ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P17-2000-242

Г.Очирбат[1], О.Нямсурен[2]

СТАЦИОНАРНЫЕ СВЕТОВЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ПЛОСКОЙ СРЕДЕ, ГЛАВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА КОТОРОЙ ПРОИЗВОЛЬНО ЗАВИСЯТ ОТ ИНТЕНСИВНОСТИ. СЛУЧАЙ РАССЕЯНИЯ

Направлено в журнал
«Электромагнитные волны и электронные системы»

---

[1]Монгольский государственный университет, Улан-Батор
[2]Компания «Газар-холдинг», Улан-Батор

2000

Задача распространения световых ТЕ- и ТМ-волн в изотропной пленке с нелинейностью типа Керра рассматривалась очень давно, и ее аналитическое решение в рамках задачи рассеяния было получено в [1-6]. Последующая попытка перехода к рассмотрению более общего случая анизотропной пленки была сделана в [7]. Однако эта работа ограничивалась самым простым видом анизотропии, где все диагональные элементы диэлектрического тензора одинаково линейно зависят от интенсивности I:

$$\in_i = \varepsilon_i + I, \quad i = 1,2,3. \tag{1}$$

Здесь ε_i – константы, представляющие главные значения диэлектрического тензора в линейном приближении. Результаты этой работы недавно были обобщены для электронной нелинейности [9]. Методы, использованные в этой работе, применимы также к классу анизотропных кристаллов, главные значения диэлектрического тензора которых являются общими квадратичными формами от компонент электрического поля [8].

Целью данной работы является обобщение простого результата, полученного раньше в [4,7], для сложного случая анизотропии и нелинейности и обсуждение вопроса интегрируемости полной системы уравнений Максвелла для волны в плоской среде.

В данной работе рассматривается плоская среда, которой может быть пленка или подложка (или накладка).

Электромагнитную волну, распространяющуюся в плоской среде, представим в виде

$$E_x = iA\exp(i\phi_A)\varphi + k.c, \qquad E_y = e\exp(i\phi_h)\varphi + k.c, \qquad E_z = e_z\exp(i\phi_e)\varphi + k.c,$$

$$H_x = iH\exp(i\phi_H)\varphi + k.c, \quad H_y = h\exp(i\phi_e)\varphi + k.c, \quad H_z = h_z\exp(i\phi_h)\varphi + k.c.$$

Здесь $\varphi = \exp(-\mathrm{i}\omega\mathrm{t} + \mathrm{ik}_0\beta x)$, k_0 - модуль волнового вектора, соответствующий вакууму, β –постоянная рефракции, ω –круговая частота,

$$A > 0, H > 0, e > 0, e_z > 0, h < 0 \text{ и } h_z > 0.$$

Геометрия задачи такова, что амплитуды A, H, e, e_z, h и h_z, а также фазы ϕ_A, ϕ_e, ϕ_H и ϕ_h будут зависеть только от z-координаты.

Для конкретности полагаем, что свет падает из линейной кладки $(z < 0)$ на поверхность $(z = 0)$ нелинейной и анизотропной пленки $(z \geq 0)$ шириной d. Волна бегает вдоль x-направления, одновременно распространяясь по направлению оси z. В уравнениях Максвелла фигурируют следующие фазовые разности:

$$\Delta\phi = \phi_e - \phi_A, \; \Delta\phi' = \phi_h - \phi_H,$$

которые можно исключить из них с помощью соотношений, представляющих законы сохранения потоков. В результате из уравнений Максвелла получаются следующие уравнения для квадратов амплитуд тангенциальных компонент поля:

$$\left(h^2\right)'_z = -2\in_1\sqrt{A^2h^2 - 4c_{01}^2}, \tag{2}$$

$$\left(A^2\right)'_z = 2\frac{\in_3 - \beta^2}{\in_3}\sqrt{A^2h^2 - 4c_{01}^2}, \tag{3}$$

$$\left(e^2\right)'_z = 2\sqrt{H^2e^2 - 4c_{02}^2}, \tag{4}$$

$$\left(H^2\right)'_z = 2\left(\beta^2 - \in_2\right)\sqrt{H^2e^2 - 4c_{02}^2}. \tag{5}$$

