеяния за счет слабого скалярного взаимодействия, когда $a_p = a_n$ (зависимость от квадрата величины этих параметров сохраняется только в сечении), и измеряемые полные дифференциальные сечения (118) (ε, δ, e) для ряда ядер-мишеней как функция энергии отдачи ядра T_A

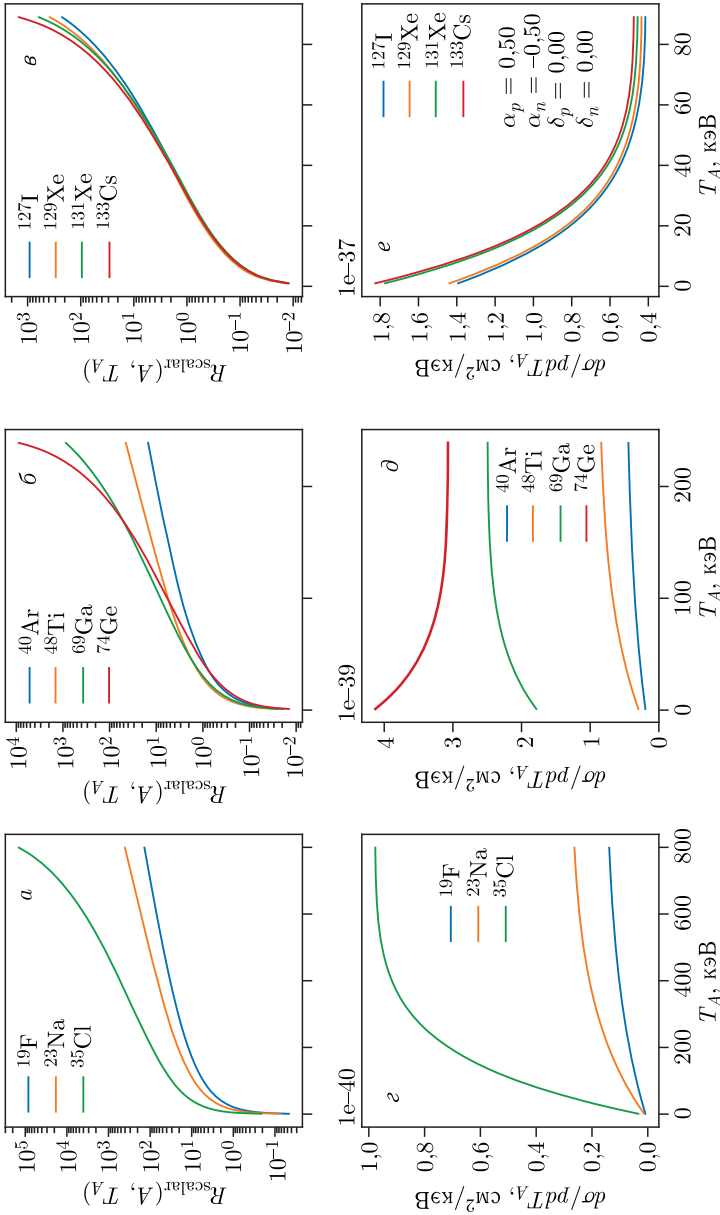


Рис. 7. Отношение (*a, б, в*) $R_{\text{total}}^{\text{tot}}(A, T_A)$ (120) полных *нерелятивистских* сечений некогерентного и когерентного χA -рас-
сеяния за счет слабого скалярного взаимодействия, когда $a_p = -a_n$, и измеряемые полные дифференциальные сечения (118)
(*г, д, е*) для ряда ядер-мишеней как функция энергии отдачи ядра T_A

спин-зависящего. Тогда в общих формулах (115) и (118) векторные эффективные константы связи протона и нейтрона $\alpha_p = \alpha_n = 0$ и формула (115) принимают вид

$$R_{\text{axial}}^{\text{tot}}(A, T_A) = 3R_A(T_A)(A^p + A^n) \frac{A^p \delta_p^2 + A^n \delta_n^2}{(\delta_p \Delta A_p + \delta_n \Delta A_n)^2}. \quad (121)$$

Отсюда, а также из формулы (118) видно, что для ядер с нулевым спином (точнее, когда $\Delta A_{p/n} = 0$) когерентный вклад в полное сечение от чисто аксиально-векторного взаимодействия отсутствует и это отношение теряет смысл. Поскольку в СМ аксиальные константы связаны соотношением $\delta_n = -\delta_p$, то отношение

$$R_{\text{CM, axial}}^{\text{tot}}(A, T_A) = \frac{3R_A(T_A)A^2}{(\Delta A_p - \Delta A_n)^2} = \frac{1 - F_A^2(T_A)}{F_A^2(T_A)} \frac{3A}{(\Delta A_p - \Delta A_n)^2}$$

не зависит от значения самой аксиальной константы связи δ_p и, что более значимо, не только не подавлено величиной A , но и прямо пропорционально ей при условии, что $\Delta A_p \neq \Delta A_n$ (рис.8). В противном случае отношение (121) опять теряет смысл.

Когда $\delta_n = \delta_p$, из отношения (121) также полностью выпадает зависимость от конкретного значения аксиальной константы связи и оно принимает (похожий) вид:

$$R_{\text{spin, axial}}^{\text{tot}}(A, T_A) = \frac{3R_A(T_A)A^2}{(\Delta A_p + \Delta A_n)^2} = \frac{1 - F_A^2(T_A)}{F_A^2(T_A)} \frac{3A}{|\Delta A|^2},$$

где $\Delta A \equiv \Delta A_p + \Delta A_n$ играет роль полного спина ядра A . Этот случай можно считать полным аналогом традиционного спин-зависящего взаимодействия χ -частицы (темной материи) с веществом детектора, поскольку когерентное сечение здесь пропорционально квадрату спина ядра. На рис. 9 представлены иллюстрирующие этот случай графики.

Из рис. 8 и 9 упомянутая выше для случая скалярного взаимодействия «общая тенденция» в балансе когерентности и некогерентности становится «доминантой». Действительно, если χ -частица взаимодействует с нуклонами ядра *только* аксиально-векторным образом, то на мишени, состоящей из ядер с нулевым спином, невозможно обнаружить взаимодействие этих частиц по когерентному (упругому) каналу, поскольку его просто нет. Единственный путь регистрации лежит через обнаружение ее неупругого (некогерентного) взаимодействия с нуклонами. Более того, даже если мишень состоит из ядер с ненулевым спином, то когерентный (упругий, пропорциональный квадрату спина ядра) вклад в измеряемое сечение «не виден» на фоне некогерентного (неупругого, пропорционального атомной массе ядра A) вклада практически во всем интервале возможных значений T_A .

