ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2-2000-199

А.П.Нерсесян*

ЛАГРАНЖЕВА МОДЕЛЬ БЕЗМАССОВОЙ ЧАСТИЦЫ НА ПРОСТРАНСТВЕННОПОДОБНЫХ КРИВЫХ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

*Ереванский государственный университет, Армения;
E-mail: nerses@thsun1.jinr.ru

2000

1 Введение

Как известно, лагранжево описание спиновых частиц требует введения дополнительных степеней свободы. Как правило, это достигается расширением исходного пространства грассмановыми переменными, что составляет основу "псевдоклассического" подхода Березина–Маринова [1] и генетически связанного с ним подхода, основанного на введении суперсимметрий [2, 3] (ссылки на более поздние работы можно найти, соответственно, в [4, 5]). Можно также расширить пространство коммутирующими переменными, что, по существу, является лагранжевой формулировкой подхода Сурье к гамильтонову описанию спиновых частиц и связано с т.н. методом орбит Кириллова–Костанта–Сурье [6]. Фактически, он приводит к замене исходного пространства-времени $M^{1.D-1}$ прямым произведением $M^{1.D-1} \times K$, где K есть коорбита группы Пуанкаре (наиболее полно этот подход развит в работах [7]). Заметим, что эти подходы не являются удовлетворительными с точки зрения интуитивного восприятия спиновых частиц: в обоих описаниях спин выступает как сущность, существующая независимо от исходного пространства-времени.

Альтернативой указанным подходам может быть введение дополнительных степеней свободы посредством высших производных исходных пространственно-временных координат. В этом случае для соблюдения репараметризационной и пуанкаре-инвариантности действие должно иметь вид

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L}(k_1, ..., k_N) ds, \tag{1.1}$$

где k_I обозначают репараметризационные инварианты (внешние кривизны) мировой линии системы $(0 < I \leq D-1)$, а ds – ее натуральный параметр:

$$ds = \begin{cases} |d\mathbf{x}| & \text{для неизотропных кривых} \\ |d^2\mathbf{x}|^{1/2} & \text{для изотропных кривых} \end{cases} . \tag{1.2}$$

Интерес к системам на неизотропных кривых возник в конце восьмидесятых годов благодаря работам Полякова по жестким струнам и $(2+1)$-мерным теориям поля с членом Черна–Саймона [8]. В таком контексте особый интерес представляли системы массивных частиц, в которых члены с высшими производными могут рассматриваться как квантовые поправки к исходному действию свободной частицы. Наиболее полно системы на неизотропных кривых, зависящие от первой и второй кривизн мировой линии, были исследованы в работах Плющая (см. [9, 10] и ссылки в них). Прежде всего, следовало бы отметить его работы по массивным (2+1)-мерным частицам с лагранжианом, линейно зависящим от второй кривизны: эта система, полученная первоначально в работе Полякова, явилась первой и наиболее удачной лагранжевой моделью релятивистского аниона, причем ее спектр удовлетворял условию Майораны [9].

Наиболее красивой системой такого сорта является модель четырехмерной безмассовой частицы (именуемая далее моделью Плющая), описываемая действием:

$$\mathcal{S} = \mathrm{c}\int k_1 ds, \quad (ds)^2 = (d\mathbf{x})^2 \neq 0, \quad k_1^2 = \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\right)^2 . \tag{1.3}$$

Эта система, как оказалось, описывает безмассовые частицы спиральности c, принимающей после квантования произвольное целое значение. Ее ковариантное квантование, основанное на твисторной технике, позволило получить также состояния произвольной полуцелой спиральности [11]. Несмотря на то что модель Плющая не допускает формулировки в произвольном гравитационном фоне [13], ее можно непротиворечиво сформулировать на пространстве анти-де Ситтера [14]. Более того, она обладает калибровочной W_3- симметрией [12], а ее классическими траекториями являются пространственноподобные плоские кривые с произвольной первой кривизной.

Как обобщить модель Плющая на пространства высших размерностей?

Этот вопрос не столь тривиален, как может показаться на первый взгляд. Дело в том, что аналогом спиральности в $D > 5$ являются веса малой группы Лоренца, $SO(D-2)$, и частицы имеют не одну, но $N_0 = [(D-2)/2]$ спиральностей. Поэтому квантово-механически безмассовые частицы описываются неприводимыми представлениями группы Пуанкаре, соответствующими диаграммам Юнга с N_0 строками длиной m_i, где m_i являются весами $SO(D-2)$; максимальная размерность фазового пространства, отвечающего безмассовому неприводимому представлению, определяется выражением [15]

$$\mathcal{D}^{max}_{massless} = 2(D-1) + D^{max}_{helic}, \quad D^{max}_{helic} = \begin{cases} (D-2)(D-4)/2 & \text{для четных } D; \\ (D-3)^2/2 & \text{для нечетных } D. \end{cases} \tag{1.4}$$

При $D = 4$ модель Плющая, таким образом, описывает все неприводимые безмассовые представления группы Пуанкаре, причем эти представления конформно-инвариантны. Для получения аналогичных представлений из суперсимметричной модели требуется введение $\mathcal{N} = 2s$ локальных суперсимметрий [3]. При $D \geq 6$ модель Плющая порождает лишь неприводимые представления, отвечающие однострочным диаграммам Юнга длиной c, в то время как суперсимметричная модель порождает представления, описываемые прямоугольными диаграммами Юнга с N_0 строками длины s, где s обозначает спиральность частицы [16].

Заметим, что неприводимые безмассовые представления группы Пуанкаре конформно-инвариантны только при $m_1 = m_2 = \ldots = m_{N_0} \equiv m$, где $m = 0(1/2)$ при нечетном D, и любое (полу)целое число, если D четно [17]. Таким образом, при $D \geq 6$ модель Плющая, в отличие от суперсимметричной модели, не обладает конформной инвариантностью. Для поиска подходящего кандидата для описания безмассовых частиц мы должны провести общий анализ систем с действием (1.1) с целью нахождения лагранжианов, приводящих к неприводимым представлениям. Эта задача проще, чем может показаться на первый взгляд. Действительно, в работе [18] была развита удобная для исследования гамильтонова формулировка систем типа (1.1), позволяющая формулировать их в терминах гамильтоновой системы с $(2D-N)(N+1)$- мерным фазовым пространством и

$$rank \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial k_i \partial k_j}$$

первичными связями. Причем, как оказалось, все системы этого сорта с нелинейными по кривизнам лагранжианами, а также все лагранжианы, отвечающие частицам с ненулевой массой, приводят к приводимым представлениям. Таким образом, для поиска $D-$мерных обобщений модели Плющая, сформулированных на неизотропных кривых, достаточно исследовать действия вида

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{N} c_i \int k_i ds, \quad (ds)^2 = (d\mathbf{x})^2 \neq 0, \tag{1.5}$$

где k_I являются внешними кривизнами мировой линии (результаты предварительного классического анализа таких систем можно найти в [19]).

