Письма в ЭЧАЯ. 2008. Т. 5, №2(144). С. 126–133

ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И АТОМНОГО ЯДРА. ТЕОРИЯ

СТРУКТУРНЫЕ КВАНТОВЫЕ ЧИСЛА И НЕСТАБИЛЬНЫЕ ЛЕПТОНЫ

А. А. Гусев, О. С. Космачев[1]

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

Формулировка волновых уравнений позволяет теоретически получать значения квантовых чисел для идентификации лептонов. Минимальное расширение групп, на основе которых описываются стабильные лептоны, привело к трем типам новых групп. Каждая из них имеет соответствующий структурный инвариант $\pm 1{,}0$ и свой набор подструктур, допускающих физическую интерпретацию в терминах стабильных лептонов. Свойства вновь рассмотренных групп позволяют сформулировать новые типы уравнений и связать их с двумя дублетами (частица–античастица) массивных, заряженных нестабильных лептонов и дублетом нестабильных массивных нейтрино.

Formulation of wave equations allows one to obtain values of quantum numbers identifying the leptons theoretically. Minimal extension of the groups describing stable leptons led to three new types of groups. Each of them has an appropriate structural invariant ± 1.0 and its own set of substructures having physical interpretation in terms of stable leptons. The properties of the above mentioned groups allow one to formulate new types of equations and to relate them with doublets (particle–antiparticle) of massive, charged nonstable leptons and a doublet of massive nonstable neutrinos.

PACS: 14.60.-z, 14.60.Hi, 14.60.Lm

ВВЕДЕНИЕ

Свободные состояния являются необходимым условием описания взаимодействий. Они играют роль начальных и конечных состояний при записи матричных элементов. Уравнения свободных состояний на сегодня являются единственной возможностью получать теоретические значения квантовых чисел, идентифицирующие любые лептоны. Такие квантовые числа (или их некоторую совокупность) будем называть структурными квантовыми числами того или иного лептона. Несмотря на ясную и вполне определенную роль свободных состояний, мы не имеем единого и удовлетворительного теоретического описания объектов, которые называем лептонами как стабильными, так и нестабильными, вплоть до наших дней. В частности, теория не объясняет причины и характер различий между стабильными лептонами $e^{\pm}$ и нестабильными частицами типа $\mu^{\pm}$ ($(\mu - e)$-универсальность) и не в состоянии ответить на вопрос о полном числе лептонов и ряд других вопросов. Такое положение служит признаком неполноты теории в вопросе, который является исходным для физики элементарных частиц.

[1] E-mail: kos@theor.jinr.ru

После открытия несохранения пространственной четности в слабых распадах началась новая жизнь лептонного сектора. Причем интерес к нему не только не убывает, но в последние годы заметно превзошел первоначальный. По прошествии полувека нельзя не заметить, что значительный прогресс не обошелся без пробелов в теоретическом описании лептонов. Совершенно не претендуя на полное обсуждение данного вопроса, мы отметим лишь то немногое, что носит иллюстративный характер или, с нашей точки зрения, может оказаться существенным в дальнейшем при переходе к количественным оценкам и вычислениям.

Хронологически первыми, кто обратился к вычислениям с участием нейтрино, нарушающим пространственную четность, были Ли и Янг [1]. Авторы сделали выбор в пользу так называемой двухкомпонентной теории нейтрино, предложенной Паули [2]. Такой выбор даже в то время не являлся однозначно обоснованным.

В известной работе Майораны [3] с помощью искусного, но частного приема получено уравнение для нейтральной частицы. Можно показать [4], что оно описывает дублетное массивное нейтрино, вполне пригодное для построений Ли и Янга. Сам Майорана не стал анализировать полученное уравнение, а на его основе пытался получить уравнение для описания частиц, которые теперь именуются как истинно нейтральные. Вывод о том, что в результате таких построений «нет никакого основания предполагать наличие антинейтрона или антинейтрино», сегодня не может быть принят, а само построение нельзя считать вполне законченным.