Таким образом, в случае чисто аксиально-векторного χA -взаимодействия зависящий от ненулевого спина ядра упругий канал рассеяния,

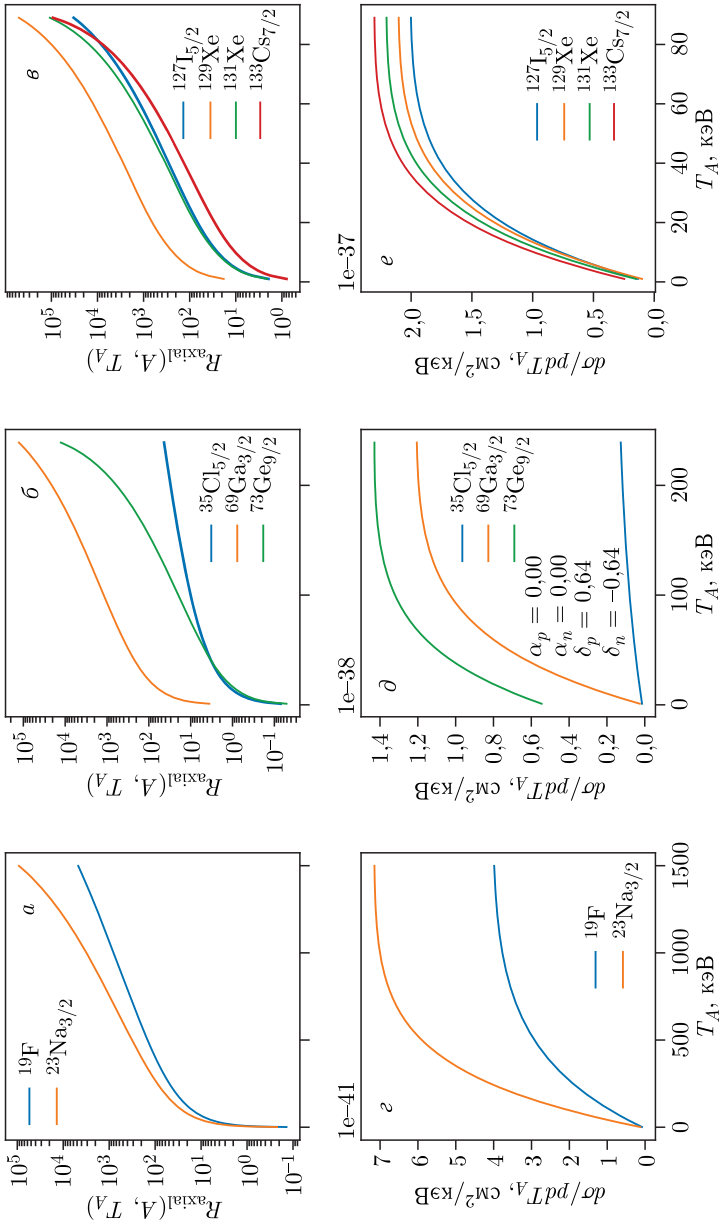


Рис. 8. Отношение (а, б, е) $R_{\text{СМ, axial}}^{\text{tot}}(A, T_A)$ (121) полных *нерелятивистских* сечений некогерентного и когерентного χ -А-рассеяния за счет слабого аксиального взаимодействия, когда $\delta_n = -\delta_p$ (зависимость от этих параметров сохраняется только в сечении), и измеряемые полные дифференциальные сечения (118) (ε, δ, e) для ряда ядер-мишеней как функция энергии отдачи ядра T_A

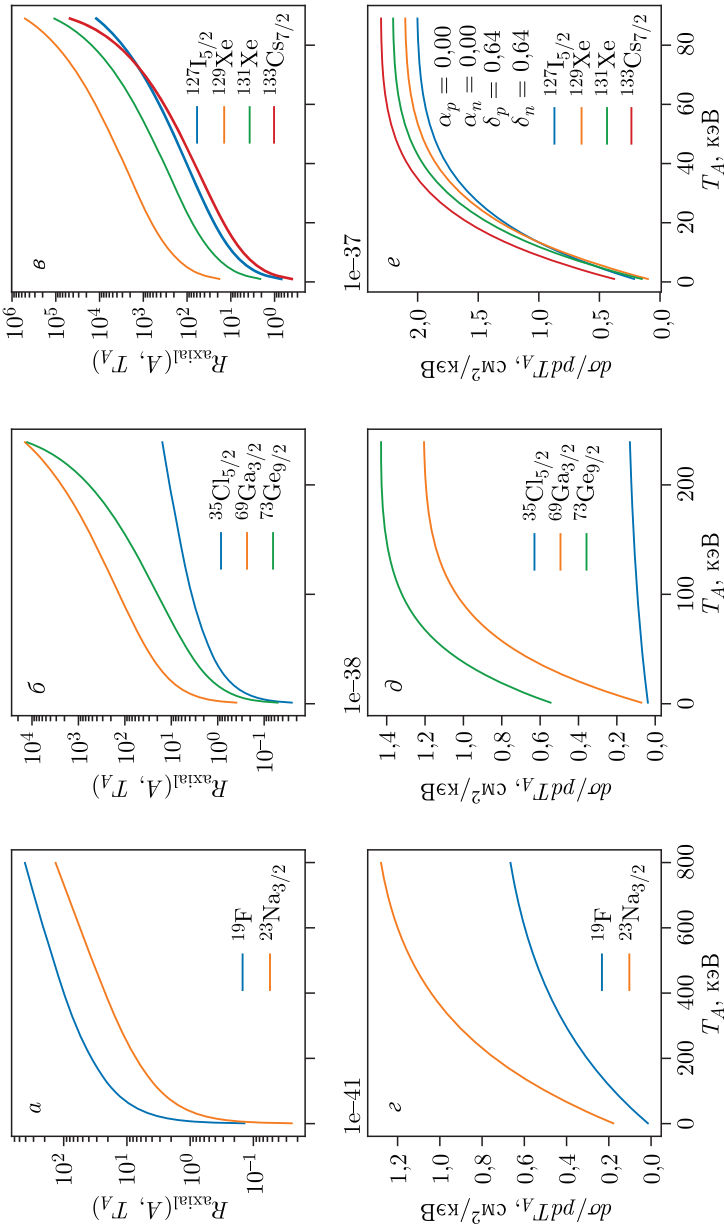


Рис. 9. Отношение (а, б, е) $R_{\text{спин, axial}}^{\text{от}}(A, T_A)$ (121) полных *нерелятивистских* сечений некогерентного и когерентного χ -А-рассеяния за счет слабого аксиального взаимодействия, когда $\delta_n = \delta_p$, и измеряемые полные дифференциальные сечения (118) (с, д, е) для ряда ядер-мишеней как функция энергии отдачи ядра T_A