Конечно, остаются еще экзотические модели, сформулированные на изотропных кривых. Однако, проведя анализ, аналогичный проделанному в [18], можно увидеть, что, во-первых, и в этом случае максимальным числом первичных связей обладают линейные лагранжианы и, во-вторых, системы с линейными лагранжианами отвечают массивным частицам, описываемым приводимыми представлениями [20].

Итак, с целью нахождения обобщений модели Плющая для пространств высших размерностей, мы проведем в представляемой работе анализ систем с действием (1.5), а также рассмотрим возможность их формулировки на нетривиальном гравитационном фоне.

В *разделе 2* мы построим первичную гамильтонову систему, отвечающую модели (1.5), и проведем анализ процедуры построения вторичных связей и уравнений движения системы. В частности, будет показано, что

- системы с действием (1.5) имеют нетривиальные решения лишь при

  $$N \leq N_0 = [(D-2)/2]$$

  и описывают безмассовые частицы N ненулевыми и $(N_0 - N)$ нулевыми спиральностями;

- классические решения системы (1.5) описываются пространственноподобными кривыми с нулевой $2N$–й кривизной. Первые $2N$ элементов ее подвижного репера пространственноподобны, а $(2N+1)$–й элемент является изотропным вектором, отвечающим импульсу системы;

- единственная система типа (1.5), порождающая только неприводимые представления, описывается действием
$$\mathcal{S} = c\int k_N ds, \quad (ds)^2 = (d\mathbf{x})^2 \neq 0\,. \tag{1.6}$$

В *разделе 3* исследованы классические и квантовые свойства модели (1.6) и возможность ее формулировки на нетривиальном гравитационном фоне. Показано, что

- модель (1.6) описывает безмассовые частицы со спиральностями $m_1 = m_2 = \ldots = m_N = c$, $m_{N_0-N} = m_{N_0-N+1} = \ldots = m_{N_0} = 0$, так что квантово-механически они соответствуют неприводимым представлениям группы Пуанкаре с прямоугольными диаграммами Юнга размерности $N \times c$, где c принимает произвольное целое значение. Таким образом, при четном D и $N = N_0$ решения конформно-инвариантны;

- классическими траекториями модели являются пространственноподобные кривые, удовлетворяющие условиям $k_{N+i} = k_{N-i}$, где $i = 1,\ldots,N$, $k_0 \equiv 0$. В то же время значения первых N кривизн произвольны, что является геометрической иллюстрацией наличия в системе $N+1$ калибровочной симметрии. Приведены косвенные аргументы в пользу того, что они образуют калибровочную алгебру W_{N+2};

- системы с действием (1.5) непротиворечиво формулируются на пространствах постоянной ненулевой кривизны, так что модель (1.6) допускает формулировку на пространствах анти-де Ситтера.

В *заключении* обсуждаются полученные результаты и открытые проблемы.

Везде по тексту мы пользуемся обозначениями
$$\forall\mathbf{a} \equiv a^A,\ \mathbf{b} \equiv a^A:\quad \mathbf{ab} = \sum_{A=1}^{D} a^A b_A, \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} \equiv \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} - \mathbf{b}\otimes\mathbf{a},$$
а также полагаем, что индексы $i, j, k, \ldots$ принимают значения $i, j, k, l = 1, \ldots N$.

2 Формулы Френе и гамильтонов формализм

Репараметризационные инварианты (внешние кривизны) $k_1, \ldots, k_{D-1}$ кривых в евклидовом пространстве естественным образом определяются в терминах формул Френе для подвижного репера $\{\mathbf{e}_I\}$:
$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{s}\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_I = \tilde{s}k_I\mathbf{e}_{I+1} - \tilde{s}k_{I-1}\mathbf{e}_{I-1}, \tag{2.1}$$
где
$$\mathbf{e}_I\mathbf{e}_J = \delta_{IJ}, \quad I, J = 1, \ldots, D; \quad \tilde{s} = |\dot{\mathbf{x}}|, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{D+1} \equiv 0.$$

Нетрудно проверить, что элементы базиса Френе можно выразить через пространственные координаты следующим образом:
$$\mathbf{e}_I = \frac{1}{\sqrt{\det\hat{g}_{I-1}\det\hat{g}_I}}\begin{vmatrix} g_{1.1} & \cdots & g_{1.I} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{I-1.1} & \cdots & g_{I-1.I} \\ \dot{\mathbf{x}} & \cdots & \mathbf{x}_{(I)} \end{vmatrix}, \tag{2.2}$$

где $\det \hat{g}_I = \det \hat{g}_{\alpha\beta}$, $\alpha, \beta = 1, \dots I$, $\hat{g}_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{(\alpha)}\mathbf{x}_{(\beta)}$, $\mathbf{x}_{(\alpha)} \equiv d^\alpha \mathbf{x}/d\tau^\alpha$.
Отсюда легко получить явные выражения для внешних кривизн:

$$k_I = \frac{\sqrt{\det \hat{g}_{I+1} \det \hat{g}_{I-1}}}{\det \hat{g}_I}. \tag{2.3}$$

В то время как $K_I, I \neq D-1$, положительны, высшая кривизна k_{D-1} (кручение) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если некоторая $k_I \neq 0$, то $k_\mu \neq 0$ при $\mu = 1, 2, \dots, I-1$. Обратно, если $k_I = 0$, то $k_\mu = 0$ при $\mu = I+1, \dots, D-1$ [21].

Формулы Френе для неизотропных кривых в пространстве Минковского имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{s}\mathbf{e}_1, \quad \dot{\mathbf{e}}_I = \tilde{s}K_I{}^J\mathbf{e}_J, \quad \mathbf{e}_I\mathbf{e}_J = \eta_{IJ}, \tag{2.4}$$

$$K_{IJ} + K_{JI} = 0, \quad K_{IJ} = \begin{cases} \pm k_I, & \text{при} \quad J = I \pm 1 \\ 0, & \text{при} \quad J \neq I \pm 1 \end{cases}, \tag{2.5}$$

где η_{IJ} является диагональной метрикой псевдоевклидова пространства.

Легко видеть, что, для того чтобы перевести формулы Френе для неизотропных кривых в пространстве Минковского в формулы Френе для кривых в евклидовом пространстве, нужно провести для некоторого индекса $\underline{I}$ преобразование

$$(\mathbf{e}_{\underline{I}},\ \tilde{s}k_{\underline{I}},\ \tilde{s}k_{\underline{I}-1}, \tilde{s}) \to (i\mathbf{e}_{\underline{I}},\ i\tilde{s}k_{\underline{I}},\ i\tilde{s}k_{\underline{I}-1}, (-i)^{\delta_{1\underline{I}}}\tilde{s}), \tag{2.6}$$

в результате которого вектор $\mathbf{e}_{\underline{I}}$ становится времениподобным. При $\underline{I} = 1$ полученная кривая времениподобна, тогда как при $\underline{I} \neq 1$ – пространственноподобна. По этой причине мы будем пользоваться евклидовой сигнатурой, специально оговаривая переход к сигнатуре Минковского.

Как видно из выражения (2.3), лагранжиан действия (1.5) зависит от производных $(N+1)$-го порядка. Однако, принимая во внимание формулы Френе (2.1), мы можем заменить его эквивалентным лагранжианом, не зависящим от высших производных [18]:

$$\begin{array}{lll} \tilde{s}\sum_{i=1}^N k_i(\mathbf{x}_\alpha) & \to & \tilde{s}\sum_i c_{i-1}k_{i-1} + c_N\sqrt{\dot{\mathbf{e}}_N^2 - \tilde{s}^2k_{N-1}^2} - \tilde{s}\sum_{i,j} d_{ij}\,(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j - \delta_{ij}) + \\ & & +\mathbf{p}(\dot{\mathbf{x}} - \tilde{s}\mathbf{e}_1) + \sum_i \mathbf{p}_{i-1}(\dot{\mathbf{e}}_{i-1} - \tilde{s}k_{i-1}\mathbf{e}_i + \tilde{s}k_{i-2}\mathbf{e}_{i-2}), \end{array} \tag{2.7}$$

где $\tilde{s}, k_{i-1}, d_{ij}, \mathbf{p}_{i-1}, \mathbf{e}_i$ являются независимыми переменными, $k_0 = 0, \mathbf{p}_0 = 0, \mathbf{e}_0 = 0$.
Для нового лагранжиана мы можем без труда совершить преобразование Лежандра, в результате чего получим гамильтонову систему [18]

$$\begin{gathered} \omega_N = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{e}_i, \\ \mathcal{H} = \tilde{s}\left[\mathbf{p}\mathbf{e}_1 + \sum_{i=1}^N k_{i-1}(\phi_{i-1.i} - c_{i-1}) + \frac{k_N}{2c_N}(\Phi_{N.N} - c_N^2) + \sum_{i,j=1}^N d_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j - \delta_{ij})\right]. \end{gathered} \tag{2.8}$$

со следующими первичными связями:

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j - \delta_{ij} \approx 0, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{p}_N\mathbf{e}_N \approx 0, \ \ \mathbf{p}_N\mathbf{e}_{i-2} \approx 0, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{p}\mathbf{e}_1 \approx 0, \tag{2.11}$$

$$\begin{cases} \phi_{i-1.i} \equiv \mathbf{p}_{i-1}\mathbf{e}_i - \mathbf{p}_i\mathbf{e}_{i-1} \approx c_{i-1}, \\ \Phi_{N.N} \equiv \mathbf{p}_N^2 - \sum_{i=1}^N(\mathbf{p}_N\mathbf{e}_i)^2 \approx c_N^2. \end{cases} \tag{2.12}$$

Заметим, что в такой формулировке лагранжевы множители $\tilde{s}$ и k_i имеют ясный геометрический смысл, так что возможные соотношения между ними, возникающие при стабилизации первичных связей, получают интерпретацию как соотношения на первые N кривизн. Соответственно, выбор вторичных связей должен быть согласован с требованием $k_i \neq 0$.

Удобно ввести вместо $\mathbf{p}_i$ новые переменные:

$$\begin{gathered} \mathbf{p}^{\perp}{}_i \equiv \mathbf{p}_i - \sum_{j=1}^N(\mathbf{p}_i\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{p}^{\perp}{}_i\mathbf{e}_j = 0, \quad \mathbf{p}_i^{\perp}\mathbf{p}_j^{\perp} \equiv \Phi_{ij}; \\ \phi_{i.j} \equiv \mathbf{p}_i\mathbf{e}_j - \mathbf{p}_j\mathbf{e}_i; \\ \chi_{ij} = \mathbf{p}_i\mathbf{e}_j, \quad i \geq j, \end{gathered} \tag{2.13}$$

так что первичные связи (2.9) окажутся сопряженными χ_{ij} и коммутирующими с $\mathbf{p}_i^{\perp}$ и ϕ_{ij}.
Потому без ограничения общности можно ввести калибровочные условия (включающие в себя первичные связи (2.10)):

$$\chi_{ij} \approx 0, \tag{2.14}$$

фиксирующие значения лагранжевых множителей d_{ij}:

$$2d_{i.j} = \delta_{ij}(k_i c_i - k_{i-1}c_{i-1}). \tag{2.15}$$

Именно по этой причине мы опустили в первичном гамильтониане (2.8) члены, пропорциональные связям (2.10).

Теперь перейдем к процедуре построения вторичных связей, порождаемых первичными связями (2.11) и (2.12).

Первичная связь (2.11) порождает вторичные связи:

$$\mathbf{p}\mathbf{e}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}\mathbf{p}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}^2 \approx 0, \tag{2.16}$$

обеспечивающие безмассовость модели и трансверсальность матрицы спиральностей [15, 22].

Замечание. Как видно из (2.16), классическими решениями системы являются пространственноподобные кривые, причем лишь при условии

$$N \leq N_0 = [(D-2)/2], \quad c_N \neq 0, \tag{2.17}$$

действие (1.5) допускает нетривиальные ($\mathbf{p} \neq 0$) классические решения. Заметим, что N_0 определяет число спиральностей системы (ранг малой группы Лоренца $SO(D-2)$).

Эволюция функций ϕ_{ij} и Φ_{ij} задается выражениями (в калибровке собственного времени $\tilde{s} = 1$)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\phi}_{i.j} = -k_{i-1}\phi_{i-1.j} + k_i\phi_{i+1.j} + (i \leftrightarrow j) - 2\lambda\delta_{N[i}\Phi_{j].N}, \\ \dot{\Phi}_{i.j} = -k_{i-1}\Phi_{i-1.j} + k_i\Phi_{i+1.j} + (i \leftrightarrow j) - 2\lambda\Phi_{N.\{i}\phi_{j\}.N}, \end{array} \right. \tag{2.18}$$

где мы полагаем $k_i \neq k_N$, $2c_N\lambda = k_N$, $\phi_{0.i} = \Phi_{0.i} = \phi_{N+1.i} = \Phi_{N+1.i} = 0$.
Поэтому связи, порождаемые (2.12), являются функциями ϕ_{ij} и Φ_{ij}, так что их число не превышает N^2.

Поскольку генераторы группы вращений имеют в координатах (2.13) вид

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \times \mathbf{e}_i = \mathbf{p} \times \mathbf{x} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}^{\perp}{}_i \times \mathbf{e}_i - \sum_{i,j=1}^{N} \phi_{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \tag{2.19}$$

то собственные значения матрицы $\mathbf{S}$ определяются соотношениями

$$\mathrm{tr}\, \mathbf{S}^{2k} = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\hat{\Phi} & \hat{\phi} \end{pmatrix}^{2k}. \tag{2.20}$$

Следовательно, число ненулевых спиральностей системы равно N [15, 22].

Удобно представить функции ϕ_{ij}, Φ_{ij} в виде градуированных матриц:

$$\hat{R}^p_{ij} = (\phi^p_{ij}, \Phi^p_{ij}), \quad \text{где} \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi^p_{ij} \equiv \phi_{i.j}, \quad |i-j| = p \\ \Phi^p_{i.j} \equiv \Phi_{i.j}, \quad i+j-1 = 2N+1-p \end{array} \right., \quad p = 1, \ldots, N. \tag{2.21}$$

Замечая, что $\dot{\hat{R}}^p \sim \hat{R}^{p\pm 1}$, заключаем, что процедура стабилизации содержит не более $N+1$ шага, причем вторичные связи $(p{+}1)$-го этапа зависят от $\hat{R}^{p\pm1}$. Как следствие, вторичные связи нечетных этапов имеют вид $\hat{R}^{2\kappa} \approx 0$, а вторичные связи четных этапов определяются из системы линейных по k_i уравнений, как требование совместимости этих уравнений с условиями $k_i \neq 0$. Потому значения спиральностей, определяемых выражениями (2.20), фиксируются лишь в случае, когда система имеет максимально допустимый набор связей.

Это, безусловно, имеет место при $N = 1$, когда вторичные связи отсутствуют.
При $N = 2, c_1 \neq 0$, имеем

$$\Phi_{1.2} \approx 0, \quad k_2 c_2 c_1 + k_1(\Phi_{1.1} - c_2^2) = 0, \quad \Phi_{1.1} - c_2^2 \neq 0 = const. \tag{2.22}$$

Так что уже в этом простом случае значения спиральностей определяются начальными условиями задачи.

При $N > 2$ вторичные связи первого этапа имеют вид

$$\Phi_{N-1.N} \approx 0, \quad \phi_{i-2.i} \approx 0, \tag{2.23}$$

после чего получаем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{c} k_{i-4}\phi_{i-4.i-1} - k_{i-3}c_{i-2} + k_{i-2}c_{i-3} - k_{i-1}\phi_{i-3.i} \approx 0, \\ -k_{N-3}c_N\phi_{N-3.N} + k_{N-2}c_N c_{N-1} - k_{N-1}c_N c_{N-2} + k_N\Phi_{N.N-2} \approx 0, \\ k_{N-2}\Phi_{N-2.N} + k_{N-1}(\Phi_{N-1.N-1} - c_N^2) + k_N c_N c_{N-1} \approx 0. \end{array} \right. \tag{2.24}$$

Итак, при $N > 2$ дальнейшая процедура построения вторичных связей существенно зависит от значений констант c_i. Результирующие системы могут иметь решения с фазовыми пространствами различной размерности.

Лишь в случае зависимости лагранжиана от единственной кривизны, $L = c_N k_N$, мы получим максимально допустимый набор вторичных связей третьего этапа, $\phi_{i.i+3} \approx 0, \Phi_{N-1.N-1} \approx c_N^2$. Продолжив процедуру построения связей, окончательно получим

$$\phi_{ij} \approx 0, \quad \Phi_{ij} - c^2\delta_{ij} \approx 0. \tag{2.25}$$

Это единственный случай, когда связи полностью фиксируют спиральности системы и, как следствие, квантование приводит к неприводимым представлениям группы Пуанкаре. Более подробно мы рассмотрим эту систему в следующем разделе.

В остальных случаях, при $N > 2$, система может допускать решения с различными наборами вторичных связей, приводящими к физически неэквивалентным системам (с фазовыми пространствами различной размерности).

Пример 1: $N = 3$, $|c_1| + |c_2| \neq 0$.
Система уравнений (2.24) принимает вид

$$\hat{A}\hat{k} \equiv \begin{pmatrix} c_3c_2 & -c_3c_1 & \Phi_{1.3} \\ \Phi_{1.3} & \Phi_{2.2} - c_3^2 & c_3c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{2.26}$$

При $\mathrm{rank}\hat{A} = 2$ процедура построения вторичных связей заканчивается на этом этапе, и остается единственный нефиксированный лагранжев множитель. Если $c_2 \neq 0$, возможна альтернатива, $\mathrm{rank}\hat{A} = 1$, которая имеет место на поверхности, фиксированной условиями:

$$\Phi_{1.3} = \pm c_2 c_3, \quad \Phi_{2.2} = c_3^2 \mp c_1 c_3. \tag{2.27}$$

В этом случае из (2.26) следует единственное условие на лагранжевы множители:

$$c_2(k_1 \pm k_3) \pm c_1 k_2 = 0. \tag{2.28}$$

Рассматривая выражения (2.27) как связи второго этапа, мы получаем вторичные связи третьего этапа:

$$\Phi_{1.2} \approx 0, \quad (\Phi_{1.1}/c_3 \pm c_1)k_1 \pm c_2 k_2 = 0, \quad \Phi_{1.1} = const. \tag{2.29}$$

Пример 2: $L = c_1 k_{N-1} + c_2 k_N$, $N > 2$.
Система уравнений (2.24) принимает вид

$$\phi_{i-3.i} \approx 0, \quad \hat{A}\hat{k} \equiv \begin{pmatrix} c_1c_2 & 0 & \Phi_{N-2.N} \\ \Phi_{N-2.N} & \Phi_{N-1.N-1} - c_2^2 & c_1c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{N-2} \\ k_{N-1} \\ k_N \end{pmatrix} = 0.$$

Матрица $\hat{A}$ имеет меньший ранг на поверхности

$$\Phi_{N-1.N-1} \approx c_2^2, \quad \Phi_{N.N-2} \approx -c_1 c_2, \quad k_{N-2} = k_N.$$

Продолжив эту процедуру, получим, что фазовое пространство наименьшей размерности задается связями

$$\begin{cases} \phi_{\alpha.\beta} \approx c_1 \epsilon_{N-\alpha.N-\beta}, \quad \phi_{\alpha.b} \approx 0 \;\; \phi_{a.b} \approx 0, \\ \Phi_{\alpha.\beta} \approx c_2^2 \delta_{\alpha\beta}, \quad \Phi_{\alpha.b} \approx -c_2 c_1 \delta_{\alpha.b+2}, \\ \Phi_{a.b} \approx (c_2^2 - c_1^2)\delta_{ab} - c_1 c_2 \delta_{a.b\pm 2}, \end{cases} \tag{2.30}$$

где $a, b = 1, \ldots N-2$; $\alpha, \beta = N-1, N$.
Лагранжевы множители ограничены условиями

$$k_i = k_{i-2}, \tag{2.31}$$

так что построенная гамильтонова система имеет три калибровочные степени свободы.