Следует отметить также, что работа [1] содержит ничем не оправданный прием, когда двухкомпонентное нейтрино встраивается в вычислительную схему с четырехкомпонентными спинорами путем добавки двух нулевых компонентов. Очевидно, что если нейтрино описывать двухкомпонентным спинором, то возникает трудность согласования вычислений на основе стандартной четырехфермионной техники, в арсенале которой имеются только четырехкомпонентные биспиноры, а двухкомпонентные не предусмотрены.

В другой знаковой работе, связанной с именами Фейнмана и Гелл-Манна [5], сформулирована так называемая универсальная (V-A)-теория. Основные предположения теории сводятся к следующему. Волновую функцию электрона в β-распаде в обычной четырехчастичной связи ψ_e всегда нужно заменять на

$$\psi_e \longrightarrow 1/2(1+i\gamma_5)\psi_e \equiv a\psi_e.$$

При этом $a^2 = a,\ \overline{a} = (1 - i\gamma_5),\ \overline{a}a = 0.$

Далее предполагается, что это же правило приложимо ко всем волновым функциям, входящим во взаимодействие (n, p, μ, ν). Только в таком случае теория становится универсальной. Различие между частицами сводится к различию масс. Здравый смысл, доверяющий прямым экспериментальным наблюдениям, будет терпеть такое положение, пока не появится конструктивная теоретическая альтернатива. Забегая вперед, можно сказать, что в лептонном секторе она уже обозначилась. Необходимость в столь сильных предположениях была продиктована для авторов тем, что электроны, образующиеся в процессе β-распада, имеют продольную поляризацию.

Кроме того, следует помнить, что принять названные предположения в теории означает отказаться от возможности записать волновые уравнения типа Дирака или им подобные и отказаться от поисков квантовых чисел для идентификации частиц. Дело в том, что в силу ассоциативности группа не может содержать элементы типа $(1 \pm i\gamma_5)$, так как они не имеют обратных.

С другой стороны, можно показать [6], что все лептоны (за исключением T-синглетного состояния) имеют в своей структуре P-сопряженный компонент связности. Его наличие дает возможность приписать лептонам продольную поляризацию. После чего задача сводится к грамотной формулировке взаимодействия, т. е. адекватной записи инвариантов взаимодействия. В таком случае необходимость в проекционных операторах $(1 \pm i\gamma_5)$ для лептонов отпадает.

Последующее накопление экспериментальных результатов привело к открытию тауона. Уже существовавшая $(\mu - e)$-универсальность расширилась до $(\mu - e - \tau)$-универсальности. Универсальность в данном контексте означает неопределенность в теоретическом понимании различий и сходства между тремя частицами. Другим следствием того же открытия стало расширение семейства нейтрино. При этом возникает необъяснимое положение, когда различные типы нейтрино мы связываем по их происхождению от частиц, которые мы не можем различать иначе, чем по массам. Автоматически такая же участь постигает ν_e, ν_μ, ν_τ. Это означает, что при таком подходе мы не имеем доступа к той части информации, которая связана с внутренними характеристиками таких лептонов, т. е. к структурным квантовым числам.

Значимость концепции квантовых чисел будет возрастать в той мере, в какой будет расти роль групповых методов в теории элементарных частиц. Подтверждением тому служит емкое определение квантовых чисел, данное Вейлем. Квантовые числа являются индексами, характеризующими представления групп [7]. Качественно новую роль концепция квантовых чисел сыграла в утверждении и развитии унитарной симметрии. Ее роль в адронном секторе оказалась определяющей. Данный пример служит одним из аргументов в пользу волновых уравнений для лептонов как носителей структурной информации.

Соображения, подобные высказанным выше, свидетельствуют о том, что трудности и неувязки в лептонном секторе с учетом длительности их существования приняли системный характер. Не исключено также, что в данном случае мы столкнулись с таким положением, когда нет смысла говорить об отдельных явлениях, не охватив всего круга возможных участников хотя бы слабых взаимодействий. Положение осложняется еще тем, что как постановка экспериментов, так и интерпретация их результатов практически всегда являются модельно-зависимыми.

Отмеченным трудностям можно противопоставить системный подход. В данном случае это означает максимальную свободу от произвольных предположений и ограниченность минимальным количеством надежных принципов для формулировки волновых уравнений.

Практической реализацией такой программы явилось создание алгоритма построения уравнений для стабильных лептонов [6]. Алгоритм основан на следующих требованиях:

1) лоренц-инвариантность с учетом всех компонентов связности;

2) непрерывность четырехвектора тока вероятности и положительная определенность четвертого компонента тока;

3) величина спина равняется 1/2;

4) неприводимость представлений группы γ-матриц, связанных с каждым из лептонных уравнений.

В основе каждого уравнения лежит соответствующая группа γ-матриц. Каждая группа γ-матриц порождается четырьмя генераторами. Три из них должны антикоммутировать, четвертый может антикоммутировать или коммутировать с тремя первыми. Эти требования составляют необходимые и достаточные условия для формулировки волнового уравнения для свободного стабильного лептона. Ни одно из указанных требований не возможно исключить, не разрушив при этом уравнение, в том числе уравнение Дирака. Последнее послужило образцом, позволившим сформулировать алгоритм. В результате установлено, что каждое уравнение для стабильного лептона имеет собственный, не повторяющийся состав.

1. Уравнение Дирака — $D_\gamma[\mathrm{II}]$: $d_\gamma, b_\gamma, f_\gamma$.
2. Уравнение для дублета массивных нейтрино — $D_\gamma[\mathrm{I}]$: $d_\gamma, c_\gamma,\ f_\gamma$.
3. Уравнение для квартета безмассовых нейтрино — $D_\gamma[\mathrm{III}]$: $d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, f_\gamma$.
4. Уравнение для безмассового T-синглета — $D_\gamma[\mathrm{IV}]$: b_γ.
5. Уравнение для безмассового P-синглета — $D_\gamma[\mathrm{V}]$: c_γ.

Здесь $d_\gamma, b_\gamma, c_\gamma, f_\gamma$ — подгруппы соответствующей группы γ-матриц, на которых реализуется один из четырех компонентов связности группы Лоренца.

Видно, что структура уравнений позволяет отличить одно уравнение от другого. Все уравнения не имеют подструктур, допускающих физическую интерпретацию. По этой причине они являются стабильными. Кроме того, предлагаемый метод позволяет утверждать, что других стабильных лептонов в рамках оговоренных предположений не имеется.

РАСШИРЕНИЯ ГРУПП СТАБИЛЬНЫХ ЛЕПТОНОВ

Можно ли, оставаясь в рамках прежних четырех предположений, получить дополнительные лептонные уравнения? Оказалось, что возможно.

Достигается поставленная задача введением дополнительного (пятого) генератора для порождения группы γ-матриц. Выяснилось, что существует три и только три возможности. Каждая из них равносильна введению своих дополнительных квантовых чисел. При этом в новых группах появляются подструктуры, допускающие физическую интерпретацию в терминах стабильных лептонов. В этом их главное отличие от предыдущих, которое делает их нестабильными.

Так расширение группы γ-матриц Дирака ($D_\gamma(\mathrm{II})$) с помощью одного антикоммутирующего генератора Γ_5 такого, что $\Gamma_5^2 = I$, приводит к группе Δ_1 со структурным инвариантом $\mathrm{In}[\Delta_1] = -1$. Расширение той же группы с помощью генератора такого, что ${\Gamma'}_5^2 = -1$, доставляет Δ_3 со структурным инвариантом $\mathrm{In}[\Delta_3] = 0$. Наконец, расширение группы γ-матриц дублетного нейтрино ($D_\gamma(\mathrm{I})$) с помощью ${\Gamma''}_5^2 = -1$ приводит к группе Δ_2 с инвариантом $\mathrm{In}[\Delta_2] = 1$.

Все три группы имеют ряд общих свойств. Порядок групп равен 64, центр каждой группы содержит четыре элемента, элементы имеют порядок два или четыре и каждая из групп имеет 34 сопряженных класса. Как следствие группы имеют по 32 одномерных неприводимых представления и по два неэквивалентных четырехмерных. Кроме того, каждая группа имеет в своем составе по три и только три подгруппы 32-го порядка, которые изоморфны одному из пяти перечисленных вариантов. Но состав подгрупп 32-го порядка в каждом случае свой, не повторяющийся.

Группа Δ_1 имеет следующие определяющие соотношения:

$$\Gamma_\mu\Gamma_\nu + \Gamma_\nu\Gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4, 5). \qquad (1)$$

Из них вытекает

$$\Gamma_6 = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5, \quad \Gamma_6\Gamma_\mu = \Gamma_\mu\Gamma_6 \quad (\mu = 1,2,3,4,5), \tag{2}$$

где Γ_6 является центром группы, и, $\Gamma_6^2 = I$. Это означает, что при переходе к неприводимому матричному представлению можно записать $\Gamma_6 = \pm 1$.

Очевидно, что когда μ и ν пробегают значения $1,2,3,4$, мы получаем группу Дирака. Можно показать на основе (1), что помимо подгруппы Дирака Δ_1 содержит две и только две подгруппы 32-го порядка. В результате мы получаем такой структурный состав

$$\Delta_1\{D_\gamma(\mathrm{II}),\ D_\gamma(\mathrm{III}),\ D_\gamma(\mathrm{IV})\}. \tag{3}$$

Соотношение (3) вместе со структурным инвариантом $\mathrm{In}[\Delta_1] = -1$ идентифицирует группу Δ_1, т. е. делает ее физическое содержание отличным от остальных.

Волновое уравнение формулируется в полной аналогии с уравнением Дирака [8] при условии надлежащего выбора явного вида γ-матриц

$$\left[i\sum_{a=1}^{4}(\Gamma_a p_a) + \Gamma_6 m\right]\psi = 0, \quad \Gamma_6 = \pm 1, \tag{4}$$

где $p_a (a = 1,2,3,4)$ и m — четырехимпульс и масса нестабильной частицы. Запись уравнения в виде (4) оказалась возможной благодаря удачному стечению обстоятельств, в силу которых размерность неприводимого представления для группы Δ_1 совпала с размерностью представления для подгруппы Дирака — $D_\gamma(\mathrm{II})$. При этом два знака при $\Gamma_6 = \pm 1$, связанные с двумя неэквивалентными представлениями, ассоциируются с частицей и античастицей.

Вычисление неприводимых представлений для группы Δ_1 с помощью отработанной ранее методики [6] дает явный вид Г-матриц:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Группа Δ_3 получается при расширении группы Дирака с помощью похожих определяющих соотношений. Отличие лишь в порядке пятого генератора Γ_5:

$$\begin{aligned} &\Gamma_s\Gamma_t + \Gamma_t\Gamma_s = 2\delta_{st} && (s,t = 1,2,3,4), \\ &\Gamma_s\Gamma_5 + \Gamma_5\Gamma_s = 0 && (s = 1,2,3,4), \\ &\Gamma_5^2 = -1. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что

$$\Gamma_6 = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5, \quad \Gamma_6\Gamma_\mu = \Gamma_\mu\Gamma_6 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5). \tag{5}$$

По-прежнему Γ_6 является центром группы и $\Gamma_6^2 = -I$. В данном случае матричная реализация представления ведет к $\Gamma_6 = \pm i1$.

Состав группы изменился следующим образом:

$$\Delta_3\{D_\gamma(\mathrm{II}),\ D_\gamma(\mathrm{I}),\ D_\gamma(\mathrm{III})\}, \tag{6}$$

что соответствует структурному инварианту $\mathrm{In}[\Delta_3] = 0$. Подгруппа Дирака по-прежнему имеется в составе, но в целом он изменился.

Все замечания, высказанные для предыдущего волнового уравнения, остаются в силе и в данном случае:

$$\left[\sum_{a=1}^{4}(\Gamma_a p_a) \pm m\right]\psi = 0, \quad \Gamma_6 = \pm i.$$

Здесь опять p_a и m — импульс и масса нестабильной, но уже другой частицы.

Явный вид Г-матриц:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Группа Δ_2 определена с помощью соотношений

$$\begin{array}{ll} \Gamma_s\Gamma_t + \Gamma_t\Gamma_s = 2\delta_{st} & (s, t = 1, 2, 3), \\ \Gamma_s\Gamma_4 + \Gamma_4\Gamma_s = 0 & (s = 1, 2, 3), \\ \Gamma_4^2 = -1. & \\ \Gamma_u\Gamma_5 + \Gamma_5\Gamma_u = 0 & (u = 1, 2, 3, 4), \\ \Gamma_5^2 = -1. & \end{array}$$

Отсюда следует, что

$$\Gamma_6 = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5, \quad \Gamma_6\Gamma_\mu = \Gamma_\mu\Gamma_6 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5), \tag{7}$$

т. е. Γ_6 является центром группы и представляет собой элемент второго порядка $\Gamma_6^2 = I$. В матричной реализации он принимает вид $\Gamma_6 = \pm 1$.

Состав группы отличается от двух предыдущих:

$$\Delta_2\{D_\gamma(\mathrm{I}),\ D_\gamma(\mathrm{III}),\ D_\gamma(\mathrm{V})\}, \tag{8}$$

так же как и структурный инвариант $\mathrm{In}[\Delta_2] = 1$. Сравнение состава Δ_2 с пятью приведенными ранее уравнениями для стабильных лептонов показывает, что выражение (8) содержит только нейтринные составляющие.

Волновое уравнение для данного случая при соответствующем выборе явного вида Г-матриц совпадает с уравнением (4). Различия между ними полностью определяются соотношениями (2) и (8).

$$\left[i\sum_{a=1}^{4}(\Gamma_a p_a) + \Gamma_6 m\right]\psi = 0, \quad \Gamma_6 = \pm 1.$$

Смысл обозначений прежний.

Получен следующий вид Г-матриц:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что все пять матриц являются действительными, что находится в соответствии с известной теоремой о неприводимых матричных группах [9]. Теорема, в частности, утверждает, что в случае, когда $\mathrm{In}[D_\gamma] = 1$, существует неособенная матрица, которая преобразует все матрицы представления в действительные, что и было выполнено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный метод построения волновых уравнений для нестабильных лептонных состояний можно назвать кинематическим потому, что он основан на немногих достаточно общих и надежно установленных принципах. Метод является прямым продолжением предыдущих результатов, основанных на тех же самых принципах.

Наличие подгруппы Дирака в группах Δ_1 и Δ_3 говорит о том, что последние являются очевидными кандидатами на описание нестабильных заряженных лептонов.

Предложенный метод является комплексным. Во-первых, полученные выражения появились не в результате поиска, узко направленного на заряженный нестабильный лептон, но как следствие более широкой постановки вопроса. Во-вторых, попутное обнаружение группы Δ_2 открывает возможность описания массивного нестабильного нейтрино. И, наконец, предложенный метод позволяет утверждать, что других лептонных состояний, содержащих только стабильные подструктуры, в рамках однородной группы Лоренца не существует.

Метод обладает своеобразной «устойчивостью». Расширение любой из пяти групп для описания стабильных лептонов с помощью антикоммутирующего пятого генератора ведет к трем перечисленным группам $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ и никаким другим.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lee T. D., Yang C. N.* Parity Nonconservation and a Two-Component Theory of the Neutrino // Phys. Rev. 1957. V. 105, No. 5. P. 1671–1675.
2. *Pauli W.* Handbuch der Physik. Berlin, 1933. Bd. 24. S. 226–227 (*Паули В.* Общие принципы волновой механики. М., 1947. С. 254).
3. *Majorana E.* Teoria Simmetrica dell' Ellettrone e del Positrone // Nuovo Cim. 1937. V. 14. P. 171.
4. *Космачев О. С.* Ковариантная формулировка волнового уравнения для дублета массивных нейтральных лептонов. Препринт ОИЯИ Р4-2003-127. Дубна, 2003.
5. *Feynman R. P., Gell-Mann M.* Theory of the Fermi Interaction // Phys. Rev. 1958. V. 109, No. 1. P. 193–198.
6. *Космачев О. С.* Представления группы Лоренца и классификация стабильных лептонов. Препринт ОИЯИ Р2-2006-6. Дубна, 2006.
7. *Вейль Г.* Теория групп и квантовая механика. М., 1986. С. 16.
8. *Dirac P. A. M.* The Quantum Theory of the Electron // Proc. Roy. Soc. A. 1928. V. 117. P. 610–624.
9. *Lomont J. S.* Applications of Finite Groups. N. Y.; London, 1959. P. 40; 51.

Получено 28 декабря 2006 г.