

ЭФФЕКТ ГЕРШТЕЙНА–ГРАЙНЕРА–ЗЕЛЬДОВИЧА: ИНДУЦИРОВАННАЯ ЗАРЯДОВАЯ ПЛОТНОСТЬ И ВАКУУМНАЯ ЭНЕРГИЯ

П. А. Грашин¹, К. А. Свешников

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва

Эффект Герштейна–Грайнера–Зельдовича — спонтанное испускание вакуумных позитронов в условиях кулоновской сверхкритичности — детально исследован на основе первых принципов КЭД в рамках существенно непertурбативного подхода, основанного на специальной комбинации аналитических методов, компьютерной алгебры и численных расчетов. Особое внимание уделяется вакуумной энергии \mathcal{E}_{VP} , рассматриваемой как функция параметров внешнего кулоновского источника — заряда Z и радиуса R . Подробно изучен специфический вклад в \mathcal{E}_{VP} , возникающий вследствие прямого кулоновского взаимодействия вакуумных плотностей заряда $\varrho_{VP}(\mathbf{r})$. Показано, что при корректной перенормировке этот вклад становится отрицательным после опускания первых дискретных уровней в нижний континуум, поэтому является чисто квантовым эффектом, не наблюдаемым в классической электродинамике. Также обсуждается проблема сохранения лептонного числа при спонтанном излучении.

The Gershtein–Greiner–Zeldovich effect — the spontaneous positron emission caused by the supercritical Coulomb source — is explored in essentially nonperturbative approach based on the special combination of analytical methods, computer algebra, and numerical calculations with the emphasis on the VP energy \mathcal{E}_{VP} considered as a function of the Coulomb source parameters Z and R . The specific contribution to \mathcal{E}_{VP} , which appears in the supercritical case due to the direct Coulomb interaction between VP-charge densities $\varrho_{VP}(\mathbf{r})$, is outlined and studied in detail. It is shown that after the first levels diving into the lower continuum, this contribution, being properly renormalized, turns out to be negative in contrast to the classical electrostatics. The additional problems of spontaneous emission caused by the lepton number conservation are also discussed.

PACS: 12.20.–m

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время поведение электрон-позитронного вакуума в сверхкритических кулоновских полях является предметом активных исследований [1–12]. Интерес к задаче связан с тем, что КЭД предсказывает непertурбативную перестройку вакуумного состояния, обусловленную опусканием уровней дискретного спектра в нижний континуум, которая должна сопровождаться целым рядом нетривиальных эффектов, в том числе эффектом Герштейна–Грайнера–Зельдовича — спонтанным испусканием вакуумных позитронов и появлением соответствующих вакуумных оболочек (см. [1, 13–16] и цитируемую там литературу). В размерности 3+1 подобные

¹E-mail: grashin.petr@physics.msu.ru

эффекты должны наблюдаться в кулоновских полях, порождаемых локализованными протяженными источниками с зарядом $Z > Z_{\text{кр},1} \simeq 170$. Такие источники могут быть получены в рамках экспериментов по столкновению тяжелых ионов на новых ускорительных комплексах, таких как FAIR (Дармштадт), NICA (Дубна) и HIAF (Ланьчжоу) [17–19].

Проблема спонтанного испускания позитронов в сверхкритических кулоновских полях имеет долгую историю, начиная с пионерских работ В. Грайнера и Я. Зельдовича с соавторами начала 1970-х гг. [20–25] (см. также [1, 13, 16, 26] и цитируемую там литературу). Однако в экспериментах, проведенных на тяжелоионном комплексе GSI (Дармштадт) и впоследствии повторенных в Аргоннской национальной лаборатории, не было обнаружено никаких свидетельств рождения вакуумных позитронов [27]. Следующее поколение тяжелоионных комплексов должно вывести эти исследования на новый уровень [17–19], что требует углубления теоретических представлений об эффекте спонтанного испускания.

В настоящей работе рассматриваются непертурбативные эффекты поляризации электрон-позитронного вакуума в поле сверхкритического квазистатического кулоновского источника с зарядом $Z > Z_{\text{кр},1}$ и радиусом R . Особое внимание уделяется энергии поляризации вакуума \mathcal{E}_{VP} . Вакуумная энергия \mathcal{E}_{VP} играет ключевую роль в области сверхкритичности, особенно в эффекте рождения вакуумных позитронов, поскольку этот процесс должен происходить исключительно за счет поляризации вакуума, без каких-либо дополнительных каналов передачи энергии. В частности, именно убывание вакуумной энергии \mathcal{E}_{VP} должно обеспечивать спонтанно родившиеся позитроны дополнительной энергией отталкивания, необходимой для их испускания из окрестности источника. Рассматриваемая как функция заряда источника Z вакуумная энергия \mathcal{E}_{VP} оказывается быстро убывающей с ростом Z функцией, достигающей больших отрицательных значений [28]. Это убывание сопровождается отрицательными скачками, величина которых в точности совпадает с массой покоя электрона, происходящими каждый раз, когда очередной дискретный уровень опускается в нижний континуум. Если же рассматривать вакуумную энергию как функцию радиуса источника R при фиксированном Z , то поведение последней адекватно опишет все непертурбативные эффекты поляризации вакуума, возникающие при низкоэнергетических столкновениях тяжелых ионов. Ввиду активного интереса к рассматриваемой проблеме [1–4, 7–12, 17–19] данные вопросы требуют отдельного изучения.

До настоящего времени основное внимание в этом вопросе уделялось энергии поляризации моря Дирака [13–15, 28]

$$\mathcal{E}_{D,\text{VP}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \epsilon_n \right), \quad (1)$$

где $\epsilon_F = -m_e c^2$ — уровень Ферми, который в таких задачах с внешним кулоновским источником выбирается на пороге нижнего континуума, а ϵ_n — собственные значения соответствующей спектральной задачи Дирака–Кулона (ДК). По существу, $\mathcal{E}_{D,\text{VP}}$ является энергией Казимира электрон-позитронной системы во внешнем кулоновском поле [6, 14].

Однако полная вакуумная энергия системы не ограничивается этим членом. А именно, в кулоновской калибровке, которая является наиболее естественной для

подобных задач, в рамках КЭД возникает дополнительный вклад в полную вакуумную энергию системы, соответствующий прямому кулоновскому взаимодействию вакуумных плотностей заряда $\varrho_{VP}(\mathbf{r})$:

$$\mathcal{E}_{C,VP} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{\varrho_{VP}(\mathbf{r}) \varrho_{VP}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (2)$$

Этот вклад является прямым следствием соответствующего операторного выражения, возникающего при квантовании электромагнитного поля в кулоновской калибровке (см., например, [29, гл. 15], еще более подробное обсуждение этого вопроса приведено в монографии [30]). Таким образом, корректное выражение для полной вакуумной энергии системы в рассматриваемой задаче имеет вид

$$\mathcal{E}_{VP} = \mathcal{E}_{D,VP} + \mathcal{E}_{C,VP}. \quad (3)$$

Цель настоящей работы — исследовать полную вакуумную энергию системы (3) в закритической области для $Z > Z_{cr,1}$, уделяя особое внимание вкладу кулоновского члена $\mathcal{E}_{C,VP}$. Интерес к этому члену обусловлен двумя факторами. Во-первых, в закритической области $Z > Z_{cr,1}$ изменение вакуумной плотности заряда $\varrho_{VP}(\mathbf{r})$ происходит главным образом за счет формирования вакуумных оболочек, вклады от которых изменяют полный вакуумный заряд Q_{VP} . Без учета этих вкладов остаются слабые эффекты изменения плотности состояний нижнего континуума и эволюции дискретных уровней, которые не могут существенным образом изменить общую картину происходящих процессов. Во-вторых, поведение вклада от вакуумных оболочек значительно отличается от того, которое следовало бы ожидать из общих представлений. Вакуумная оболочка, возникающая после опускания очередного дискретного уровня в нижний континуум, становится отрицательно заряженной только после распада резонанса, сопровождаемого испусканием позитрона [13–15]¹. До этого момента вакуумная оболочка остается вакантной и не вносит вклада в $\varrho_{VP}(\mathbf{r})$. После перенормировки вклад в полную вакуумную энергию, обусловленный заряженными в результате испускания позитронов вакуумными оболочками, оказывается отрицательным, что является чисто квантовым эффектом, не наблюдаемым в классической электродинамике. Этот результат аналогичен эффекту Юлинга, при котором пространственное распределение плотности заряда в вакууме, индуцированное точечным кулоновским источником, противоречит классической картине [13–15]. И хотя этот вклад оказывается существенно меньше основной компоненты вакуумной энергии $\mathcal{E}_{D,VP}$, факт отрицательности надлежащим образом перенормированного члена $\mathcal{E}_{C,VP}^{ren}$ играет важную роль в механизме спонтанного излучения, особенно для значений заряда Z , незначительно превышающих первый критический заряд $Z_{cr,1}$, так как именно этот отрицательный вклад обеспечивает вакуумные позитроны дополнительной кинетической энергией, необходимой для их испускания с ненулевой вероятностью. Отметим

¹На данном этапе проблема сохранения лептонного числа намеренно не обсуждается. Предполагается, что при испускании позитрона соответствующее положительное лептонное число должно остаться в системе в форме пространственной плотности, локализованной в вакуумных оболочках. Если это не так, то либо закон сохранения лептонного числа в подобных процессах нарушается, либо испускание позитронов оказывается строго запрещенным. Однако в настоящее время нет никаких свидетельств того, что лептонное число может существовать в виде пространственной плотности.

также, что хотя неперенормированный вклад $\mathcal{E}_{C,VP}$ в полную вакуумную энергию также содержит отрицательные скачки, возникающие при каждом опускании дискретного уровня в нижний континуум, в целом он оказывается существенно положительным и возрастает с ростом Z , что только дополнительно усложнило бы условия энергетического баланса, необходимого для спонтанного излучения.

Для дальнейшего без потери общности достаточно рассмотреть задачу ДК во внешнем сферически-симметричном кулоновском поле, создаваемом равномерно заряженной сферой

$$V(r) = -Q \left(\frac{1}{R} \theta(R-r) + \frac{1}{r} \theta(r-R) \right) \quad (4)$$

или шаром

$$V(r) = -Q \left(\frac{3R^2 - r^2}{2R^3} \theta(R-r) + \frac{1}{r} \theta(r-R) \right). \quad (5)$$

Здесь и далее

$$Q = Z\alpha, \quad (6)$$

а радиус источника R принадлежит диапазону, ограниченному снизу значением

$$R_{\min}(Z) \simeq 1,2 (2,5 Z)^{1/3} \text{ фм}, \quad (7)$$

примерно соответствующим размеру сверхтяжелого ядра с зарядом Z , а сверху — значением R_{\max} порядка комптоновской длины волны электрона, поскольку на таких расстояниях эффекты поляризации вакуума становятся малыми поправками порядка $O(1/R)$.

Следует особо отметить, что в рассматриваемых эффектах поляризации вакуума параметр Q играет роль эффективной константы связи. Роль размера и формы кулоновского источника, также являющихся внешними параметрами, существенно отличается от роли Q , что проявляется в ряде важных вопросов, в частности, в процедуре перенормировки. Кроме того, для моделей равномерно заряженной сферы и шара (последняя более подходит на роль сверхтяжелого ядра или кластера, состоящего из тяжелых ионов) разница в рассматриваемых эффектах поляризации вакуума оказывается незначительной. Она проявляется главным образом в отношении вакуумных энергий — $\mathcal{E}_{VP, \text{ball}}/\mathcal{E}_{VP, \text{sphere}} \simeq 6/5$ для одних и тех же значений Z и R при условии, что радиус источника R достаточно близок к значению $R_{\min}(Z)$ [28]. При этом модель равномерно заряженной сферы позволяет провести большую часть вычислений в аналитическом виде, что является очевидным преимуществом. Для модели равномерно заряженного шара это невозможно, так как в этом случае отсутствуют точные аналитические решения задачи ДК, и поэтому необходимо использовать численные методы или специальные приближения [28].

Как и в других работах по рассматриваемой теме [1, 13–16, 31–35], вклад процессов с обменом виртуальными фотонами опускается. Далее везде, если это оговаривается отдельно, используется релятивистская система единиц $\hbar = m_e = c = 1$ и стандартное представление матриц Дирака. Конкретные расчеты, иллюстрирующие общие выводы, проводятся для значения $\alpha = 1/137,036$.

1. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наиболее эффективный непертурбативный подход к вычислению вакуумной плотности заряда $\varrho_{VP}(\mathbf{r})$ основан на методе Вихманна–Кролла (ВК) [31,32,36]. Отправной точкой является выражение для вакуумной плотности заряда

$$\varrho_{VP}(\mathbf{r}) = -\frac{|e|}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \psi_n(\mathbf{r})^\dagger \psi_n(\mathbf{r}) - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \psi_n(\mathbf{r})^\dagger \psi_n(\mathbf{r}) \right), \quad (8)$$

где $\epsilon_F = -1$ — уровень Ферми, которая в таких задачах с внешним кулоновским источником выбирается на пороге нижнего континуума, а ϵ_n и $\psi_n(\mathbf{r})$ — собственные значения и собственные функции соответствующей спектральной задачи ДК. Выражение (8) для вакуумной плотности заряда является прямым следствием швингеровской прескрипции для оператора фермионного тока

$$j_\mu(\mathbf{r}, t) = -\frac{|e|}{2} [\bar{\psi}(\mathbf{r}, t), \gamma_\mu \psi(\mathbf{r}, t)]. \quad (9)$$

В рассматриваемом случае весьма важным обстоятельством является то, что $\varrho_{VP}(\mathbf{r})$ оказывается не средним, а собственным значением оператора фермионной плотности заряда $j_0(\mathbf{r}, t)$, действующего на вакуумное состояние. Для этого достаточно перейти в картину Фарри, т. е. разложить фермионные поля по одночастичному базису

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} b_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-i\epsilon_n t} + \sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} d_n^\dagger \psi_n(\mathbf{r}) e^{-i\epsilon_n t}, \quad (10)$$

где

$$\{b_n, b_{n'}^\dagger\} = \delta_{nn'}, \quad \{d_n, d_{n'}^\dagger\} = \delta_{nn'}, \quad (11)$$

все остальные антикоммутаторы исчезают, а полный набор $\{\psi_n(\mathbf{r})\}$ выбран в соответствии с приведенными выше определениями. Представляя оператор плотности заряда в виде суммы его нормально упорядоченной формы и вакуумной плотности заряда, определяемой выражением (8), получим

$$j_0(\mathbf{r}, t) =: j_0(\mathbf{r}, t) : + \varrho_{VP}(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Поскольку в картине Фарри для вакуумного состояния $|\text{vac}\rangle$ выполняются соотношения

$$b_n |\text{vac}\rangle = d_n |\text{vac}\rangle = 0, \quad (13)$$

действие оператора (12) на него приводит к

$$j_0(\mathbf{r}, t) |\text{vac}\rangle = \varrho_{VP}(\mathbf{r}) |\text{vac}\rangle. \quad (14)$$

Таким образом, $\varrho_{VP}(\mathbf{r})$ действительно является собственным значением оператора плотности заряда на вакуумном состоянии. Этот результат уместно противопоставить свойствам классического волнового пакета, являющегося средним от оператора электромагнитного поля по когерентному состоянию с неопределенным числом фотонов, порождаемому классическим внешним источником. При этом как электрическая, так и магнитная компоненты волнового пакета имеют ненулевую дисперсию, создаваемую флуктуациями числа фотонов в каждой моде.

Для квадратичных по фермионным полям моделей, таких как КЭД, КХД и другие калибровочные теории, аналогичное утверждение справедливо и для вакуумной энергии. В КЭД это есть следствие того, что структура тока (9) требует следующего вида дираковского гамильтониана во внешнем электромагнитном поле [6, 14]

$$\mathcal{H}_D(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4i} \left\{ [\psi(\mathbf{r}, t)^\dagger, \boldsymbol{\alpha} \nabla \psi(\mathbf{r}, t)] + [\psi(\mathbf{r}, t), \nabla \psi(\mathbf{r}, t)^\dagger \boldsymbol{\alpha}] \right\} + \frac{1}{2} [\psi(\mathbf{r}, t)^\dagger, \beta \psi(\mathbf{r}, t)] + j_\mu(\mathbf{r}, t) A^\mu(\mathbf{r}, t). \quad (15)$$

Проводя выкладки, полностью аналогичные приведенным выше для тока, нетрудно прийти к соотношению

$$\mathcal{H}_D(\mathbf{r}, t) |vac\rangle = h_{D,VP}(\mathbf{r}) |vac\rangle, \quad (16)$$

где

$$h_{D,VP}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \epsilon_n \psi_n(\mathbf{r})^\dagger \psi_n(\mathbf{r}) - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \epsilon_n \psi_n(\mathbf{r})^\dagger \psi_n(\mathbf{r}) \right). \quad (17)$$

Однако в рамках используемого нами подхода плотность $h_{D,VP}(\mathbf{r})$ не позволяет напрямую применить метод ВК — работа с ней требует существенно более продвинутой техники расчетов.

Интегрирование соотношения (17) по всему пространству приводит к выражению для основной компоненты вакуумной энергии

$$\mathcal{E}_{D,VP} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < \epsilon_F} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geq \epsilon_F} \epsilon_n \right), \quad (18)$$

являющейся собственным значением дираковского гамильтониана, действующего на вакуумное состояние.

Вторая компонента вакуумной энергии — кулоновский член (2) — возникает из-за структуры гамильтониана электромагнитного поля

$$H_{EM} = \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{r} [\mathcal{E}^2 + \mathcal{H}^2], \quad (19)$$

где

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla A^0(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t), \quad \mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t). \quad (20)$$

Представляя электрическое поле в виде суммы продольной и поперечной компонент

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}_{||}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t), \quad (21)$$

где $\mathcal{E}_{||}(\mathbf{r}, t) = -\nabla A^0(\mathbf{r}, t)$, $\mathcal{E}_{\perp}(\mathbf{r}, t) = -\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) / \partial t$, и интегрируя по частям с учетом калибровочного условия $\nabla \mathbf{A} = 0$, получаем

$$H_{EM} = \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{r} \mathcal{E}_{||}^2 + \frac{1}{8\pi} \int d\mathbf{r} [\mathcal{E}_{\perp}^2 + \mathcal{H}^2], \quad (22)$$

первое слагаемое которого легко преобразуется в операторное выражение

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{j_0(\mathbf{r}, t) j_0(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (23)$$

Комбинируя его с (14), приходим к окончательному выражению для второй компоненты полной вакуумной энергии (3) — кулоновскому члену (2).

Чтобы исследовать поведение полной вакуумной энергии системы (3) в закритической области для $Z > Z_{\text{кр},1}$, уделяя особое внимание вкладу кулоновского члена $\mathcal{E}_{C,\text{VP}}$, прежде всего следует детально рассмотреть вакуумную плотность заряда (8) и вклад в нее от вакуумных оболочек.

2. ВАКУУМНАЯ ПЛОТНОСТЬ ЗАРЯДА В ФОРМАЛИЗМЕ ВК

Основное содержание метода ВК состоит в использовании для вакуумной плотности представления в виде контурных интегралов в комплексной плоскости по энергетической переменной от следа функции Грина соответствующей спектральной задачи ДК. В рассматриваемой задаче функция Грина удовлетворяет уравнению

$$[-i\alpha \nabla_{\mathbf{r}} + \beta + \mathbf{V}(\mathbf{r}) - \epsilon] G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (24)$$

Формальное решение уравнения (24) записывается в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon) = \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}')^\dagger}{\epsilon_n - \epsilon}. \quad (25)$$

Следуя [31], вакуумную плотность заряда можно выразить через интегралы по контурам $P(R_0)$ и $E(R_0)$ на первом листе римановой энергетической поверхности (рис. 1)

$$\varrho_{\text{VP}}(\mathbf{r}) = -\frac{|e|}{2} \lim_{R_0 \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{P(R_0)} d\epsilon \text{Tr} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon)|_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} + \frac{1}{2\pi i} \int_{E(R_0)} d\epsilon \text{Tr} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon)|_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \right). \quad (26)$$

Отметим, что входящая в это выражение функция Грина должна быть надлежащим образом регуляризована для того, чтобы предел $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ существовал, а интегралы по $d\epsilon$ сходились. Эта процедура подробно рассматривается ниже. На данном этапе будем считать, что все выражения содержат только регуляризованные функции Грина. Главное следствие этого предположения — равномерные асимптотики подынтегральных выражений в (26) на дугах большого круга при $|\epsilon| \rightarrow \infty$, что позволяет деформировать контуры $P(R_0)$ и $E(R_0)$, сводя их к отрезку мнимой оси $I(R_0)$. После этого можно перейти к пределу $R_0 \rightarrow \infty$ и получить выражение

$$\varrho_{\text{VP}}(\mathbf{r}) = |e| \left[\sum_{-1 \leq \epsilon_n < 0} |\psi_n(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{Tr} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; iy)|_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} \right], \quad (27)$$

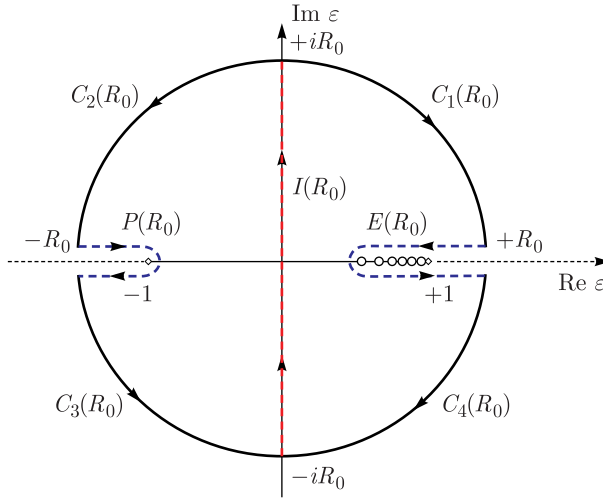


Рис. 1. Специальные контуры на первом листе римановой энергетической поверхности, используемые для представления вакуумной плотности заряда (8) в виде контурных интегралов. Направление обхода контуров находится в соответствии с (25)

где $\{\psi_n(\mathbf{r})\}$ — нормированные собственные функции отрицательных дискретных уровней $-1 \leq \epsilon_n < 0$, для которых здесь и далее принято обозначение

$$\psi_n(\mathbf{r})^\dagger \psi_n(\mathbf{r}) \equiv |\psi_n(\mathbf{r})|^2. \quad (28)$$

Представляя функцию Грина (25) в виде частичного разложения по $k = \pm(j + 1/2)$ [31, 32]

$$\text{Tr } G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon)|_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} = \sum_k \frac{|k|}{2\pi} \text{Tr } G_k(r, r'; \epsilon)|_{r' \rightarrow r}, \quad (29)$$

где радиальная функция Грина $G_k(r, r'; \epsilon)$ определяется как

$$\mathcal{H}_k(r) G_k(r, r'; \epsilon) = \frac{\delta(r - r')}{rr'}, \quad (30)$$

а радиальный гамильтониан задачи ДК имеет вид

$$\mathcal{H}_k(r) = \begin{pmatrix} V(r) + 1 - \epsilon & -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r - \frac{k}{r} \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r - \frac{k}{r} & V(r) - 1 - \epsilon \end{pmatrix}, \quad (31)$$

получим следующие выражения для членов частичного разложения $\varrho_{\text{VP}}(r)$:

$$\varrho_{\text{VP},k}(r) = \frac{|e||k|}{2\pi} \left[\sum_{-1 \leq \epsilon_{n,k} < 0} |\psi_{n,k}(r)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy \text{Tr } G_k(r, r'; iy)|_{r' \rightarrow r} \right], \quad (32)$$

где $\psi_{n,k}(r)$ — нормированные радиальные волновые функции с собственными значениями k и $\epsilon_{n,k}$ соответствующей радиальной задачи ДК. Используя свойства симметрии $G_k(r, r'; \epsilon)$, приведенные в [32], из (32) для суммы $\varrho_{\text{VP},|k|}(r)$ двух парциальных вакуумных плотностей заряда с противоположными знаками k находим

$$\varrho_{\text{VP},|k|}(r) = \frac{|e||k|}{2\pi} \left\{ \sum_{k=\pm|k|} \sum_{-1 \leq \epsilon_{n,k} < 0} |\psi_{n,k}(r)|^2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dy \operatorname{Re} [\operatorname{Tr} G_k(r, r'; iy)] \Big|_{r' \rightarrow r} \right\}, \quad (33)$$

что по построению является заведомо действительной величиной и нечетна по Z (в полном соответствии с теоремой Фарри).

