ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2-2000-277

М.И.Широков

ПЕРЕНОРМИРОВКА МАССЫ В НЕКОВАРИАНТНОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

2000

1. Введение

Масса свободной частицы экспериментально может быть найдена посредством измерения ее энергии ε_p и импульса $\vec{p}$. Состояние такой частицы следует описывать одночастичноподобным совместным собственным вектором Ψ_p полного гамильтониана H (собственное значение ε_p) и полного импульса $\vec{p}$. Одночастичноподобным называется вектор, нулевое приближение к которому описывается собственным вектором $a_p^\dagger\Omega_0$ свободной части H_0 гамильтониана H. Само состояние $a_p^\dagger\Omega_0$ не подходит для описания не меняющегося со временем состояния свободной частицы: в отличие от Ψ_p состояние $a_p^\dagger\Omega_0$ не обладает свойством стационарности ("голая" частица с течением времени переходит в другие частицы). Соотношение

$$m^2 = \varepsilon_p^2 - \vec{p}^{\,2} \tag{1}$$

дает стандартное определение массы свободной частицы.

В современном ковариантном подходе масса определяется как точка полюса точного пропагатора частицы (см., например, [1-3]). Связь полюсного и стандартного определений обсуждалась в ранней литературе (см., например, [4,5]). Однако при этом использовалась нестрогая аргументация. Например, $\delta^4(0)$ (дельта-функция Дирака в нуле) заменялась на произведение ΩT большого трехмерного объема Ω и большого временного интервала T. Вопрос о связи обсуждается далее в разд. 4.

Здесь перенормировка массы обсуждается на основе стандартного определения (1). Нахождение m сводится к вычислению собственных значений ε_p оператора H. Существуют разные способы их приближенного получения. Известен, например, способ, основанный на унитарном преобразовании H (подробнее см. далее подраздел 2.7). Здесь используется стандартная стационарная теория возмущений (см., например, [6]), примененная к модели взаимодействующих нейтральных и заряженных мезонов (см. разд. 2). Она похожа в некоторых отношениях на квантовую электродинамику или юкавскую теорию взаимодействующих мезонов и нуклонов, но проще их. Нет трудностей с калибровочной группой, нет инфракрасных расходимостей, ультрафиолетовые расходимости только логарифмические.

Из (1) следует, что вычисленная поправка $\Delta\epsilon_p$ к "голой" энергии $\sqrt{p^2+m_0^2}$ должна зависеть от $\vec{p}$ как $\mathrm{const}/\sqrt{p^2+m^2}$:

$$\Delta\varepsilon_p = \sqrt{p^2+m^2} - \sqrt{p^2+m_0^2} = \delta m^2/2\sqrt{p^2+m_0^2}, \quad \delta m^2 = m^2 - m_0^2 \qquad (2)$$

(применение теории возмущений подразумевает, что $\delta m^2 << m_0^2$ или $\delta m^2 << m^2$). Другими словами, $\Delta\varepsilon$ должно сводиться к сдвигу массы $\Delta m = m - m_0$. В локальной теории поля $\Delta\varepsilon_p$ расходится и обсуждение зависимости $\Delta\varepsilon$ от $\vec{p}$ требует регуляризации. Произвольная регуляризация не дает поведения (2). Проблема обеспечения поведения (2) является главной темой работы (см. разд. 3). Если (2) действительно имеет место, то перенормировка массы производится так же, как в ковариантном подходе (введение массовых контрчленов и т.д.).

Результаты суммируются в заключительном разд. 5.

2. Энергии физических частиц в модели взаимодействующих заряженных и нейтральных мезонов

Полный гамильтониан модели, выраженный через квантованные заряженное бозонное поле $\psi(x)$ и нейтральное $\phi(x)$, имеет вид $H = H_0 + H_I$, где

$$H_0 = \frac{1}{2}\int d^3x[\pi_\phi^2(x) + (\vec{\nabla}\phi)^2 + \mu_0^2\phi^2] +$$

$$+\int d^3x[\pi_\psi^\dagger\pi_\psi + \vec{\nabla}\psi^\dagger\cdot\vec{\nabla}\psi + m_0^2\psi^+\psi]\ , \qquad (3)$$

$$H_I = g\int d^3x\psi^\dagger(x)\psi(x)\phi(x)\,. \qquad (4)$$

2.1. Вместо H_0 в качестве гамильтониана нулевого приближения введем оператор H_F, определяемый следующим образом. Вводим в H формально новые массовые параметры μ и m:

$$\mu_0^2\phi^2 = \mu^2\phi^2 + (\mu_0^2 - \mu^2)\phi^2 = \mu^2\phi^2 - \delta\mu^2\phi^2 \qquad (5)$$

и аналогично для m. Тогда H примет вид $H = H_F + H_I + M$, где новый свободный (Free) гамильтониан H_F выражается через m и μ так же, как H_0 выражается через μ_0 и m_0 (см. (3)), а "массовый контрчлен" M равен

$$M = -\int d^3x[\frac{1}{2}\delta\mu^2\phi^2(x) + \delta m^2\psi^\dagger(x)\psi(x)] \qquad (6)$$

и будет рассматриваться наряду с H_I как возмущение (см., например, [4], гл. 12, 15).

Предположим, что искомые одночастичные энергии H имеют вид $\sqrt{p^2+m_\Phi^2}$ и $\sqrt{k^2+\mu_\Phi^2}$, где физические массы m_Φ и μ_Φ подлежат нахождению. Если эти массы совпадают с введенными выше формально массами m и μ, то одночастичные энергии H_F и H будут совпадать. Поэтому при таком выборе H_F сумма поправок к одночастичным энергиям H_F от взаимодействий H_I и M должна равняться нулю. Если это действительно будет иметь место, то наше предположение будет оправданным. Условие равенства нулю определяет связь "голых" масс m_0 и μ_0 и неизвестных еще масс m и μ (см. далее конец подраздела 3.5).

Введение H_F вместо H_0 не является обязательным, хотя имеет одно преимущество, которое отмечается далее в разд. 3 после формулы (28). Если H_0 взято как нулевое приближение к H, то надо в последующих формулах (например, (10),(11),(13)) просто заменить m, μ на m_0, μ_0. Тогда будем иметь ненулевые поправки к $\sqrt{p^2+m_0^2}$ и $\sqrt{k^2+\mu_0^2}$. Эти поправки в релятивистской теории должны иметь вид (2), и это условие будет определять связь m, μ с m_0, μ_0.

2.2. В обычной стационарной теории возмущений предполагается, что векторы нулевого приближения нормированы на единицу [6]. Чтобы собственные векторы H_F и $\vec{P}$ были ортонормированы, сделаем спектр $\vec{P}$ дискретным. Предполагаем, что (3) и (4) есть интегралы по x по конечному объему Ω: наложены условия периодичности на границах куба Ω или отождествлены соответствующие противоположные границы (аналогично отождествлению точек $-\pi$ и $+\pi$ азимутального угла), см., например, [7] гл.1.5 или [8]. Тогда $\phi(x)$, $\pi_\phi(x)$, $\phi(x)$, $\pi_\psi(x)$ можно разложить в ряды по функциям $\exp(i\vec{k}\vec{x})/\Omega$, составляющим ортонормированную и полную систему и обладающим этой периодичностью, если k дискретны

$$\Omega^{-1}\int_\Omega d^3x e^{-i\vec{k}_1\vec{x}}e^{-i\vec{k}_2\vec{x}} = \delta_{k_1,k_2}\,, \tag{7}$$

$$\Omega^{-1}\sum_k e^{ik(x-y)} = \delta(x-y)\,. \tag{8}$$

В (7) δ_{k_1,k_2} обозначает символ Кронекера, равный 1 или 0. Его связь с дельта-функцией $\delta(\vec{k}_1-\vec{k}_2)$ дается соотношениями

$$\Omega\delta_{k_1k_2} = \int_\Omega d^3x\ \exp\ i(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\cdot\vec{x} = (2\pi)^3\delta_\Omega(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\,,$$
$$\lim_{\Omega\to\infty}\delta_\Omega(\vec{k}_1-\vec{k}_2) = \delta(\vec{k}_1-\vec{k}_2)\,. \tag{9}$$

Из разложений

$$\phi(\vec{x}) = \sum_k (a_k + a_{-k}^+)e^{i\vec{k}\vec{x}}/\sqrt{2\omega_k}, \qquad \omega_k = \sqrt{k^2+\mu^2}\,, \tag{10}$$

$$\pi_\phi(\vec{x}) = \sum_k (a_k^+ - a_{-k})e^{i\vec{k}\vec{x}}i\sqrt{\omega_k/2}\,,$$

$$\psi(\vec{x}) = \sum_p (b_p + d_p^+)e^{i\vec{p}\vec{x}}/\sqrt{2\varepsilon_p}, \qquad \varepsilon_p = \sqrt{p^2+m^2}\,, \tag{11}$$

вытекают коммутационные соотношения

$$[a_{k_1}, a_{k_2}^+] = \delta_{k_1,k_2}, \qquad [b_{p_1}, b_{p_2}^+] = \delta_{p_1,p_2}, \qquad [d_{p_1}, d_{p_2}^+] = \delta_{p_1,p_2}. \tag{12}$$

С их помощью можно показать, что собственные векторы H_F и $\vec{P}$ типа $a_k^+\Omega_0$ нормированы на единицу. Выражение для H_F через введенные операторы рождения-уничтожения приведено в [7], гл. 2, формулы (6.20) и (8.16):

$$H_F = \frac{1}{2}\sum_k w_k(a_k^+ a_k + a_k a_k^+) + \frac{1}{2}\sum_p \varepsilon_p(b_p^+ b_p + b_p b_p^+ + d_p^+ d_p + d_p d_p^+)\,. \tag{13}$$

Для M (см. (6)), имеем

$$M = -\frac{\delta\mu^2}{4}\sum_k w_k^{-1}(a_k^+ a_k + a_k a_k^+ + a_k a_{-k} + a_k^+ a_{-k}^+) -$$

$$-\frac{\delta m^2}{2}\sum_p \varepsilon_p^{-1}(b_p^+ b_p + d_p d_p^+ + b_p d_p + b_p^+ d_p^+)\,. \tag{14}$$

Вместо аналогичного выражения для оператора локального взаимодействия H_I (см. (4)), выпишем его нелокальное обобщение, которое будет использовано в разд. 3

$$V = \frac{g}{\sqrt{8\Omega}}\sum_p\sum_q\sum_k(\varepsilon_p\varepsilon_q w_k)^{-1/2}\delta_{\vec{p},\vec{q}+\vec{k}}(a_k + a_{-k}^+)\,,$$

$$[F_{11}(\vec{p},\vec{q},\vec{k})b_p^+ b_q + F_{12}b_p^+ d_q^+ + F_{21}b_p d_q + F_{22}d_p d_q^+]\,. \tag{15}$$

В локальном случае все F_{mn} равны 1. В случае действительных F_{mn} условие эрмитовости V имеет вид

$$F_{mn}(\vec{p},\vec{q},\vec{k}) = F_{nm}(\vec{q},\vec{p},-\vec{k}), \qquad m,n = 1,2\,. \tag{16}$$

В конечных результатах можно заменить сумму $\sum_k$ на интеграл $\int d^3k$, пользуясь соотношением

$$(2\pi)^3\Omega^{-1}\sum_k \ldots = \int d^3k \ldots \tag{17}$$

2.3. Замечание о вырождении. Рассматриваемые векторы нулевого приближения типа $a_k^+\Omega_0$ вырождены: одной энергии $w_k = \sqrt{k^2+\mu^2}$ соответствует много значений $\vec{k}$ с одним и тем же $\vec{k}^2$. Однако это вырождение не снимается возмущениями H_I (или V) и M, полный импульс $\vec{P}$ коммутирует как с H_F, так и с H. В этом случае вырождение можно не учитывать (см. [6] гл. XVI перед формулой (22)), рассматривая задачу нахождения поправки к энергии в подпространстве с фиксированным импульсом, где нет вырождения.

2.4. Возьмем в качестве нулевого приближения не H_F, а соответствующий нормально-упорядоченный оператор $:H_F:$. Его наинизшее собственное значение (СЗ) E_0 равно нулю, а одночастичные СЗ равны $\sqrt{k^2+\mu^2}$ и $\sqrt{p^2+m^2}$. Оказывается, что наинизшее СЗ E_Ω оператора H не равно нулю. В качестве оператора полной энергии примем $H - E_\Omega$, у которого все СЗ сдвинуты на E_Ω , так что наинизшее СЗ равно нулю. Тогда соответствующее вакуумное состояние Ω будет иметь нулевой импульс и энергию во всех лоренцевских системах отсчета (т.е. будет инвариантом пространственно-временных сдвигов). Энергией физической (наблюдаемой) частицы будем называть одночастичные СЗ оператора $H - E_\Omega$, равные $E_k - E_\Omega = w_k$ для нейтрального мезона, E_k — одночастичное СЗ оператора H (аналогично для заряженной частицы: $\varepsilon_p = E_p - E_\Omega$), ср. [9]).

2.5. Вычислим поправки $\Delta^M w_k$ и $\Delta^V w_k$ к энергии нейтрального мезона от взаимодействий M и V соответственно в первом неисчезающем приближении. Полная поправка Δw_k равна

$$\Delta w_k = \Delta^M w_k + \Delta^V w_k = (\Delta^M E_k - \Delta^M E_0) + (\Delta^V E_k - \Delta^V E_0)\,, \tag{18}$$

где $\Delta^M E_0 + \Delta^V E_0$ есть полная поправка к E_0, равная E_Ω ввиду $E_0 = 0$. Поправка $\Delta^M E_k$ просто равна $< a_k^+\Omega_0|M|a_k^+\Omega_0 >$, аналогично $\Delta^M E_0 =< \Omega_0|M|\Omega_0 >$. Используя (14), получаем

$$\Delta^M w_k = \Delta^M E_k - \Delta^M E_0 = -\delta\mu^2/2w_k\,. \tag{19}$$

Первое неисчезающее приближение $\Delta^V w_k = \Delta^V E_k - \Delta^V E_0$ от взаимодействия V дается вторым порядком стационарной теории возмущений [6]:

$$\Delta^V E_k = \sum_\alpha < a_k^+\Omega_0|V|\Phi_\alpha >< \Phi_\alpha|V|a_k^+\Omega_0 > /(E_k - E_\alpha)\,, \tag{20}$$

$$\Delta^V E_0 = \sum_\alpha < \Omega_0|V|\Phi_\alpha >< \Phi_\alpha|V|\Omega_0 > /(E_0 - E_\alpha), \qquad E_0 = 0\,. \tag{21}$$

В сумму $\sum_\alpha$ в (21) вносят вклад все состояния Φ_α, для которых $< \Phi_\alpha|V|\Omega_0 >\neq 0$. Это состояния вида $b_p^+ d_q^+ a_k^+ \Omega_0$ с энергией $E_\alpha = \varepsilon_p + \varepsilon_q + w_k$. В (20) сумма $\sum_\alpha$ берется по состояниям вида $b_p^+ d_q^+ \Omega_0$ и $b_p^+ d_q^+ \frac{1}{\sqrt{2}} a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ \Omega_0$. Множитель $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в записи системы двухмезонных состояний $\Phi(k_1, k_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ \