

**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ**

Дубна

P17-2000-241

Г.Очирбат¹, О.Нямсурен²

**РАССЕЯНИЕ СВЕТА В ДЕФОКУСИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ
НА ЛИНЕЙНОЙ ПОДЛОЖКЕ.
АНАЛИЗ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ**

Направлено в журнал
«Электромагнитные волны и электронные системы»

¹Монгольский государственный университет, Улан-Батор

²Компания «Газар-холдинг», Улан-Батор

Формальные решения системы уравнений Максвелла для задачи рассеяния стационарных световых волн ТЕ- и ТМ- поляризации в плоской нелинейной среде были получены в работах [1-6]. Их использовали при численном расчете рассеяния света от нелинейной пленки и распределении интенсивности света в нелинейной подложке. Современное состояние оптики нелинейных слоистых структур и теория пространственных солитонов в средах Керра и им подобных изложены в [7-8].

Целью настоящей работы является аналитическое рассмотрение формального решения для ТМ-волн света в дефокусирующей среде на линейной подложке в зависимости от свободных параметров, в том числе приграничного значения диэлектрической функции.

ТМ-волну, распространяющуюся в дефокусирующей среде, представим в виде

$$E_x = iAe^{i\phi_A} \varphi + k.c., E_z = e e^{i\phi_E} \varphi + k.c., H_y = h e^{i\phi_E} \varphi + k.c.$$

Здесь $\varphi = \exp(-i\omega t + ik_0 \beta x)$, k_0 - модуль волнового вектора, соответствующий вакууму, β - постоянная рефракции, ω - круговая частота, $A > 0$ и $e > 0$. В дефокусирующей среде знак h противоположен знаку e . Геометрия задачи такова, что амплитуды A, e и h , а также фазы ϕ_A и ϕ_E зависят только от z - координаты.

Свет падает из дефокусирующей накладки ($z < 0$) на поверхность линейной подложки ($z = 0$). Волна бежит вдоль x -направления, одновременно распространяясь по направлению оси z .

Для краткости введено обозначение

$$c\mu_0 \mathbf{H}(z) \rightarrow \mathbf{H}(z).$$

Диэлектрическая функция изотропной дефокусирующей среды Керра

$$\epsilon = \epsilon - e^2 - A^2,$$

где ϵ - диэлектрическая постоянная. Здесь α - постоянная Керра-отсутствует из-за замены

$$\sqrt{\alpha} \mathbf{E}(z) \rightarrow \mathbf{E}(z), \sqrt{\alpha} \mathbf{H}(z) \rightarrow \mathbf{H}(z).$$

Вследствие этой замены в исходных уравнениях эта постоянная тоже отсутствует. Фазы дальше рассматривать не будем, так как разности фаз, фигурирующие в уравнениях Максвелла, исключаются из них с помощью выражения закона сохранения потока энергии. Используя метод первого интеграла из уравнений Максвелла, получаем

$$e^2 = \frac{\beta^2}{2\epsilon} \frac{Q}{2\beta^2 - \epsilon}, \quad (1)$$

$$A^2 = \frac{R}{2\epsilon} \frac{1}{2\beta^2 - \epsilon}. \quad (2)$$

Здесь

$$Q(\epsilon) = \epsilon^2 - \epsilon^2 - 2cnst, R(\epsilon) = -2\epsilon(\epsilon - e^2)(2\beta^2 - \epsilon) - \beta^2 Q,$$

где $cnst$ - константа первого интеграла. С использованием этих выражений зависимость диэлектрической функции от z -координаты определяется квадратурной формулой:

$$z = \pm \frac{1}{2} \int_{\epsilon_0}^{\epsilon} \frac{(\epsilon^3 - 2\beta^2 h^2) d\epsilon}{\epsilon^2 (2\beta^2 - \epsilon) \sqrt{A^2 h^2 - 4c\omega^2}}, \quad (3)$$

где ϵ_0 - приграничное значение диэлектрической функции, т.е. при $z = 0$, $c\omega$ - константа, выражающая сохраняющуюся величину потока энергии. Амплитуда магнитного поля h связана с амплитудой e следующей простой формулой:

$$h^2 = \frac{\epsilon^2}{\beta^2} e^2.$$

По определению $e^2 > 0$ и $A^2 > 0$. Под интегралом должно быть

$$A^2 h^2 \geq 4co^2.$$

Формулы (1), (2) и (3) зависят от многих параметров: $\varepsilon, \beta^2, cnst, co$. Интеграл в (3) не берется аналитически, его находят численно, задавая параметром те или иные значения. Численный расчет подобного рода неоднократно проводился в задаче рассеяния света, и были получены многие важные результаты. Результаты численного расчета бывают более достоверными и осмысленными, если они базируются на указаниях, выходящих из предварительного анализа задачи. Наш анализ основан на исследовании функций $e^2(\varepsilon), A^2(\varepsilon)$ и $A^2(\varepsilon)h^2(\varepsilon)$ в зависимости от их параметров. Для краткости произведение $A^2(\varepsilon)h^2(\varepsilon)$ обозначим через $f(\varepsilon)$.

Области ε , где $e^2 > 0$ и $A^2 > 0$, в зависимости от параметров $\varepsilon, \beta^2, cnst$ точно можно установить, так как $e^2(\varepsilon)$ и $A^2(\varepsilon)$ - несложные рациональные функции.

Значение ε , при котором функция $f(\varepsilon)$ достигает экстремального значения, обозначим через ε_s . Таких значений может быть несколько в силу рациональности этой функции. Значение ε_s должно быть выражено параметрами функций, и в том числе константой - $cnst$. Поэтому имеет смысл попытаться обратно вычислить $cnst$ через ε_s .

1. Выражение $2cnst$ через стационарное значение ε_s . Вычисление показывает, что функции $e^2(\varepsilon)$ и $A^2(\varepsilon)$ при $\varepsilon = \varepsilon_s$ имеют либо значения

$$e^2(\varepsilon_s) = \frac{\beta^2(\varepsilon_s - \varepsilon)}{\varepsilon_s}, \quad (4)$$

$$A^2(\varepsilon_s) = \frac{(\beta^2 - \varepsilon_s)(\varepsilon_s - \varepsilon)}{\varepsilon_s}, \quad (5)$$

либо

$$e^2(\varepsilon_s) = \frac{\varepsilon_s}{2}, \quad (6)$$

$$A^2(\varepsilon_s) = \frac{2\varepsilon - 3\varepsilon_s}{2}. \quad (7)$$

Выражения (4) и (5) имеют смысл при $\beta^2 \leq \varepsilon_s$, а (6) и (7) - при $2/3\varepsilon \geq \varepsilon_s$. В первом случае (1-й режим), подставляя в (1) $\varepsilon = \varepsilon_s$ и затем приравнявая (1) к (4), находим $2cnst$ в виде

$$2cnst_1 = (\varepsilon - \varepsilon_s)(3\varepsilon_s + \varepsilon - 4\beta^2) \quad (8)$$

Таким образом, константа выражена через ε_s , при котором функция $f(\varepsilon)$ имеет экстремум. Аналогично поступая во 2-м режиме, находим $2cnst$ в виде

$$2cnst_2 = \varepsilon^2 - 3\varepsilon_s^2 + \frac{\varepsilon_s^3}{\beta^2}. \quad (9)$$

В 1-м режиме

$$0 \leq 2cnst_1 \leq \frac{4}{3}(\varepsilon - \beta^2)^2.$$

Во 2-м режиме

$$2cnst_2 \leq \text{Max} \left(\varepsilon^2, \varepsilon_s^2 \left(\frac{\varepsilon}{\beta^2} - 2 \right) \right).$$

2. Определение констант через приграничное значение ϵ_d . Обозначим значение e , A и h на приграничной плоскости дефокусирующей среды ($z = 0^-$) с индексом d :

$$e = e_d, A = A_d, h = h_d.$$

Тогда

$$\epsilon_d = \epsilon - A_d^2 - \frac{\beta^2 h_d^2}{\epsilon_d^2}. \quad (10)$$

