ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11-2000-262

А.В.Селин

АППРОКСИМАЦИИ МАГНУСА–ПАДЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Направлено в «Журнал вычислительной математики и математической физики»

2000

1 Введение

Целью данной работы является построение и обоснование метода приближенного интегрирования задачи Коши для некоторого класса линейных эволюционных уравнений вида

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = A(t)x(t), \quad a \le t \le b. \tag{1.1}$$

Здесь неизвестная функция $x(t)$ действительного переменного t принимает значения в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ и $A(t)$ – заданный, вообще говоря, неограниченный линейный оператор в $\mathfrak{B}$, зависящий от t. В работе [1] указаны достаточные условия для оператора $A(t)$, при которых задача Коши для уравнения (1.1) разрешима единственным образом и которые мы будем считать выполненными. В этом случае решение может быть представлено в виде $x(t) = U(t,s)x(s)$, $s \le t$, где разрешающий (эволюционный) оператор $U(t,s)$ определяется как мультипликативный интеграл

$$U(t,s) = \underset{|\Delta|\to 0}{\text{s-lim}} \prod_{j=n}^{1} \exp\{(t_j - t_{j-1})A(t_j)\}. \tag{1.2}$$

Здесь $0 \le \alpha \mapsto \exp\{\alpha A(t_j)\}$ являются сильно непрерывными сжимающими полугруппами [2] с производящими операторами $A(t_j)$, а через $|\Delta|$ обозначен диаметр разбиения $\Delta = \{s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ отрезка $[s,t]$, $|\Delta| = \max\limits_j (t_j - t_{j-1})$. В условиях теоремы Като оператор эволюции $U(t,s)$ равномерно ограничен и сильно непрерывен по совокупности переменных, отображает в себя область определения оператора $\mathfrak{D}(A(t)) = \mathfrak{D}$, которая предполагается не зависящей от t, и сильно дифференцируем на $\mathfrak{D}$ по t.

Опишем формальное построение предлагаемых аппроксимаций эволюционного оператора $U(b,a)$. Выберем требуемый порядок аппроксимации $\varkappa \ge 1$. На каждом внутреннем отрезке $[t_{j-1}, t_j)$ разбиения Δ всего отрезка $[a,b]$ заменим оператор $A(t)$ в уравнении (1.1) на некоторый не зависящий от t оператор $(t_j - t_{j-1})^{-1}F^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1})$ так, чтобы полугруппа $\exp\{F^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1})\}$, соответствующая решению уравнения с "замороженным" оператором в точке t_j, аппроксимировала эволюционный оператор $U(t_j, t_{j-1})$ с точностью до $O(|t_j - t_{j-1}|^{\varkappa+1})$, т. е. при всех x из некоторого всюду плотного в $\mathfrak{B}$ множества $\|U(t_j,t_{j-1})x - \exp\{F^{(\varkappa)}(t_j,t_{j-1})\}x\| = O(|t_j - t_{j-1}|^{\varkappa+1})$. Операторы $F^{(\varkappa)}(t,s)$ выберем следующим образом:

$$F^{(\varkappa)}(t,s) = \sum_{k=1}^{\varkappa} \int_s^t \mathrm{d}\tau_1 \int_s^{\tau_1} \mathrm{d}\tau_2 \dots \int_s^{\tau_k} \mathrm{d}\tau_k \, \mathfrak{g}_k(A(\tau_1), A(\tau_2), \dots, A(\tau_k)), \tag{1.3}$$

где под $\mathfrak{g}_k(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$, $k = 1, 2, ...$, подразумевается некоторая универсальная последовательность полиномов от некоммутирующих переменных ξ_i, причем каждый полином $\mathfrak{g}_k$ однороден степени 1 по каждой переменной и является коммутаторным полиномом, т. е. выражается в виде линейной комбинации переменных $\xi_1, ..., \xi_k$, их коммутаторов $[\xi_i, \xi_k] = \xi_i\xi_k - \xi_k\xi_i$, коммутаторов от всех полученных до рассматриваемого шага выражений и т. д. Например, первые три полинома $\mathfrak{g}_k$ имеют вид

$$\mathfrak{g}_1(\xi_1) = \xi_1, \quad \mathfrak{g}_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}[\xi_1, \xi_2],$$
$$\mathfrak{g}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{2}\{[\xi_1, [\xi_2, \xi_3]] + [[\xi_1, \xi_2], \xi_3]\}.$$

Формальный бесконечный ряд (1.3) называется разложением Магнуса эволюционного оператора [3]. Эффективный способ вычисления полиномов $\mathfrak{g}_k$ можно найти в [4].

На следующем этапе полугруппа $\exp\{F^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1})\}$ аппроксимируется рациональной функцией от оператора $F^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1})$, что удобно для практических приложений рассматриваемого метода. В качестве такой рациональной функции мы выбираем диагональные или субдиагональные элементы $r_{q,p}(z)$ таблицы Паде для функции $\exp z$, т. е. те элементы, у которых степень q полинома $n_{q,p}(z)$ числителя Паде меньше или равна степени p полинома $d_{q,p}(z)$ знаменателя Паде. Полиномы $n_{q,p}(z)$ и $d_{q,p}(z)$ для $\exp z$ известны в явном виде (см., например, [5]):

$$n_{q,p}(z) = \sum_{k=0}^{q} \frac{(p+q-k)!q!}{(p+q)!k!(q-k)!} z^k, \quad d_{q,p}(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(p+q-k)!p!}{(p+q)!k!(p-k)!}(-z)^k. \tag{1.4}$$

Из определения аппроксимаций Паде следует, что порядок касания функций $\exp z$ и $r_{q,p}(z)$ в точке $z = 0$ равен $q + p + 1$. Таким образом, для получения требуемого порядка $\varkappa$ полной аппроксимации следует положить $q + p = \varkappa$.

Наконец, имея в своем распоряжении аппроксимации $r_{q,p}(F^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1}))$ эволюционных операторов локально на каждом из отрезков $[t_{j-1}, t_j)$ разбиения Δ и принимая во внимание представление $U(b, a) = U(t_n, t_{n-1}) \times$ $\times U(t_{n-1}, t_{n-2})...U(t_1, t_0)$, возьмем в качестве искомой аппроксимации Магнуса–Паде $X_{q,p}^{(\varkappa)}(\Delta)$: $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ для всего отрезка $[a, b]$ оператор $X_{q,p}^{(\varkappa)}(\Delta) =$ $= r_{q,p}(F^{(\varkappa)}(t_n, t_{n-1}))r_{q,p}(F^{(\varkappa)}(t_{n-1}, t_{n-2}))...r_{q,p}(F^{(\varkappa)}(t_1, t_0))$. Действие этого оператора на элемент $x_0 \in \mathfrak{B}$ можно записать эквивалентным способом в виде одношаговой неявной операторно-разностной схемы, в которой каждому шагу $j = 1, 2, ..., n$ соответствуют уравнения

$$\begin{gathered}(I-\mu_i F^{(\varkappa)}(t_j,t_{j-1}))y_{i+1}=(I-\nu_i F^{(\varkappa)}(t_j,t_{j-1}))y_i,\\ x_j=y_{p+1},\quad y_1=x_{j-1},\quad i=1,2,...,p,\end{gathered}\tag{1.5}$$

где $\mu_i\in\mathbb{C}$, $i=1,2,...,p$ есть обратные величины нулей знаменателя Паде $d_{p,q}(z)$, а $\nu_i\in\mathbb{C}$, $i=1,2,...,q$ – обратные величины нулей числителя Паде $n_{q,p}(z)$. Поскольку мы считаем, что $q\le p$, то при $i=q+1,...,p$ следует положить $\nu_i=0$. Уравнения (1.5) формально позволяют последовательно находить элементы $x_j\in\mathfrak{B}$, обращая на каждом шаге операторы $(I-\mu_i F^{(\varkappa)}(t_j,t_{j-1}))$. Набор элементов $\{x_j\}_{j=0}^n$ мы будем рассматривать как приближенное решение уравнения (1.1) с начальным условием x_0, заданное в узлах разбиения Δ. Как будет показано ниже, при определенных условиях для оператора $A(t)$ и начального условия x_0 это приближенное решение сходится при $|\Delta|\to 0$ к точному решению $x(t)$ со скоростью $\|x_j-x(t_j)\|=O(|\Delta|^{\varkappa})$.

Уравнения (1.5) в нашем подходе служат отправной точкой для построения системы алгебраических уравнений при конечномерных аппроксимациях исходного банахова пространства $\mathfrak{B}$, например в рамках методов Галеркина [6]. Однако в настоящей работе эти вопросы не рассматриваются.

С точки зрения приближенных методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений $x'=f(t,x)$ рассматриваемый метод близок к семейству одношаговых неявных методов Рунге $x_j=x_{j-1}+\tau_{j-1}\sum\limits_{i=1}^{p}a_i y_i$, $\tau_{j-1}=t_j-t_{j-1}$. При использовании методов Рунге на каждом шаге j необходимо решать систему уравнений относительно вспомогательных величин y_i:

$$y_i=f(t_{j-1}+\alpha_i\tau_{j-1},\sum_{i'=1}^{p}\beta_{ii'}y_{i'}),\quad i=1,2,...,p.\tag{1.6}$$

Набор действительных чисел $a_i,\alpha_i,\beta_{ii'}$, $i,i'=1,...,p$, определяет конкретный вариант метода Рунге с порядком сходимости $\le 2p$ [7]. Поскольку система (1.6) для $f(t,x)=A(t)x$ есть линейная система с операторными коэффициентами, то x_j и x_{j-1} в этом случае связаны между собой линейным преобразованием, представляющим собой некоторую рациональную функцию от операторов $A(t_{j-1}+\alpha_i\tau_{j-1})$. В отличие от методов Рунге в методе аппроксимаций Магнуса–Паде аналогичные уравнения (1.5) относительно y_i оказываются автоматически расцепленными, хотя при этом коэффициенты μ_i и ν_i являются, вообще говоря, комплексными.

Дальнейшее содержание работы следующее: в разд. 2 устанавливаются достаточные условия для оператора A, при которых он является производящим оператором ограниченной полугруппы, допускающей построение с помощью сильного предела операторов $r^n_{q,p}(n^{-1}tA)$ при $n \to \infty$. В разд. 3 вводится определение класса $\mathcal{K}_l([a,b])$ операторно-значных функций $[a,b] \ni \ni t \mapsto A(t)$, для которых корректно определены операторы $F^{(l)}(t,s)$, задаваемые выражением (1.3). Для операторов из класса $\mathcal{K}_l([a,b])$, $l = \varkappa(\varkappa+1)$, доказывается основная теорема 2 о сходимости аппроксимаций Магнуса–Паде к точному решению уравнения (1.1) с порядком $\varkappa$ при стремлении диаметра разбиения отрезка $[a,b]$ к нулю. В разд. 4 условия теоремы 2 проверяются для нестационарного уравнения Шредингера с потенциалом, зависящим от времени.

2 Аппроксимации Паде ограниченных полугрупп

В качестве первого шага обоснования формальной схемы построения аппроксимаций Магнуса–Паде, изложенной во введении, рассмотрим случай уравнения (1.1), в котором оператор $A(t) \equiv A$ не зависит от параметра $t \geq 0$. Согласно теореме Хилле–Филлипса–Иосида, необходимым и достаточным условием того, чтобы плотно определенный оператор A порождал ограниченную полугруппу $\exp\{tA\}$, являются следующие требования: 1) $(0,+\infty) \subset \varrho(A)$ и 2) для некоторого $M > 0$ $\|(\lambda I - A)^{-n}\| \leq M/\lambda^n$, $n = 1,2,...$, при $\lambda > 0$ [8]. В этом случае задача Коши (1.1) равномерно корректна [9] и ее единственное решение может быть представлено в виде $x(t) = \exp\{tA\}x_0$. При выполнении условий 1) и 2) полугрупповой оператор может быть построен как сильный предел [2]:

$$\exp\{tA\} = \operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}(I - n^{-1}tA)^{-n}, \quad n \to \infty.$$

Другими словами, полугруппа $\exp\{tA\}$ здесь строится как предел при $n \to \infty$ $(0,1)$ аппроксимаций Паде $r^n_{0,1}(n^{-1}t)$. При этом для элементов $x \in \mathfrak{D}(A^2)$ скорость сходимости $r^n_{0,1}(n^{-1}t)$ к $\exp\{tA\}$ есть $O(n^{-1})$. Далее мы покажем, что при определенных ограничениях на оператор A имеет место аналогичное предельное соотношение $r^n_{q,p}(n^{-1}tA) \xrightarrow{s} \exp\{tA\}$ для диагональных и субдиагональных (т. е. $q \leq p$) аппроксимаций Паде. При этом скорость сходимости на $\mathfrak{D}(A^{p+q+1})$ увеличивается до $O(n^{-p-q})$.