3. ПЕРЕНОРМИРОВКА ВАКУУМНОЙ ПЛОТНОСТИ: МОТИВАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Общий результат, установленный в [32] через разложение $\varrho_{\text{VP}}(r)$ по степеням параметра $Q = Z\alpha$ (но при фиксированном значении радиуса источника R !)

$$\varrho_{\text{VP}}(\mathbf{r}) = \sum_{n=\text{odd}} Q^n \varrho_{\text{VP}}^{(n)}(\mathbf{r}), \quad (34)$$

состоит в том, что все расходимости $\varrho_{\text{VP}}(\mathbf{r})$ содержатся только в фермионной петле с двумя внешними концами, а все следующие порядки разложения по Q уже свободны от расходимостей (см. также [36] и цитируемую литературу). Это утверждение справедливо в размерностях 1+1 и 2+1 всегда, а в трехмерном случае — для сферически-симметричного внешнего потенциала. Оно было проверено прямыми вычислениями в рамках непертурбативного подхода для 1+1 в [5,6] и для 2+1 в [37–40]. На размерность 3+1 этот подход переносится с минимальными изменениями, так как структура парциальных функций Грина в двух- и трехмерном случаях одна и та же за исключением дополнительного множителя $1/r$ и замены $m_j \rightarrow k$. При этом ключевую роль играет сферическая симметрия кулоновского потенциала, так как сделанное выше утверждение можно доказать при использовании парциального разложения $\varrho_{\text{VP}}(r)$ для каждого его члена $\varrho_{\text{VP},|k|}(r)$, но не сразу для всего ряда в целом.

Данное обстоятельство уже обсуждалось ранее в работе [32], где было показано, что основная причина такого различия — разница в свойствах отдельных парциальных радиальных функций Грина G_k и всего ряда в целом. Во-первых, для $G_k(r, r'; \epsilon)$ существует предел $r' \rightarrow r$, в то время как полная функция Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \epsilon)$ расходится при $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$. При этом для вакуумной плотности заряда $\varrho_{\text{VP},|k|}^{(1)}(r)$, соответствующей первому порядку теории возмущений и линейной по Q , перестановка операции взятия предела $r' \rightarrow r$ и контурного интегрирования в (33) приводит к различным результатам.

С другой стороны, попытки прямого вычисления вакуумной плотности $\varrho_{\text{VP}}^{(3)}(\mathbf{r})$ посредством соотношения (27) приводят к неопределенности, возникающей при перестановке операции взятия предела $\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}$ и интегрирования по мнимой оси, в то время как при вычислении парциальных членов $\varrho_{\text{VP},|k|}^{(3)}(r)$ такой проблемы не возникнет.

кает. Таким образом, для регулярных сферически-симметричных внешних потенциалов перенормировка $\varrho_{\text{VP}}^{(3)}(r)$ осуществляется посредством ее вычисления в виде суммы парциальных вкладов $\varrho_{\text{VP},|k|}^{(3)}(r)$ без каких-либо дополнительных манипуляций.

В результате процедура перенормировки вакуумной плотности (8) фактически одинакова для всех трех пространственных измерений и осуществляется следующим образом. Во-первых, необходимо выделить в выражении (27) линейные по внешнему полю члены и заменить их на перенормированную пертурбативную плотность $\varrho_{\text{VP}}^{\text{PT}}(r)$ (соответствующую первому порядку диаграммной теории возмущений (ТВ)), рассчитанную для того же значения радиуса источника R . Для этой цели вводится парциальная компонента вакуумной плотности $\varrho_{\text{VP},|k|}^{(3+)}(r)$, определяемая следующим образом:

$$\begin{aligned} \varrho_{\text{VP},|k|}^{(3+)}(r) = & \\ = \frac{|e||k|}{2\pi} & \left\{ \sum_{k=\pm|k|} \sum_{-1 \leq \epsilon_{n,k} < 0} |\psi_{n,k}(r)|^2 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dy \operatorname{Re} \left[\operatorname{Tr} G_k(r, r; iy) - \operatorname{Tr} G_k^{(1)}(r; iy) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (35)$$

где $G_k^{(1)}(r; iy)$ — линейная по Q компонента парциальной функции Грина $G_k(r, r; iy)$, совпадающая с первым членом борновского ряда

$$G_k^{(1)} = G_k^{(0)}(-V)G_k^{(0)}; \quad (36)$$

$G_k^{(0)}$ — свободная функция Грина радиального уравнения Дирака с теми же k и ϵ . Компоненты $\varrho_{\text{VP},|k|}^{(3+)}(r)$ по построению содержат только нечетные степени Q , начиная с $n = 3$, а потому свободны от расходимостей. В то же время именно они ответственны за все нелинейные эффекты, возникающие при опускании дискретных уровней в нижний континуум.

Борновский член (36), необходимый для выделения нелинейной компоненты из полной вакуумной плотности, для внешнего потенциала $V(r)$ кулоновского типа имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} G_k^{(1)}(r; iy) = & -\frac{1}{r} \left[(1 - y^2) \left(K_{k-1/2}^2(\gamma r) \int_0^r dr' r' V(r') I_{k-1/2}^2(\gamma r') + \right. \right. \\ & \left. \left. + K_{k+1/2}^2(\gamma r) \int_0^r dr' r' V(r') I_{k+1/2}^2(\gamma r') + \right. \right. \\ & \left. \left. + I_{k-1/2}^2(\gamma r) \int_r^\infty dr' r' V(r') K_{k-1/2}^2(\gamma r') + I_{k+1/2}^2(\gamma r) \int_r^\infty dr' r' V(r') K_{k+1/2}^2(\gamma r') \right) + \right. \\ & \left. + (1 + y^2) \left(K_{k-1/2}^2(\gamma r) \int_0^r dr' r' V(r') I_{k+1/2}^2(\gamma r') + K_{k+1/2}^2(\gamma r) \int_0^r dr' r' V(r') I_{k-1/2}^2(\gamma r') + \right. \right. \\ & \left. \left. + I_{k-1/2}^2(\gamma r) \int_r^\infty dr' r' V(r') K_{k+1/2}^2(\gamma r') + I_{k+1/2}^2(\gamma r) \int_r^\infty dr' r' V(r') K_{k-1/2}^2(\gamma r') \right) \right], \end{aligned} \quad (37)$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — функции Инфельда и Макдональда соответственно, а

$$\gamma = \sqrt{1 + y^2}. \quad (38)$$

Для обоих рассматриваемых внешних потенциалов (4) и (5) все интегралы, входящие в выражение (37), вычисляются в аналитическом виде, но соответствующие выражения для борновского члена оказываются достаточно громоздкими. Явное выражение в случае потенциала (4) для s -канала, которое понадобится в дальнейшем, имеет следующий вид. Сначала введем ряд вспомогательных функций, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} a_1(y, r) &= \frac{\sinh [2\gamma r] - 2\gamma r}{2\pi\gamma^2}, & a_2(y, r) &= \frac{2 + 2(\gamma r)^2 - 2 \cosh [2\gamma r] + \gamma r \sinh [2\gamma r]}{2\pi r\gamma^3}, \\ c_1(y, r) &= \frac{\text{Chi} [2\gamma r] - \text{Chi} [2\gamma R] + \ln [R/r]}{\pi\gamma}, \\ c_2(y, r) &= \frac{1}{2\pi\gamma^3} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} + \frac{\cosh [2\gamma R]}{R^2} - \frac{\cosh [2\gamma r]}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma^2 (\text{Chi} [2\gamma R] - \text{Chi} [2\gamma r] - \ln [\gamma R] + \ln [\gamma r]) + 2\gamma \left(\frac{\sinh [2\gamma r]}{r} - \frac{\sinh [2\gamma R]}{R} \right) \right], \\ A_1(y, r) &= \theta(R - r) a_1(y, r)/R + (a_1(y, R)/R + c_1(y, r)) \theta(r - R), \\ A_2(y, r) &= \theta(R - r) a_2(y, r)/R + (a_2(y, R)/R + c_2(y, r)) \theta(r - R), \\ b_1(y, r) &= \pi [e^{-2\gamma r} - e^{-2\gamma R}] / 4\gamma^2, & b_2(y, r) &= \frac{R e^{2\gamma R} (2 + \gamma r) - \pi r e^{-2\gamma R} (2 + \gamma R)}{4Rr\gamma^3}, \\ d_1(y, r) &= \pi\Gamma [0, 2\gamma r] / 2\gamma, & d_2(y, r) &= \pi \frac{e^{-2\gamma r} (1 + 2\gamma r) / 2r^2 + \gamma^2 \text{Ei} [-2\gamma r]}{2\gamma^3}, \\ B_1(y, r) &= \theta(R - r) (b_1(y, r)/R + d_1(y, R)) + d_1(y, r) \theta(r - R), \\ B_2(y, r) &= \theta(R - r) (b_2(y, r)/R + d_2(y, R)) + d_2(y, r) \theta(r - R). \end{aligned} \quad (39)$$

В результате

$$\begin{aligned} \text{Tr } G_1^{(1)}(r; iy) &= \frac{Q}{r} \left[(1 - y^2) \left(K_{1/2}^2(\gamma r) A_1(y, r) + K_{3/2}^2(\gamma r) A_2(y, r) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + I_{1/2}^2(\gamma r) B_1(y, r) + I_{3/2}^2(\gamma r) B_2(y, r) \right) + (1 + y^2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(K_{1/2}^2(\gamma r) A_2(y, r) + K_{3/2}^2(\gamma r) A_1(y, r) + I_{1/2}^2(\gamma r) B_2(y, r) + I_{3/2}^2(\gamma r) B_1(y, r) \right) \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Совершенно аналогичным образом можно выполнить интегрирование по dr' в борновском члене (37) для любого значения $k > 1$ и получить соответствующее явное выражение, но с ростом k эти вычисления становятся все более громоздкими. В данной работе анализ ограничен s -каналом, который для рассматриваемого диапазона параметров источника вносит определяющий вклад. И хотя явные выражения (39), (40)

включают интегральные экспоненту и гиперболический косинус, с учетом доступных в настоящее время вычислительных возможностей их численное интегрирование по переменной dy , необходимое для выделения нелинейной компоненты $\varrho_{\text{VP},|k|}^{(3+)}(r)$ из полной парциальной вакуумной плотности, не представляет особых трудностей.

Поведение $\text{Tr } G_k^{(1)}(r; iy)$ для различных асимптотических режимов по обоим аргументам подробно рассмотрено в [41]. Из этих результатов для линейной по Q компоненты вакуумной плотности $\varrho_{\text{VP},|k|}^{(1)}(r)$

$$\varrho_{\text{VP},|k|}^{(1)}(r) = \frac{|e||k|}{\pi^2} \int_0^\infty dy \text{Tr } G_k^{(1)}(r; iy) \quad (41)$$

следует

$$\varrho_{\text{VP},|k|}^{(1)}(r) \rightarrow \frac{C_1(k)}{r}, \quad r \rightarrow 0, \quad (42)$$

$$\varrho_{\text{VP},|k|}^{(1)}(r) \rightarrow \frac{C_2(k)}{r^3}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (43)$$

где C_1, C_2 — некоторые положительные функции квантового числа углового момента k . Отметим, что $\varrho_{\text{VP},|k|}^{(1)}(r)$ не содержит вклада от дискретных уровней, так как последний является существенно нелинейным и проявляется только в компонентах $\varrho_{\text{VP},|k|}^{(3+)}(r)$. Прямым следствием асимптотики (43), в частности, является то обстоятельство, что линейная по Q компонента перенормированного интегрального вакуумного заряда

$$Q_{\text{VP}}^{(1)} = \int d\mathbf{r} \varrho_{\text{VP}}^{(1)}(\mathbf{r}) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \varrho_{\text{VP}}^{(1)}(r) \quad (44)$$

расходится.