Если подложка является линейной средой, то в силу непрерывности тангенциальных компонент поля на границе двух сред имеем

$$A_d^2 = \frac{\eta^2 h_d^2}{\epsilon_c^2}, \quad \eta^2 = \epsilon_c - \beta^2, \quad (11)$$

где ϵ_c - диэлектрическая постоянная подложки. Если подставить это в (10), то можно определить h_d^2 через ϵ_s . А именно:

$$h_d^2 = -\frac{(\epsilon_d - \epsilon)\epsilon_d^2 \epsilon_c^2}{\eta_c^2 \epsilon_d^2 + \epsilon_c^2 \beta^2}, \quad \eta_c^2 = \epsilon_c - \beta^2. \quad (12)$$

Теперь, выражая, с одной стороны, e_d^2 через h_d^2 , с другой стороны, подставляя в (1) $\epsilon = \epsilon_d$ и затем приравнивая оба выражения, получаем

$$e_d^2 = \frac{\beta^2}{\epsilon_d^2} h_d^2 = \frac{\beta^2}{2\beta^2 - \epsilon_d} \frac{-\epsilon_d^2 + \epsilon^2 - 2cnst}{2\epsilon_d}.$$

Отсюда

$$2cnst = -\frac{2(2\beta^2 - \epsilon_d)\epsilon_d - (\epsilon_d + \epsilon)(\mu_c^2 \epsilon_d^2 + \beta^2)}{\mu_c^2 \epsilon_d^2 + \beta^2} (\epsilon - \epsilon_d), \quad (13)$$

где $\mu_c^2 = \eta_c^2 / \epsilon_c^2$. А еще

$$4co^2 = A_d^2 \eta_d^2 = \mu_c^2 \frac{\epsilon_d^4 (\epsilon - \epsilon)^2}{\epsilon_d^2 \mu_c^2 + \beta^2}. \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) определяют $4co^2$ и $2cnst$ через ϵ_d . А A^2 и h^2 на границе определены через ϵ_d по (11) и (12). Для $2cnst$ мы имели два различных выражения в двух режимах. Каждый из них должен согласовываться с (13). Выпишем для 1-го режима

$$(\epsilon_s - \epsilon)(3\epsilon_s - 4\beta^2 + \epsilon) = \frac{2(2\beta^2 - \epsilon_d)\epsilon_d - (\epsilon_d + \epsilon)(\epsilon_d^2 + \beta^2)}{\epsilon_d^2 + \beta^2} (\epsilon - \epsilon_d). \quad (15)$$

Для сокращения обозначения здесь и дальше введены подстановки:

$$\mu_c^2 \epsilon_d \rightarrow \epsilon_d, \quad \mu_c^2 \epsilon_d \rightarrow \epsilon_d, \quad \mu_c^2 \beta^2 \rightarrow \beta^2, \quad \mu_c^2 \epsilon_s \rightarrow \epsilon_s.$$

Аналогично для 2-го режима имеем

$$\epsilon^2 - 3\epsilon_s^2 + \frac{\epsilon_s^3}{\beta^2} = -\frac{2(2\beta^2 - \epsilon_d)\epsilon_d - (\epsilon_d + \epsilon)(\epsilon_d^2 + \beta^2)}{\epsilon_d^2 + \beta^2} (\epsilon - \epsilon_d). \quad (16)$$

Из двух уравнений по одному и тому же приграничному значению ϵ_d могут находиться несколько значений для ϵ_s .

3. Волны Брюстера. ТМ-волна, падающая из дефокусирующей среды на подложку, взаимодействуя с отраженной волной, образует стоячую волну сложной структуры. Однако, ввиду многоликости нелинейных явлений, поставим вопрос: существует ли в дефокусирующей среде волна, которая, не отразившись от поверхности подложки,

проникает в нее. Другими словами, существует ли плоская волна в дефокусирующей среде? Этому вопросу наш анализ дает простое решение. Дело в том, что поиск такой волны сводится к простой замене $\epsilon_d = \epsilon_s$ в уравнении (15) или (16) и последующему их решению. После этой замены уравнение (15) упрощается:

$$2\epsilon_s^3 - (4\beta^2 + 2)\epsilon_s^2 + 6\beta^2\epsilon_s - 4\beta^4 = 0. \quad (17)$$

Это уравнение имеет три корня:

$$\epsilon_- = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\beta^2}, \quad (18)$$

$$\epsilon_0 = 2\beta^2, \quad (19)$$

$$\epsilon_+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - 4\beta^2}. \quad (20)$$

Аналогично из уравнения (16) получаем

$$\epsilon_s(2\beta^2 - \epsilon_s)(2\beta^2(\epsilon_s - \epsilon) + \epsilon_s(\epsilon_s^2 + \beta^2)) = 0. \quad (21)$$

Это уравнение имеет три корня:

$$\epsilon_1 = 0, \quad \epsilon_2 = 2\beta^2, \quad (22)$$

$$\epsilon_3 = \sqrt[3]{\beta^2\epsilon + \sqrt{\beta^6 + \beta^4\epsilon^2}} + \sqrt[3]{\beta^2\epsilon - \sqrt{\beta^6 + \beta^4\epsilon^2}}. \quad (23)$$

Видно, что оба уравнения имеют только один общий корень:

$$\epsilon_0 = \epsilon_2 = 2\beta^2.$$

Однако при $\epsilon = 2\beta^2$ основные выражения (1) и (2) теряют смысл, кроме одного специального случая для $2cnst$, который анализируется ниже. Корни первого уравнения ϵ_- и ϵ_+ при $\beta^2 \leq 0,25$ лежат в основе известных физических явлений. Чтобы проиллюстрировать это, перепишем (18) и (20) в виде

$$\beta^2 = \epsilon_{\pm}(1 - \epsilon_{\pm}). \quad (24)$$

В этом уравнении на время возвращаемся обратно к прежним обозначениям, полагая

$$\epsilon_{\pm} \rightarrow \mu_c^2\epsilon, \quad \beta^2 \rightarrow \mu_c^2\beta^2, \quad \epsilon \rightarrow \mu_c^2\epsilon.$$

Тогда

$$\beta^2 = \epsilon_{\pm}(1 - \mu_c^2\epsilon_{\pm}). \quad (25)$$

Этому соотношению можно придать вид

$$\beta^2 = \epsilon_{\pm} \sin^2 \varphi, \quad \frac{\cos^2 \varphi}{\epsilon_{\pm}} = \frac{\cos^2 \varphi_c}{\epsilon_c}.$$

Это есть условие существования волны Брюстера. Здесь φ - угол падения плоской волны из дефокусирующей среды на поверхность подложки, φ_c - угол преломления прошедшей волны. Для нелинейной среды условие (25) можно записать также в виде

$$\beta^2 = \frac{\epsilon_c \epsilon_s}{\epsilon_c + \epsilon_s}. \quad (25')$$

В линейном приближении при заданном $\beta^2, \epsilon_c (\beta^2 < \epsilon_c)$ такое равенство возможно только при одном значении ϵ . А в нелинейном случае ϵ_s может варьироваться в зависимости от интенсивности, если только $\epsilon_s \leq \epsilon$, поэтому условие (25) может удовлетворяться в широкой области изменений параметров:

$$\beta^2, \epsilon_c, \epsilon (\beta^2 < \epsilon_c).$$

В брюстеровской волне квадраты амплитуд полевых компонент определяются через ϵ_3 по (4) и (5). Отметим, что точно такие же выражения получены для зависящих от интенсивности плоских волн в дефокусирующей подложке. С учетом (18) и (20) находим

$$(A^2)_+ = (h^2)_+, \quad (e^2)_+ \neq (e^2)_-.$$

Теперь проанализируем волну, соответствующую решению (23).

4. Нетривиальная плоская волна. Обращая (23), находим

$$\beta^2 = \frac{\epsilon_3^2}{2\varepsilon - 3\epsilon_3}. \quad (26)$$

Это выражение весьма отличается от (25) для брюстеровских волн. Другой особенностью этой волны является зависимость ее полевых компонент от $\epsilon (= \epsilon_3)$. Эта зависимость определяется по формулам (6) и (7), отличным от тех, которые имеют место в зависящих от интенсивности плоских волнах. Это означает, что данная волна не имеет линейного аналога и поэтому является нетривиальной плоской волной.

Зависимость значения диэлектрической функции ϵ от β^2 - константы рефракции в волнах Брюстера и в нетривиальной плоской волне-показана на рис.1. Прерывистая линия - парабола с вершиной в точке $\beta^2 = 0,25, \epsilon = 0,5$ и с осью симметрии $\epsilon = 0,5$. Ее верхняя ветвь изображает ϵ_+ а нижняя - ϵ_- . Сплошная линия - график функции (26) при $\varepsilon = 1$. Эта линия проходит через вершину параболы, образуя тройную точку. Горизонтальная линия фиксирует значение $\epsilon = 2/3$. Видно, что в нетривиальной плоской волне ϵ возрастает с ростом β^2 , но не превосходит значений $2/3$.

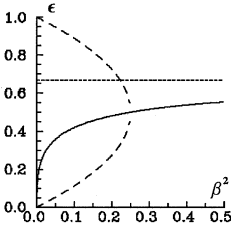


Рис.1. Зависимость диэлектрической функции ϵ от постоянной рефракции β^2 для волн Брюстера и нетривиальной плоской волны

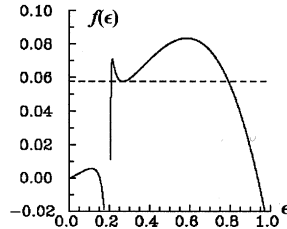


Рис.2. График функции $f(\epsilon)$ при $\varepsilon = 1, \beta^2 = 0,1, \epsilon_d = 0,209$

В нетривиальной плоской волне A^2 и h^2 равны между собой, как и в волнах Брюстера:

$$A^2 = h^2 = 1 - \frac{3}{2}\epsilon_3.$$

5. Общий корень уравнений (17) и (21), $\epsilon_0 = \epsilon_3 = 2\beta^2$. Чтобы (1) и (2) имели смысл, необходимо

$$2cnst = \varepsilon^2 - 4\beta^4.$$

Тогда (1) и (2) приобретают вид

$$e^2 = \beta^2(2\beta^2 + \epsilon)/2\epsilon, \\ A^2 = (-2\epsilon^2 + (2\varepsilon - \beta^2)\epsilon - 2\beta^4)/2\epsilon.$$

Последнее выражение положительно при $\beta^2 \leq 0,4\epsilon$. Вопрос о существовании такого специального поля волн решается возможностью его согласования с приграничным значением ϵ_d . Расчет показывает, что такая волна может существовать только при $\epsilon_d = 0,4\epsilon$.

6. Асимптотически плоская волна. Наш анализ показывает, что существует в дефокусирующей среде на подложке ТМ-волна, которая в пределе $z \rightarrow -\infty$ асимптотически приблизится к плоской волне. Существование ТЕ-волны в дефокусирующей подложке, которая при $z \rightarrow \infty$ асимптотически приблизится к плоской волне, давно было установлено А.Е.Капланом [1].

Сначала при заданном ϵ_d из уравнений (15) и (16) находятся стационарные точки ϵ_s , которые затем исследуются на минимум/максимум с помощью второй производной функции $f(\epsilon)$. Вторая производная в точке ϵ_s вычисляется и имеет простой вид.

В первом режиме

$$f(\epsilon_s)'' = -\frac{(\epsilon - 3\epsilon_s + 2\beta^2)(2\beta^2\epsilon - \epsilon_s^2 - 2\beta^2\epsilon_s)}{(2\beta^2 - \epsilon_s)^2}.$$

Во втором режиме

$$f(\epsilon_s)'' = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_s}{\beta^2} (\epsilon_s^2 + 2\beta^2\epsilon_s - 2\beta^2\epsilon) / (2\beta^2 - \epsilon_s).$$

Решение уравнения (15) дает брюстеровские значения ϵ_+ или ϵ_- для ϵ_s , при которых функция $f(\epsilon)$ достигает своего максимума.

Пусть $\epsilon_{s0}(\epsilon_d)$, $\epsilon_{s1}(\epsilon_d)$ и $\epsilon_{s2}(\epsilon_d)$ - корни уравнения (16), найденные по формуле Кардано. Из них $\epsilon_{s1}(\epsilon_d)$ не имеет смысла. Среди этих корней есть такие, что

$$\epsilon_s = \epsilon_{s0}(\epsilon_s), \text{ или } \epsilon_s = \epsilon_{s2}(\epsilon_s).$$

Они являются значениями диэлектрической функции нетривиальных плоских волн. А также возможны случаи

$$\epsilon_s = \epsilon_{s0}(\epsilon_d) \neq \epsilon_d, \text{ или } \epsilon_s = \epsilon_{s2}(\epsilon_d) \neq \epsilon_d, \quad (27)$$

при которых функция $f(\epsilon)$ имеет минимальное значение при условии

$$f(\epsilon_s) = 4co^2(\epsilon_d). \quad (28)$$

В качестве примера один такой случай представлен на рис.2. При $\beta^2 = 0,1$; $\epsilon = 1$ и $\epsilon_d = 0,209$ функция $f(\epsilon)$ имеет в точке $\epsilon_s = 0,268$ минимум в соответствии с условием (28). Здесь горизонтальная линия фиксирует значение $4co^2(\epsilon_d)$. Значение диэлектрической функции может возрасти, начиная с приграничного значения ϵ_d , стремясь к ϵ_s , где функция минимальна в пределе при $z \rightarrow -\infty$. В данном случае волна асимптотически будет вести себя как плоская. Это нетрудно понять из (3), выражающей зависимости от координаты z .

Однако необходимо отметить, что не все ϵ_s при различных значениях ϵ_d , удовлетворяющих условиям (27) и (28), являются предельным значением в указанном смысле. Например, в случае, если точки ϵ_d и ϵ_s находятся по разные стороны от точки $2\beta^2$, где функция претерпевает бесконечный разрыв, переход от ϵ_d к ϵ_s невозможен.

Авторы выражают благодарность профессору И.В. Пузынину за поддержку и помощь в работе.

Список литературы

- [1] Каплан А.Е., Письма в ЖЭТФ, 1976, Т.24, с.132-137.
- [2] Leung K.M., Phys. Rev., 1989, B39., P.3590.
- [3] Leung K.M., Ling R.I., Phys. Rev., 1991, v.44., No.10, P.5007.
- [4] Очирбат Г., Препринт ОИЯИ, 1991, P17-91-358, Дубна.
- [5] Очирбат Г., Препринт ОИЯИ, 1996, P17-96-382, Дубна.
- [6] Очирбат Г., Препринт ОИЯИ, 2000, P17-2000-247, Дубна.
- [7] Gupta D., Progress in optics, 1998, v.38, p. 3-76.
- [8] Akhmediev N.N., Optical and quantum electronics, 1998, 30, p.535-569.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 октября 2000 года.

Очирбат Г., Нямсурен О.

P17-2000-241

Рассеяние света в дефокусирующей среде на линейной подложке.

Анализ формального решения

Проведен анализ формальных решений системы уравнений Максвелла для задачи рассеяния стационарных ТМ-волн света в дефокусирующей среде на линейной подложке. Выявлены волны Брюстера и обнаружена нетривиальная плоская волна, для которой установлено соотношение между константой рефракции и зависящей от интенсивности диэлектрической константой. Получена асимптотически плоская ТМ-волна поляризации и разработан прием для ее выявления.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод авторов

Ochirbat G., Nyamsuren O.

P17-2000-241

Scattering of Light in Defocusing Media upon Linear Substrate.

Analysis of Formal Solutions

An analysis of formal solutions to the system of Maxwell equations has been performed for a scattering problem of stationary TM light waves in defocusing matter on a linear substrate. Bruster waves have been observed. A nontrivial plane wave has been found for which relation between a refraction constant and an intensity-dependent dielectric constant has been found. An asymptotic plane TM wave has been obtained, and a procedure of its finding has been elaborated.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 02.11.2000
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 0,95
Тираж 315. Заказ 52326. Цена 1 р. 14 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области