на который традиционно ориентируются детекторы в поиске спин-зависящего сигнала темной материи, обречены ничего не увидеть практически при всех T_A , поскольку все «сигналообразующее» рассеяние идет через неупругий канал, к которому такого типа детекторы, как правило, нечувствительны. Обычно детекторы, нацеленные на прямой поиск темной материи, обладают максимальной чувствительностью в области энергетического порога регистрации энергии отдачи ядра. У них нет, как правило, возможности адекватно регистрировать высокоэнергетическое (по сравнению с указанным порогом) излучение, обусловленное снятием возбуждения ядер, вызванного неупругой природой χA -взаимодействия. Опять вполне возможна ситуация, когда искомые взаимодействия могут иметь заметную (потенциально регистрируемую) интенсивность, но прибор, используемый для их поиска, просто не способен их обнаружить.

Характер доминирования неупругого над упругим *спин-зависящим* взаимодействием частиц темной материи с ядрами $^{129,131}\text{Xe}$ был исследован в работе [58], в которой вклад всего неупругого канала определялся возбуждением одного низколежащего уровня*, а регистрируемый (сцинтилляционный) сигнал представлял собой сумму вкладов энергии отдачи и фотонов от снятия возбуждения ядер.

Пути обнаружения некогерентного сигнала при рассеянии нейтрино на ядре обсуждались в работах [1, 3, 5]. Для массивного нерелятивистского χ -лептона ничего принципиально не меняется. После взаимодействия с ним ядро либо остается в том же квантовом состоянии (упругое рассеяние), либо его внутреннее квантовое состояние меняется (неупругое рассеяние). Когда экспериментальная установка способна измерять только кинетическую энергию отдачи ядра, то невозможно *по ней* определить, осталось ли ядро в своем первоначальном состоянии или произошел переход на возбужденный уровень.

Если переход на возбужденное состояние ядра энергетически возможен и имел место, т. е. произошло именно неупругое взаимодействие**, то рано или поздно ядро должно возвратиться в свое исходное (основное) состояние. Это неизбежное снятие возбуждения ядра должно сопровождаться выделением энергии, например, в виде γ -излучения. Примечательно то, что возможная регистрация гамма-квантов от такого неупругого взаимодействия была предложена еще в 1975 г. [62]. Энерге-

* Первое возбужденное $3/2^+$ -состояние ^{129}Xe имеет энергию 39,6 кэВ (период полураспада 0,97 нс) над основным $1/2^+$ -состоянием [59]. Первое возбужденное $1/2^+$ -состояние ^{131}Xe имеет энергию 80,2 кэВ над основным $3/2^+$ -состоянием (0,48 нс) [60].

** Не следует путать этот «классический» неупругий подход с «неупругостью», вызванной переходом падающего на ядро χ_1 -лептона (темной материи) в более массивный χ_2 -лептон (тоже из темного сектора). При этом ядро считается неизменным, т. е. взаимодействующим когерентно (см., например, [14, 17, 18, 20, 23, 24, 35, 61]).

тический спектр этих фотонов определяется структурой уровней возбуждения ядра и строго фиксирован для каждого конкретного ядра-мишени. Эти фотоны вполне способны производить детектируемый сигнал [62], который, вообще говоря, будет скоррелирован со временем облучения мишени, если источником χ -лептонов является, например, ускоритель. Согласно приведенным выше рисункам (см., например, рис. 9) перспектива регистрации заметного (для аксиального случая подавляющего) числа событий с γ -квантами от некогерентного χA -взаимодействия не выглядит бесперспективной при условии, что *само* χA -взаимодействие будет иметь регистрируемую современными детекторами интенсивность.

Подчеркнем, что для каждого конкретного ядра-мишени эти фотоны будут характеризоваться тремя важными параметрами. Во-первых, их энергия во многих случаях заметно больше кинетической энергии отдачи ядра ($T_{Cs} \leq 40$ кэВ на рис. 9), во-вторых, испускание фотонов с энергией, определенной разностью уровней возбуждения ядра, будет сдвинуто по времени (относительно тем или иным способом заданного начала взаимодействия) на характерное для уровня конкретного ядра время снятия возбуждения. Например, испускание таких γ -квантов для ядра ^{133}Cs происходит в интервале от пикосекунд до наносекунд, и их энергии находятся в области нескольких сотен килоэлектронвольт. В-третьих, скорость счета таких γ -квантов будет пропорциональна отношению $N_{\text{inc}/\text{coh}}$, где

$$N_{\text{inc}/\text{coh}} = \int dE_\nu \Phi(E_\nu) \int_{dT_A^{\text{min}}}^{dT_A^{\text{max}}} dT_A \frac{d\sigma_{\text{inc}/\text{coh}}}{dT_A} \varepsilon(T_A)$$

и $\varepsilon(T_A)$ — эффективность детектора. Возможность конструктивного использования этих свойств для выделения из фона искомого неупругого χA -взаимодействия представляется, однако, темой отдельного рассмотрения.

Обсудим вопрос о точности полученной оценки неупругого χA -сечения. Как и для (анти)нейтрино-ядерного рассеяния [1–3], это (совокупное) неупругое сечение представляет собой верхнюю границу для вкладов в полное измеряемое χA -сечение всех вместе взятых допустимых неупругих подпроцессов (в данной кинематической области). Этот верхний предел следует только из правила сохранения вероятности: сумма вероятностей всех неупругих подпроцессов и вероятности упругого процесса равна единице.