Следующий факт, который необходимо отметить, — существенные различия в поведении как функции r компоненты $\varrho_{\text{VP},|k|}^{(1)}(r)$ и перенормированной пертурбативной плотности $\varrho_{\text{VP}}^{\text{PT}}(r)$. В частности, вычисление $\varrho_{\text{VP},1}^{(1)}(r)$ с использованием формул (39), (40) показывает, что она положительна для всех r , в то время как пертурбативная плотность имеет положительный пик в окрестности кулоновского источника и отрицательна вне нее (см., например, [15]). Поведение $\varrho_{\text{VP},1}^{(1)}(r)$ в s -канале показано на рис. 2 для двух значений заряда источника $Z = 200, 280$. Соответствующие радиусы кулоновского источника выбраны достаточно большими для того, чтобы детали

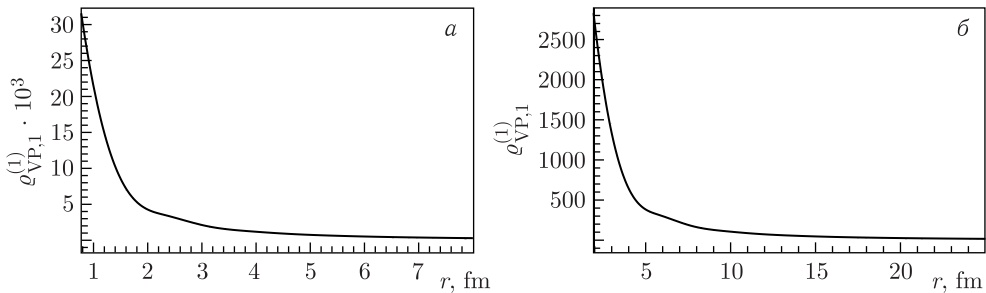


Рис. 2. Поведение $\varrho_{\text{VP},1}^{(1)}(Z, r)$ при: $Z = 200$ и $R = 0,1$ (а); $Z = 280$ и $R = 0,25$ (б)

нелинейного поведения плотности заряда на промежуточном диапазоне по r (на котором происходит переход от асимптотики вида $O(1/r)$ при $r \rightarrow 0$ к асимптотике вида $O(1/r^3)$ при $r \rightarrow \infty$) были хорошо различимы.

В результате корректно перенормированная вакуумная плотность заряда $\varrho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(r)$ имеет вид¹

$$\varrho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(r) = \varrho_{\text{VP}}^{\text{PT}}(r) + \sum_{k=1}^{\infty} \varrho_{\text{VP},|k|}^{(3+)}(r). \quad (45)$$

Пертурбативная вакуумная плотность $\varrho_{\text{VP}}^{\text{PT}}(r)$ находится из первого порядка теории вероятности (ТВ) согласно общепринятой схеме [15, 42–44]

$$\varrho_{\text{VP}}^{\text{PT}}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \Delta A_{\text{VP},0}^{\text{PT}}(\mathbf{r}), \quad (46)$$

где

$$A_{\text{VP},0}^{\text{PT}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \Pi_R(-\mathbf{q}^2) \tilde{A}_0(\mathbf{q}), \quad \tilde{A}_0(\mathbf{q}) = \int dr' e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}'} A_0^{\text{ext}}(\mathbf{r}'). \quad (47)$$

Поляризационная функция $\Pi_R(q^2)$, входящая в (47), вводится соотношением $\Pi_R^{\mu\nu}(q) = (q^\mu q^\nu - g^{\mu\nu} q^2) \Pi_R(q^2)$ и безразмерна. В рассматриваемом адиабатическом случае $q^0 = 0$ и явное выражение для $\Pi_R(-\mathbf{q}^2)$ принимает вид

$$\Pi_R(-\mathbf{q}^2) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 d\beta \beta(1-\beta) \ln \left[1 + \beta(1-\beta) \frac{\mathbf{q}^2}{m^2 - i\epsilon} \right] = \frac{\alpha}{\pi} S(|\mathbf{q}|/m), \quad (48)$$

где

$$S(x) = -\frac{5}{9} + \frac{4}{3x^2} + (x^2 - 2) \sqrt{x^2 + 4} \ln \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)/(\sqrt{x^2 + 4} - x)}{3x^3}, \quad (49)$$

со следующей инфракрасной асимптотикой

$$S(x) \rightarrow \frac{x^2}{15} - \frac{x^4}{140} + O(x^6), \quad x \rightarrow 0. \quad (50)$$

Прямым следствием процедуры перенормировки (45) является то, что она гарантирует обращение в нуль полного вакуумного заряда

$$Q_{\text{VP}}^{\text{ren}} = \int d\mathbf{r} \varrho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(\mathbf{r}) \quad (51)$$

в докритической области $Z < Z_{\text{cr},1}$. Фактически это является подтверждением предположения о том, что при равномерно убывающем на пространственной бесконечности внешнем поле, без специальных граничных условий или нетривиальной топологии

¹Для точечного источника сходимость частичного разложения в (45) доказывается в оригинальной работе Вихманна и Кролла [31]. Влияние на эту сходимость конечного размера источника подробно обсуждается в [32]. Для рассматриваемой задачи она является следствием сходимости частичного разложения для $\mathcal{E}_{\text{VP}}^{\text{ren}}$, что было показано в работе [28].

полевого многообразия, в докритической области $Z < Z_{\text{кр},1}$ правильно перенормированный интегральный вакуумный заряд должен быть нулевым, а эффекты поляризации вакуума могут только исказить его пространственное распределение. Следует, однако, заметить, что это не теорема, а лишь правдоподобное утверждение, которое в каждом конкретном случае должно перепроверяться прямым вычислением.

Для рассматриваемой задачи справедливость этого утверждения можно показать следующим образом. Прежде всего, следует отметить, что

$$Q_{\text{VP}}^{\text{PT}} \equiv 0. \quad (52)$$

Это соотношение есть прямое следствие общего КЭД-перенормировочного условия для поляризационной функции $\Pi_R(q^2) \sim q^2$ при $q \rightarrow 0$ (в рассматриваемом случае это условие непосредственно следует из асимптотики (50)). Для доказательства (52) рассмотрим статическое уравнение для потенциала $A_0(\mathbf{q})$, создаваемого внешней плотностью заряда $\varrho_{\text{ext}}(\mathbf{q})$, в импульсном пространстве (с точностью до множителей типа 2π и общего знака)

$$\left(\mathbf{q}^2 - \tilde{\Pi}_R(-\mathbf{q}^2) \right) A_0(\mathbf{q}) = \varrho_{\text{ext}}(\mathbf{q}), \quad (53)$$

где $\tilde{\Pi}_R(q^2)$ — поляризационный оператор в нормальной форме с размерностью $[q^2]$, вводимый соотношением $\Pi_R^{\mu\nu}(q) = (g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu / q^2) \tilde{\Pi}_R(q^2)$. В рамках ТВ следует считать $\tilde{\Pi}_R(q) \ll q^2$, поэтому потенциал $A_0(\mathbf{q})$ можно представить в виде разложения

$$A_0(\mathbf{q}) = A^{(0)}(\mathbf{q}) + A^{(1)}(\mathbf{q}) + \dots \quad (54)$$

Классическая часть потенциала $A^{(0)}(\mathbf{q})$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{q}^2 A^{(0)}(\mathbf{q}) = \varrho_{\text{ext}}(\mathbf{q}) \quad (55)$$

и определяет внешний потенциал $A_0^{\text{ext}}(\mathbf{r})$, а первая квантовая поправка — соответственно уравнению

$$\mathbf{q}^2 A^{(1)}(\mathbf{q}) = \tilde{\Pi}_R(-\mathbf{q}^2) A^{(0)}(\mathbf{q}). \quad (56)$$

Правая часть (56) с точностью до множителя $1/4\pi$ представляет собой пертурбативную вакуумную плотность $\varrho_{\text{VP}}^{\text{PT}}(\mathbf{q})$. Переходя в координатное представление, получим (с точностью до множителей типа 2π)

$$\varrho_{\text{VP}}^{\text{PT}}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \tilde{\Pi}_R(-\mathbf{q}^2) A^{(0)}(\mathbf{q}) = \int d\mathbf{r}' \tilde{\Pi}_R(\mathbf{r} - \mathbf{r}') A_0^{\text{ext}}(\mathbf{r}'). \quad (57)$$

Интегрирование (57) по всему пространству приводит к следующему выражению для интегрального пертурбативного вакуумного заряда $Q_{\text{VP}}^{\text{PT}}$:

$$Q_{\text{VP}}^{\text{PT}} = \int d\mathbf{q} \delta(\mathbf{q}) \tilde{\Pi}_R(-\mathbf{q}^2) A^{(0)}(\mathbf{q}). \quad (58)$$

С учетом перенормировочного условия для $\tilde{\Pi}_R(q^2)$ из (58) следует, что $Q_{\text{VP}}^{\text{PT}} = 0$ в тех случаях, когда внешний потенциал $A_0^{\text{ext}}(\mathbf{q})$ в импульсном пространстве при $|\mathbf{q}| \rightarrow 0$

имеет сингулярность не сильнее, чем $O(1/|\mathbf{q}|^4)$ (в трехмерном случае) или $O(1/|\mathbf{q}|^3)$ (для размерности $2+1$). Для рассматриваемых потенциалов кулоновского типа в размерностях $2+1$ и $3+1$ $A_0^{\text{ext}}(\mathbf{q})$ ведет себя как $O(1/|\mathbf{q}|)$ и $O(1/\mathbf{q}^2)$ соответственно. В размерности $1+1$ для потенциалов, аналогичных (4), $A_0^{\text{ext}}(\mathbf{q})$ имеет лишь логарифмическую особенность. Таким образом, для потенциалов вида (4), (5) во всех случаях выполняется тождество $Q_{\text{VP}}^{\text{PT}} \equiv 0$.

Однако вне рамок первого порядка ТВ и для всей докритической области, когда из-за наличия отрицательных дискретных уровней зависимость $\varrho_{\text{VP}}(\mathbf{r})$ от внешнего поля уже не может быть описана рядом ТВ, аналогичным (54), вопрос о том, исчезает ли $Q_{\text{VP}}^{\text{ren}}$, требует существенно более детального анализа.

Прямая проверка показывает, что вклад от $\varrho_{\text{VP}}^{(3+)}$ в $Q_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ при $Z < Z_{\text{cr},1}$ также обращается в нуль. В размерности $1+1$ это утверждение можно доказать аналитически, а в размерности $2+1$ из-за сложности выражений, входящих в $\rho_{\text{VP},|m_j|}^{(3+)}(r)$, провести такую проверку в чисто аналитическом виде уже не удастся. Однако ее вполне надежно можно выполнить с помощью комбинации аналитических и численных методов (см. [37], прил. В). Этот подход переносится на размерность $3+1$ с минимальными изменениями, так как структура парциальных функций Грина в дву- и трехмерном случаях одна и та же за исключением дополнительного множителя $1/r$ и замены $m_j \rightarrow k$. Более того, достаточно убедиться в исчезновении полного вакуумного заряда $Q_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ не во всей докритической области, а лишь при отсутствии отрицательных дискретных уровней. При их наличии исчезновение полного вакуумного заряда при $Z < Z_{\text{cr},1}$ следует из независящих от модели аргументов, в основе которых лежит исходное выражение для вакуумной плотности (8). Из (8) следует, что изменение интегрального заряда $Q_{\text{VP}}^{\text{ren}}$ возможно только при $Z > Z_{\text{cr},1}$, когда дискретные уровни достигают нижнего континуума. Один из возможных способов доказать это утверждение основан на детальном анализе поведения входящего в исходное выражение (32) для $\varrho_{\text{VP},k}(r)$ интеграла по мнимой оси

$$I_k(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\epsilon \text{Tr} G_k(r, r; \epsilon), \quad (59)$$

при такой инфинитезимальной вариации параметров внешнего источника, когда изначально положительный, бесконечно близкий к началу координат дискретный уровень $\epsilon_{n,k}$ становится отрицательным. Тогда соответствующий полюс функции Грина претерпевает бесконечно малое смещение вдоль действительной оси и также пересекает ось ординат, что соответствует изменению $I_k(r)$, равному значению вычета в точке $\epsilon = 0$:

$$\Delta I_k(r) = -|\psi_{n,k}(r)|^2 \Big|_{\epsilon_{n,k}=0}. \quad (60)$$

Подробности вычисления см. на рис. 3 с учетом определения функции Грина (25).

Таким образом, с учетом кратности вырождения дискретных уровней в сферически-симметричном случае, вклад $I_k(r)$ в полный вакуумный заряд уменьшается на $2|e||k|$ при каждом появлении отрицательного дискретного уровня $\epsilon_{n,k}$. Пока этот отрицательный уровень существует, скачок вакуумного заряда компенсируется соответствующим членом, входящим в сумму по всем отрицательным дискретным уровням

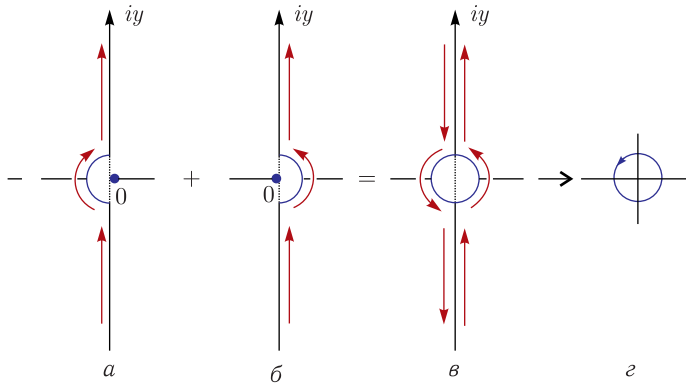


Рис. 3. Демонстрация того, что происходит с интегралом по мнимой оси (59) при переходе полюса функции Грина, лежащего на действительной оси, через начало координат

в выражении (32). Последний, кроме того, обеспечивает непрерывность вакуумной плотности заряда при пересечении уровнем $\epsilon_{n,k}$ нулевой точки $\epsilon = 0$. Однако, как только этот уровень достигнет нижнего континуума, полный вакуумный заряд изменится в точности на величину $(-2|e||k|)$.