Здесь z обозначает безразмерную z- координату: k_0z; $()'_z$- производная по координате z; а c_{01} и c_{02} - константы, выражающие величины потоков энергии в ТМ- и ТЕ-компонентах волны общей поляризации, $\in_1, \in_2$ и $\in_3$ - главные значения диэлектрического тензора, которые произвольно зависят от локальной интенсивности.

Из этих уравнений получено уравнение "эволюции" для интенсивности I по координатам:

$$\frac{dI}{dz}=2\frac{\left(\in_3^3-\beta^2(\in_1+\in_3)\in_3\right)\sqrt{A^2h^2-4c_{01}^2}+\in_3^3\sqrt{H^2e^2-4c_{02}^2}}{\in_3^3+2\beta^2h^2(d\in_3/dI)}, \qquad (6)$$

которое разделением переменных приводится к квадратуре в том случае, если найдены зависимости величин A^2, h^2, H^2 и e^2 от локальной интенсивности I. Считаем правую часть этого уравнения функцией от интенсивности I и для краткости обозначим ее через f.

Предполагая, что A^2 и h^2 являются функциями от I, перепишем уравнения (2) и (3) в виде

$$\left(h^2\right)_I'=-\frac{2}{f}\in_1\sqrt{A^2h^2-4c_{01}^2}. \qquad (7)$$

$$\left(A^2\right)_I'=\frac{2}{f}\frac{\in_3-\beta^2}{\in_3}\sqrt{A^2h^2-4c_{01}^2}. \qquad (8)$$

Здесь $()_I'$ - производная по координате I. Также полагая, что e^2 и H^2 являются функциями от I, вместо (4) и (5) имеем

$$\left(e^2\right)_I'=\frac{2}{f}\sqrt{H^2e^2-4c_{02}^2}, \qquad (9)$$

$$\left(H^2\right)_I'=\frac{2}{f}\left(\beta^2-\in_2\right)\sqrt{H^2e^2-4c_{02}^2}. \qquad (10)$$

Из (7) и (8) находим, что

$$\left(A^2\right)_I'+\frac{\in_3-\beta^2}{\in_1\in_3}\left(h^2\right)_I'=0. \qquad (11)$$

Из (9) и (10) находим, что

$$\left(H^2\right)_I'+\left(\in_3-\beta^2\right)\left(e^2\right)_I'=0. \qquad (12)$$

Теперь введем вспомогательные функции по формуле

$$Q=A^2+\frac{\in_3-\beta^2}{\in_1\in_3}h^2, \qquad (13)$$

$$q=H^2+\left(\in_2-\beta^2\right)e^2. \qquad (14)$$

Тогда с помощью этих функций исходные функции h^2, A^2, e^2 и H^2 выражаются следующим образом:

$$h^2=\frac{\dot{Q}}{\dot{F}}, \quad F=\frac{\in_3-\beta^2}{\in_1\in_3}, \qquad (15)$$

$$A^2=Q-F\frac{\dot{Q}}{\dot{F}}, \qquad (16)$$

$$e^2=\frac{\dot{q}}{\dot{\in}_2}, \qquad (17)$$

$$H^2=q+\frac{\beta^2-\in_2}{\dot{\in}_2}\dot{q}. \qquad (18)$$

Здесь и дальше точка над буквами обозначает производную по I. Эти функции должны согласоваться между собой:

$$I = A^2 + |E_z|^2 + e^2 = Q + \left(\frac{\beta^2}{\in_3^2} - F\right)\frac{\dot{Q}}{\dot{F}} + \frac{\dot{q}}{\dot{\in}_2}. \tag{19}$$