Полнота «насыщения» этого совокупного неупругого сечения отдельными неупругими каналами (вкладами от переходов на различные разрешенные уровни) зависит от структуры уровней возбуждения конкретного ядра и энергии падающей частицы. Понятно, что такое насыщение не может быть 100-% воспроизведено численно. Расчеты неупругих сечений $\nu(\bar{\nu})A$ -рассеяния за счет слабых нейтральных

токов были проведены в рамках современных ядерных моделей для конкретных уровней возбуждения конкретных ядер, например, в работах [63–65]. Недавно аналогичные вычисления были обобщены на случай неупругого рассеяния нейтральных частиц темной материи на ядрах [56, 66, 67].

В работе [56] были проведены детальные расчеты для сечений и скоростей счета событий упругого и неупругого рассеяния на ядрах ^{73}Ge , ^{127}I , ^{133}Cs и ^{133}Xe . Аналогичные расчеты были выполнены для ^{23}Na и ^{40}Ar [66]. В случае нейтрино-ядерного рассеяния авторами использовались формулы из работ [1–3]. Эффекты ядра учитывались в модели деформированных оболочек. На примере самых низколежащих уровней* в рамках этой ядерной модели было показано, что некогерентные нейтрино-ядерные процессы способны дать заметное усиление ожидаемого сигнала (выше энергетического порога) в современном детекторе темной материи. Аналогичное усиление было показано для неупругого WIMP-ядерного рассеяния. Таким образом, в этих работах подтверждена важность неупругого канала при больших энергиях отдачи, на которую впервые было указано в работах [1–3]. Тем не менее для правильного анализа баланса когерентности и некогерентности при WIMP-рассеянии на ядре следует применять полученные в настоящей работе выражения.

В работе [67] было отмечено, что нейтрино с энергией в несколько десятков мегаэлектронвольт могут возбуждать много различных уровней в ядрах, входящих в состав детекторов различных экспериментов. Авторы считают, что, хотя сечение неупругого рассеяния значительно меньше сечения когерентно усиленного упругого рассеяния, исследование неупругих процессов является важным источником дополнительной информации при поиске новой физики, выявлении фоновых условий для ее поиска и т. п. Кроме того, понимание неупругого нейтрино-ядерного рассеяния крайне важно для детектирования сигнала от взрыва сверхновых нейтринными детекторами нового поколения, такими как DUNE [68] и Нурег-К [69]. Имеются также достаточно интересные модели, в которых значимость неупругого взаимодействия повышена [70]. Обсуждая более ранние оценки неупругого νA -рассеяния, авторы [67] считают, что в нашей работе [1] не принимались во внимание детали ядерной структуры, а в работе [56] учитывали только самые низколежащие ядерные уровни. По их словам, использованное нами в работе [1] приближение свободных нуклонов особенно неадекватно при оценке неупругого рассеяния в обсуждаемой области энергий, поскольку оно полностью игнорирует ядерную структуру**.

* Для ^{127}I первое возбужденное $7/2^+$ -состояние лежит выше основного на 57,6 кэВ. Для ^{133}Cs нижайшее $5/2^+$ -состояние имеет энергию 81 кэВ.

** Отметим, что нуклоны в [1] несвободные, а структура ядра учитывается через ядерные формфакторы.

В работе [67] на основе формализма полуплептонной электрослабой теории [71–73] в модели ядерных оболочек были рассчитаны неупругие сечения рассеяния нейтрино и частиц темной материи (за счет нейтральных слабых токов) на ядрах ^{40}Ag , ^{133}Cs и ^{127}I . В этом формализме адронный ток разлагается по мультиполям для получения неприводимых тензорных операторов, которые действуют на одночастичные состояния. Для (полного) неупругого сечения рассеяния нейтрино на ядре при достаточно низких энергиях нейтрино ($E_\nu < 20$ МэВ) авторы получили согласие с другими расчетами (в том числе с [1]), однако при $E_\nu \simeq 40$ МэВ их сечения примерно на порядок меньше полученных в работе [1] верхних границ для всех неупругих каналов, в чем не усматривается никакого противоречия. Из полученного в работе [67] рис. 10 видно, что параметризация Хельма для ядерных формфакторов (использованная и в [1]) достаточно хорошо работает во всей значимой кинематической области, в которой величина квадрата формфактора не падает ниже значения 0,01. Различия в поведении квадратов формфакторов возникают для аргона при энергии отдачи ядра $E_r \simeq 600$ кэВ (положения минимумов отличаются заметно), однако этому различию отвечает величина квадрата формфактора 0,001, что делает это различие практически незаметным. Для более тяжелых ядер ^{133}Cs и ^{127}I это различие при $E_r \simeq 80\text{--}100$ кэВ еще менее значимо, чем для ^{40}Ag , также в силу малости самих значений формфакторов.

В связи с этим отметим два факта. Во-первых, в данной работе, как и в подходе [1–3], параметризация Хельма используется для вычисления формфакторов, определенных в (46) через матричный элемент оператора сдвига $\langle m | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{X}_k} | n \rangle$, при этом не использовано разложение по сфериче-

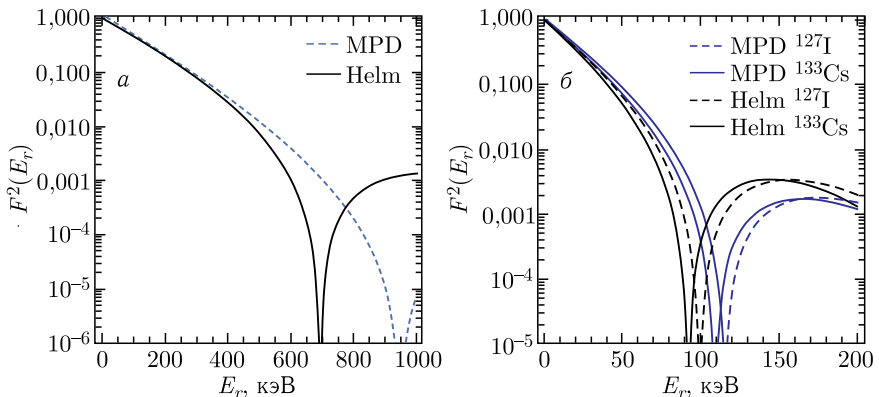


Рис. 10. Значения параметризации упругих формфакторов Хельма в сравнении с результатами вычислений в модели оболочек [67]: а) для ^{40}Ag ; б) для ^{133}Cs и ^{127}I . Данные взяты из [67]