Предварительно докажем одно вспомогательное предложение. Это предложение дает явное выражение для вронскиана $w_{q,p}(z) = n'_{q,p}(z)d_{q,p}(z) - -n_{q,p}(z)d'_{q,p}(z)$.

Предложение 1. *Вронскиан* $w_{q,p}(z)$ *связан с полиномами* $n_{p,q}(z)$ *и* $d_{p,q}(z)$ *соотношением*

$$w_{q,p}(z) = d_{q,p}(z)n_{q,p}(z) - (-1)^p c_{q,p} z^{q+p}, \quad c_{q,p} = \frac{p!q!}{[(p+q)!]^2}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Дифференцируя по z определение аппроксимации Паде для экспоненциальной функции $e^z = n_{q,p}(z)/d_{q,p}(z) + O(z^{q+p+1})$, приходим к соотношению $e^z = w_{q,p}(z)/d^2_{q,p}(z) + O(z^{q+p})$. Разность этих двух уравнений, умноженная на на $d^2_{q,p}(z)$, дает следующее равенство:

$$w_{q,p}(z) = n_{q,p}(z)d_{q,p}(z) + O(z^{q+p}). \tag{2.2}$$

Произведение $n_{q,p}(z)d_{q,p}(z)$ представляет собой полином степени $p+q$, вронскиан $w_{q,p}(z)$ же есть полином степени на единицу меньше (или равен нулю, если $p = q = 0$). Таким образом, остаток $O(z^{q+p})$ пропорционален z^{q+p}, причем равенство в (2.2) возможно лишь в том случае, когда коэффициент пропорциональности при z^{q+p} равен взятому с обратным знаком произведению коэффициентов при старших степенях полиномов $n_{q,p}(z)$ и $d_{q,p}(z)$. Этот коэффициент пропорциональности $c_{q,p}$ находится из явного вида (1.4) полиномов $n_{q,p}(z)$ и $d_{q,p}(z)$. $\square$

Обозначим через $\Sigma^{(q,p)}$ наименьший замкнутый сектор, содержащий все нули знаменателя Паде $d_{q,p}(z)$,

$$\Sigma^{(q,p)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| \le \max_{k=1,2,\dots,p} |\arg \zeta_k|, \quad d_{q,p}(\zeta_k) = 0\}.$$

Некоторые полезные свойства нулей полиномов $n_{q,p}(z)$ и $d_{q,p}(z)$, в частности оценки для угла раствора сектора $\Sigma^{(q,p)}$, можно найти, например, в [10].

Теорема 1. *Пусть* A *– замкнутый линейный оператор, действующий в банаховом пространстве* $\mathfrak{B}$ *с плотной областью определения* $\mathfrak{D}(A)$. *Пусть для некоторых целых чисел* $0 \le q \le p$, $p \ge 1$, *выполнены следующие условия:*

(i) сектор $\Sigma^{(q,p)}$ *содержится в резольвентном множестве* $\varrho(A)$ *оператора* A*;*

(ii) существует $M_1 > 0$, *такое, что резольвента оператора* A *удовлетворяет неравенству*

$$\|(\lambda I - A)^{-1}\| \le \frac{M_1}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma^{(q,p)};$$

(iii) существует $M > 0$, такое, что при всех $\alpha > 0$

$$\|r^n_{q,p}(\alpha A)\| \le M, \quad n = 1, 2, ...$$

Тогда при $n \to \infty$ существует сильный предел $r^n_{q,p}(n^{-1}tA) \xrightarrow{s} \exp\{tA\}$ равномерно по t для любого компактного подмножества полуоси $[0, +\infty)$. Этот предел $\exp\{tA\}$ является ограниченной сильно непрерывной полугруппой с производящим оператором A, причем $\|\exp\{tA\}\| \le M$. Кроме того, имеет место следующая оценка скорости сходимости:

$$\|r^n_{q,p}(n^{-1}tA)x - \exp\{tA\}x\| \le l^{-1} c_{q,p} M^2 Nt \left(\frac{t}{n}\right)^{l-1} \|A^l x\|, \quad x \in \mathfrak{D}(A^l), \tag{2.3}$$

где $l = q + p + 1$, и $N \le M_1^{2p}$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что из условия (i) теоремы следует, что при $\alpha > 0$ и $q \le p$ рациональная функция от оператора A $r_{q,p}(\alpha A) = n_{q,p}(\alpha A) d^{-1}_{q,p}(\alpha A)$ корректно определена на всем пространстве $\mathfrak{B}$ и представляет собой ограниченный оператор. Покажем, что из условия (ii) следует сильная сходимость $r_{q,p}(\alpha A)$ при $\alpha \to 0$ к единичному оператору I. Для этого рассмотрим аналогичный предел оператора $(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1}$, где $\zeta_k \in \Sigma^{(q,p)}$ – один из нулей знаменателя Паде $d_{q,p}(z)$. Во-первых, из (ii) следует, что этот оператор равномерно по $\alpha > 0$ ограничен, $\|(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1}\| \le M_1$. Во-вторых, если $x \in \mathfrak{D}(A)$, то норма разности $(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1}x - x$ оценивается как

$$\|(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1}x - x\| = \|(I\zeta_k\alpha^{-1} - A)^{-1}Ax\| \le \alpha\frac{M_1}{|\zeta_k|}\|Ax\| \to 0, \quad \alpha \to 0,$$

т. е. оператор $(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1}$ сильно сходится к I на плотном множестве $\mathfrak{D}(A)$. Поэтому из теоремы Банаха–Штейнгауза следует $(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1} \xrightarrow{s} I$. Такой же вывод справедлив и для оператора $(I - \eta\alpha A)(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1}$ при любом $\eta \in \mathbb{C}$, поскольку имеет место тождество

$$(I - \eta\alpha A)(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1} = \zeta_k\eta I + (1 - \zeta_k\eta)(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1}.$$

Наконец, поскольку любой оператор перестановочен со своей резольвентой в регулярных точках $\lambda \in \varrho(A)$, $A(\lambda I - A)^{-1} \supset (\lambda I - A)^{-1}A$, то для $r_{q,p}(\alpha A)$ справедливо факторизованное представление:

$$r_{q,p}(\alpha A) = \prod_{k=1}^{q}(I - \eta_k^{-1}\alpha A)(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1} \prod_{k=q+1}^{p}(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1}.$$

Здесь через $\eta_k \in \mathbb{C}$, $k = 1, 2, ..., q$ обозначены нули числителя Паде $n_{q,p}(z)$. Из этого представления с учетом доказанного выше предельного соотношения $(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1} \xrightarrow{s} I$ видно, что $r_{q,p}(\alpha A) \xrightarrow{s} I$ при $\alpha \to 0$. Кроме того, ясно, что функция $\alpha \mapsto r_{q,p}(\alpha A)$ голоморфна в некоторой окрестности каждого $\alpha > 0$. Непосредственное вычисление производной по α дает, что

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} r_{q,p}(\alpha A) = A w_{q,p}(\alpha A) d_{q,p}^{-2}(\alpha A). \tag{2.4}$$

Отметим, что производная (2.4) является ограниченным всюду определенным оператором.

Рассмотрим теперь последовательность операторно-значных функций $V_n(t) = r_{q,p}^n(n^{-1}tA)$, $n = 1, 2, ...$ Используя полученные выше результаты относительно $r_{q,p}(\alpha A)$, можно сделать вывод о том, что при всех n операторы $V_n(t)$ непрерывно дифференцируемы в равномерной операторной топологии при $t > 0$ и сильно непрерывны справа при $t = 0$, т. е. $V_n(t) \xrightarrow{s} I$, $t \to 0$. Из выражения (2.4) для производной функции $r_{q,p}(\alpha A)$ следует

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_n(t) = A w_{q,p}(n^{-1}tA) d_{q,p}^{-2}(n^{-1}tA) r_{q,p}^{n-1}(n^{-1}tA), \quad t > 0. \tag{2.5}$$

Вронскиан $w_{q,p}(z)$, как было показано в предложении 1, представляет собой с точностью до $(-1)^p c_{q,p} z^{q+p}$ произведение полиномов $n_{q,p}(z) d_{q,p}(z)$. Поэтому в операторном варианте соотношение (2.1) имеет вид

$$w_{q,p}(\alpha A) \supset n_{q,p}(\alpha A) d_{q,p}(\alpha A) - (-1)^p c_{q,p} (\alpha A)^{q+p}.$$

Здесь левая часть определена на $\mathfrak{D}(A^{p+q-1})$, а правая часть – на $\mathfrak{D}(A^{p+q})$. Учитывая это представление для $w_{q,p}(\alpha A)$, выражение для производной функции $t \mapsto V_n(t)x$ при $x \in \mathfrak{D}(A)$ можно преобразовать к виду

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V_n(t)x = V_n(t)Ax - (-1)^p c_{q,p} \left(\frac{t}{n}\right)^{q+p} r_{q,p}^{n-1}(n^{-1}tA) A^{p+q} d_{q,p}^{-2}(n^{-1}tA) Ax. \tag{2.6}$$

Покажем теперь, что для каждого $t \geq 0$ последовательность операторов $V_n(t)$ при $n \to \infty$ имеет сильный предел, который мы будем обозначать $V(t)$. Представим разность $V_n(t)x - V_m(t)x$ с помощью интегрального тождества

$$V_n(t)x - V_m(t)x = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} \{-V_m'(t-s)V_n(s) + V_m(t-s)V_n'(s)\} x \mathrm{d}s.$$

Здесь предполагается, что $\epsilon > 0$ и в левой части первого равенства принят во внимание тот факт, что оператор $V_n(t)$ сильно непрерывен справа от нуля. Подынтегральное выражение вычисляется с помощью (2.5):

$$\{-V_m'(t-s)V_n(s)+V_m(t-s)V_n'(s)\}x = (-1)^p c_{q,p} r_{p,q}^{m-1}\Big(\frac{t-s}{m}A\Big) r_{p,q}^{n-1}\Big(\frac{s}{n}A\Big)\times$$
$$\times\bigg\{\Big(\frac{t-s}{m}\Big)^{p+q}A^{p+q}\,d_{p,q}^{-2}\Big(\frac{t-s}{m}A\Big)-\Big(\frac{s}{n}\Big)^{p+q}A^{p+q}\,d_{p,q}^{-2}\Big(\frac{s}{n}A\Big)\bigg\}Ax,\quad x\in\mathfrak{D}(A). \tag{2.7}$$

По условию (ii) теоремы точная верхняя грань $N = \sup\limits_{\alpha\geq 0}\|d_{p,q}^{-2}(\alpha A)\|$ является конечным числом, заведомо меньшим постоянной M_1^{2p}. Потому при $x\in\mathfrak{D}(A^{p+q+1})$ для нормы подынтегрального выражения (2.7) справедливо следующее неравенство:

$$\|\{-V_m'(t-s)V_n(s)+V_m(t-s)V_n'(s)\}x\|\leq$$
$$\leq c_{q,p}M^2N\left\{\Big(\frac{t-s}{m}\Big)^{q+p}+\Big(\frac{s}{n}\Big)^{q+p}\right\}\|A^{q+p+1}x\|,$$