Следует специально отметить, что этот эффект является существенно непertурбативным и полностью содержится в $\varrho_{\text{VP}}^{(3+)}$, а $\varrho_{\text{VP}}^{\text{PT}}$ никак в этом не участвует и по-прежнему вносит чисто нулевой вклад в полный заряд. Таким образом, в рассматриваемой задаче индуцированный заряд вакуума после перенормировки оказывается ненулевым только при $Z > Z_{\text{cr},1}$ вследствие непertурбативных эффектов поляризации вакуума, обусловленных опусканием дискретных уровней в нижний континуум, что находится в полном соответствии с работами [1, 13–15, 36].

В результате поведение перенормированной с помощью выражения (45) вакуумной плотности в непertурбативной области оказывается именно таким, какого следует ожидать из общих представлений о структуре электрон-позитронного вакуума при $Z > Z_{\text{cr}}$. Более того, оно становится реперной точкой для всей процедуры перенормировки и совместно с принципом минимального вычитания позволяет устранить неизбежную неоднозначность в выделении расходящейся части исходного выражения для $\varrho_{\text{VP}}(\mathbf{r})$. Данный факт будет использован в дальнейшем при перенормировке вакуумной энергии.

Более детальная картина изменений величины $\varrho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(r)$ в закритической области $Z > Z_{\text{cr},1}$ вполне аналогична картине, рассмотренной в работах [1, 13–15] на основе формализма Фано для автоионизационных процессов в атомной физике [15, 45]. Основной результат состоит в том, что, когда дискретный уровень $\psi_\nu(\mathbf{r})$ пересекает границу нижнего континуума, изменение вакуумной плотности имеет вид

$$\Delta\varrho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(\mathbf{r}) = -|e| \times |\psi_\nu(\mathbf{r})|^2. \tag{61}$$

Здесь следует отметить, что в оригинальном подходе [45] рассматривается непосредственно изменение плотности состояний $n(\mathbf{r})$, так что изменение индуцированной плотности заряда (61) является просто следствием соотношения $\varrho(\mathbf{r}) = -|e|n(\mathbf{r})$. Такой скачок в вакуумной плотности заряда происходит для каждого опустившегося

в нижний континуум дискретного уровня с уникальным набором квантовых чисел $\{\nu\}$. В частности, в рассматриваемой задаче каждый $2|k|$ -кратно вырожденный дискретный уровень при опускании в нижний континуум вызывает скачок полного вакуумного заряда величиной $(-2|e||k|)$. Другие величины, в том числе лептонное число, должны вести себя аналогичным образом. Следует, однако, учитывать, что формализм Фано использует ряд приближений. На самом деле, формула (61) является точной только в непосредственной окрестности соответствующего Z_{cr} , что явно продемонстрировано конкретными примерами для систем $1 + 1$ и $2 + 1$ в [5, 6, 37, 39, 46] и ниже для случая $3 + 1$.

Как и в работе [28], приводятся результаты для $\varrho_{VP}^{ren}(r)$ в модели заряженной сферы (4) на интервале $100 < Z < 300$, причем численное значение коэффициента в соотношении (7) выбрано следующим образом¹:

$$R_{\min}(Z) = 1,228935 (2,5 Z)^{1/3} \text{ фм.} \quad (62)$$

Для потенциала (4) соответствующие парциальные функции Грина могут быть явно записаны в терминах функций Бесселя и вырожденных гипергеометрических функций, что существенно упрощает вычисление интегралов по мнимой оси в выражении (33). Соответствующие явные аналитические формулы для $\text{Tr } G_k(r, r'; iy)$ приведены в работе [32].

На интервале $100 < Z < 300$ в нижний континуум опускаются четыре дискретных уровня из s -канала: $1s_{1/2}$ при $Z = 173,61$, $2p_{1/2}$ при $Z = 188,55$, $2s_{1/2}$ при $Z = 244,256$ и $3p_{1/2}$ при $Z = 270,494$. Соответствующие значения критических зарядов для обеих четностей (\pm) находятся из уравнения

$$\begin{aligned} & 2\sqrt{Q^2 - 2QR} K_{2i\eta_k}(\sqrt{8QR}) J_{\pm\mp} \\ & \mp \left[\sqrt{2QR} \left(K_{1+2i\eta_k}(\sqrt{8QR}) + K_{1-2i\eta_k}(\sqrt{8QR}) \right) \pm 2k K_{2i\eta_k}(\sqrt{8QR}) \right] J_{\mp} = 0, \end{aligned} \quad (63)$$

в котором $K_\nu(z)$ — функция Макдональда и

$$\eta_k = \sqrt{Q^2 - k^2}, \quad J_{\pm} = J_{k\pm 1/2}(\sqrt{Q^2 - 2QR}). \quad (64)$$

Рис. 4, 5 демонстрируют поведение непертурбативной компоненты вакуумной плотности заряда $\varrho_{VP,1}^{(3+)}(r)$, в частности, скачки вакуумной плотности, возникающие при каждом опускании дискретного уровня в нижний континуум. Прямые вычисления подтверждают, что соответствующие скачки полного вакуумного заряда в точности равны $(-2|e||k|)$. Более того, пространственное распределение скачков вакуумной плотности в точности совпадает с профилем $|\psi_\nu(r)|^2$ дискретных уровней на границе нижнего континуума, умноженным на коэффициент $(-2|e||k|)$. Графики нормированных на единицу радиальных функций $|\psi_\nu(r)|^2$ (для одной из двух возможных проекций спина) приведены на рис. 6.

¹При таком выборе нижний уровень $1s_{1/2}$ для модели заряженного шара при $Z = 170$ имеет энергию $\epsilon_{1s} = -0,99999$. Кроме того, выбранное значение коэффициента достаточно близко к значению 1,23, которое обычно используется в моделях тяжелых ядер.

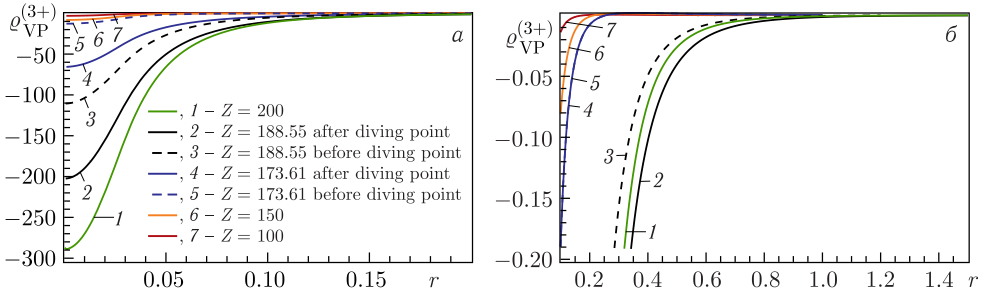


Рис. 4. Поведение $q_{VP}^{(3+)}(Z, r)$ в s -канале, которое при рассматриваемых Z доминирует и дает более чем 99% во все исследуемые эффекты поляризации вакуума для: а) диапазона $0 < r < 0,2$, на котором она меняется наиболее быстро; б) для диапазона $0,1 < r < 1,5$, на котором ее поведение практически совпадает с асимптотикой

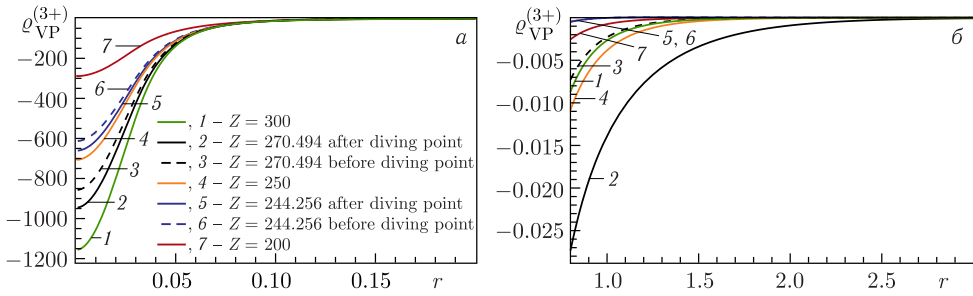


Рис. 5. Поведение $q_{VP}^{(3+)}(Z, r)$ в s -канале, которое при рассматриваемых Z доминирует и дает более чем 99% во все исследуемые эффекты поляризации вакуума для: а) диапазона $0 < r < 0,2$, на котором она меняется наиболее быстро; б) для диапазона $0,8 < r < 3,0$, на котором ее поведение практически совпадает с асимптотикой

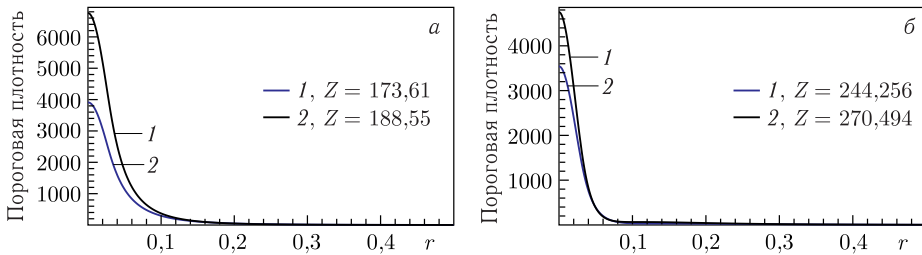


Рис. 6 (цветной в электронной версии). Нормированные функции $|\psi_\nu(r)|^2$ дискретных уровней (для одной проекции спина) на границе нижнего континуума при: а) $\nu = 1s, 2p$; б) $\nu = 2s, 3p$. Цвета $|\psi_{1s,2s}(r)|^2$ и $|\psi_{2p,3p}(r)|^2$ выбраны так, чтобы совпадать с цветами графиков соответствующих вакуумных плотностей для $1s, 2s$ (голубой, 1) и $2p, 3p$ (черный, 2)

Таким образом, наиболее корректный способ вычисления $q_{VP}^{ren}(\mathbf{r})$ для всех областей по Z состоит в использовании исходного перенормированного выражения (45) с последующей проверкой ожидаемого целочисленного значения индуцированного заряда Q_{VP}^{ren} через прямое интегрирование $q_{VP}^{ren}(\mathbf{r})$.

4. ПЕРЕНОРМИРОВКА ВАКУУМНОЙ ЭНЕРГИИ

Вычисление перенормированной энергии поляризации моря Дирака для таких задач с внешним сферически-симметричным кулоновским потенциалом подробно рассмотрено в работах [6, 28, 47, 48]. Исходное выражение для $\mathcal{E}_{D,VP}$, согласованное с плотностью $\varrho_{VP}(\mathbf{r})$, которая исчезает при отсутствии внешних полей, имеет вид

$$\mathcal{E}_{D,VP} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n < -1} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geq -1} \epsilon_n + \sum_{-1 \leq \epsilon_n < 1} 1 \right)_A - \frac{1}{2} \left(\sum_{\epsilon_n \leq -1} \epsilon_n - \sum_{\epsilon_n \geq 1} \epsilon_n \right)_0, \quad (65)$$

где нижний индекс A обозначает ненулевое внешнее поле A_{ext} , а индекс 0 соответствует свободному случаю $A_{\text{ext}} = 0$.