ским функциям и мультиполям следующего типа [74]:

$$e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} i^l j_l(qx) Y_{l0}(\theta, \varphi).$$

Иными словами, можно утверждать, что в подходе [1–3], в отличие от [67], «работают» абсолютно все мультиполи, ни одним из их вкладов не пренебрегается. В то же время ничто не мешает в подходе [1–3] для вычисления формфакторов использовать не простую и удобную параметризацию Хельма, а более сложные выражения из [67], приведенные на рис. 10. Однако различия этих параметризаций в *значимой области* невелики и становятся более или менее заметны только тогда, когда квадраты их падают ниже значения 0,01, поэтому такая замена даст поправку на уровне $O(0,01)$.

Итак, видно, что использование современных ядерных моделей для вычисления неупругих сечений дает результат, который всегда меньше полученных в данной работе оценок. Причина, как уже отмечалось, в том, что формализм [1–3] дает верхнюю границу *полного* неупругого сечения (т. е. где учтены *все* возможные неупругие каналы), поскольку вероятность всех вместе взятых неупругих каналов рассеяния находится путем вычитания из единицы вероятности одного-единственного упругого канала реакции.

Отметим, что результаты прецизионных расчетов неупругого сечения в рамках продвинутых моделей ядра не позволяют количественно контролировать переход «от когерентности к некогерентности». Последнее означает, что вопрос применения тех или иных формул для описания и анализа данных, полученных в той или иной кинематической области, решается «волевым» способом на основе предварительных оценок выполнимости условия когерентности. В формализме [1–3] нет необходимости делать какие-либо оценки, прежде чем применять формулы, здесь наблюдается плавный переход от одного режима к другому.

Для полноты картины напомним результаты поиска неупругого взаимодействия слабозаимодействующих нейтральных массивных частиц (темной материи), полученные коллаборацией XENON1T [61], которая считает, что ядро ^{129}Xe представляет собой наиболее подходящий материал для поиска неупругого WIMP-ядерного взаимодействия, сигнатурой которого является 39,6-кэВ фотон от снятия возбуждения (электрон отдачи), детектируемый *одновременно* с энергией отдачи ядра. Поскольку свидетельств такого неупругого процесса обнаружено не было, был получен наиболее значимый верхний предел $3,3 \cdot 10^{-39} \text{ см}^2$ для частиц темной материи массой 130 ГэВ/ c^2 . Тем не менее авторы подчеркивают, что детектирование неупругого рассеяния дало бы более сильные ограничения на свойства темной материи, чем обнаружение одного только упругого взаимодействия [61].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем основные обсуждавшиеся вопросы.

1) Формализм [1–3], впервые предложенный для описания нейтрино-ядерного взаимодействия, был обобщен на случай нерелятивистского* слабого взаимодействия массивной нейтральной частицы (χ -лептона) с ядром как составной системой. Это взаимодействие параметризовано в виде четырех свободных параметров — эффективных констант связи, определяющих вклады в амплитуду вероятности скалярных произведений лептонных и нуклонных токов.

2) Благодаря учету всех возможных начальных и конечных квантовых состояний ядра (условие полноты) в достаточно общем виде (т. е. независимо от деталей модели ядра) в рамках этого подхода удается получить единое описание упругих (когерентных) и неупругих (некогерентных) процессов рассеяния нейтрального χ -лептона на ядрах.

3) Так же как и для (анти)нейтрино-ядерного рассеяния, поведение упругого (когерентного) и неупругого (некогерентного) χA -сечений, соответственно, определяется множителями $|F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$ и $1 - |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$, где $F_{p/n}(\mathbf{q})$ — нормированный на единицу и усредненный по начальному состоянию ядра формфактор протона/нейтрона. Эти формфакторы регулируют плавный переход от режима упругого (когерентного) к режиму неупругого (некогерентного) рассеяния. Вопрос о доминировании упругого (когерентного) или неупругого (некогерентного) слагаемого в наблюдаемом сечении определяется соотношением между зависящими от переданного ядру импульса \mathbf{q} величинами множителей $A_{p/n}^2 |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2$ и $A_{p/n}(1 - |F_{p/n}(\mathbf{q})|^2)$.

4) На рис. 4 и 5 (полученные с эффективными константами связи слабого взаимодействия в СМ) показано главное свойство подхода [1–3]. С ростом регистрируемой энергии отдачи ядра T_A происходит хорошо контролируемый переход от доминирования упругого χA -взаимодействия к доминированию χA -неупругого взаимодействия при нерелятивистском рассеянии *массивной* χ -частицы на ядре.

Иными словами, с ростом T_A регистрируемые события будут менять свое происхождение. Если прибор настроен на регистрацию событий только упругого рассеяния, то при возрастании T_A он начинает терять возможность вообще что-либо «видеть» (упругих процессов становится все меньше и меньше). При этом заметно растет число неупругих процессов, которые такой прибор не способен видеть. Например, он не может регистрировать фотоны от снятия возбуждения ядер, если энергия этих фотонов лежит вне зоны регистрации детектора. Получается ситуация, когда есть искомые взаимодействия, но прибор их «не замечает».

* Релятивистский вариант такого описания рассмотрен в отдельной работе — [75].

В наиболее критическом виде это «явление» может проявляться в задаче прямого поиска темной материи, результаты которого обычно интерпретируются в терминах *спин-независимого* и *спин-зависимого* сечений взаимодействия частицы темной материи в гало нашей Галактики с нуклонами.

5) Для чисто скалярного (спин-независимого) взаимодействия упомянутая выше плавная смена «наполнения» полного измеряемого сечения с ростом T_A видна на рис. 6 и 7, при этом само сечение уменьшается незначительно, что выходит за рамки достижимости типового эксперимента.