интегрирование по s которого дает оценку нормы разности $V_n(t)x-V_m(t)x$:

$$\|V_n(t)x-V_m(t)x\|\leq l^{-1}c_{q,p}M^2Nt^l\left(\frac{1}{n^{l-1}}+\frac{1}{m^{l-1}}\right)\|A^lx\|,\quad l=q+p+1. \tag{2.8}$$

Таким образом, при $x\in\mathfrak{D}(A^l)$ последовательность $V_n(t)x$ представляет собой последовательность Коши и, следовательно, существует предел $V_n(t)x$ при $n\to\infty$. Так как область определения $\mathfrak{D}(A)$ плотна в $\mathfrak{B}$ и оператор A имеет регулярные точки, то область определения любой его положительной степени плотна в $\mathfrak{B}$. Поэтому при $n\to\infty$ существует сильный предел $V_n(t)\xrightarrow{s}V(t)$, причем $\|V(t)\|\leq M$ и $V(t)\xrightarrow{s}I$, $t\to 0$, так как $\|V_n(t)\|\leq M$ и $V_n(t)\xrightarrow{s}I$, $t\to 0$. Предельный переход по m в неравенстве (2.8) дает оценку скорости сходимости $V_n(t)$ к $V(t)$,

$$\|V_n(t)x-V(t)x\|\leq l^{-1}c_{q,p}M^2Nt\left(\frac{t}{n}\right)^{l-1}\|A^lx\|,\quad x\in\mathfrak{D}(A^l).$$

Отсюда видно, что сходимость $V_n(t)x$ к $V(t)x$ при $n\to\infty$ равномерна по t на каждом компактном подмножестве луча $[0,+\infty)$. Так как это верно для элементов из всюду плотного множества $\mathfrak{D}(A^l)$ и операторы $V_n(t)$ равномерно ограничены, то это верно и для любого элемента $x\in\mathfrak{B}$. Следовательно, предельный оператор $[0,+\infty)\ni t\mapsto V(t)$ является сильно непрерывной функцией t.

Остается показать, что предел $V(t)$ обладает полугрупповым свойством $V(t+s) = V(t)V(s)$, $t, s \geq 0$. Для этого выведем дифференциальное уравнение, которому подчиняется оператор $V(t)$. В выражении (2.6) для производной $V_n(t)$ последнее слагаемое при любом $x \in \mathfrak{D}(A)$ стремится к нулю, равномерно по t при $n \to \infty$. Это следует из того, что $\|r_{q,p}^{n-1}(n^{-1}t)\| \leq M$, а операторы $(\alpha A)^{q+p} d_{q,p}^{-2}(\alpha A)$, $\alpha = n^{-1}t$, сильно сходятся к нулевому оператору при $\alpha \to 0$. Последнее утверждение можно легко проверить, если воспользоваться факторизованным представлением для $d_{q,p}^{-2}(\alpha A)$, коммутативностью операторов A и $(I - \zeta_k \alpha A)^{-1}$ и предельными соотношениями $\alpha A(I - \zeta_k^{-1}\alpha A)^{-1} \xrightarrow{s} 0$, $\alpha \to 0$, $k = 1, 2, ..., p$.

Учитывая, что функция $[0, t] \ni s \mapsto V_n'(s)x$ непрерывна, если $x \in \mathfrak{D}(A)$, проинтегрируем левую и правую части выражения (2.6) по s от 0 до t. Предельный переход $n \to \infty$ под знаком интеграла дает

$$V(t)x - x = \int_0^t \mathrm{d}s V(s)Ax, \tag{2.9}$$

где принят во внимание тот факт, что второе слагаемое правой части выражения (2.6) при любом $x \in \mathfrak{D}(A)$ в пределе равно нулю. Переход к пределу под знаком интеграла законен, поскольку сходимость $V_n(s)$ к $V(s)$ равномерна по s. Непрерывность подынтегральной функции в уравнении (2.9) гарантирует существование сильной производной у функции $t \mapsto V(t)x$, причем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} V(t)x = V(t)Ax = AV(t)x, \quad x \in \mathfrak{D}(A). \tag{2.10}$$

Здесь второе равенство есть следствие перестановочного соотношения $V_n(t)Ax = AV_n(t)x$, которое сохраняется в пределе благодаря замкнутости оператора A. Уравнение (2.10) с учетом рассмотренных выше свойств оператора $V(t)$ позволяет утверждать, что $V(t)$ является ограниченной сильно непрерывной полугруппой с производящим оператором A [2]. Теорема доказана.

□

Отметим, что случае $q = 0$ и $p = 1$ условия теоремы 1 совпадают с условиями теоремы Хилле–Иосида–Филлипса.

3 Уравнения с оператором класса $\mathcal{K}_l([a, b])$

Операторы $F^{(\varkappa)}(t, s)$ в выражении (1.3), вообще говоря, определены лишь формально, за исключением случая, когда $A(t)$ является ограниченным оператором. В связи с этим сформулируем требования на $A(t)$, которые позволят нам в дальнейшем считать операторы $F^{(\varkappa)}(t,s)$ корректно определенными операторами с подходящей областью определения. Дадим определение классов операторов $\mathcal{K}_l([a,b])$, элементами которых мы в дальнейшем и ограничимся.

Определение 1. Будем говорить, что семейство замкнутых линейных операторов $A(t)$, $a \le t \le b$, действующих в банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, принадлежит классу $\mathcal{K}_l([a,b])$, $l \ge 1$, если выполнены следующие условия:

(i) для каждого $t \in [a,b]$ оператор $I + A(t)$ является производящим оператором сжимающей полугруппы;

(ii) для $k = 1, 2, ..., l$ области определения степеней $A^k(t)$ не зависят от t, $\mathfrak{D}(A^k(t)) = \mathfrak{D}_k$;

(iii) операторы $B_k(t,s) = A^k(t)A^{-k}(s)$ равномерно ограничены по норме при $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$;

(iv) операторы $B_k(t,s)$ непрерывно дифференцируемы по t в сильном смысле хотя бы для одного значения $s \in [a,b]$.

Причина, по которой в условии (i) определения 1 требование быть производящим оператором сжимающей полугруппы накладывается на оператор $I + A(t)$, а не на собственно оператор $A(t)$, продиктована исключительно соображениями удобства в обозначениях при доказательстве последующих теорем и не является ограничением общности. В самом деле, если $A(t)$ порождает сжимающие полугруппы при всех $t \in [a,b]$, то всегда можно перейти к операторам $Y(t) = A(t) - I$, для которых условие (i) будет заведомо выполнено. Сами же эволюционные операторы, отвечающие уравнениям с операторами $A(t)$ и $Y(t)$, будут отличаться лишь на тривиальный множитель $\mathrm{e}^{(t-s)}$.

Отметим, что из требования (i) и теоремы Хилле–Иосида [8] следует, что операторы $A^{-1}(t)$ всюду определены и равномерно по t ограничены, $\|A^{-1}(t)\| \le 1$. Из пункта (ii) следует, что операторы $B_k(t,s)$ ограничены. В самом деле, независимость от t областей определения $\mathfrak{D}(A^k(t)) = \mathfrak{D}_k$ позволяет утверждать, что $B_k(t,s)$ всюду определен, а замкнутость оператора $A^k(t)$, которая следует из ограниченности $A^{-k}(t)$, свидетельствует о том, что $B_k(t,s)$ также является замкнутым оператором. Поэтому применение теоремы о замкнутом графике приводит к выводу об ограниченности $B_k(t,s)$.

Согласно условию (iii), существуют такие положительные постоянные L_k, что $\|B_k(t,s)\| \le L_k$, $k = 1, ..., l$ при всех t и s. В дальнейшем мы будем обозначать через L максимальную из этих постоянных, $L = \max\limits_k L_k$.

Условие (iv) позволяет утверждать, что сильные частные производные $\partial_t B_k(t,s)$ и $\partial_s B_k(t,s)$ сильно непрерывны по совокупности переменных и равномерно ограничены по ним на компакте $[a,b] \times [a,b]$. Рассмотрим это более подробно. Пусть для $s_0 \in [a,b]$ функция $t \mapsto B_k(t,s_0)$ непрерывно дифференцируема в сильном смысле. Отсюда следует, что то же самое справедливо для его обратного оператора $s \mapsto B^{-1}(s,s_0) = B_k(s_0,s)$ в силу равномерной ограниченности этого обратного оператора [9], следующей из условия (iii). Поэтому при произвольных t и s из представления оператора $B_k(t,s)$ в виде произведения $B_k(t,s) = B_k(t,s_0)B_k(s_0,s)$ следует его непрерывность по совокупности переменных. Это же представление позволяет сделать вывод о том, что частные производные $\partial_t B_k(t,s)$ и $\partial_s B_k(t,s)$ существуют при всех t и s и непрерывны по каждой из этих переменных. Наконец, для того чтобы утверждать их непрерывность по совокупности переменных, достаточно показать равномерную ограниченность $\|\partial_t B_k(t,s_0)\|$ по t и $\|\partial_s B_k(s_0,s)\|$ по s. Покажем это, например, для $\|\partial_t B_k(t,s_0)\|$. Функция $[a,b] \ni t \mapsto \partial_t B_k(t,s_0)x$ непрерывна на компакте, а значит, ограничена при любом $x \in \mathfrak{B}$. Поэтому в силу принципа равномерной ограниченности следует, что $\|\partial_t B_k(t,s_0)\| \leq \text{const}$, где const не зависит от t. То же самое справедливо и для $\|\partial_s B_k(s_0,s)\|$. Еще одно применение принципа равномерной ограниченности позволяет сделать вывод о том, что существует $K_k > 0$, такое, что $\|\partial_t B_k(t,s)\| \leq K_k$ при всех $(t,s) \in [a,b] \times [a,b]$. В дальнейшем через K мы будем обозначать максимальную по величине константу $K = \max\limits_k K_k$, связанную с классом $\mathcal{K}_l([a,b])$.

Наконец, отметим, что если $A(t) \in \mathcal{K}_l([a,b])$, $l \geq 1$, то задача Коши для уравнения (1.1) разрешима единственным образом с помощью эволюционного оператора (1.2), поскольку при $l = 1$ условия (i)-(iv) в определении 1 гарантируют выполнение условий теоремы Като [1], а также из того, что, очевидно, $\mathcal{K}_1([a,b]) \supset \mathcal{K}_2([a,b]) \supset \mathcal{K}_3([a,b]) \supset \ldots$

Предложение 2. *Пусть $A(t) \in \mathcal{K}_m([a,b])$. Тогда моном $A(t_1)A(t_2)...A(t_m)$ представляет собой замкнутый оператор, определенный и сильно непрерывный по совокупности переменных $(t_1,t_2,...,t_m) \in \mathop{\times}\limits_{i=1}^{m}[a,b]$ на $\mathfrak{D}_m$, причем*

$$\|A(t_1)A(t_2)...A(t_m)x\| \leq L^m \|A_0^m x\|, \quad A_0 \equiv A(a), \quad x \in \mathfrak{D}_m. \tag{3.1}$$

Доказательство. Утверждение следует из равенства

$$\begin{aligned}
&A(t_1)A(t_2)...A(t_m)x = \\
&= \{A(t_1)A^{-1}(t_2)\}\{A^2(t_2)A^{-2}(t_3)\}\{A^3(t_3)A^{-3}(t_3)\}...\{A^m(t_m)A_0^{-m}\}A_0^m x = \\
&\qquad = ... = B_1(t_1,t_2)B_2(t_2,t_3)...B_{m-1}(t_{m-1},t_m)B_m(t_m,t_0)A_0^m x,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

где операторы $B_k(t,s)$, $k=1,2,...,m$, равномерно ограничены, $\|B_k(t,s)\| \leq \leq L$, и сильно непрерывны по совокупности переменных $s,t \in [a,b]$. Моном $A(t_1)A(t_2)...A(t_m)$ замкнут, т. к. имеет всюду определенный ограниченный обратный $A^{-1}(t_m)A^{-1}(t_{m-1})...A^{-1}(t_1)$, причем справедлива оценка $\|A^{-1}(t_m)A^{-1}(t_{m-1})...A^{-1}(t_0)\| \leq 1$. □