Обратим внимание на то, что система имеет более двух калибровочных степеней свободы только при $c_1 = 0$.

Рассмотрим уравнения движения гамильтоновой системы общего положения. В координатах (2.13) они имеют следующий вид (в калибровке собственного времени $\tilde{s} = 1$):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{e}_1, \\ \dot{\mathbf{e}}_{i-1} = k_{i-1}\mathbf{e}_i - k_{i-2}\mathbf{e}_{i-2}, \\ \dot{\mathbf{e}}_N = k_N \mathbf{p}^{\perp}{}_N / c_N - k_{N-1}\mathbf{e}_{N-1}, \\ \dot{\mathbf{p}}^{\perp}{}_i = -\delta_{1.i}\mathbf{p} - k_{i-1}\mathbf{p}^{\perp}{}_{i-1} + k_i \mathbf{p}^{\perp}{}_{i+1} - k_N(\Phi_{i.N}\mathbf{e}_N - \phi_{i.N}\mathbf{p}^{\perp}_N)/c_N, \\ \dot{\mathbf{p}} = 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Ортонормализуем векторы $\mathbf{p}^{\perp}{}_i$ с помощью следующего анзаца, являющегося модификацией предложенного в [24]:

$$\mathbf{v}_N \equiv \mathbf{p}^{\perp}_N / c_N, \quad \mathbf{v}_{i-1} = -\frac{1}{\sqrt{\Delta_{i-1}\Delta_i}} \begin{vmatrix} \Phi_{N.N} & \cdots & \Phi_{N.i-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \Phi_{i.N} & \cdots & \Phi_{i.i-1} \\ \mathbf{p}^{\perp}{}_N & \cdots & \mathbf{p}^{\perp}{}_{i-1} \end{vmatrix}, \tag{2.33}$$

где $\Delta_N = c_N$, $\Delta_i = \det \Phi_{\alpha.\beta} \neq 0$, $\alpha, \beta = i, \ldots N$.
Ортогональность этих векторов немедленно следует из очевидного разложения:

$$\mathbf{v}_i = \sum_{\alpha=i}^{N} A_{i.\alpha} \sqrt{\frac{\Delta_{i+1}}{\Delta_i}} \mathbf{p}^{\perp}_{\alpha}, \quad A_{i.i} = 1, \Delta_{N+1} \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_i \mathbf{p}^{\perp}_{\alpha} = \begin{cases} \sqrt{\frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}}}, & \text{если } \alpha = i \\ 0, & \text{если} \alpha > i. \end{cases} \tag{2.34}$$

Как теперь видно из уравнений движения, векторы ($\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_{2N+1-i} \equiv \mathbf{v}^{\perp}{}_i$) образуют первые $2N$ элементов исходного конфигурационного пространства, тогда как вектор $\mathbf{p}$ задает его $(2N+1)$-й изотропный элемент.

Затем, сравнив уравнения движения с формулами Френе (2.1), мы получим следующие выражения для внешних кривизн:

$$k_{2N} = 0, \quad \frac{k_{N+a}}{k_{N-a}} = \sqrt{\frac{\Delta_{a-1}\Delta_{a+1}}{\Delta_a^2}}, \quad a = 1, \ldots, N-1. \tag{2.35}$$

Следствие. Траектории, отвечающие безмассовым спиновым частицам, есть пространственноподобные кривые с постоянным отношением равноудаленных от N кривизн $k_{N+a}/k_{N-a} = const$. Первые $2N$ элементов подвижного репера $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{2N}$ являются *пространственноподобными* векторами, а $(2N+1)$–й элемент является изотропным вектором, отвечающим импульсу системы.

3 Система с фиксированной спиральностью: $\mathcal{L} = ck_N$

Как было показано в предыдущем разделе, имеется единственная система с действием типа (1.5), имеющая фиксированные значения спиральностей. Она определяется следующим набором характеристических констант:

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{N-1} = 0, \quad c_N \equiv c \neq 0, \tag{3.1}$$

т.е. зависит от единственной кривизны: $\mathcal{L} = ck_N$.

Полный набор связей такой системы можно представить в виде

$$\mathbf{p}\mathbf{e}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}\mathbf{p}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}^2 \approx 0, \quad \mathbf{p}_i\mathbf{e}_j - \mathbf{p}_j\mathbf{e}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}_i\mathbf{p}_j - c^2\delta_{ij} \approx 0, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i - \delta_{ij} \approx 0, \quad \mathbf{p}_j\mathbf{e}_i \approx 0, \ j > i. \tag{3.3}$$

Все связи (3.2) – первого рода, связи (3.3) – второго рода, так что размерность фазового пространства системы равна

$$\mathcal{D}^{min} = 2(D-1) + N(2D - 3N - 5).$$

Заметим, что при $N = N_0$ имеем

$$N_0(2D - 3N_0 - 5) = \begin{cases} (D-2)(D-4)/4, & \text{при четных } D, \\ (D-1)(D-5)/4, & \text{при нечетных } D. \end{cases} \tag{3.4}$$

Собственные числа матрицы спиральности имеют совпадающие значения, $m_i = c$. Итак, рассмотренная система задает универсальную классическую модель безмассовой частицы при $N = 1, D = 4, 5$ [10]. При $D \geq 6$ система описывает безмассовую частицу с N спиральностями, равными c, и нулевыми значениями остальных $N_0 - N$ спиральностей.

Как видно из (2.35), классические траектории системы обладают свойством

$$k_{N+a} = k_{N-a}, \quad k_{2N} = 0, \qquad a = 1, \dots, N-1, \tag{3.5}$$

в то время как первые N кривизн k_i остаются произвольными. Таким образом, эта система имеет $N + 1$ калибровочную степень свободы, образующую, по-видимому, W_{N+2}–алгебру. Заметим, что это было проверено прямыми вычислениями для $N = 1$ [12] и косвенными для $N = 2$ [23] (во второй работе и было сделано приведенное предположение).