Это уравнение представляет собой дифференциальную связь между двумя вспомогательными величинами Q и q. Заметим, что уравнение связи сразу интегрируется в следующих двух случаях нелинейностей:

а) первый случай, когда

$$\dot{\in}_1 = \dot{\in}_2 = \dot{\in}_3,$$

то есть

$$\in_1 = \varepsilon_1 + g(I), \in_2 = \varepsilon_2 + g(I), \in_3 = \varepsilon_3 + g(I),$$

причем $g(I)$ - произвольная функция, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и ε_3 – постоянные;

б) второй случай, когда

$$\dot{\in}_1 = \dot{\in}_3 = \frac{\dot{\in}_2}{\gamma},$$

то есть

$$\in_1 = \varepsilon_1 + \tilde{g}(I), \in_2 = \varepsilon_2 + \gamma\,\tilde{g}(I), \in_3 = \varepsilon_3 + \tilde{g}(I) .$$

Причем $\tilde{g}(I)$ - произвольная функция от I, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и γ_3 –постоянные.

В случае интегрируемости уравнения связи все полевые компоненты будут выражаться через одну и ту же вспомогательную переменную и для этой вспомогательной переменной может быть получено замкнутое уравнение.

Теперь рассмотрим ТМ- и ТЕ-волны в анизотропной пленке, главные значения диэлектрического тензора которой зависят от интенсивности произвольно.

ТМ-волна. Положим, что $Q \neq 0$ и $q = 0$. Тогда $H^2 = e^2 = c_{02} = 0$. В этом случае уравнение связи интегрируется элементарно. Перепишем это уравнение в виде

$$\dot{Q} + p(I) = p(I)I, \tag{20}$$

где

$$p(I) = \frac{(\beta^2 - \in_3)\in_3\dot{\in}_1 + \beta^2\dot{\in}_3\in_1}{\in_1\left(\beta^2(\in_1 + \in_3) - \in_3^2\right)}.$$

Решение уравнения (20)

$$Q = \left(\int_0^I \frac{Ip(I)}{s(I)}dI + c\right)s(I), \quad s(I) = \exp\left(-\int_0^I p(I)dI\right), \tag{21}$$

где c - константа,которая может быть определена из (13) при граничном значении поля. Теперь (15) и (16) приобретают вид

$$h^2 = \frac{I - Q}{\beta^2 - \in_3^2 F}\in_3^2, \quad A^2 = \frac{\beta^2 Q - I\in_3^2 F}{\beta^2 - \in_3^2 F}. \tag{22}$$

С учетом этих выражений уравнение (6) интегрируется

$$z = d \pm \frac{1}{2}\int_{I_d}^{I} \frac{\in_3^3 + 2\beta^2(d\in_3 / dI)h^2}{\left(\in_3^3 - \beta^2(\in_1 + \in_2)\in_3\right)\sqrt{A^2h^2 - 4c_{01}^2}}dI, \tag{23}$$

где I_d - величина интенсивности света на соприкасающейся с подложкой поверхности пленки. Таким образом, задача ТМ-волн формально решается.

ТЕ- волна. Положим, что $q \neq 0, Q = 0$. Тогда $h^2 = A^2 = c_{01} = 0$. Из (19) находим, что

$$q = I \in_2 - \int_0^I \in_2 (I) dI + c, \tag{24}$$

где c – константа, которая может быть определена из (14) при граничном значении поля. Тогда (17) и (18) приобретают вид

$$e^2 = I, \quad H^2 = \beta^2 I - \int_0^I \in_2 (I) dI + c. \tag{25}$$

С учетом этих выражений, интегрируя (6), находим, что

$$z = d \pm \frac{1}{2} \int_{I_d}^{I} \frac{dI}{\sqrt{H^2 e^2 - 4c_{02}^2}}, \tag{26}$$

где I_d – величина интенсивности света на соприкасающейся с подложкой поверхности пленки, $z = d$.

О возможности интегрирования полной системы уравнений Максвелла. В случае интегрируемости уравнения связи имеется возможность получить отдельное уравнение для одной вспомогательной переменной. Это продемонстрируем на примере изотропной нелинейности типа Керра:

$$\in_1 = \in_2 = \in_3 = \in \ , \in = \varepsilon + I.$$

Здесь константа Керра α отсутствует из-за замены:

$$\sqrt{\alpha}\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}, \quad c\mu_0\sqrt{\alpha}\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}.$$

В этом случае в приведенных выше уравнениях производную по I можно считать производной по $\in$.

Теперь уравнение связи

$$\in = \varepsilon + Q + \in\dot{Q} + \dot{q}. \tag{27}$$

Уравнение связи (27) интегрируется, и в результате получаем конечное выражение с одной константой c:

$$\in Q + q = \frac{\in^2}{2} - \varepsilon \in + c. \tag{28}$$

Связь между двумя вспомогательными функциями оказалась весьма простой. Переход к общему случаю поляризации осуществляется через согласование уравнений (7) и (9).

Объединяя эти уравнения, получаем, что

$$\frac{dh^2 / d\in}{-\in\sqrt{A^2 h^2 - 4c_{01}^2}} = \frac{de^2 / d\in}{\sqrt{H^2 e^2 - 4c_{02}^2}}. \tag{29}$$

Освобождаясь от радикалов и используя уравнение связи (28), уравнение для q перепишем в явном виде:

$$(2\beta^2 - \in)^2 \in^2 u(\in, q, \dot{q})\ddot{q}^2 + (2\beta^2 - \in)\in^2 v(\in, q, \dot{q})\ddot{q} + w(\in, q, \dot{q}) = 0, \tag{30}$$

где введены следующие обозначения:

$$u(\in, q, \dot{q}) = \beta^2 q^2 - (2\beta^2 a(2) - a(1)\in^2)q - \in^2(2(\in - \beta^2)a(1) - a(2))\dot{q} + 4c_{01}^2(2\beta^2 - \in)^2 -$$
$$- 4c_{02}^2 \in^2 - r(5),$$

$$v(\in, q, \dot{q}) = -4\beta^2 q^2 \dot{q} + 4\beta^2(2\in - \beta^2)q\dot{q}^2 - 4\beta^2(\in - \beta^2)\in\dot{q}^3 - 2r(3)q\dot{q} - 2(\beta^2 - \in)r(3)\dot{q}^2 +$$
$$+ 16\beta^2 c_{02}^2 q - 16\beta^2 c_{02}^2 \in \dot{q} + 8c_{02}^2 r(3),$$

$$w(\in,q,\dot q)=4\beta^4\left(q^3\dot q+\left(\beta^2-3\in\right)q^2\dot q^2-\left(2\beta^2\in-3\in^2\right)q\dot q^3+\left(\beta^2-\in\right)\in^2\dot q^4\right)+$$
$$+4\beta^2\left(r(3)q^2\dot q+\left(\beta^2-2\in\right)r(3)q\dot q^2-\left(\beta^2-\in\right)\in r(3)\dot q^3-4\beta^2c_{02}^2q^2\right)+$$
$$+\left(r(3)^2+32\beta^4c_{02}^2\in\right)q\dot q+\left(\left(\beta^2-\in\right)r(3)^2-16\beta^4c_{02}^2\in^2\right)\dot q^2-16\beta^2c_{02}^2r(3)q+$$
$$+16\beta^2c_{02}^2r(3)\in\dot q-4c_{02}^2r(3)^2,$$

$$a(1)=\in-\varepsilon,\quad a(2)=0{,}5\in^2-\varepsilon\in+c,\quad r(3)=-\in^3+3\beta^2\in^2-2\beta^2c,$$
$$r(5)=\in^2\left(a(1)a(2)-\left(\in-\beta^2\right)a(1)^2\right)-\beta^2a(2)^2.$$

В случае решения этого уравнения мы сумеем свести задачу к квадратуре. Порядок следования процедуры таков:

1) определение $Q(\in)$ из (28) через $q(\in)$;

2) определение A^2 и h^2 по формуле (15) и (16);

3) определение e^2 и H^2 по формуле (17) и (18);

4) $z(\in)$ находится как

$$z=d\pm\frac{1}{2}\int_{\in_d}^{\in}\frac{\in^3+2\beta^2h^2}{\in^2\left(\in-2\beta^2\right)\sqrt{A^2h^2-4c_{01}^2}+\in^3\sqrt{H^2e^2-4c_{02}^2}}d\in, \qquad (31)$$

где $\in_d$ – значение диэлектрической функции на граничной с подложкой плоскости пленки, $z=d, d$ - толщина пленки;

5) определение волнового поля как

$$\mathrm{H}^2(\in(z)), e^2(\in(z)), A^2(\in(z)), \text{ и } \mathrm{h}^2(\in(z)).$$

Заметим, что в соответствии с исходными четырьмя уравнениями первого порядка здесь общее решение будет содержать четыре независимых постоянных, кроме c_{01} и c_{02}.

Авторы выражают благодарность профессору И.В.Пузынину за поддержку и помощь в работе.

Список литературы

[1] Каплан А.Е., Письма в ЖЭТФ, 1976, Т.24 с.132-137.
[2] Chen W, Mills D. L., Phys. Rev.,1988, B38, p.12814.
[3] Peschel T., Dannberg P., Langbein U., Lederer F., J. Opt. Soc. Am., 1988, B5, 29.
[4] Leung K.M., Phys. Rev.,1989, B39, p3590.
[5] Leung K.M., Lin R.L., Phys.Rev., 1991, Vol.44, N0, p.5007.
[6] Очирбат Г., Препринт ОИЯИ, 1991, Р17-91-358, Дубна.
[7] Очирбат Г. и др., Препринт ОИЯИ, 1996, Р17-96-382, Дубна.
[8] Dmitriev V.G., Gurzadyan G.G., Nikogosyan D.N., 1995, Handbook of NL optical cristals, Springer series.
[9] Очирбат Г., Нямсурен О., Препринт ОИЯИ, 2000, Р17-2000-247, Дубна.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 октября 2000 года.

Очирбат Г., Нямсурен О. P17-2000-242
Стационарные световые волны в анизотропной и нелинейной плоской среде, главные значения диэлектрического тензора которой произвольно зависят от интенсивности.
Случай рассеяния

Рассматривается плоская среда, главные значения диэлектрического тензора которой произвольно зависят от интенсивности. Задачи ТМ- и ТЕ-волн в рамках проблемы рассеяния света приводятся к квадратуре. Обсуждается вопрос интегрируемости полной системы уравнений Максвелла. Получено замкнутое уравнение для одной вспомогательной переменной в случае нелинейности Керра. Для этого случая предлагается схема интегрирования полной системы уравнений Максвелла посредством решения уравнения вспомогательной переменной.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод авторов

Ochirbat G., Nyamsuren O. P17-2000-242
Stationary Light Waves in Anizotropy and Nonolinear Plane Media, whose Dielectric Tensor's Principal Values Arbitrarily Depend upon Intensity.
Case of Scattering

A plane medium, whose dielectric tensor's principal values arbitrarily depend upon intensity, is considered. The problems of the TM and TE waves, within the problem of light scattering, are reduced to quadrature. A question of integrability of the full system of Maxwell equations is discussed. A closed equation has been obtained for an auxiliary variable for a nonlinearity of Kerr type. A scheme for integrating the full system of Maxwell equations by solving the equation over the auxiliary variable is suggested.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 03.11.2000
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 0,57
Тираж 315. Заказ 52328. Цена 69 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области