Далее следует выделить в (65) по отдельности вклады от дискретного и непрерывного спектров, а затем для разности интегралов по непрерывному спектру

$$\left(\int d\mathbf{q} \sqrt{q^2 + 1} \right)_A - \left(\int d\mathbf{q} \sqrt{q^2 + 1} \right)_0$$

использовать известный прием, представляющий эту разность в виде интеграла от фазы упругого рассеяния $\delta_k(q)$ (см. [6, 28, 49–51] и цитируемую там литературу). Окончательный ответ для $\mathcal{E}_{D,VP}(Z, R)$ в виде парциального разложения по угловому числу k имеет вид [28]

$$\mathcal{E}_{D,VP}(Z, R) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_{D,VP,k}(Z, R), \quad (66)$$

где

$$\mathcal{E}_{D,VP,k}(Z, R) = k \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{q dq}{\sqrt{q^2 + 1}} \delta_{\text{tot}}(k, q) + \sum_{\pm} \sum_{-1 \leq \epsilon_{n,\pm k} < 1} (1 - \epsilon_{n,\pm k}) \right). \quad (67)$$

Входящая в выражение (67) величина $\delta_{\text{tot}}(k, q)$ представляет собой суммарный фазовый сдвиг при данном значении волнового числа q и углового числа $\pm k$, включающий вклады от состояний рассеяния из верхнего и нижнего континуумов обеих четностей для радиальной задачи ДК с гамильтонианом (31). В слагаемом, соответствующем вкладу дискретного спектра в $\mathcal{E}_{D,VP,k}(Z, R)$, дополнительная сумма \sum_{\pm} учитывает вклад уровней с разной четностью.

Такой подход к вычислению $\mathcal{E}_{D,VP}(Z, R)$ оказывается весьма эффективным, поскольку для внешних потенциалов вида (4), (5) каждый парциальный член в выражении для $\mathcal{E}_{D,VP}(Z, R)$ оказывается сразу конечным. Это обусловлено тем, что $\delta_{\text{tot}}(k, q)$ ведет себя как в ИК-, так и в УФ-пределах по переменной q гораздо лучше, чем каждая из упругих фаз по отдельности. А именно, $\delta_{\text{tot}}(k, q)$ при $q \rightarrow 0$ имеет конечный предел, а при $q \rightarrow \infty$ ведет себя как $O(1/q^3)$. В результате фазовый интеграл в (67) всегда сходится. Кроме того, $\delta_{\text{tot}}(k, q)$ по построению автоматически будет четной функцией внешнего поля. В свою очередь, во вкладе связанных состояний в $\mathcal{E}_{D,VP,k}$

точка сгущения $\epsilon_{n,\pm k} \rightarrow 1$ всегда является регулярной, поскольку $1 - \epsilon_{n,\pm k} \sim O(1/n^2)$ при $n \rightarrow \infty$. Это обстоятельство позволяет обойтись без промежуточной регуляризации кулоновской асимптотики внешнего потенциала при $r \rightarrow \infty$, что существенно упрощает все дальнейшие вычисления.

В случае $\mathcal{E}_{D,VP}(Z, R)$ расходимость теории проявляется в расходимости частичного ряда (66) [28]. Из этого следует необходимость его регуляризации и последующей перенормировки, хотя каждое отдельное частичное слагаемое $\mathcal{E}_{D,VP,k}(Z, R)$ само по себе уже сразу конечно без каких-либо дополнительных манипуляций. Необходимость перенормировки через фермионную петлю следует также из анализа свойств ϱ_{VP} , проведенного в разд. 3, который показывает, что без такой перенормировки интегральный вакуумный заряд не будет иметь ожидаемого целочисленного значения в единицах $(-2|e|)$. По сути, свойства ϱ_{VP} играют здесь роль контролера, обеспечивающего выполнение необходимых физических условий для корректного описания эффектов поляризации вакуума вне рамок теории возмущений, которые не отслеживаются при вычислении $\mathcal{E}_{D,VP}$ через исходные соотношения (1), (65).

Таким образом, в полной аналогии с перенормировкой вакуумной плотности заряда (45) необходимо перейти к перенормированной $\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{ren}}(Z, R)$ посредством соотношения

$$\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{ren}}(Z, R) = \sum_{k=1} \mathcal{E}_{D,VP,k}^{\text{ren}}(Z, R), \quad (68)$$

где

$$\mathcal{E}_{D,VP,k}^{\text{ren}}(Z, R) = \mathcal{E}_{D,VP,k}(Z, R) + \zeta_{D,k}(R)Z^2, \quad (69)$$

а перенормировочные коэффициенты $\zeta_{D,k}(R)$ определены следующим образом:

$$\zeta_{D,k}(R) = \lim_{Z_0 \rightarrow 0} \left[\frac{\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{PT}}(Z_0) \delta_{k,1} - \mathcal{E}_{D,VP,k}(Z_0)}{Z_0^2} \right]_R. \quad (70)$$

Основная суть процедуры (68)–(70) состоит в выделении (при фиксированном R !) расходящихся квадратичных по Q компонент из неперенормированных частичных слагаемых $\mathcal{E}_{D,VP,k}(Z, R)$ разложения (66) и замены их на перенормированные $\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{PT}} \delta_{k,1}$, найденные в рамках пертурбативной ТВ. При этом автоматически обеспечиваются как сходимость всего частичного ряда (68), так и корректное значение предела $\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{ren}}(Z, R)$ при $Z \rightarrow 0$ и фиксированном R .

Выражение для пертурбативного члена $\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{PT}} \delta_{k,1}$ следует из общего соотношения для первого порядка ТВ [42–44]:

$$\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{PT}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \varrho_{VP}^{\text{PT}}(\mathbf{r}) A_0^{\text{ext}}(\mathbf{r}), \quad (71)$$

где $\varrho_{VP}^{\text{PT}}(\mathbf{r})$ — пертурбативная вакуумная плотность, определяемая соотношениями (46)–(49). Подставляя (46), (47) в (71), получим

$$\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{PT}} = \frac{1}{64\pi^4} \int d\mathbf{q} \mathbf{q}^2 \Pi_R(-\mathbf{q}^2) \left| \int d\mathbf{r} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} A_0^{\text{ext}}(\mathbf{r}) \right|^2. \quad (72)$$

Следует отметить, что в силу строгой положительности функции $S(x)$, определяемой соотношениями (48), (49), пертурбативная вакуумная энергия является строго положительной величиной.

Для случая сферически-симметричного потенциала $A_0^{\text{ext}}(\mathbf{r}) = A_0(r)$ пертурбативная вакуумная энергия принадлежит s -каналу, чему соответствует множитель $\delta_{k,1}$ в (70), и имеет вид

$$\mathcal{E}_{D,\text{VP}}^{\text{PT}} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dq q^4 \Pi_R(-q^2) \left(\int_0^\infty r^2 dr j_0(qr) A_0(r) \right)^2. \quad (73)$$

Из (73) для пертурбативной вакуумной энергии в модели заряженной сферы следует

$$\mathcal{E}_{D,\text{VP}, \text{sphere}}^{\text{PT}} = \frac{Q^2}{2\pi R} \int_0^\infty \frac{dq}{q} S\left(\frac{q}{m}\right) J_{1/2}^2(qR), \quad (74)$$

а в модели шара

$$\mathcal{E}_{D,\text{VP}, \text{ball}}^{\text{PT}} = \frac{9Q^2}{2\pi R^3} \int_0^\infty \frac{dq}{q^3} S\left(\frac{q}{m}\right) J_{3/2}^2(qR). \quad (75)$$

Для значений радиуса источника R , достаточно близких к $R_{\min}(Z)$ и удовлетворяющих условию

$$\ln(1/2mR) \gg 1, \quad (76)$$

интегралы в (74), (75) вычисляются аналитически [14]:

$$\mathcal{E}_{D,\text{VP}, \text{sphere}}^{\text{PT}} = \frac{Q^2}{3\pi R} \left[\ln\left(\frac{1}{2mR}\right) - \gamma_E + \frac{1}{6} \right] \quad (77)$$

для модели сферы и

$$\mathcal{E}_{D,\text{VP}, \text{ball}}^{\text{PT}} = \frac{2Q^2}{5\pi R} \left[\ln\left(\frac{1}{2mR}\right) - \gamma_E + \frac{1}{5} \right] \quad (78)$$

для модели шара. В этом случае отношение

$$\frac{\mathcal{E}_{D,\text{VP}, \text{ball}}^{\text{PT}}}{\mathcal{E}_{D,\text{VP}, \text{sphere}}^{\text{PT}}} \simeq \frac{6}{5} \quad (79)$$

точно воспроизводит соотношение классических электростатических энергий равномерно заряженных шара $3Z^2\alpha/5R$ и сферы $Z^2\alpha/2R$. В рассматриваемом случае, однако, условие (76) является слишком жестким, поэтому $\mathcal{E}_{D,\text{VP}}^{\text{PT}}$ находится численными методами непосредственно из исходных интегральных представлений. На рис. 7 показано поведение $\mathcal{E}_{D,\text{VP}}^{\text{ren}}(Z)$ как функции Z при $R = R_{\min}(Z)$ для модели сферы.

Перенормировка кулоновского члена $\mathcal{E}_{C,\text{VP}}(Z, R)$ полностью аналогична таковой для вакуумной плотности заряда и $\mathcal{E}_{D,\text{VP}}(Z, R)$. Важно отметить, что она ни в коем случае не предполагает прямой замены $\varrho_{\text{VP}}(\mathbf{r}) \rightarrow \varrho_{\text{VP}}^{\text{ren}}(\mathbf{r})$ в выражении (2). Вместо этого необходимо следовать общей схеме вычитания (при фиксированном R !) квадратичной по параметру Q компоненты из исходного выражения (2) с последующей

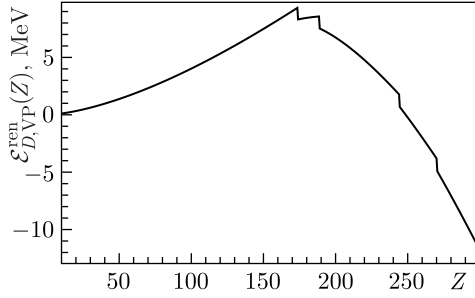


Рис. 7. $\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{ren}}(Z)$ для потенциала (4) при $R = R_{\min}(Z)$ в диапазоне $10 < Z < 300$

заменой на соответствующий пертурбативный вклад. Это означает, что перенормированный кулоновский член должен определяться следующим образом:

$$\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z, R) = \mathcal{E}_{C,VP}(Z, R) + \zeta_C(R)Z^2. \quad (80)$$

Перенормировочный коэффициент $\zeta_C(R)$ находится через соотношение

$$\zeta_C(R) = \lim_{Z_0 \rightarrow 0} \left[\frac{\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{PT}}(Z_0) - \mathcal{E}_{C,VP}(Z_0)}{Z_0^2} \right]_R, \quad (81)$$

где

$$\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{PT}} = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{\varrho_{VP}^{\text{PT}}(\mathbf{r}) \varrho_{VP}^{\text{PT}}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \quad (82)$$

а $\varrho_{VP}^{\text{PT}}(\mathbf{r})$ определяется выражениями (46)–(49).

Такой подход обеспечивает перенормировку кулоновского члена, полностью согласованную с перенормировками $\varrho_{VP}(\mathbf{r})$ и $\mathcal{E}_{D,VP}$ за счет использования той же процедуры вычитания, а также корректное значение предела $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z, R)$ при $Z \rightarrow 0$ и фиксированном R . Выражение (80) можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z, R) = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{\varrho_{VP}^{\text{PT}}(\mathbf{r}) \varrho_{VP}^{\text{PT}}(\mathbf{r}') - \varrho_{VP}^{(1)}(\mathbf{r}) \varrho_{VP}^{(1)}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{\varrho_{VP}(\mathbf{r}) \varrho_{VP}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (83)$$

Наибольший интерес представляет тот факт, что в закритической области борновская компонента $\varrho_{VP}^{(1)}$ оказывается гораздо больше пертурбативной ϱ_{VP}^{PT} , вследствие чего возникает весьма специфический эффект — вакуумные оболочки, заряды которых имеют один и тот же знак (отрицательный), эффективно притягиваются.