Введем комплексные координаты:

$$\mathbf{z}_i = \frac{\mathbf{p}_i + \imath|c|\mathbf{e}_i}{\sqrt{2|c|}}, \quad \omega_2 = d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{x} + \imath \sum_i d\mathbf{z}_i \wedge d\bar{\mathbf{z}}_i. \tag{3.6}$$

В этих координатах гамильтониан системы задается выражением

$$\mathcal{H} = \frac{\tilde{s}}{2|c|}\left[\imath\sqrt{2}\mathbf{p}(\bar{\mathbf{z}}_1 - \mathbf{z}_1) + \imath\sum_{i=1}^{N-1} k_i(\mathbf{z}_i\bar{\mathbf{z}}_{i+1} - \mathbf{z}_{i+1}\bar{\mathbf{z}}_i) + k_N(\mathbf{z}_N\bar{\mathbf{z}}_N - |c|)\right]. \tag{3.7}$$

Связи (3.2), (3.3) принимают вид

$$\begin{gathered} \mathbf{z}_i\bar{\mathbf{z}}_j - |c|\delta_{ij} \approx 0, \\ \mathbf{p}\mathbf{z}_i \approx 0, \quad \mathbf{p}\bar{\mathbf{z}}_i \approx 0, \\ \mathbf{p}^2 \approx 0, \\ \mathbf{z}_i\mathbf{z}_j \approx 0, \quad \bar{\mathbf{z}}_i\bar{\mathbf{z}}_j \approx 0. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Отметим, что в координатах (3.6) уравнения движения голоморфны (мы полагаем $\tilde{s} = 1$):

$$\begin{gathered} \dot{\mathbf{x}} = i\,(\mathbf{z}_1 - \bar{\mathbf{z}}_1)\,, \\ \dot{\mathbf{z}}_{i-1} = -i\delta_{1.i-1}\mathbf{p} + k_{i-1}\mathbf{z}_i - k_{i-2}\mathbf{z}_{i-2}, \\ \dot{\mathbf{z}}_N = -i\delta_{1.N}\mathbf{p} + ik_N\mathbf{z}_N - k_{N-1}\mathbf{z}_{N-1}, \\ \dot{\mathbf{p}} = 0, \end{gathered} \tag{3.9}$$

что является косвенным подтверждением предположения о W−алгебраической природе калибровочных симметрий системы (см., например, [24]). Кроме того, уравнения движения для $\mathbf{z}_i$ можно свести к уравнению вида

$$\hat{L} = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i(k_{i(\alpha)}) \frac{d^i \mathbf{z}_1}{d\tau^i} = 0,$$

что является другим индикатором W−алгебраической природы калибровочных симметрий системы [25].

Какие значения принимают спиральности рассматриваемой системы после квантования? В частности, включает ли рассматриваемая система конформно-инвариантные представления группы Пуанкаре?
Чтобы провести квантование системы, положим

$$\hat{\bar{\mathbf{z}}}_i = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}_i}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \qquad \hat{\mathbf{z}}_i = \mathbf{z}_i, \quad \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}. \tag{3.10}$$

В выбранной поляризации волновые функции имеют голоморфный вид, $\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i)$. Наложив на волновую функцию операторы, отвечающие связям (3.8), получим

$$\mathbf{z}_i \frac{\partial \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j} = |c|\delta_{ij}\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{p}\frac{\partial \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j} = 0, \quad \mathbf{p}^2\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}) = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j \partial \mathbf{z}_i} = 0, \quad \mathbf{p}\frac{\partial \Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z})}{\partial \mathbf{z}_j} = 0. \tag{3.11}$$

Из требования однозначности волновой функции мы получаем условие квантования спиральностей:

$$|c| = 1,\ 2,\ 3\ldots, \tag{3.12}$$

с учетом которого получаем, что волновые функции имеют вид

$$\Psi(\mathbf{p}, \mathbf{z}_i) = \psi(\mathbf{p})_{A(1)A(2)\ldots A(N)} z_1^{A(1)} z_2^{A(2)} \ldots z_N^{A(N)}, \tag{3.13}$$

где введены обозначения $A(i) \equiv A_1^{(i)} \ldots A_c^{(i)}$, $z_i^{A(i)} \equiv z_i^{A_1^{(i)}} \cdots z_i^{A_c^{(i)}}$.

Здесь $\psi(\mathbf{p})_{\ldots}$ является тензором cN-го ранга, симметричным относительно перестановок индексов одного типа и антисимметричным по перестановкам индексов разных типов: симметрии задаются прямоугольной диаграммой Юнга с N строками и c столбцами:

A_1^1	....	A_c^1
A_1^2	....	A_c^2
$\vdots$		$\vdots$
A_1^N	....	A_c^N

Дополнительно, $\psi(\mathbf{p})_{\ldots}$ должно удовлетворять условиям трансверсальности и безмассовости:

$$\mathbf{p}^2\psi(\mathbf{p})_{A(1)B(2)\ldots C(N)} = 0 \quad p^A\psi(\mathbf{p})_{\ldots A \ldots} = 0. \tag{3.14}$$

Таким образом, рассмотренная нами модель описывает безмассовые частицы целочисленной спиральности.

Припоминая результат Зигеля [17], заключаем что рассматриваемая модель приводит к конформно-инвариантным представлениям группы Пуанкаре лишь при

$$D = 2p, \quad N = [(D-2)/2],$$

поскольку спиральности системы принимают целые значения.

Итак, рассматриваемая нами система оказалась замечательной во многих отношениях: она единственная из класса систем типа (1.5), приводящая к неприводимым представлениям группы Пуанкаре, включая конформно-инвариантные представления, и, наконец, имеет расширенную калибровочную симметрию W−алгебраического типа.

Возникает естественный вопрос: допускает ли наша модель формулировку на искривленном пространстве-времени? Очевидно, что в силу наличия вторичных связей модель не может быть переформулирована на произвольном пространстве-времени, что было показано на примере модели Плющая [13]. С другой стороны, модель Плющая допускает непротиворечивую формулировку на пространстве анти-де Ситтера (более полно: на пространствах постоянной кривизны), что представляется существенным с точки зрения теорий безмассовых полей высших спинов (см. обзор [26]).

Наследует ли наша модель это важное свойство? Чтобы ответить на этот вопрос, сформулируем систему (1.5) на искривленном пространстве-времени. Модифицируем для этого формулы Френе:

$$\frac{d\mathbf{x}}{\tilde{s}d\tau} = \mathbf{e}_1, \quad \frac{D\mathbf{e}_I}{\tilde{s}d\tau} = k_I\mathbf{e}_{I+1} - k_{I-1}\mathbf{e}_{I-1}, \qquad \frac{D}{d\tau} \equiv \frac{d}{d\tau} + \Gamma(\dot{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{e}_I\mathbf{e}_J = \delta_{IJ}, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_{D+1} \equiv 0, \tag{3.15}$$

где $(\Gamma)^A_B \equiv \Gamma^A_{BC}\dot{x}^C$, а Γ^A_{BC} есть символы Кристоффеля метрики подстилающего пространства $g_{AB}(x)$.

Затем, совершив манипуляции, аналогичные приведенным в разделе 2, получим гамильтонову систему:

$$\begin{gathered}\omega_N = d\mathbf{p}\wedge d\mathbf{x} + \textstyle\sum_{i=1}^N d\mathbf{p}_i \wedge d\mathbf{e}_i, \\ \mathcal{H} = \tilde{s}\left[\pi\mathbf{e}_1 + \textstyle\sum_{i=1}^N k_{i-1}(\phi_{i-1.i} - c_{i-1}) + \frac{k_N}{2c_N}(\Phi_{N.N} - c_N^2) + \sum_{i,j=1}^N d_{ij}(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j - \delta_{ij})\right],\end{gathered} \tag{3.16}$$

первичные связи которой заданы выражениями

$$\pi\mathbf{e}_1 \approx 0, \quad \pi \equiv \mathbf{p} - \mathbf{\Gamma}, \quad \Gamma_A \equiv \textstyle\sum_{i=1}^N \Gamma^C_{AB} p_{(i)C} e_i^B; \tag{3.17}$$

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j - \delta_{ij} \approx 0, \tag{3.18}$$

$$\mathbf{p}_N\mathbf{e}_N \approx 0, \ \ \mathbf{p}_N\mathbf{e}_{i-2} \approx 0, \tag{3.19}$$

$$\begin{cases} \phi_{i-1.i} \equiv \mathbf{p}_{i-1}\mathbf{e}_i - \mathbf{p}_i\mathbf{e}_{i-1} \approx c_{i-1}, \\ \Phi_{N.N} \equiv \mathbf{p}_N^2 - \sum_{i=1}^N(\mathbf{p}_N\mathbf{e}_i)^2 \approx c_N^2. \end{cases} \tag{3.20}$$

Нетрудно заметить, что алгебра функции ϕ_{ij}, Φ_{ij}, так же, как и их скобки Пуассона с $\pi\mathbf{e}_i$, $\pi\mathbf{p}_i$, π^2, не зависят от метрики подстилающего пространства, в то время как скобки Пуассона функций $\pi\mathbf{e}_i$, $\pi\mathbf{p}_i$, π^2 имеют вид

$$\begin{gathered}\{\pi\mathbf{e}_i, \pi\mathbf{e}_j\} = \mathcal{R}(\mathbf{e}_{[i}, \mathbf{e}_{j]}), \quad \{\pi\mathbf{p}_i, \pi\mathbf{p}_j\} = \mathcal{R}(\mathbf{p}_{[i}, \mathbf{p}_{j]}), \\ \{\pi\mathbf{e}_i, \pi\mathbf{p}_j\} = \mathcal{R}(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}_j), \quad \{\pi\mathbf{e}_i, \pi^2\} = \mathcal{R}(\pi, \mathbf{e}_i), \quad \{\pi\mathbf{p}_i, \pi^2\} = \mathcal{R}(\pi, \mathbf{p}_i),\end{gathered}$$

где

$$\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \sum_{i=1}^N R(\mathbf{p}_i|\mathbf{e}_i, \mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Принимая во внимание выражение для тензора Римана пространств постоянной кривизны,

$$R(\mathbf{a}|\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \frac{R_0}{D(D-1)}\left((\mathbf{ac})(\mathbf{bd}) - (\mathbf{ad})(\mathbf{bc})\right), \quad \Rightarrow \mathcal{R}(\mathbf{a}.\mathbf{b}) = 0,$$

заключаем, что алгебра связей системы (3.16) на пространстве постоянной кривизны изоморфна алгебре связей системы на плоском пространстве (2.8).

Итак, модель безмассовой частицы с действием (1.6) допускает переформулировку на пространствах анти-де Ситтера! При этом сохраняются все ее перечисленные выше свойства: свойства классических траекторий и калибровочные симметрии, неприводимость представлений и совпадающие значения спиральностей. Более того, поскольку на пространствах анти-де Ситтера отношение неприводимых представлений к конформным преобразованиям такое же, что и на плоских пространствах [27], остаются корректными наши выводы о конформной инвариантности рассмотренной модели.

4 Заключение

Мы показали, что релятивистская система с действием вида

$$\mathcal{S} = c \int k_N ds,$$

является исключительной и универсальной во многих отношениях.

Во-первых, она является единственной системой, сформулированной в терминах координат исходного пространства-времени (произвольной размерности), которая приводит к неприводимым представлениям группы Пуанкаре с ненулевым спином.

Во-вторых, она описывает безмассовые частицы произвольной целой спиральности, представленные прямоугольными диаграммами Юнга. Таким образом, она включает в себя конформно-инвариантные представления с целочисленными спиральностями.

В-третьих, она допускает формулировку на пространствах постоянной ненулевой кривизны, в частности, на пространствах анти-де Ситтера, на которых формулируются теории полей высших спинов.

И наконец, в-четвертых, рассмотренная модель обладает расширенной калибровочной симметрией $W-$типа.

Мы не дали ответа на ряд естественных вопросов, которые могут возникнуть у читателя. Прежде всего, мы не установили точного соответствия между калибровочными симметриями рассмотренной системы и $W_{N+2}-$алгебрами, при том, что точный ответ на этот вопрос существенно повлиял бы как на статус модели, так и на понимание геометрической природы $W-$алгебр.
Мы не описали в рамках рассматриваемой модели безмассовые поля полуцелой спиральности. Это можно было бы сделать, например, разрешением одной из связей второго рода путем спиноризации [7], аналогично процедуре, проведенной в [12] для безмассовой частицы в $D = 4$.

Не рассмотрены способы суперсимметризации данной модели введением локальной и/или глобальной суперсимметрии. Это было бы интересно не столько с точки зрения описания частиц полуцелого спина, сколько с супергеометрической точки зрения, а именно: каким инвариантам супергеометрии будут отвечать построенные лагранжианы, и будут ли ассоциированы их калибровочные преобразования суперсимметричным расширениям $W-$алгебр.

Не рассмотрено отношение модели к процедуре размерной редукции и ее поведение на "границе" пространства анти-де Ситтера.

Ответы на эти вопросы помогли бы лучше понять место предложенной модели в очень длинном ряду лагранжевых моделей спиновых частиц.

И, конечно, остался открытым главный вопрос, возникающий при чтении работ по спиновым частицам: как описать взаимодействие предлагаемой модели с внешними полями (высших спинов)? У меня нет ясного ответа на этот вопрос, как и у подавляющего большинства других авторов других моделей спиновых частиц. Скорее всего, его нужно адресовать А.Сегалу, представившему оригинальную и, видимо, концептуально новую точку зрения на проблему взаимодействия частиц с полями высших спинов [28].

5 Благодарности

Автор считает своим долгом выразить благодарность всем, кто своими замечаниями и интересом содействовал завершению этой работы: М.Васильеву, обратившему внимание автора на присутствие в решениях рассматриваемой модели конформно-инвариантных представлений и поставившему вопрос о возможности формулировки модели на пространствах анти-де Ситтера; С.Ляховичу - за обсуждение структуры спиновых частиц в высших размерностях и проблемы построения вторичных связей; участникам семинара теоретического отдела ФИАН, и прежде всего Б.Л. Воронову и И.В.Тютину за дотошные расспросы и доброжелательную критику; А. Сегалу - за массу полезных разъяснений. Отдельная благодарность О.Худавердяну, оказавшему автору неоценимую поддержку терпеливым слушанием рассказов обо всех реальных и мнимых достижениях в работе и подталкивание к изучению аспектов, связанных с классической геометрией.

ЛИТЕРАТУРА

[1] F.A.Berezin, M.S.Marinov, JETP Lett., **21** (1975), 320; Ann.Phys.(N.Y) **104** (1977), 336.

[2] R.Casabluoni, Phys.Lett.**B62**(1976),49;
A.Barducci, R.Casabluoni, L.Lusanna, Nucl.Phys.**B124**(1977), 93, 521;
L.Brink, P. Di Veccia, P.Howe, Nucl.Phys.**118**(1977),76.

[3] P. Howe, S. Penati, M. Pernici, P. Townsend, Phys.Lett. **B215** (1988), 555.

[4] D.M.Gitman, Nucl.Phys., **B488** (1997), 490.

[5] D. Sorokin, Phys. Rep.**329**(2000),1;
I. Bandos, J. Lukierski, D. Sorokin, Phys.Rev. **D61**(2000), 045002.

[6] A.A.Кириллов, *Основы теории представлений*, Наука, Москва, 1970;
B.Kostant, Lecture Notes in Mathematics, **170**(1970), 87;
J.M.Souriau, *Structure des Systemes Dynamiques*(Dunod, Paris,1970).

[7] S.L.Lyakhovich, A. A. Sharapov, K. M. Shekhter, Nucl.Phys.**B537**(1999), 640; `hep-th/0002247`.

[8] A. M. Polyakov, Nucl.Phys.**B268**(1986), 406; Mod.Phys.Lett.**A3**(1988), 112.

[9] M.S.Plyushchay, Nucl.Phys., **B362** (1991), 54;
Yu.A.Kuznetsov,M.S.Plyushchay, Nucl.Phys., **B389** (1993), 181.

[10] M. S. Plyushchay, Mod.Phys.Lett. **A4** (1989), 837, 2747; Phys. Lett.**B243**(1990), 383.

[11] E. Ramos, J.Roca, Nucl.Phys. **B477** (1996), 606.

[12] E. Ramos, J.Roca, Nucl.Phys. **B436** (1995), 529.

[13] D. Zoller, Phys. Rev. Lett. **65**(1990), 2236.

[14] V. V. Nesterenko, A. Feoli, G.Scarpetta, Class.Quant.Grav.**13** (1996), 1201.

[15] B.S.Skagerstam, A.Stern, Nucl.Phys., **B294** (1987), 636.

[16] W. Siegel, Int.J.Mod.Phys. **A3** (1988), 2707.

[17] W. Siegel, Int.J.Mod.Phys. **A4** (1989), 2015.

[18] A.Nersessian, Theor.Math.Phys. **117**(1998), 1214 (`hep-th/9805009`).

[19] A. Nersessian, *Massless particles and the geometry of curves. Classical picture*, Talk given at XIV Conference on QFTHEP'99 (May 27-31, 1999, Moscow), `hep-th/9912081`.

[20] A. Nersessian, E.Ramos, Phys.Lett. **B455** (1998), 123; Mod.Phys.Lett. **A14** (1999), 2033;
A. Nersessian, R. Manvelyan, H. J. W. Mueller-Kirsten, Nucl.Phys.B (Proc.Suppl.) **88** (2000), 381 (`hep-th/9912061`).

[21] M. M. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр III: Гладкие многообразия.*, M., Наука, 1987.

[22] M.V.Atre, A.P.Balachadran, T.R.Govidarajan, Int.J.Mod.Phys. **A2** (1987), 453.

[23] E.Ramos, J.Roca, Nucl.Phys. **B452** (1996), 705.

[24] J.-L. Gervais, Y. Matsuo, Comm.Math.Phys.**152**(1993), 317.

[25] A. O. Radul, JETP Lett.**50**(1989), 371; Funct.Anal.Appl.**25**(1991), 25.

[26] M.Vasiliev, *Higher spin gauge theories: star-product and AdS spaces*, hep-th/9910096.

[27] R. Metsaev, Mod.Phys.Lett. **A10**(1995), 1719.

[28] A. Segal, *Point particle in general background fields and generalized equivalence principle*, hep-th/0008105

Рукопись поступила в издательский отдел
15 августа 2000 года.

Нерсесян А.П. P2-2000-199
Лагранжева модель безмассовой частицы
на пространственноподобных кривых

Рассмотрена модель D-мерной безмассовой частицы, описываемая лагранжианом, пропорциональным N-й внешней кривизне мировой линии. Дана гамильтонова формулировка системы, показано, что ее траекториями являются пространственноподобные кривые, удовлетворяющие условиям $k_{N+a} = k_{N-a}$, $k_{2N} = 0$, $a = 1,\ldots, N-1$, где $N \le [(D-2)/2]$. Первые N кривизн принимают произвольные значения, так что система имеет $N+1$ калибровочных степеней свободы, образующих алгебру W-типа. Такая модель описывает D-мерные безмассовые частицы с совпадающими N значениями характеристических чисел матрицы спиральности и нулевыми значениями остальных $[(D-2)/2] - N$. Показано, что рассмотренная модель допускает формулировку на пространствах постоянной ненулевой кривизны. Она является единственной системой с лагранжианом, зависящим от внешних кривизн мировой линии, которая приводит к неприводимым представлениям групп Пуанкаре.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод автора

Nersessian A.P. P2-2000-199
The Lagrangian Model of a Massless Particle on Space-Like Curves

D-dimensional massless particle model with the Lagrangian proportional to Nth extrinsic curvature of a world line is considered. The Hamiltonian formulation of the system under consideration is given, and is shown that its classical trajectories are space-like curves which obey the conditions $k_{N+a} = k_{N-a}$, $k_{2N} = 0$, $a = 1,\ldots, N-1, N \le [(D-2)/2]$. The first N curvatures k_i remain arbitrary, thus the system possesses $N+1$ gauge degrees of freedom forming an algebra of the W-type. The system describes D-dimensional massless particles whose helicity matrix has N coinsiding nonzero weights, whereas the remaining $[(D-2)/2] - N$ weights are zero. It is shown that the model under consideration admits consistent formulation on the spaces with constant nonzero curvature. It is a unigue system with the Lagrangian depending on extrinsic curvature that yields the irreducable representations of Poincaré group.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 05.10.2000
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 1,33
Тираж 425. Заказ 52267. Цена 1 р. 60 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области