Из доказанного предложения следует, что если операторно-значная функция $[a,b] \in t \mapsto A(t)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_\varkappa([a,b])$, то на $\mathfrak{D}_\varkappa$ корректно определен оператор $F^{(\varkappa)}(t,s)$. В самом деле, для всех $x \in \mathfrak{D}_\varkappa$ функции $(\tau_1,\tau_2,...,\tau_k) \mapsto \mathfrak{g}_k(A(\tau_1),A(\tau_2),...,A(\tau_k))x$, $k=1,2,...,\varkappa$, непрерывны по всем переменным, поскольку $\mathfrak{g}_k$ представляют собой конечную сумму рассмотренных в предложении 2 мономов. Следовательно, интегралы, входящие в определение (1.3), существуют и соответствующий оператор $F^{(\varkappa)}(t,s)$ действительно определен на $\mathfrak{D}_\varkappa$. Введем для удобства отдельное обозначение каждого члена в сумме (1.3):

$$V^{(m)}(t,s) = \int_s^t \mathrm{d}\tau_1 \int_s^{\tau_1} \mathrm{d}\tau_2 ... \int_s^{\tau_{m-1}} \mathrm{d}\tau_m \, \mathfrak{g}_m(A(\tau_1),A(\tau_2),...,A(\tau_m)). \quad (3.3)$$

Для получения аналогичных (3.1) оценок для оператора $F^{(\varkappa)}(t,s)$ и его степеней оказывается полезным следующее

Предложение 3. *Пусть* $A(t) \in \mathcal{K}_l([a,b])$, $l = \sum_{i=1}^{k} m_i$, $m_i \geq 1$, $k \geq 1$. *Тогда на* $\mathfrak{D}_l$ *определено произведение* $V^{(m_1)}(t,s)V^{(m_2)}(t,s)...V^{(m_k)}(t,s)$, $t,s \in [a,b]$, *причем справедлива оценка*

$$\|V^{(m_1)}(t,s)V^{(m_2)}(t,s)...V^{(m_k)}(t,s)x\| \leq (5L)^l(t-s)^l\|A_0^l x\|, \quad x \in \mathfrak{D}_l. \quad (3.4)$$

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{D}_l$. Тогда определен элемент $A_0^{l_k}V^{(m_k)}(t,s)x$, $l_k = l - m_k$. В самом деле, замкнутый оператор $A_0^{l_k}$ можно внести под знак интеграла в (3.3), поскольку из предложения 2 следует, что подынтегральная функция $(\tau_1,\tau_2,...,\tau_{m_1}) \mapsto A_0^{l_k}\, \mathfrak{g}_{m_1}(A(\tau_1),A(\tau_2),...,A(\tau_{m_1}))x$ непрерывна. Таким образом, $V^{(m_k)}\mathfrak{D}_l \subset \mathfrak{D}_{l_k}$. Учитывая, что каждый из $V^{(m_i)}$ определен на $\mathfrak{D}_{m_i}$, получим $V^{(m_{k-1})}(t,s)V^{(m_k)}(t,s)\mathfrak{D}_l \subset V^{(m_{k-1})}(t,s)\mathfrak{D}_{l_k} \subset \subset \mathfrak{D}_{l_{k-1}}$, $l_{k-1} = l - m_k - m_{k-1}$, и т. д. В конечном итоге приходим к включению $V^{(m_1)}V^{(m_2)}...V^{(m_k)}\mathfrak{D}_l \subset \mathfrak{B}$, т. е. для каждого $x \in \mathfrak{D}_l$ произведение $V^{(m_1)}V^{(m_2)}...V^{(m_k)}$ действительно определено.

Из результатов работы [4] следует, что полином $\mathfrak{g}_m$ может быть представлен в виде конечной суммы коммутаторных мономов $\mathfrak{p}_m^{(\alpha)}$,

$$\mathfrak{g}_m(A(t_1),A(t_2),...,A(t_m)) = \sum_{\alpha=1}^{(2m-3)!!} b_\alpha \mathfrak{p}_m^{(\alpha)}(A(t_1),A(t_2),...,A(t_m)), \quad m \geq 2.$$

Коммутаторный моном $\mathfrak{p}_m^{(\alpha)}(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m)$ от некоммутирующих переменных ξ_i однороден степени 1 по каждой своей переменной и представляет собой "слово" $\xi_{i_1}\xi_{i_2}...\xi_{i_m}$, в котором некоторым регулярным (имеющим смысл) способом расставлена $m-1$ пара коммутаторных скобок $[\cdot,\cdot]$. В [4] подробно описана процедура построения мономов $\mathfrak{p}_m^{(\alpha)}$ и вычисления коэффициентов b_α. Таким образом, $V^{(m_1)}V^{(m_2)}...V^{(m_k)}x$, $x\in\mathfrak{D}_l$, можно представить в виде

$$V^{(m_1)}(t,s)V^{(m_2)}(t,s)...V^{(m_k)}(t,s)x = \\ = \int \mathrm{d}\tau^{(1)}...\int \mathrm{d}\tau^{(k)} \sum_{\alpha_1,...,\alpha_k} b_{\alpha_1}...b_{\alpha_k}\mathfrak{p}_{m_1}^{(\alpha_1)}...\mathfrak{p}_{m_k}^{(\alpha_k)}x.$$

Здесь $\mathrm{d}\tau^{(i)}$ обозначает m_i-мерный элемент объема $\mathrm{d}\tau_1^{(i)}...\mathrm{d}\tau_{m_i}^{(i)}$, каждый интеграл берется по части m_i-мерного куба $s\le\tau_{m_i}^{(i)}\le...\le\tau_1^{(i)}\le t$, а $\mathfrak{p}_{m_i}^{(\alpha_i)}$ есть краткое обозначение коммутаторного монома $\mathfrak{p}_{m_i}^{(\alpha_i)}(A(\tau_1^{(i)}),...,A(\tau_{m_i}^{(i)}))$, $i=1,2,...,k$. С учетом того, что раскрытие каждой пары коммутаторных скобок приводит к удвоению числа слагаемых, произведение $\mathfrak{p}_{m_1}^{(\alpha_1)}...\mathfrak{p}_{m_k}^{(\alpha_k)}$ состоит из суммы не более чем 2^{l-k} мономов вида (3.2) и предложение 2 позволяет сделать оценку $\|\mathfrak{p}_{m_1}^{(\alpha_1)}...\mathfrak{p}_{m_k}^{(\alpha_k)}x\|\le 2^{l-k}L^l\|A_0^lx\|$. Поэтому

$$\|V^{(m_1)}(t,s)V^{(m_2)}(t,s)...V^{(m_k)}(t,s)x\|\le \\ \le \int \mathrm{d}\tau^{(1)}...\int \mathrm{d}\tau^{(k)} \sum_{\alpha_1,...\alpha_k} |b_{\alpha_1}|...|b_{\alpha_k}|\,\|\mathfrak{p}_{m_1}^{(\alpha_1)}...\mathfrak{p}_{m_k}^{(\alpha_k)}x\|\le \\ \le \left(\frac{1}{m_1!}\sum_{\alpha_1}|b_{\alpha_1}|\right)...\left(\frac{1}{m_k!}\sum_{\alpha_k}|b_{\alpha_k}|\right)2^{l-k}L^l\|A_0^lx\|\le \\ \le \left(\frac{\sigma}{4}\right)^k\left(\frac{4L\chi(\sigma)}{\sigma}\right)^l\|A_0^lx\|,\quad x\in\mathfrak{D}_l.$$

Здесь в последнем неравенстве была использована оценка, указанная в работе [4]:

$$\frac{1}{m!}\sum_\alpha|b_\alpha|\le\frac{\sigma}{2}\left(\frac{2\chi(\sigma)}{\sigma}\right),\quad \chi(\sigma)=2+\frac{\sigma}{2}(1-\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma}{2}),$$

где σ – любое число из интервала $(0,2\pi)$. Для упрощения последующих оценок положим $\sigma=4\in(0,2\pi)$. При этом $\chi(4)=4,915...<5$, откуда и следует неравенство (3.4). Отметим, что единственный минимум функции $4\sigma^{-1}\chi(\sigma)$ на интервале $(0,2\pi)$ достигается при $\sigma=2,78...$ со значением $4,51...$ $\square$

Лемма 1. *Пусть семейство операторов* $A(t) \in \mathcal{K}_l([a,b])$, $l \geq 1$. *Тогда эволюционный оператор* $U(t,s)$, $a \leq s \leq t \leq b$, *соответствующий* $A(t)$, *отображает* $\mathfrak{D}_l$ *в* $\mathfrak{D}_l$, *и существует определенный на всем* $\mathfrak{B}$ *ограниченный сильно непрерывный по совокупности переменных оператор* $W_l(t,s) = A^l(t)U(t,s)A^{-l}(s)$, *причем* $\|W_l(t,s)\| \leq \exp\{K(t-s)\}$.

Доказательство. Пусть $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ – произвольное разбиение отрезка $[a,b]$. Обозначим через $U(t,s;\Delta)$, $s \leq t$, кусочно-непрерывную функцию, задаваемую выражением

$$U(t,s;\Delta) = \prod_{m=j}^{k} \exp\{(t_m - t_{m-1})A(t_m)\}, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad s \in [t_{k-1}, t_k),$$

при $1 \leq k \leq j \leq n$ и равную единичному оператору, если t и s попадают в один интервал разбиения, $j = k-1$. По условию $\alpha \mapsto \exp\{\alpha A(t_j)\}$ являются сжимающими полугруппами, так что $\|U(t,s;\Delta)\| \leq 1$. Как следует из результатов работы [1], при стремлении диаметра разбиения $|\Delta| \to 0$ операторы $U(t,s;\Delta)$ сильно сходятся к эволюционному оператору $U(t,s)$, отвечающему уравнению (1.1), причем эта сходимость равномерна по t и s.

Полугруппа $\exp\{\alpha A(t_j)\}$ отображает $\mathfrak{D}[A^l(t_j)]$ в $\mathfrak{D}[A^l(t_j)]$ и перестановочна со степенью своего генератора $A^l(t_j)$, т. е. $A^l(t_j)\exp\{\alpha A(t_j)\} \supset \exp\{\alpha A(t_j)\}A^l(t_j)$. Поэтому ступенчатая функция $W_l(t;\Delta)$, задаваемая равенством

$$W_l(t;\Delta) = A^l(t_j)U(t,a;\Delta)A^{-l}(a), \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \tag{3.5}$$

определена на всем $\mathfrak{B}$, поскольку по условию $\mathfrak{D}[A^l(t)] = \mathfrak{D}_l$ не зависит от t. С учетом определения операторов $B_k(t,s)$ оператор $W_l(t;\Delta)$ можно представить в виде произведения

$$W_l(t;\Delta) = \prod_{m=j}^{1} \exp\{(t_m - t_{m-1})A(t_m)\}B_l(t_m, t_{m-1}), \quad t \in [t_j, t_{j+1}).$$

Здесь предполагается, что $1 \leq j \leq n$. При $t \in [t_0, t_1)$ из (3.5) следует, что $W_l(t;\Delta) = I$.