В рассматриваемом случае вклад от кулоновского члена $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z, R)$ вычисляется следующим образом. Для s -канала общее выражение (83) принимает вид

$$\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z, R) = (4\pi)^2 \int_0^\infty r dr \int_0^r r'^2 dr' \left[\varrho_{VP}^{\text{PT}}(r) \varrho_{VP}^{\text{PT}}(r') - \varrho_{VP}^{(1)}(r) \varrho_{VP}^{(1)}(r') + \varrho_{VP}(r) \varrho_{VP}(r') \right], \quad (84)$$

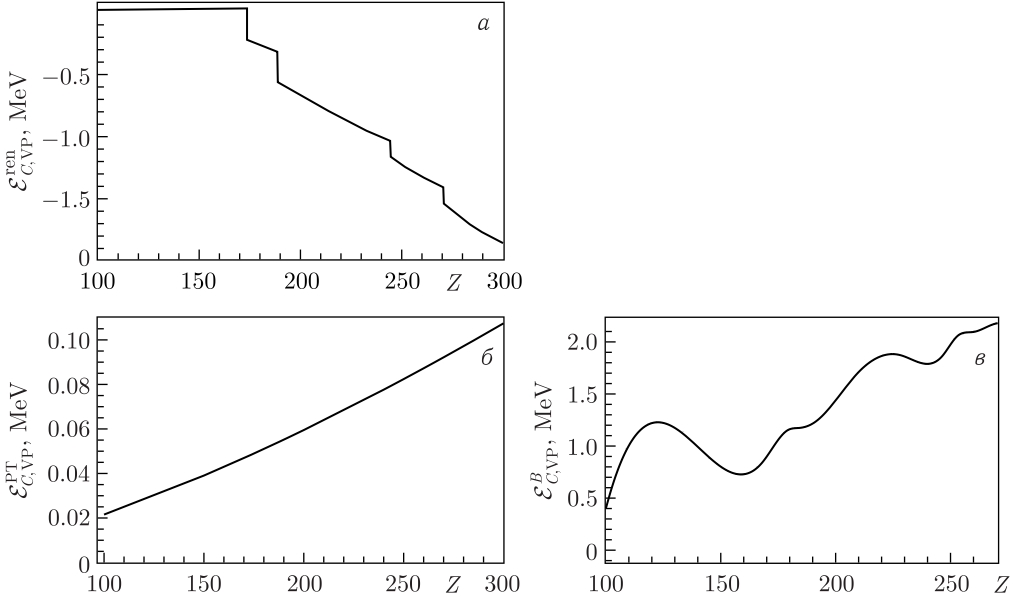


Рис. 8. Различные компоненты перенормированного кулоновского члена как функции Z при $R = R_{\min}(Z)$ для диапазона $10 < Z < 300$: а) $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z)$; б) $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{PT}}(Z)$; в) $\mathcal{E}_{C,VP}^B(Z)$

где $\rho_{VP}^{\text{PT}}(r)$, $\rho_{VP}^{(1)}(r)$, $\rho_{VP}(r)$ — вычисленные для s -канала пертурбативная, борновская (определяемая выражением (41)) и полная вакуумные плотности заряда соответственно. На рис. 8, *a–в* приведены графики перенормированного кулоновского члена $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z)$ и его компонент — пертурбативной $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{PT}}(Z)$ и борновской $\mathcal{E}_{C,VP}^B(Z)$, рассматриваемых как функции заряда источника Z при $R = R_{\min}(Z)$. Из рис. 8, *a* четко видно, как ведет себя перенормированный кулоновский член $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z)$. До тех пор пока первый дискретный уровень не опустится в нижний континуум, кулоновское взаимодействие между вакуумными плотностями заряда соответствует их эффективному отталкиванию. При достижении каждым дискретным уровнем нижнего континуума с возникновением заряженной вакуумной оболочки в $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z)$ происходит отрицательный скачок. В результате уже после опускания первого дискретного уровня кулоновское взаимодействие между вакуумными плотностями заряда будет соответствовать эффективному притяжению. Этот нетривиальный эффект является прямым следствием процедуры перенормировки (80)–(82). Более того, общая форма графиков зависимости $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z)$ и $\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{ren}}(Z)$ от Z одна и та же — на обоих при каждом $Z_{\text{cr},i}$ имеются отрицательные скачки. Основная разница состоит в том, что $\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{ren}}(Z)$ значительно больше кулоновского члена по величине и с ростом Z убывает все быстрее и быстрее по сравнению с $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z)$, которая ведет себя существенно более плавно. Кроме того, отрицательные скачки $\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{ren}}(Z)$ всегда равны $2mc^2$, в то время как для $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z)$ величина скачков не является строго фиксированной величиной, а зависит от структуры волновых функций $\psi_n(\mathbf{r})$ дискретных уровней на границе нижнего континуума. Основное свойство скачков $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z)$ — убывание с ростом Z из-за увеличения числа узлов волновых функций $\psi_{n,k}(\mathbf{r})$ на границе нижнего континуума.

Следует также остановиться на вычислении пертурбативного члена $\mathcal{E}_{C,VP}^{PT}(Z, R)$ для модели сферы. В этом случае соответствующая пертурбативная плотность заряда $\varrho_{VP}^{PT}(r)$ имеет δ -образную сингулярность при $r = R$. Из-за этого прямое вычисление вклада от соответствующего члена в интеграл (84) затруднено. Обойти эту проблему можно, рассматривая выражение для кулоновского члена, записанное через продольную компоненту электрического поля $\mathcal{E}_{||}(\mathbf{r})$. Это обусловлено тем, что для внешнего потенциала (4) потенциал Юлинга $A_{VP,0}^{PT}(r)$ является непрерывной функцией, а его первая производная, а соответственно, и $\mathcal{E}_{||,VP}^{PT}(r)$, непрерывна всюду за исключением конечного скачка при $r = R$. В то же время как при $r < R$, так и при $r > R$ радиальная компонента электрического поля $\mathcal{E}_{||,VP}^{PT}(r)$ хорошо определена. Поэтому для модели сферы пертурбативный вклад $\mathcal{E}_{C,VP}^{PT}(Z, R)$ в кулоновский член находится через выражение

$$\mathcal{E}_{C,VP}^{PT}(Z, R) = \frac{1}{2} \left[\int_0^R + \int_R^\infty \right] r^2 dr \left(\mathcal{E}_{||,VP}^{PT}(r) \right)^2. \quad (85)$$

В отличие от пертурбативного вклада $\mathcal{E}_{C,VP}^{PT}(Z)$, который представляет собой монотонно возрастающую функцию, борновский член $\mathcal{E}_{C,VP}^B(Z)$, определяемый плотностью заряда $\varrho_{VP}^{(1)}(r)$, ведет себя существенно более нетривиально. Во-первых, согласно (42), (43), асимптотики $\varrho_{VP}^{(1)}(r)$ таковы, что соответствующий интеграл, определяющий борновский член в выражении (84), сходится, так что перенормировка кулоновского взаимодействия сводится к вычитанию конечной величины. Однако необходимость такого вычитания обоснованна, так как оно является частью общей схемы перенормировки. Во-вторых, $\mathcal{E}_{C,VP}^B(Z)$ существенно больше, чем другие компоненты кулоновской энергии. Именно поэтому $\mathcal{E}_{C,VP}^{ren}(Z)$ становится отрицательным в критической области $Z > Z_{cr,1}$. Наиболее нетривиальным свойством $\mathcal{E}_{C,VP}^B(Z)$ является заметная реакция на критические заряды. Она проявляется не так ярко, как в перенормированном кулоновском члене $\mathcal{E}_{C,VP}^{ren}(Z)$, но выражена вполне явным образом.

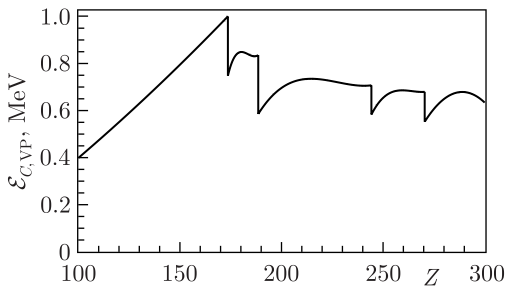


Рис. 9. Неперенормированный кулоновский член $\mathcal{E}_{C,VP}(Z)$ как функция Z при $R = R_{min}(Z)$ для диапазона $10 < Z < 300$

Причина этого состоит в том, что, в отличие от $\varrho_{VP}^{PT}(r)$, представляющей собой результат чисто пертурбативного вычисления, $\varrho_{VP}^{(1)}(r)$ является частью полной вакуумной плотности, а поэтому, пусть и частично, но отражает информацию об опускании уровней в нижний континуум, содержащуюся в полной вакуумной плотности $\varrho_{VP}(r)$.

В качестве дополнительной иллюстрации общей структуры кулоновского слагаемого в вакуумной энергии на рис. 9 показан график неперенормированного кулоновского члена $\mathcal{E}_{C,VP}(Z, R_{min}(Z))$, также представляющего собой конечную величину.

Он имеет отрицательные скачки при каждом $Z_{cr,i}$, но при этом строго положителен. Таким образом, без перенормировки, заменяющей $\mathcal{E}_{C,VP}(Z, R)$ на $\mathcal{E}_{C,VP}^{ren}(Z, R)$,

основным эффектом от кулоновского члена было бы дополнительное отталкивание вакуумных плотностей заряда, что привело бы к дополнительным проблемам для спонтанного излучения. С другой стороны, $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z, R)$ действует в правильном направлении, но вклада от него оказывается недостаточно, чтобы кардинально улучшить общую картину.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, дополнительный вклад от корректно перенормированного кулоновского члена $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z, R)$ в полную вакуумную энергию $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z, R)$ оказывается отрицательным и может сыграть положительную роль в энергетическом балансе спонтанного излучения в диапазоне $170 \leq Z \leq 192$, который в настоящее время является ориентиром для теоретических и экспериментальных исследований по этой теме в рамках тяжелоионных столкновений [7, 11, 17–19]. Также необходимо отметить, что если опустившийся в нижний континуум уровень проявляется как незаполненная вакансия, то единственным результатом будет изменение плотности состояний $n(\mathbf{r})$ в соответствии с общим подходом [15, 45]. В результате возникающая вакуумная оболочка остается незаряженной, тем самым никакого отрицательного скачка в $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z, R)$ не происходит. Как следствие, основной компонентой в $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{ren}}(Z, R)$ в этом случае будет пертурбативный член $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{PT}}(Z, R)$, который является строго положительным и пренебрежимо малым по сравнению с $\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{ren}}(Z, R)$. Зависимость $\mathcal{E}_{C,VP}^{\text{PT}}(Z, R)$ от Z при $R = R_{\text{min}}(Z)$ приведена на рис. 8, б, а при фиксированном Z и возрастании R он убывает как $O(1/R)$. Таким образом, полная вакуумная энергия $\mathcal{E}_{VP}^{\text{ren}}(Z, R)$ в этом случае с точностью до малой положительной поправки, исчезающей при больших R , совпадает со своей основной компонентой $\mathcal{E}_{D,VP}^{\text{ren}}(Z, R)$. По этой причине в уравнении (24) добавочный член $\Delta V(r) = eA_{VP}^0(r)$ к внешнему потенциалу $V(r)$, обусловленный индуцированной скалярной компонентой $A_{VP}^0(r)$, которая возникает в кулоновской калибровке из уравнения Пуассона $\Delta A_{VP}^0 = -4\pi\rho_{VP}$ [29], также оказывается пренебрежимо малым и может быть опущен без какой-либо потери общности.

Кроме того, при спонтанном испускании вакуумных позитронов последние уносят лептонное число, равное их количеству со знаком минус. Тогда соответствующее положительное лептонное число должно оставаться в виде пространственной плотности, сконцентрированной в вакуумных оболочках. Иначе в таких процессах либо должен нарушаться закон сохранения лептонного числа, либо само спонтанное испускание становится невозможным. Поэтому любой надежный экспериментальный результат по проблеме спонтанного испускания важен для понимания природы лептонного числа, поскольку в настоящее время не существует никаких свидетельств наличия у лептонов какой-либо внутренней структуры. Более подробное обсуждение этого вопроса см. в работах [47, 48].