6) Далее, если (нерелятивистская) χ -частица взаимодействует с нуклонами ядра *только* аксиально-векторным образом (спин-зависимым), то на ядрах с нулевым спином невозможно обнаружить взаимодействие этой частицы по когерентному (упругому) каналу. Единственный путь регистрации лежит через обнаружение ее неупругого (некогерентного) взаимодействия с нуклонами. Более того, даже если ядро имеет ненулевой спин, то когерентный (упругий, пропорциональный квадрату спина ядра) вклад в измеряемое сечение слабо виден на фоне некогерентного (неупругого, пропорционального атомной массе ядра A) вклада практически во всем интервале возможных значений T_A (см. рис. 8 и 9).

Таким образом, в случае чисто аксиально-векторного χA -взаимодействия детекторы, традиционно ориентированные на регистрацию упругого спин-зависящего сигнала темной материи, «обречены» ничего не увидеть, поскольку всё потенциально «сигналообразующее» рассеяние идет через неупругий канал, к которому такого типа детекторы, как правило, нечувствительны. Опять не исключена ситуация, когда искомые взаимодействия могут иметь заметную (потенциально регистрируемую) интенсивность, но прибор, используемый для их поиска, не способен их обнаружить.

7) Возможна и другая ситуация. Если регистрируемая после χA -рассеяния энергия отдачи ядра оказывается ниже порога регистрации детектора, т. е. $T_A < T_A^{\min}$, то упругий сигнал вообще невозможно обнаружить. При таких «невидимых» T_A единственным свидетельством произошедшего χA -взаимодействия становится излучение от снятия возбуждения ядра, т. е. неупругий сигнал, хотя его интенсивность при $T_A < T_A^{\min}$ может быть на порядок меньше интенсивности упругого сигнала. В целом, когда регистрируется только энергия отдачи ядра T_A , невозможно понять, какой процесс — упругий или неупругий — произошел. Хуже того, когда неупругий сигнал «ложится» в ожидаемую область регистрации упругого, тем более непонятно его происхождение.

Таким образом, по вышеприведенным причинам следует планировать эксперименты по прямому детектированию частиц темной материи в такой постановке, когда возможно детектирование двух сигналов — энергии отдачи ядра и γ -квантов от снятия ядерного возбуждения. Напомним, что энергия этих γ -квантов строго специфична для каждого

конкретного ядра, она равна разности уровней возбуждения последнего. Результат такого эксперимента даст наиболее полную информацию о произошедшем χA -взаимодействии.

8) Полученный в данной работе набор выражений для χA -сечений (формулы (103), (107) и др.) следует применять для адекватного описания рассеяния слабозаимодействующих нейтральных χ -частиц на ядрах-мишенях в тех случаях, когда имеются механизмы увеличения скоростей этих частиц на порядок (или два) по сравнению со скоростями частиц темной материи в гало нашей Галактики, скажем, до уровня $|\mathbf{v}|/c = |\mathbf{k}|/cm_\chi = 10^{-2} - 10^{-1}$. В опубликованных работах было предложено несколько таких возможностей. Например, генерация частиц темной материи достаточно больших энергий (даже с релятивистскими скоростями на уровне земли [20]) за счет различных механизмов ускорения в космосе [19, 22, 45–47]. Другой вариант — образование достаточно энергетических кандидатов на роль частиц темной материи на современных ускорителях [27, 43, 44]. Отметим, что в этом случае излучение от снятия возбуждения ядер может иметь не только вид γ -квантов, но и более богатую структуру, например, в виде нейтронов или других частиц от развала ядра-мишени.

Автор выражает глубокую благодарность В. Наумову, Е. Якушеву, Н. Рукавичу и И. Титковой за обсуждения и важные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* Coherency and Incoherency in Neutrino-Nucleus Elastic and Inelastic Scattering // *Phys. Rev. D.* 2018. V. 98, No. 5. P. 053004; arXiv:1806.08768.
2. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* On Coherent Neutrino and Antineutrino Scattering off Nuclei // *Phys. Part. Nucl. Lett.* 2019. V. 16, No. 6. P. 638–646; arXiv:1904.03119.
3. *Bednyakov V. A., Naumov D. V.* Concept of Coherence in Neutrino and Antineutrino Scattering off Nuclei // *Phys. Part. Nucl.* 2021. V. 52, No. 1. P. 39–154; arXiv:2021.0000.
4. *Akimov D. et al. (COHERENT Collab.)*. Observation of Coherent Elastic Neutrino-Nucleus Scattering // *Science.* 2017. V. 357. P. 1123–1126; arXiv:1708.01294.
5. *Bednyakov V. A., Naumov D. V., Titkova I. V.* On the Possibility of Separating Coherent and Incoherent (Anti)neutrino Scattering on Nuclei // *Phys. At. Nucl.* 2021. V. 84, No. 3. P. 314–327.
6. *Bednyakov V. A.* Is It Possible to Discover a Dark Matter Particle with an Accelerator? // *Phys. Part. Nucl.* 2016. V. 47, No. 5. P. 711–774; arXiv:1505.04380.
7. *Papoulias D. K., Sahu R., Kosmas T. S., Kota V. K. B., Nayak B.* Novel Neutrino-Floor and Dark Matter Searches with Deformed Shell Model Calculations // *Adv. High Energy Phys.* 2018. V. 2018. P. 6031362; arXiv:1804.11319.
8. *Boehm C., Cerdeo D. G., Machado P. A. N., Campo A., Olivares D., Reid E.* How High Is the Neutrino Floor? // *JCAP.* 2019. V. 1901. P. 043; arXiv:1809.06385.

9. *Cooley J.* Dark Matter Direct Detection of Classical WIMPs // Les Houches Summer School on Dark Matter. 2021. V. 10; arXiv:2110.02359.
10. *Cebrián S.* Review on Dark Matter Searches // 10th Symp. on Large TPCs for Low-Energy Rare Event Detection. 2022. V. 5; arXiv:2205.06833.
11. *Bernabei R. et al.* Dark Matter Investigation with DAMA Set-Ups // Intern. J. Mod. Phys. A. 2022. V. 37, No. 07. P. 2240015.
12. *Hurtado N., Mir H., Shoemaker I. M., Welch E., Wyenberg J.* Dark Matter-Neutrino Interconversion at COHERENT, Direct Detection, and the Early Universe // Phys. Rev. D. 2020. V. 102, No. 1. P. 015006; arXiv:2005.13384.
13. *Du P., Egana-Ugrinovic D., Essig R., Sholapurkar M.* Sources of Low-Energy Events in Low-Threshold Dark-Matter and Neutrino Detectors // Phys. Rev. X. 2022. V. 12, No. 1. P. 011009; arXiv:2011.13939.
14. *Baryakhtar M., Berlin A., Liu H., Weiner N.* Electromagnetic Signals of Inelastic Dark Matter Scattering // JHEP. 2022. V. 06. P. 047; arXiv:2006.13918.
15. *Majumdar A., Papoulias D. K., Srivastava R.* Dark Matter Detectors as a Novel Probe for Light New Physics. arXiv:2112.03309.
16. *Ajek G., Carney D., Moore D. C.* Coherent Scattering of Low Mass Dark Matter from Optically Trapped Sensors // Phys. Rev. Lett. 2022. V. 128, No. 10. P. 101301; arXiv:2111.03597.
17. *Giudice G. F., Kim D., Park J.-C., Shin S.* Inelastic Boosted Dark Matter at Direct Detection Experiments // Phys. Lett. B. 2018. V. 780. P. 543–552; arXiv:1712.07126.
18. *Zurowski M. J., Barberio E., Busoni G.* Inelastic Dark Matter and the SABRE Experiment // JCAP. 2020. V. 12. P. 014; arXiv:2005.10404.
19. *Wang J.-W., Granelli A., Ullio P.* Direct Detection Constraints on Blazar-Boosted Dark Matter // Phys. Rev. Lett. 2022. V. 128. P. 221104; arXiv:2111.13644.
20. *Feng J.-C., Kang X.-W., Lu C.-T., Tsai Y.-L. S., Zhang F.-S.* Revising Inelastic Dark Matter Direct Detection by Including the Cosmic Ray Acceleration // JHEP. 2022. V. 04. P. 080; arXiv:2110.08863.
21. *Emken T., Frerick J., Heeba S., Kahlhoefer F.* Electron Recoils from Terrestrial Upscattering of Inelastic Dark Matter // Phys. Rev. D. 2022. V. 105, No. 5. P. 055023; arXiv:2112.06930.
22. *Granelli A., Ullio P., Wang J.-W.* Blazar-Boosted Dark Matter at Super-Kamiokande. arXiv:2202.07598.
23. *Filimonova A., Junius S., Lopez Honorez L., Westhoff S.* Inelastic Dirac Dark Matter // JHEP. 2022. V. 06. P. 048; arXiv:2201.08409.
24. *Bell N. F., Dent J. B., Dutta B., Kumar J., Newstead J. L.* Low-Mass Dark Matter (In)direct Detection with Inelastic Scattering. arXiv:2208.08020.
25. *Tsuchida S., Kanda N., Itoh Y., Mori M.* Dark Matter Signals on a Laser Interferometer // Phys. Rev. D. 2020. V. 101, No. 2. P. 023005; arXiv:1909.00654.
26. *Coskuner A., Trickle T., Zhang Z., Zurek K. M.* Directional Detectability of Dark Matter with Single Phonon Excitations: Target Comparison // Phys. Rev. D. 2022. V. 105, No. 1. P. 015010; arXiv:2102.09567.
27. *Boos E. E., Bunichev V. E., Trykov S. S.* Prospects for Dark Matter Search at the Super c-Tau Factory. arXiv:2205.07364.
28. *Flambaum V. V., McAllister B. T., Samsonov I. B., Tobar M. E.* Searching for Scalar Field Dark Matter Using Cavity Resonators and Capacitors. arXiv:2207.14437.

29. *Fan X., Gabrielse G., Graham P. W., Harnik R., Myers T. G., Ramani H., Sukra B. A. D., Wong S. S. Y., Xiao Y.* One-Electron Quantum Cyclotron as a Milli-eV Dark-Photon Detector. arXiv:2208.06519.
30. *Blanco C., Essig R., Fernandez-Serra M., Ramani H., Slone O.* Dark Matter Direct Detection with Quantum Dots. arXiv:2208.05967.
31. *Billard J., Pyle M., Rajendran S., Ramani H.* Calorimetric Detection of Dark Matter. arXiv:2208.05485.
32. *Araújo H.M. et al.* The MIGDAL Experiment: Measuring a Rare Atomic Process to Aid the Search for Dark Matter. arXiv:2207.08284.
33. *Bednyakov V.A.* A Direct Dark Matter Detection Experiment Is Inevitable. arXiv:2003.09422.
34. *Slatyer T.R.* Les Houches Lectures on Indirect Detection of Dark Matter // Les Houches Summer School on Dark Matter. 2021. P. 9; arXiv:2109.02696.
35. *Aboubrahim A., Althueser L., Klasen M., Nath P., Weinheimer C.* Annual Modulation of Event Rate and Electron Recoil Energy in Inelastic Scattering Direct Detection Experiments. arXiv:2207.08621.
36. *Tanabashi M. et al. (Particle Data Group Collab.).* Review of Particle Physics // Phys. Rev. D. 2018. V. 98, No. 3. P. 030001.
37. *Peskin M.E., Schroeder D.V.* An Introduction to Quantum Field Theory. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
38. *Bilenky S.M.* Introduction to Feynman Diagrams and Electroweak Interactions Physics. Gif-sur-Yvette, 1995. P. 1–365.
39. *Bertone G., Hooper D., Silk J.* Particle Dark Matter: Evidence, Candidates and Constraints // Phys. Rep. 2005. V. 405. P. 279–390; hep-ph/0404175.
40. *Drukier A.K., Freese K., Spergel D.N.* Detecting Cold Dark Matter Candidates // Phys. Rev. D. 1986. V. 33. P. 3495–3508.
41. *Freese K., Frieman J.A., Gould A.* Signal Modulation in Cold Dark Matter Detection // Phys. Rev. D. 1988. V. 37. P. 3388.
42. *Lewin J.D., Smith P.F.* Review of Mathematics, Numerical Factors, and Corrections for Dark Matter Experiments Based on Elastic Nuclear Recoil // Astropart. Phys. 1996. V. 6. P. 87–112.
43. *Krnjaic G. et al.* Snowmass 2021 Rare & Precision Frontier (RF6): Dark Matter Production at Intensity-Frontier Experiments. arXiv:2207.00597.
44. *Kim D., Matchev K.T.* How to Prove That a E_T Excess at the LHC Is Not Due to Dark Matter // Phys. Rev. D. 2018. V. 98, No. 5. P. 055018; arXiv: 1712.07620.
45. *Bardhan D., Bhowmick S., Ghosh D., Guha A., Sachdeva D.* Boosting through the Darkness. arXiv:2208.09405.
46. *Xu R. et al. (CDEX Collab.).* Constraints on Sub-GeV Dark Matter Boosted by Cosmic Rays from CDEX-10 Experiment at the China Jinping Underground Laboratory. arXiv:2201.01704.
47. *Xia C., Xu Y.-H., Zhou Y.-F.* Azimuthal Asymmetry in Cosmic-Ray Boosted Dark Matter Flux. arXiv:2206.11454.
48. *Jungman G., Kamionkowski M., Griest K.* Supersymmetric Dark Matter // Phys. Rep. 1996. V. 267. P. 195–373; hep-ph/9506380.
49. *Vergados J.D.* Searching for Cold Dark Matter // J. Phys. G. 1996. V. 22. P. 253–272; hep-ph/9504320.

50. *Freedman D. Z.* Coherent Effects of a Weak Neutral Current // *Phys. Rev. D.* 1974. V. 9. P. 1389–1392.
51. *Blokhintsev D. I.* Fundamentals of Quantum Mechanics. М., 1963;
Блохинцев Д. И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1976. 664 с.
52. *Bohr A., Mottelson B. R.* Nuclear Structure. New York; Amsterdam: W. A. Benjamin. Inc., 1974. V. I, II;
Бор О., Моттelson Б. Структура атомного ядра. М.: Мир, 1977. Т. 1, 2.
53. *Bednyakov V. A.* Scalar Products of Fermion Currents // *Phys. Part. Nucl.* 2021. V. 52, No. 5. P. 847–898.
54. *Bednyakov V. A.* Coherency and Incoherency in Direct Dark Matter Search. 2023 (in press).
55. *Helm R. H.* Inelastic and Elastic Scattering of 187-MeV Electrons from Selected Even–Even Nuclei // *Phys. Rev.* 1956. V. 104. P. 1466–1475.
56. *Sahu R., Papoulias D. K., Kota V. K. B., Kosmas T. S.* Elastic and Inelastic Scattering of Neutrinos and Weakly Interacting Massive Particles on Nuclei // *Phys. Rev. C.* 2020. V. 102, No. 3. P. 035501; arXiv:2004.04055.
57. *McCabe C.* Prospects for Dark Matter Detection with Inelastic Transitions of Xenon // *JCAP.* 2016. V. 05. P. 033; arXiv:1512.00460.
58. *Baudis L., Kessler G., Klos P., Lang R. F., Menéndez J., Reichard S., Schwenk A.* Signatures of Dark Matter Scattering Inelastically Off Nuclei // *Phys. Rev. D.* 2013. V. 88, No. 11. P. 115014; arXiv:1309.0825.
59. *Timar J., Elekes Z., Singh B.* Nuclear Data Sheets for $a = 129$ // *Nucl. Data Sheets.* 2014. V. 121. P. 143–394.
60. *Khazov Y., Mitropolsky I., Rodionov A.* Nuclear Data Sheets for $a = 131$ // *Nucl. Data Sheets.* 2006. V. 107, No. 11. P. 2715–2930.
61. *Aprile E. et al. (XENON Collab.).* Search for Inelastic Scattering of WIMP Dark Matter in XENON1T // *Phys. Rev. D.* 2021. V. 103, No. 6. P. 063028; arXiv:2011.10431.
62. *Donnelly T. W., Walecka J. D.* Electron Scattering and Nuclear Structure // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 1975. V. 25. P. 329–405.
63. *Divari P. C.* Coherent and Incoherent Neutral Current Scattering for Supernova Detection // *Adv. High Energy Phys.* 2012. V. 2012. P. 379460.
64. *Divari P. C., Galanopoulos S., Souliotis G. A.* Coherent Scattering of Neutral-Current Neutrinos as a Probe for Supernova Detection // *J. Phys. G.* 2012. V. 39. P. 095204.
65. *Lykasov G. I., Bednyakov V. A.* Neutrino-Nucleus Interactions at Low Energies within Fermi-Liquid Theory // *Phys. Rev. C.* 2007. V. 76. P. 014622; arXiv:nucl-th/0703036.
66. *Sahu R., Kota V. K. B., Kosmas T. S.* Event Rates for the Scattering of Weakly Interacting Massive Particles from ^{23}Na and ^{40}Ar // *Particles.* 2021. V. 4, No. 1. P. 75–92; arXiv:2009.10522.
67. *Dutta B., Huang W.-C., Newstead J. L., Pandey V.* Inelastic Nuclear Scattering from Neutrinos and Dark Matter. arXiv:2206.08590.
68. *Abi B. et al. (DUNE Collab.).* Supernova Neutrino Burst Detection with the Deep Underground Neutrino Experiment // *Eur. Phys. J. C.* 2021. V. 81, No. 5. P. 423; arXiv:2008.06647.

69. *Abe K. et al. (Hyper-Kamiokande Collab.)*. Physics Potentials with the Second Hyper-Kamiokande Detector in Korea // PTEP. 2018. V. 2018, No. 6. P. 063C01; arXiv:1611.06118.
70. *Arcadi G., Döring C., Hasterok C., Vogl S.* Inelastic Dark Matter Nucleus Scattering // JCAP. 2019. V. 12. P. 053; arXiv:1906.10466.
71. *De Forest T., Jr., Walecka J.D.* Electron Scattering and Nuclear Structure // Adv. Phys. 1966. V. 15, No. 57. P. 1–109.
72. *Serot B.D.* Semileptonic Weak and Electromagnetic Interactions with Nuclei: Nuclear Current Operators through Order $(v/c)^2$ (Nucleon) // Nucl. Phys. A. 1978. V. 308. P. 457–499.
73. *Donnelly T.W., Haxton W.C.* Multipole Operators in Semileptonic Weak and Electromagnetic Interactions with Nuclei // Atom. Data Nucl. Data Tables. 1979. V. 23. P. 103–176.
74. *Sajjad Athar M., Fatima A., Singh S.K.* Neutrinos and Their Interactions with Matter. arXiv:2206.13792.
75. *Бедняков В. А.* Рассеяние массивного лептона на ядре. Векторные токи. 2023 (в печати).