Для доказательства леммы нам нужно показать, что $W_l(t;\Delta)$ имеет сильный предел при $|\Delta| \to 0$. Для этого представим разность $W_l(t_j;\Delta) - U(t_j,a;\Delta)$ при $1 \leq j \leq n$ в виде

$$W_l(t_j;\Delta) - U(t_j,a;\Delta) = \sum_{k=1}^{j} U(t_j, t_{k-1};\Delta)\,\{B_l(t_k,t_{k-1}) - I\}\,W(t_{k-1};\Delta).$$

Это соотношение можно рассматривать как уравнение типа Вольтерра для $W_l(t_j;\Delta)$ и решать его методом последовательных приближений:

$$W_l(t_j;\Delta)=\sum_{p=0}^{\infty}W_l^{(p)}(t_j;\Delta),\quad W_l^{(0)}(t_j;\Delta)=U(t_j,a;\Delta),\quad j=0,1,2,...,n; \tag{3.6}$$

$$W_l^{(p)}(t_j;\Delta)=\sum_{k=1}^{j}U(t_j,t_{k-1};\Delta)\left\{B_l(t_k,t_{k-1})-I\right\}W_l^{(p-1)}(t_{k-1};\Delta), \tag{3.7}$$

где p есть номер итерации, $p=1,2,\ldots$ Фактически, ряд (3.6) конечный и содержит не более n отличных от нуля членов, т. к. после p итераций для $W_l(t_j;\Delta)$ получается точный ответ при $j\le p$. Оценим норму каждой итерации $W^{(p)}(t_j;\Delta)$. Так как $A(t)\in\mathcal{K}_l([a,b])$, то существует такое K, что $\|\partial_t B_l(t,s)\|\le K$ равномерно по t и s. Покажем с помощью индукции по p, что

$$\|W_l^{(p)}(t_j;\Delta)\|\le\frac{K^p}{p!}(t_j-t_0)^p. \tag{3.8}$$

Для $p=0$ это очевидно, т. к. $\|W_l^{(0)}(t_j;\Delta)\|=\|U(t_j,a;\Delta)\|\le 1$. Пусть (3.8) уже доказано для $p-1$. Учитывая интегральное соотношение

$$B_l(t_k,t_{k-1})-I=\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathrm{d}\tau\,\partial_\tau B_l(\tau,t_{k-1}), \tag{3.9}$$

и пользуясь (3.7), получаем для $\|W_l^{(p)}(t_j,\Delta)\|$ неравенство

$$\begin{aligned}\|W_l^{(p)}(t_j;\Delta)\|&\le\sum_{k=1}^{j}\|U(t_j,t_{k-1};\Delta)\|\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathrm{d}\tau K\|W_l^{(p-1)}(t_{k-1};\Delta)\|\le\\&\le\frac{K^p}{(p-1)!}\sum_{k=1}^{j}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\mathrm{d}\tau(\tau-t_0)^{p-1}=\frac{K^p}{p!}(t_j-t_0)^p,\end{aligned}$$

что и доказывает справедливость (3.8).

Учитывая интегральное представление (3.9) для $B_l(t_k,t_{k-1})-I$ и определения ступенчатых функций $U(t,s;\Delta)$ и $W_l(t;\Delta)$, перепишем (3.7) в эквивалентном виде:

$$W_l^{(p)}(t;\Delta)=\int_a^{t_j}\mathrm{d}sU(t,s;\Delta)C_l(s;\Delta)W^{(p-1)}(s;\Delta),\quad p=1,2,..., \tag{3.10}$$
$$W^{(0)}(t;\Delta)=U(t,a;\Delta).$$

Здесь обозначения $C_l(\tau;\Delta)$ и $W_l^{(p)}(\tau;\Delta)$ при $\tau\in[t_{k-1},t_k)$ используются для функций $\partial_\tau B_l(\tau,t_{k-1})$ и $W_l^{(p)}(t_{k-1};\Delta)$ соответственно. Интеграл в (3.10) понимается как сумма сильных интегралов Римана по промежуткам непрерывности подынтегральной функции.

Рассмотрим последовательность функций $W_l^{(p)}(t)$, задаваемую следующими рекуррентными соотношениями:

$$W_l^{(p)}(t)=\int_a^t \mathrm{d}sU(t,s)C_l(s)W_l^{(p-1)}(s),\quad p=1,2,...;\tag{3.11}$$

$$W_l^{(0)}(t)=U(t,a),\quad C_l(t)=\partial_\tau B_l(\tau,t)\Big|_{\tau=t}.$$

Функция $C_l(t)$ ограничена и сильно непрерывна по условию, функция $U(t,s)$ также ограничена и сильно непрерывна. Предполагая наличие этих свойств у $W_l^{(p-1)}(t)$, из (3.11) легко сделать заключение, что оператор $W_l^{(p)}(t)$ также определен, ограничен и сильно непрерывен по t. Проводя индукцию по p, устанавливаем, что это справедливо для всех p.

Так же по индукции докажем теперь, что имеет место сходимость $W_l^{(p)}(t;\Delta)\xrightarrow{s}W_l^{(p)}(t)$ при $|\Delta|\to 0$ равномерно по t. Для $p=0$ это выполнено, поскольку, как уже отмечалось, $U(t,s;\Delta)\xrightarrow{s}U(t,s)$ равномерно по t и s. Пусть это верно для $p=r-1$. В этом случае из оценки (3.8) следует, что

$$\|W_l^{(r-1)}(t)\|\le\frac{K^{r-1}(b-a)^{r-1}}{(r-1)!}.\tag{3.12}$$

Функция $C_l(t;\Delta)$ сходится к $C_l(t)$ равномерно по t даже в смысле нормы, поскольку из равенства $B_l(t,t_k)=B_l(t,s_0)B_l(s_0,t_k)$ следует, что $C_l(t;\Delta)=$ $=C_l(t)B_l(t,t_k)$ при $t\in[t_k,t_{k+1})$, что, в свою очередь, позволяет установить оценку $\|C_l(t)-C_l(t;\Delta)\|\le\|C_l(t)\|\,\|I-B_l(t,t_k)\|\le K^2|\Delta|$. Таким образом, каждый из сомножителей под интегралом в (3.10) равномерно по Δ, s и t ограничен и сильно сходится при $|\Delta|\to 0$ к операторам $U(t,s)$, $C_l(s)$ и $W_l^{(r-1)}(s)$ соответственно, причем эта сходимость равномерна по s и t. С учетом компактности отрезка $[a,b]$, в котором принимают значения переменные s и t, это позволяет сделать вывод о том, что

$$U(t,s;\Delta)C_l(s;\Delta)W_l^{(r-1)}(s;\Delta)\xrightarrow{s}U(t,s)C_l(s)W^{(r-1)}(s),\quad |\Delta|\to 0,$$

равномерно по s и t. Отсюда следует сходимость $W_l^{(p)}(t;\Delta)\xrightarrow{s}W_l^{(p)}(t)$ при $p=r$, причем равномерная по t, что и завершает индукцию.

Как следует из оценки (3.12) и рассмотренных выше свойств $W_l^{(p)}(t)$, при всех $t\in[a,b]$ существует сильно непрерывный предельный оператор

$$W_l(t)=\sum_{p=0}^{\infty}W_l^{(p)}(t),\quad \|W_l(t)\|\le\exp\{K(b-a)\},\tag{3.13}$$

причем ряд сходится в смысле равномерной операторной топологии. К этому же предельному оператору сильно сходится и $W_l(t;\Delta)$, поскольку

$$\|W_l(t;\Delta)x - W_l(t)x\| \le$$
$$\le \sum_{p=0}^{m} \|W_l^{(p)}(t,\Delta)x - W_l^{(p)}(t)x\| + \|x\| \sum_{p=m+1}^{\infty} \left\{\|W_l^{(p)}(t,\Delta)\| + \|W_l^{(p)}(t)\|\right\}$$

при всех $x \in \mathfrak{B}$. Вторая сумма может быть сделана сколь угодно малой независимо от Δ с помощью выбора достаточно большого m в силу (3.8) и (3.12), а первая сумма с фиксированным m – с помощью выбора достаточно мелкого разбиения Δ в силу $W_l^{(p)}(t;\Delta) \xrightarrow{s} W_l^{(p)}(t)$.

Таким образом,мы показали, что $W_l(t;\Delta) \xrightarrow{s} W_l(t)$ при $|\Delta| \to 0$, причем предельный оператор сильно непрерывен. Для завершения доказательства выберем $t = b$ и, возвращаясь к определению (3.5) для $W_l(t;\Delta)$, получим предельное соотношение

$$A^l(b)U(b,a;\Delta)A^{-l}(a)x \to W_l(b)x, \quad |\Delta| \to 0, \quad x \in \mathfrak{B}.$$

Учитывая, что $U(b,a;\Delta)A^{-l}(a)x \to U(b,a)A^{-l}(a)x$ при $|\Delta| \to 0$ и оператор $A^l(b)$ замкнут, т. к. имеет всюду определенный замкнутый обратный, получаем, что

$$U(b,a)A^{-l}(a)x \in \mathfrak{D}_l, \quad A^l(b)U(b,a)A^{-l}(a)x = W_l(b)x, \quad \forall x \in \mathfrak{B}.$$

Ясно, что проведенное рассмотрение остается в силе, если взять вместо b и a произвольные b' и a' из отрезка $[a,b]$, $a' \le b'$. Обозначим соответствующий оператору $W_l(b)$ оператор через $W_l(b',a')$. Аналогичное рассмотрение уравнений (3.11) показывает, что предельный оператор $W_l(b',a')$ сильно непрерывен не только по t, но и по совокупности переменных, а из (3.13) следует оценка $\|W_l(b',a')\| \le \exp\{K(b'-a')\}$. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть $A(t) \in \mathcal{K}_l([a,b])$, где $l = \varkappa(\varkappa+1)$. Предположим, что для некоторого $s \in [a,b]$ операторы $F^{(\varkappa)}(t,s)$, определенные на $\mathfrak{D}_\varkappa$, при всех $t > s$ из достаточно малой окрестности s обладают замкнутыми расширениями $\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s) \supset F^{(\varkappa)}(t,s)$, которые являются производящими операторами сжимающих полугрупп $\alpha \mapsto \exp\{\alpha\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)\}$. Тогда при $\alpha = 1$ эти полугруппы аппроксимируют на $\mathfrak{D}_l$ эволюционный оператор $U(t,s)$ с точностью $O((t-s)^{\varkappa+1})$, т.е.*

$$\|\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)\}x - U(t,s)x\| \le (t-s)^{\varkappa+1}E'\|A^l(s)x\|, \quad x \in \mathfrak{D}_l,$$

где постоянная E' не зависит от t и s.

Доказательство. Из предложений 2 и 3 следует, что на $\mathfrak{D}_l$ определены операторы $[F^{(\varkappa)}(t,s)]^k$, $k = 0,1,...,\varkappa+1$. Пусть $x \in \mathfrak{D}_l$. Для нормы разности $\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)\}x - U(t,s)x$, которую нам нужно оценить, справедливо следующее неравенство:

$$\|\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)\}x - U(t,s)x\| \leq \|\sum_{k=0}^{\varkappa} T^{(k)}(t,s)x - U(t,s)x\| +$$
$$+ \|\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)\}x - \sum_{k=0}^{\varkappa}\frac{1}{k!}[F^{(\varkappa)}(t,s)]^k x\| +$$
$$+ \|\sum_{k=0}^{\varkappa}\Big\{\frac{1}{k!}[F^{(\varkappa)}(t,s)]^k x - T^{(k)}(t,s)x\Big\}\|, \quad (3.14)$$

где через $T^{(k)}(t,s)$ обозначены операторы

$$T^{(k)}(t,s) = \int_s^t \mathrm{d}\tau_1 \int_s^{\tau_1}\mathrm{d}\tau_2 ... \int_s^{\tau_{k-1}}\mathrm{d}\tau_k A(\tau_1)A(\tau_2)...A(\tau_k).$$

Эти операторы согласно предложению 2 определены на $\mathfrak{D}_k \supset \mathfrak{D}_l$, $k = 1,2,...,\varkappa$.

Оценим последовательно величину каждого из трех слагаемых в правой части неравенства (3.14). При $x \in \mathfrak{D}_{\varkappa+1}$ для эволюционного оператора $U(t,s)$ справедливо представление, получаемое с помощью обычных последовательных приближений:

$$U(t,s)x = \sum_{k=0}^{\varkappa} T^{(k)}(t,s)x + \int_s^t \mathrm{d}\tau_1 ... \int_s^{\tau_\varkappa}\mathrm{d}\tau_{\varkappa+1}A(\tau_1)...A(\tau_{\varkappa+1})U(\tau_{\varkappa+1},s)x, \quad (3.15)$$

Это представление можно доказать по индукции, пользуясь каждый раз тем, что функция $(\tau_1,...\tau_k) \mapsto A(\tau_1)...A(\tau_k)U(\tau_k,s)x = B_1(\tau_1,\tau_2)B_2(\tau_2,\tau_3)\times \times ... B_{k-1}(\tau_{k-1},\tau_k)W_k(\tau_k,s)A^k(s)x$ в остаточном члене (3.15) согласно лемме 1 непрерывна по переменным τ_i, в частности, интегрируема по ним. Из (3.15) получается оценка первого слагаемого правой части неравенства (3.14) в виде

$$\|U(t,s)x - \sum_{k=0}^{\varkappa}T^{(k)}(t,s)x\| \leq \frac{L^\varkappa \mathrm{e}^{K(t-s)}}{(\varkappa+1)!}\|A^{\varkappa+1}(s)x\| \leq \frac{L^\varkappa \mathrm{e}^{K(b-a)}}{(\varkappa+1)!}\|A^l(s)x\|,$$

где принято во внимание то, что $\|B_k(t,s)\| \leq L$, $\|W_{\varkappa+1}(t,s)\| \leq \mathrm{e}^{K(t-s)}$, а также неравенство $\|A^{-1}(s)\| \leq 1$.

Перейдем ко второму слагаемому. Для полугруппы $\alpha \mapsto \exp\{\alpha\widetilde{F}^{\varkappa}(t,s)\}$ справедливо разложение по α, аналогичное (3.15), откуда следует

$$\|\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)\}x - \sum_{k=0}^{\varkappa}\frac{1}{k!}[\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)]^k x\| \leq \frac{1}{(\varkappa+1)!}\|\,[\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)]^{\varkappa+1}x\|.$$

Отметим, что при всех $x \in \mathfrak{D}_l$ и $k = 1,2,...,\varkappa+1$ имеет место равенство $[F^{(\varkappa)}(t,s)]^k x = [\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)]^k x$, поскольку, как уже отмечалось, рассматриваемые степени $[F^{(\varkappa)}(t,s)]^k$ корректно определены на $\mathfrak{D}_l$, а $\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)$ по условию расширяет $F^{(\varkappa)}(t,s)$. В свою очередь, для $\|\,[F^{(\varkappa)}(t,s)]^{\varkappa+1}x\|$ справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned}
&\|\,[F^{(\varkappa)}(t,s)]^{\varkappa+1}x\| \leq \\
&\quad\leq \sum_{m_1,m_2,...,m_{\varkappa+1}=1}^{\varkappa} \|V^{(m_1)}(t,s)V^{(m_2)}(t,s)...V^{(m_{\varkappa+1})}(t,s)x\| \leq \\
&\qquad\leq \sum_{m_1,m_2,...,m_{\varkappa+1}=1}^{\varkappa} (5L)^{\sum\limits_{i=1}^{\varkappa+1} m_i}(t-s)^{\sum\limits_{i=1}^{\varkappa+1} m_i}\|A^{\sum\limits_{i=1}^{\varkappa+1} m_i}(s)x\|. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

Здесь в последнем неравенстве мы использовали предложение 3. Поскольку $L \geq 1$, то это неравенство можно только усилить, заменив в правой части $(5L)^{\sum\limits_{i=1}^{\varkappa+1} m_i}$ на $(5L)^{\varkappa(\varkappa+1)}$. Аналогичное рассмотрение для $(t-s)^{\sum\limits_{i=1}^{\varkappa+1} m_i}$ говорит о том, что этот множитель может быть заменен множителем $(t-s)^{\varkappa+1}$, поскольку нас интересуют близкие значения t и s и мы можем всегда считать $t-s<1$. И, наконец, точно также можно заменить $\|A^{\sum\limits_{i=1}^{\varkappa+1} m_i}(s)x\|$ на $\|A^l(s)x\|$ в силу того, что $\|A^{-1}(s)x\| \leq 1$. Производя указанные огрубления последнего в (3.16) выражения, а также учитывая, что $\sum\limits_{m_1,m_2,...,m_{\varkappa+1}=1}^{\varkappa} 1 \leq \varkappa^{\varkappa+1}$, получаем следующую оценку второго слагаемого в правой части неравенства (3.14):

$$\|\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)\}x - \sum_{k=0}^{\varkappa}\frac{1}{k!}[F^{(\varkappa)}(t,s)]^k x\| \leq (t-s)^{\varkappa+1}\frac{[\varkappa(5L)^{\varkappa}]^{\varkappa+1}}{(\varkappa+1)!}\,\|A^l(s)x\|.$$

Наконец, рассмотрим оставшееся третье слагаемое. Из построения коммутаторных полиномов $\mathfrak{g}_m$, через которые определены операторы $F^{(\varkappa)}(t,s)$, следует [3, 4], что справедливо соответствие

$$\sum_{k=0}^{\infty}\epsilon^k T^{(k)}(t,s) \sim \exp\{\sum_{k=1}^{\infty}\epsilon^k V^{(k)}(t,s)\}, \qquad (3.17)$$

где $\sim$ означает равенство в смысле формальных степенных рядов по переменной ϵ, а формальная экспонента здесь определена формальным рядом $\exp\{\epsilon V\} \sim \sum\limits_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \, V^k/k!$. Из формального равенства (3.17) следует, что в третьем слагаемом правой части (3.14) в сумме по k все мономы вида $A(t_{i_1})...A(t_{i_k})x$ степени $k \leq \varkappa$, возникающие от операторов $T^{(k)}(t,s)$, взаимно сокращаются с соответствующими членами от степеней оператора $F^{(\varkappa)}(t,s)$. Таким образом, в этой сумме останутся лишь интегралы от мономов вида $A(t_{i_1})...A(t_{i_k})x$ степени $k \geq \varkappa + 1$. Учтем это обстоятельство при оценке нормы оставшихся членов в третьем слагаемом и используем предложение 3.

$$\|\sum_{k=0}^{\varkappa} \frac{1}{k!} \sum_{m_1,m_2,...,m_k=1}^{\varkappa}{}' V^{(m_1)}(t,s)V^{(m_2)}(t,s)...V^{(m_k)}(t,s)x\| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\varkappa} \frac{1}{k!} \sum_{m_1,m_2,...,m_k=1}^{\varkappa}{}' (5L)^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i} (t-s)^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i} \|A^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i}(s)x\|. \quad (3.18)$$

Здесь штрих у суммы означает, что в сумме присутствуют лишь члены с индексами m_i, удовлетворяющими условию $m_1 + m_2 + ... + m_k \geq \varkappa + 1$. Проводя такие же огрубления неравенства (3.18), как и для второго слагаемого относительно $(5L)^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i}$, $(t-s)^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i}$, и $\|A^{\sum\limits_{i=1}^{k} m_i}(s)x\|$, получаем следующую оценку:

$$\|\sum_{k=0}^{\varkappa} \left\{ \frac{1}{k!}[F^{(\varkappa)}(t,s)]^k x - T^{(k)}(t,s)x \right\}\| \leq (t-s)^{\varkappa+1} \sum_{k=0}^{\varkappa} \frac{[\varkappa(5L)^{\varkappa}]^k}{k!} \|A^l(s)x\|.$$

Собирая все слагаемые вместе, окончательно получаем следующую оценку для нормы разности (3.14):

$$\begin{aligned}
&\|\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)\}x - U(t,s)x\| \leq \\
&\qquad \leq (t-s)^{\varkappa+1} \left(\sum_{k=0}^{\varkappa+1} \frac{[\varkappa(5L)^{\varkappa}]^k}{k!} + \frac{L^{\varkappa} \mathrm{e}^{K(b-a)}}{(\varkappa+1)!} \right) \|A^l(s)x\| \leq \\
&\qquad\qquad \leq (t-s)^{\varkappa+1} \left(\mathrm{e}^{\varkappa(5L)^{\varkappa}} + \frac{L^{\varkappa} \mathrm{e}^{K(b-a)}}{(\varkappa+1)!} \right) \|A^l(s)x\|, \quad x \in \mathfrak{D}_l,
\end{aligned}$$

что и доказывает лемму. □

Теперь, после рассмотрения всех необходимых вспомогательных утверждений, перейдем к формулировке и доказательству основной теоремы о сходимости аппроксимаций Магнуса–Паде. Поскольку мы предполагаем,что операторы $\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)$ порождают сжимающие полугруппы, то эти операторы (а следовательно, и их сужения) с необходимостью должны быть диссипативными операторами. Таким образом, для каждого $x \in \mathfrak{D}_{\varkappa}$ должен существовать нормированный касательный функционал[1] $l_x \in \mathfrak{B}^*$, такой, что $\mathrm{Re}\langle l_x, F^{(\varkappa)}(t,s)x\rangle \leq 0$ [8]. Этот факт мы учтем при формулировке основной теоремы 2. Заметим, что всякий диссипативный оператор в банаховом пространстве допускает расширение до замкнутого максимального диссипативного оператора (т. е. не имеющего нетривиальных диссипативных расширений), который, вообще говоря, вовсе не обязан порождать сжимающую полугруппу [8]. Поэтому мы дополнительно потребуем, чтобы расширения $\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)$ удовлетворяли условиям теоремы 1. При этом соответствующие полугруппы строятся как сильные пределы $r^m_{q,p}(m^{-1}\alpha\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s))$ при $m \to \infty$, а также обеспечивается требуемый порядок аппроксимации.

Теорема 2. *Пусть $A(t) \in \mathcal{K}_l([a,b])$, $l = \varkappa(\varkappa+1)$, $\varkappa \geq 1$, и существует такое $0 < \delta < 1$, что для любого разбиения $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ операторы $F^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1})$, $j = 1, 2, \dots, n$, диссипативны, как только $|\Delta| \leq \delta$. Предположим также, что при всех j и некоторых $q \geq 0$ и $p \geq 1$, $q \leq p$, $q + p = \varkappa$, каждый из операторов $F^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1})$ обладает диссипативным расширением $\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1})$, которые удовлетворяют следующим условиям:*

(i) $\Sigma^{(q,p)} \subset \varrho(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1}))$;

(ii) существует такое $M_1 > 0$, что равномерно по $|\Delta| \leq \delta$ выполнены неравенства

$$\|\big(\lambda I - \widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1})\big)^{-1}\| \leq \frac{M_1}{|\lambda|}, \quad \lambda \in \Sigma^{(q,p)};$$

(iii) при $|\Delta| \leq \delta$ справедливы неравенства

$$\|r_{q,p}\big(\alpha\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1})\big)\| \leq 1, \quad \alpha > 0.$$

Тогда при $|\Delta| \to 0$ оператор $X^{(\varkappa)}_{q,p}(\Delta) = \prod\limits_{j=n}^{1} r_{q,p}(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_j, t_{j-1}))$ аппроксимирует на $\mathfrak{D}_l$ эволюционный оператор $U(b,a)$ с точностью $O(|\Delta|^{\varkappa})$, т. е.

$$\|X^{(\varkappa)}_{q,p}(\Delta)x - U(b,a)x\| \leq E|\Delta|^{\varkappa}\|A^l(a)x\|, \quad x \in \mathfrak{D}_l,$$

где постоянная E не зависит от разбиения Δ и выбора элемента x.

---

[1]Функционал $l_x \in \mathfrak{B}^*$ со свойствами $\|l_x\| = \|x\|$ и $\langle l_x, x\rangle = \|x\|^2$. Существование такого функционала у каждого элемента $x \in \mathfrak{B}$ обеспечивается теоремой Хана–Банаха.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что из условий теоремы следует, что аппроксимации Паде (q,p) операторов $\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_j,t_{j-1})$, а соответственно и $X_{q,p}^{(\varkappa)}(\Delta)$ являются всюду определенными ограниченными операторами. Пользуясь свойствами эволюционного оператора, представим разность $X_{q,p}^{(\varkappa)}(\Delta)-U(b,a)$ в виде

$$X_{q,p}^{(\varkappa)}(\Delta)-U(b,a)=\sum_{k=1}^{n}Y_{n,k}\Big(r_{q,p}\big(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\big)-U(t_k,t_{k-1})\Big)U(t_{k-1},t_0), \tag{3.19}$$

где под операторами $Y_{n,k}$ подразумеваются произведения

$$Y_{n,k}=r_{q,p}\big(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_n,t_{n-1})\big)...r_{q,p}\big(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_{k+1},t_k)\big),\quad k=1,2,...,n-1.$$

Оператор $Y_{n,n}$ мы считаем равным тождественному оператору. Оценим норму разности $r_{q,p}\big(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\big)y\ -U(t_k,t_{k-1})y$, если $y\in\mathfrak{D}_l$. Из теоремы 1 следует, что операторы $\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})$ являются производящими операторами сжимающих полугрупп $\alpha\mapsto\exp\{\alpha\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\}$, которые можно построить с помощью перехода к сильному пределу в последовательности $r_{q,p}^{m}(m^{-1}\alpha\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1}))$ при $m\to\infty$. В частности, из оценки скорости этой сходимости (2.3) для $m=1$ и $\alpha=1$ следует, что

$$\|r_{q,p}\big(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\big)y-\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\}y\|\le\frac{M_1^{2p}c_{q,p}}{\varkappa+1}\|\,[F^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})]^{\varkappa+1}y\|.$$

Оценка $\|\,[F^{(\varkappa)}(t,s)]^{\varkappa+1}y\|$ у нас уже была получена в ходе доказательства леммы 2 (см. (3.16)). Таким образом,

$$\|r_{q,p}\big(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\big)y-\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\}y\|\le E''(t_k-t_{k-1})^{\varkappa+1}\|A^l(s)y\|, \tag{3.20}$$

где $E''=M_1^{2p}c_{q,p}\ [\varkappa(5L)^{\varkappa}]^{\varkappa+1}/(\varkappa+1)$. В итоге справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}&\|r_{q,p}\big(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\big)y-U(t_k,t_{k-1})y\|\le\\&\qquad\le\|r_{q,p}\big(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\big)y-\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\}y\|+\\&\qquad\quad+\|\exp\{\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k,t_{k-1})\}y-U(t_k,t_{k-1})y\|\le\\&\qquad\qquad\le(E'+E'')(t_k-t_{k-1})^{\varkappa+1}\|A^l(s)y\|,\quad y\in\mathfrak{D}_l.\end{aligned} \tag{3.21}$$

Здесь в последнем неравенстве мы использовали (3.20) и лемму 2. Отметим, что постоянные E' и E'' не зависят от разбиения Δ.

Пусть $x \in \mathfrak{D}_l$. Обозначим $y_{k-1} = U(t_{k-1}, t_0)x$. Согласно лемме 1, каждый $y_{k-1} \in \mathfrak{D}_l$; более того, $\|A^l(t_{k-1})y_{k-1}\| = \|W_l(t_{k-1}, a)A^l(a)x\| \leq \mathrm{e}^{K(b-a)}$ $\|A^l(a)x\|$. Поэтому из (3.19) и (3.21) следует

$$\|X_{q,p}^{(\varkappa)}(\Delta)x - U(b,a)x\| \leq$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n} \|Y_{n,k}\| \, \left\| \left(r_{q,p}(\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t_k, t_{k-1})) - U(t_k, t_{k-1})\right) y_{k-1}\right\| \leq$$
$$\leq (E' + E'')\mathrm{e}^{K(b-a)}\|A^l(a)x\| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_k - t_{k-1})^{\varkappa} \mathrm{d}\tau \leq$$
$$\leq (E' + E'')(b-a)\mathrm{e}^{K(b-a)}|\Delta|^{\varkappa}\|A^l(a)x\|, \quad x \in \mathfrak{D}_l.$$

Здесь мы также воспользовались неравенствами $\|Y_{n,k}\| \leq 1$, следующими из условия (iii). Теорема доказана. □

4 Приложение к дифференциальным операторам Шредингера

В этом разделе мы проверим выполнение условий теоремы 2 для оператора $A(t) = -\mathrm{i}H(t)$, где $H(t)$ есть дифференциальный оператор второго порядка в частных производных в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$:

$$H(t) = H_0 + q(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [a,b]. \tag{4.1}$$

Здесь $H_0 = -\sum_{k=1}^{n} \partial_{x_k}^2$ есть оператор Лапласа в $\mathbb{R}^n$, а $q(x,t)$ есть действительная функция координат x и времени t, относительно которой мы будем предполагать, что $q(\cdot,t) \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, а также ее ограниченность со всеми производными, $\sup\limits_{x} |\partial^{\beta} q(x,t)| < \infty$. Здесь использованы стандартные обозначения для мультииндекса $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, $|\beta| = \beta_1 + ... + \beta_n$, и частных производных $\partial^{\beta} = \partial_{x_1}^{\beta_1}\partial_{x_2}^{\beta_2}...\partial_{x_n}^{\beta_n}$.

При указанных ограничениях на функцию $q(x,t)$ оператор $H(t)$ является самосопряженным оператором на области определения оператора Лапласа, что может быть показано методами теории возмущений [2, 8]. Таким образом, $\mathfrak{D}(H(t)) = \mathfrak{D}(H_0)$ не зависит от t. Обозначим $\mathcal{K}_{\infty}([a,b]) = \bigcap\limits_{l=1}^{\infty} \mathcal{K}_l([a,b])$.

Предложение 4. *Если при всех β производные $\partial_t \partial^{\beta} q(x,t)$ равномерно непрерывны по x, то $A(t) = -\mathrm{i}H(t) \in \mathcal{K}_{\infty}([a,b])$.*

Доказательство. В определении 1 из соображений удобства обозначений при доказательстве теорем был использован "сдвинутый" оператор $I+A(t)$ (см. замечания после определения $\mathcal{K}_l([a,b])$). В данном же случае удобней использовать исходный оператор $A(t)$. При этом под операторами $B_k(t,s)$ следует понимать операторы $B_k(t,s) = [I-A(t)]^k[I-A(s)]^{-k}$. Утверждения о сходимости и порядке этой сходимости аппроксимаций Магнуса–Паде в теореме 2 остаются в силе, а изменения коснутся лишь константы E.

Рассмотрим теперь с учетом сделанного замечания условия (i)-(iv) определения 1. Пункт (i) выполнен в силу того, что оператор $H(t)$ самосопряжен, и, следовательно, полугруппы $\alpha \mapsto \exp\{\alpha A(t)\}$ являются унитарными группами.

Пункт (ii) выполнен в силу того, что k-я степень оператора $H(t)$ задается выражением

$$H^k(t) = H_0^k + \sum_{|\beta|\leq 2k-1} a_\beta(x,t)\partial^\beta, \tag{4.2}$$

где функции $a_\beta(x,t)$ есть ограниченные гладкие функции x, выражающиеся через функцию $q(x,t)$ и ее производные. Сумма в правой части выражения (4.2) есть возмущение оператора H_0^k с относительной гранью нуль [8], а потому $H^k(t)$ самосопряжен в существенном на $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и самосопряжен на области $\mathfrak{D}_k = \mathfrak{D}(H_0^k)$. Отсюда видно, что области определения степеней $H^k(t)$, $k=1,2,...$ не зависят от t.

Для проверки условий (iii) и (iv) покажем, что оператор $B_k(t,s_0)$ и его сильная производная $\partial_t B_k(t,s_0)$ непрерывны в смысле нормы для некоторого фиксированного $s_0 \in [a,b]$. Тогда из непрерывности по норме $B_k(t,s_0)$ будет следовать равномерная ограниченность этого оператора по совокупности переменных. В самом деле, если $B_k(t,s_0)$ непрерывен по норме, то это же самое справедливо для его обратного $B_k^{-1}(t,s_0) = B_k(s_0,t)$ [9]. В силу принципа равномерной ограниченности существуют такие не зависящие от t постоянные $L'(s_0)$ и $L''(s_0)$, что $\|B_k(t,s_0)\| \leq L'(s_0)$ и $\|B_k(s_0,t)\| \leq$ $\leq L''(s_0)$. Поэтому для любых $t,s\in[a,b]$ $\|B_k(t,s)\| = \|B_k(t,s_0)B_k(s_0,s)\| \leq$ $\leq L'(s_0)L''(s_0)$. Условие (iv), очевидно, также будет выполнено.

Оператор $(I - A(s_0))^{-k}$ отображает гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R}^n)$ на область определения полигармонического оператора Лапласа $\mathfrak{D}(H_0^k)$, которая, в свою очередь, совпадает с пространством Соболева $W_{2k}(\mathbb{R}^n)$ [8]. Будем рассматривать производные ∂^β в сумме (4.2), $|\beta| \leq 2k$, как сужения D^β операторов дифференцирования в смысле теории распределений на $W_{2k}(\mathbb{R}^n)$. Операторы D^β допускают замыкание (см., например, [11]), а потому операторы $D^\beta(I-A(s_0))^{-k}$ замкнуты. Так как $D^\beta(I-A(s_0))^{-k}$ определены на всем пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$, то по теореме о замкнутом графике они являются ограниченными операторами. Функции $a_\beta(x,t)$ и $\partial_t a_\beta(x,t)$ в силу требований на функцию $q(x,t)$ есть равномерно непрерывные по x функции. Таким образом, операторно-значные функции $t \mapsto a_\beta(x,t)D^\beta \times$ $\times (I - A(s_0))^{-k}$, а значит и $t \mapsto B_k(t,s_0)$, являются непрерывно дифференцируемыми в равномерной операторной топологии. Предложение доказано. $\square$

Из предложения 4, в частности, следует однозначная разрешимость уравнения (1.1) для оператора $A(t) = -\mathrm{i}H(t)$.

Далее, отметим, что операторы $-\mathrm{i}F^{(\varkappa)}(t,s)$, определенные на $W_{2\varkappa}(\mathbb{R}^n)$, являются симметрическими операторами. Это следует из самосопряженности оператора $H(t)$ и строения коммутаторных полиномов $\mathfrak{g}_m$. Таким образом, $F^{(\varkappa)}(t,s)$ является консервативным оператором, и, как и всякий диссипативный оператор в гильбертовом пространстве, допускает расширение до максимального диссипативного оператора $\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)$, порождающего сжимающую полугруппу $\alpha \mapsto \exp\{\alpha\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)\}$ [9]. Покажем, что для любого максимального диссипативного оператора T в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ при $q = p$ выполнены условия (i) – (iii) теоремы 2. Известно [10], что нули знаменателя диагональной аппроксимации Паде $d_{p,p}(z)$ лежат в секторе $\Sigma^{(p,p)} \subset S_p = \{z \in \mathbb{C} \mid |\arg z| < \arccos p^{-1}\}$, расположенном целиком в правой полуплоскости. С другой стороны, т. к. оператор T порождает сжимающую полугруппу, то, как следует из теоремы Хилле–Иосида, $\lambda \in \varrho(T)$, если $\operatorname{Re}\lambda > 0$. При этом для резольвенты T в правой полуплоскости справедливо неравенство $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq 1/\operatorname{Re}\lambda$. Отсюда следует, что условия (i) и (ii) выполнены. Для проверки условия (iii) воспользуемся следующим предложением.