Благодарности. Авторы выражают искреннюю благодарность сотрудникам физического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова канд. физ.-мат. наук Ю. С. Ворониной и канд. физ.-мат. наук О. В. Павловскому, а также А. А. Краснову и канд. физ.-мат. наук А. С. Давыдову из НИЦ «Курчатовский институт» и канд. физ.-мат. наук А. А. Роеенко из ОИЯИ (Дубна) за внимание к работе и ценные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 14-02-01261) и научных тем Минобрнауки РФ (проекты 01-2014-63889, А16-116021760047-5). Вычисления про-

водились на базе Суперкомпьютерного центра МГУ «Ломоносов», проект № 2226. Значительный объем (более 50%) численных расчетов был выполнен с использованием услуг Центра коллективного пользования «Комплекс моделирования и обработки данных исследовательских установок мега-класса» НИЦ «Курчатовский институт».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rafelski J., Kirsch J., Müller B., Reinhardt J., Greiner W.* Probing QED Vacuum with Heavy Ions // *New Horizons in Fundamental Physics. FIAS Interdisciplinary Science Ser.* Springer, 2017. P. 211–251; https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-44165-8_17 (accessed 08.27.2017).
2. *Kuleshov V.M., Mur V.D., Narozhny N.B., Fedotov A.M., Lozovik Y.E.* Coulomb Problem for Graphene with the Gapped Electron Spectrum // *JETP Lett.* 2015. V. 101, No. 4. P. 264–270; <http://dx.doi.org/10.1134/S0021364015040098>.
3. *Kuleshov V.M., Mur V.D., Narozhny N.B., Fedotov A.M., Lozovik Y.E., Popov V.S.* Coulomb Problem for a Z_{cr} Nucleus // *Phys. Usp.* 2015. V. 58, No. 8. P. 785–791; <http://dx.doi.org/10.3367/UFNe.0185.201508d.0845>.
4. *Godunov S.I., Machet B., Vysotsky M.I.* Resonances in Positron Scattering on a Supercritical Nucleus and Spontaneous Production of e^+e^- Pairs // *Eur. Phys. J. C.* 2017. V. 77, No. 2. P. 77:782; <https://link.springer.com/article/10.1140/epjc/s10052-017-5325-4>.
5. *Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y.* Vacuum Energy of One-Dimensional Supercritical Dirac–Coulomb System // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2017. V. 32, No. 11. P. 1750054; <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0217751X17500543>.
6. *Voronina Y., Davydov A., Sveshnikov K.* Vacuum Effects for One-Dimensional “Hydrogen Atom” with $Z > Z_{cr}$ // *Theor. Math. Phys.* 2017. V. 193. P. 1647–1674; <https://link.springer.com/article/10.1134/S004057791711006X>.
7. *Popov R., Bondarev A., Kozhedub Y., Maltsev I., Shabaev V., Tupitsyn I., Ma X., Plunien G., Stöhlker T.* One-Center Calculations of the Electron–Positron Pair Creation in Low-Energy Collisions of Heavy Bare Nuclei // *Eur. Phys. J. D.* 2018. V. 72. P. 115; <https://link.springer.com/article/10.1140/epjd/e2018-90056-4>.
8. *Novak O., Kholodov R., Surzhykov A., Artemyev A.N., Stöhlker T.* K-Shell Ionization of Heavy Hydrogenlike Ions // *Phys. Rev. A.* 2018. V. 97, No. 3. P. 032518; <https://journals.aps.org/prabstract/10.1103/PhysRevA.97.032518>.
9. *Maltsev I.A., Shabaev V.M., Popov R.V., Kozhedub Y.S., Plunien G., Ma X., Stöhlker T.* Electron–Positron Pair Production in Slow Collisions of Heavy Nuclei beyond the Monopole Approximation // *Phys. Rev. A.* 2018. V. 98. P. 062709; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.062709>.
10. *Roenko A., Sveshnikov K.* Estimating the Radiative Part of QED Effects in Superheavy Nuclear Quasimolecules // *Phys. Rev. A.* 2018. V. 97, No. 1. P. 012113; <https://journals.aps.org/prabstract/10.1103/PhysRevA.97.012113>.
11. *Maltsev I.A., Shabaev V.M., Popov R.V., Kozhedub Y.S., Plunien G., Ma X., Stöhlker T., Tumakov D.A.* How to Observe the Vacuum Decay in Low-Energy Heavy-Ion Collisions // *Phys. Rev. Lett.* 2019. V. 123. P. 113401; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.123.113401>.
12. *Popov R.V., Shabaev V.M., Telnov D.A., Tupitsyn I.I., Maltsev I.A., Kozhedub Y.S., Bondarev A.I., Kozin N.V., Ma X., Plunien G., Stöhlker T., Tumakov D.A., Zaytsev V.A.* How to Access QED at a Supercritical Coulomb Field // *Phys. Rev. D.* 2020. V. 102. P. 076005; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.102.076005>.

13. Greiner W., Müller B., Rafelski J. Quantum Electrodynamics of Strong Fields. 2nd ed. Berlin: Springer, 1985; <http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-82272-8>.
14. Plunien G., Müller B., Greiner W. The Casimir Effect // Phys. Rep. 1986. V. 134, No. 2. P. 87–193; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157386900207>.
15. Greiner W., Reinhardt J. Quantum Electrodynamics. 4th ed. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2009.
16. Ruffini R., Vereshchagin G., Xue S. S. Electron–Positron Pairs in Physics and Astrophysics: From Heavy Nuclei to Black Holes // Phys. Rep. 2010. V. 487, Nos. 1–4. P. 1–140; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157309002518>.
17. Gumberidze A., Stöhlker T., Beyer H. F., Bosch F., Brüning-Demian A., Hagmann S., Kozhuharov C., Kühl T., Mann R., Indelicato P., Quint W., Schuch R., Warczak A. X-Ray Spectroscopy of Highly-Charged Heavy Ions at FAIR // Nucl. Instr. Meth. B. 2009. V. 267. P. 248–250; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168583X08011385>.
18. Ter-Akopian G. M., Greiner W., Meshkov I., Oganessian Y., Reinhardt J., Trubnikov G. Layout of New Experiments on the Observation of Spontaneous Electron–Positron Pair Creation in Supercritical Coulomb Fields // Intern. J. Mod. Phys. E. 2015. V. 24, No. 03. P. 1550016; <https://www.worldscientific.com/doi/epdf/10.1142/S0218301315500160>.
19. Ma X., Wen W., Zhang S., Yu D., Cheng R., Yang J., Huang Z., Wang H., Zhu X., Cai X., Zhao Y., Mao L., Yang J., Zhou X., Xu H., Yuan Y., Xia J., Zhao H., Xiao G., Zhan W. HIAF: New Opportunities for Atomic Physics with Highly Charged Heavy Ions // Nucl. Instr. Meth. B. 2017. V. 408. P. 169–173; <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168583X17303889>.
20. Pieper W., Greiner W. Interior Electron Shells in Superheavy Nuclei // Z. Phys. 1969. V. 218, No. 4. P. 327–340; <http://dx.doi.org/10.1007/BF01670014>.
21. Müller B., Rafelski J., Greiner W. Solution of the Dirac Equation with Two Coulomb Centres // Phys. Lett. B. 1973. V. 47, No. 1. P. 5–7; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269373905546> (accessed: 08.17.2016).
22. Müller B., Rafelski J., Greiner W. Electron Wave Functions in Over-Critical Electrostatic Potentials // Nuovo Cim. A. 1973. V. 18, No. 3. P. 551–573; <http://link.springer.com/10.1007/BF02722798> (accessed: 11.02.2016.).
23. Gerstein S. S., Zel'dovich Y. B. The Critical Charge of the Nucleus and the Vacuum Polarization // Lett. Nuovo Cim. 1969. V. 1, No. 16. P. 835–836; <http://dx.doi.org/10.1007/BF02753979>.
24. Zeldovich Y. B., Popov V. S. Electronic Structure of Superheavy Atoms // Sov. Phys. Usp. 1972. V. 14, No. 6. P. 673; <http://stacks.iop.org/0038-5670/14/i=6/a=R01>.
25. Gershtein S. S., Popov V. S. Spontaneous Production of Positrons in Collisions of Heavy Nuclei // Lett. Nuovo Cim. 1973. V. 6, No. 14. P. 593–596; <http://dx.doi.org/10.1007/BF02827078>.
26. Greiner W. Structure of Vacuum and Elementary Matter: From Superheavies via Hypermatter to Antimatter – The Vacuum Decay in Supercritical Fields // Adv. Quant. Chem. Current Trends in Atomic Physics / Ed. by S. Salomonson, E. Lindroth. Acad. Press, 2008. V. 53. P. 99–150; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S006532760753008X>.
27. Müller-Nehler U., Soff G. Electron Excitations in Superheavy Quasimolecules // Phys. Rep. 1994. V. 246, No. 3–4. P. 101–250; <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/037015739490068X>.
28. Grashin P., Sveshnikov K. Vacuum Polarization Energy Decline and Spontaneous Positron Emission in QED under Coulomb Supercriticality // Phys. Rev. D. 2022. V. 106. P. 013003; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.106.013003>.

29. *Bjorken J. D., Drell S. D.* Relativistic Quantum Fields. New York, NY: McGraw-Hill Book Co., 1965.
30. *Jentschura U. D., Adkins G. S.* Quantum Electrodynamics: Atoms, Lasers and Gravity. World Sci., 2022. P. 1–789; https://scholarsmine.mst.edu/phys_facwork/2257/.
31. *Wichmann E. H., Kroll N. M.* Vacuum Polarization in a Strong Coulomb Field // *Phys. Rev.* 1956. V. 101. P. 843–859; <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.101.843>.
32. *Gyulassy M.* Higher Order Vacuum Polarization for Finite Radius Nuclei // *Nucl. Phys. A.* 1975. V. 244, No. 3. P. 497–525; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0375947475905540>.
33. *Brown L., Cahn R., McLerran L.* Vacuum Polarization in a Strong Coulomb Field. I. Induced Point Charge // *Phys. Rev. D.* 1975. V. 12, No. 2. P. 581–595; <https://www.osti.gov/biblio/4160789>.
34. *Brown L., Cahn R., McLerran L.* Vacuum Polarization in a Strong Coulomb Field. II. Short-Distance Corrections // *Phys. Rev. D.* 1975. V. 12, No. 2. P. 596–608; <https://www.osti.gov/biblio/4149563>.
35. *Brown L., Cahn R., McLerran L.* Vacuum Polarization in a Strong Coulomb Field. III. Nuclear Size Effects // *Phys. Rev. D.* 1975. V. 12, No. 2. P. 609–619; <https://www.osti.gov/biblio/4198672>.
36. *Mohr P. J., Plunien G., Soff G.* QED Corrections in Heavy Atoms // *Phys. Rep.* 1998. V. 293, No. 5. P. 227–369; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037015739700046X>.
37. *Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y.* Nonperturbative Vacuum Polarization Effects in Two-Dimensional Supercritical Dirac–Coulomb System. I. Vacuum Charge Density // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2018. V. 33, No. 01. P. 1850004; <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X18500045>.
38. *Davydov A., Sveshnikov K., Voronina Y.* Nonperturbative Vacuum Polarization Effects in Two-Dimensional Supercritical Dirac–Coulomb System. I. Vacuum Charge Density // *Intern. J. Mod. Phys. A.* 2018. V. 33, No. 01. P. 1850005; <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X18500057>.
39. *Sveshnikov K., Voronina Y., Davydov A., Grashin P.* Essentially Nonperturbative Vacuum Polarization Effects in a Two-Dimensional Dirac–Coulomb System with $Z > Z_{cr}$: Vacuum Charge Density // *Theor. Math. Phys.* 2019. V. 198, No. 3. P. 331–362.
40. *Sveshnikov K., Voronina Y., Davydov A., Grashin P.* Essentially Nonperturbative Vacuum Polarization Effects in a Two-Dimensional Dirac–Coulomb System for $Z > Z_{cr}$: Vacuum Polarization Effects // *Ibid.* 2019. V. 199, No. 1. P. 533–562.
41. *Grashin P., Sveshnikov K.* Spontaneous Emission in the Supercritical QED: What Is Wrong and What Is Possible. arXiv:2305.08984 [hep-ph]. 2023.
42. *Schwinger J.* Quantum Electrodynamics. II. Vacuum Polarization and Self-Energy // *Phys. Rev.* 1949. V. 75, No. 4. P. 651–679; <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.75.651> (accessed: 2016-09-29).
43. *Schwinger J.* On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // *Phys. Rev.* 1951. V. 82. P. 664–679; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.82.664>.
44. *Itzykson C., Zuber J. B.* Quantum Field Theory. McGraw-Hill, 1980.
45. *Fano U.* Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts // *Phys. Rev.* 1961. V. 124. P. 1866–1878; <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.1866>.
46. *Voronina Y., Sveshnikov K., Grashin P., Davydov A.* Essentially Non-Perturbative and Peculiar Polarization Effects in Planar QED with Strong Coupling // *Physica E.* 2019. V. 106. P. 298–311; <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1386947718309652>.
47. *Krasnov A., Sveshnikov K.* Lepton Number vs Coulomb Supercriticality. arXiv:2201.04829 [physics.atom-ph]. 2022.

48. *Krasnov A., Sveshnikov K.* Non-Perturbative Effects in the QED-Vacuum Energy Exposed to the Supercritical Coulomb Field // *Mod. Phys. Lett. A.* 2022. V. 37. P. 2250136.
49. *Rajaraman R.* Solitons and Instantons. North-Holland Publ. Comp., 1982; https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:15036991.
50. *Sveshnikov K.* Dirac Sea Correction to the Topological Soliton Mass // *Phys. Lett. B.* 1991. V. 255. P. 255–260; [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)90244-K](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90244-K).
51. *Sundberg P., Jaffe R. L.* The Casimir Effect for Fermions in One Dimension // *Ann. Phys.* 2004. V. 309. P. 442.

Получено 28 июня 2023 г.