Предложение 5. *Пусть оператор $T\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ является диссипативным оператором. Тогда $\|\psi + \bar\gamma T\psi\| \leq \|\psi - \gamma T\psi\|$ для любого $\psi \in \mathfrak{D}(T)$ и $\gamma \in \mathbb{C}$,* $\operatorname{Re}\gamma \geq 0$.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathfrak{D}(T)$. Возьмем элементы $\phi, \chi \in \mathfrak{H}$ согласно равенствам $\phi = \psi - \mathrm{i}\operatorname{Im}\gamma T\psi$ и $\chi = \operatorname{Re}\gamma T\psi$. Такой выбор эквивалентен тому, что

$$\phi + \chi = \psi + \bar\gamma T\psi, \quad \phi - \chi = \psi - \gamma T\psi. \tag{4.3}$$

Скалярное произведение ϕ и χ есть $(\phi,\chi) = (\psi, T\psi)\operatorname{Re}\gamma - \mathrm{i}\|T\psi\|^2 \operatorname{Im}\gamma \operatorname{Re}\gamma$. По определению диссипативного оператора $\operatorname{Re}(\psi, T\psi) \leq 0$ для всех $\psi \in \mathfrak{D}(T)$, откуда следует $\operatorname{Re}(\phi,\chi) \leq 0$. Таким образом, из тождества $4\operatorname{Re}(\phi,\chi) = \|\phi+\chi\|^2 - \|\phi-\chi\|^2$ и в силу выбора (4.3) элементов ϕ и χ следует неравенство $\|\psi + \bar\gamma T\psi\|^2 - \|\psi - \gamma T\psi\|^2 \leq 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Учитывая, что $d_{p,p}(z) = n_{p,p}(-z)$, а также тот факт, что $n_{p,p}(z)$ и $d_{p,p}(z)$ являются полиномами с действительными коэффициентами, мы можем представить диагональную аппроксимацию Паде $r_{p,p}(\alpha T)$ в виде произведения p операторов вида $(I + \alpha\bar{\zeta}_k^{-1}T)(I - \alpha\zeta_k^{-1}T)^{-1}$, где $k = 1, 2, ..., p$ и $\zeta_k \in \Sigma^{(p,p)}$ – нули $d_{p,p}(z)$. Согласно предложению 5, норма каждого из этих операторов не превосходит единицы, т. е. $\|r_{p,p}(\alpha T)\| \leq 1$. Таким образом, условие (iii) также выполнено, и справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть оператор $A(t) = -\mathrm{i}H(t)$ в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^n)$ задан выражением (4.1), где действительная функция $q(x,t)$ такова, что $\sup\limits_x |\partial^\beta q(x,t)| < \infty$ и функции $\partial_t\partial^\beta q(x,t)$ равномерно непрерывны по $x \in \mathbb{R}^n$ при всех мультииндексах β. Тогда для любого $p \geq 1$ существует диагональная аппроксимация Магнуса–Паде $X_{p,p}^{(2p)}(\Delta)$ на произвольном разбиении Δ отрезка $[a,b]$, которая сходится при $|\Delta| \to 0$ к эволюционному оператору $U(b,a)$ со скоростью $O(|\Delta|^{2p})$, т. е.*

$$\|X_{p,p}^{(2p)}(\Delta)\psi - U(b,a)\psi\| \leq \widetilde{E}|\Delta|^{2p}\,\|H_0^l\psi\|, \quad \psi \in \mathfrak{D}(H_0^l), \tag{4.4}$$

где $l = 2p(2p+1)$, а постоянная $\widetilde{E}$ не зависит от $|\Delta|$.

Замечание. Если предполагать дополнительную гладкость по t и s операторов $B_k(t,s)$, то, сохраняя в оценке (4.4) порядок аппроксимации $2p$, иногда можно использовать аппроксимации $X_{p,p}^{(\varkappa')}$ с $\varkappa' < 2p$. В этом случае благодаря строению полиномов $\mathfrak{g}_m$ операторы $V^{(m)}(t,s)$ могут иметь более высокий порядок малости относительно $t-s$, чем утверждается в предложении 3. Считая, что при $m = \varkappa'+1, \varkappa'+2, ..., 2p$ имеют место неравенства $\|V^{(m)}(t-s)\psi\| \leq \mathrm{const}(t-s)^{m'}\|A^m(s)\psi\|$, где $m' \geq 2p$, и проводя соответствующие изменения в доказательствах леммы 2 и теоремы 2 для операторов $\widetilde{F}^{(\varkappa')}$, приходим к аналогичному теореме 3 утверждению относительно аппроксимации $X_{p,p}^{(\varkappa')}(\Delta)$. При этом оценка (4.4) будет выглядеть следующим образом:

$$\|X_{p,p}^{(\varkappa')}(\Delta)\psi - U(b,a)\psi\| \leq \widetilde{E}|\Delta|^{2p}\,\|H_0^l\psi\|, \quad \psi \in \mathfrak{D}(H_0^l), \tag{4.4$'$}$$

где $l = \varkappa'(2p+1)$, а постоянная $\widetilde{E}$ не зависит от $|\Delta|$.

Рассмотрим для примера случаи $p = 1$ и $p = 2$. Для $p = 1$ потребованной в предложении 4 гладкости по t у функции $q(x,t)$ достаточно, чтобы $\partial_t B_k(t,s)$ и $\partial_s B_k(t,s)$, $k = 1, 2$, были сильно непрерывны по совокупности переменных. Подынтегральное выражение в $V^{(2)}(t,s)\psi$ можно представить в виде $\{C(\tau_1,\tau_2) - C(\tau_2,\tau_1)\}\,A^2(s)\psi$, где ограниченный оператор $C(\tau_1,\tau_2) = B_1(\tau_1,\tau_2)B_2(\tau_2,s)$ удовлетворяет условию Липшица по совокупности переменных $(\tau_1,\tau_2) \in [a,b]\times[a,b]$. Отсюда следует, что $\|V^{(2)}(t,s)\psi\| \leq$ $\leq \mathrm{const}(t-s)^3\|A^2(s)\psi\|, \psi \in \mathfrak{D}(H_0^2)$, где постоянная const не зависит от s и t.

Таким образом, в этом случае $\varkappa' = 1$ и согласно замечанию к теореме 3 аппроксимация $X_{1,1}^{(1)}(\Delta)$ сходится к эволюционному оператору на $\mathfrak{D}(H_0^3)$ со скоростью $O(|\Delta|^2)$. Эта аппроксимация соответствует операторному варианту схемы Кранка–Николсон.

В случае $p = 2$ предположение о том, что функции $\partial_t^2 \partial^\beta q(x,t)$ равномерно непрерывны по x, $|\beta| \geq 0$, позволяет с помощью анализа подынтегральных выражений в $V^{(3)}(t,s)$ и $V^{(4)}(t,s)$ установить, что $\|V^{(3)}(t,s)\psi\| \leq \leq \mathrm{const}(t-s)^5 \|A^3(s)\psi\|$ и $\|V^{(4)}(t,s)\psi\| \leq \mathrm{const}(t-s)^5 \|A^4(s)\psi\|$. Таким образом, в этом случае $\varkappa' = 2$. Операторы $F^{(2)}(t,s)$ задаются на $\mathfrak{D}(H_0^2)$ выражением

$$\mathrm{i}F^{(2)}(t,s) = (t-s)H_0 + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\{a_k(x,t,s)\partial_k + \partial_k a_k(x,t,s)\} + v(x,t,s),$$

где

$$a_k(x,t,s) = \frac{1}{2}\int_s^t \mathrm{d}\tau_1 \int_s^{\tau_1} \mathrm{d}\tau_2 \left(\frac{\partial q}{\partial x_k}(x,\tau_2) - \frac{\partial q}{\partial x_k}(x,\tau_1)\right),$$

$$v(x,t,s) = \int_s^t \mathrm{d}\tau q(x,\tau).$$

Оператор $\mathrm{i}F^{(2)}(t,s)$ самосопряжен в существенном на $\mathfrak{D}(H_0^2)$ и его замыкание самосопряжено на $\mathfrak{D}(H_0)$. Это самосопряженное расширение и следует взять в качестве оператора $\mathrm{i}\widetilde{F}^{(2)}(t,s)$. Таким образом, согласно замечанию к теореме 3, аппроксимация $X_{2,2}^{(2)}(\Delta)$ сходится к эволюционному оператору на $\mathfrak{D}(H_0^{10})$ со скоростью $O(|\Delta|^4)$.

5 Заключение

Метод аппроксимаций Магнуса–Паде сводит задачу приближенного интегрирования уравнения (1.1) к решению операторно-разностных уравнений (1.5), аппроксимирующих исходное уравнение по переменной t с заданным порядком точности $\varkappa \geq 1$. Эти уравнения сохраняют простую структуру схемы Кранка–Николсон. Доказанная в работе теорема 2 для операторов $A(t) \in \mathcal{K}_l([a,b])$, $l = \varkappa(\varkappa+1)$, дает достаточные условия сходимости приближенного решения к точному с заданным порядком $\varkappa$. Эти условия фактически сводится к требованию существования у операторов $F^{(\varkappa)}(t,s)$ замкнутых расширений $\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s) \supset F^{(\varkappa)}(t,s)$, допускающих построение сжимающих полугрупп $\alpha \mapsto \exp\{\alpha\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s)\}$ на всех интервалах разбиения отрезка $[a,b]$ с помощью сильного предела последовательности операторов $r^n_{q,p}(n^{-1}\alpha\widetilde{F}^{(\varkappa)}(t,s))$ при $n\to\infty$, $q+p=\varkappa$. Отметим, что предположение о независимости от t областей определения степеней оператора $A(t)$, необходимое для того, чтобы $A(t)\in\mathcal{K}_l([a,b])$, является достаточно серьезным ограничением. Например, для дифференциальных операторов $A(t)$, описывающих начально-краевые задачи с зависящими от t граничными условиями, это требование заведомо не выполняется. Поэтому представляет некоторый интерес исследование вопроса, в какой мере эти требования могут быть ослаблены.

Автор благодарит профессора И. В. Пузынина за ряд полезных замечаний и поддержку данной работы.

Литература

[1] Kato T. Integration of the equation of evolution in a Banach space // J. Math. Soc. of Japan, 1953, V.5. P.208-234.

[2] Kato T. *Perturbation theory for linear operators* N.-Y.: Springer, 1966.

[3] Magnus W. On the Exponential Solution of Differential Equations for a Linear Operator // Comm. Pure Appl. Math., 1954, V.7, P.649.

[4] Аграчев А. А., Гамкрелидзе Р. В. Экспоненциальное представление потоков и хронологическое исчисление // Мат. сборник, 1978, V. 107, С.467-532.

[5] Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде*, М.: Мир, 1986.

[6] Треногин В. А. *Функциональный анализ*, М.: Наука, 1980.

[7] Butcher J. C. Implicit Runge–Kutta Processes // Math. Comp., 1964, V.18, P.50-64.

[8] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики, т.2, Гармонический анализ и самосопряженность*. М.: Мир, 1978.

[9] Крейн С. Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, М.: Наука, 1967.

[10] Saff E. B. and Varga R. S., On the zeros and poles of Padé approximants to e^z // Num. Math., 1975, V.25, P.1-14.

[11] Иосида К., *Функциональный анализ*, М.: Мир, 1967.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 2000 года.

Селин А.В. P11-2000-262
Аппроксимации Магнуса–Паде эволюционных операторов

Рассматривается полудискретный метод нахождения приближенного решения линейного эволюционного уравнения в банаховом пространстве. Предлагаемый метод основан на дискретизации временной переменной исходного уравнения с помощью разложения Магнуса эволюционного оператора и использовании для этого разложения диагональных и субдиагональных аппроксимаций Паде экспоненциальной функции. Такая процедура позволяет получить обобщения известной схемы Кранка–Николсон, имеющие произвольный наперед заданный порядок сходимости по временной переменной. Сформулированы достаточные условия сходимости приближенного решения к точному решению.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод автора

Selin A.V. P11-2000-262
Magnus–Padé Approximations for Evolution Operators

A semi-discrete method of approximated solution of the linear evolution equation in a Banach space is considered. The proposed method is based on a discretization of the time variable of the original equation with the help of the Magnus expansion for evolution operator and subsequent employment for the expansion of the diagonal and sub-diagonal Padé approximations corresponding to the exponential fucntion. This procedure permits one to obtain the generalization of the known Cranck–Nicholson scheme to arbitrary high orders of convergence with respect to the time variable. The sufficient conditions for the convergence of approximated solution are formulated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 17.11.2000
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 2,79
Тираж 320. Заказ 52353. Цена 3 р. 35 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области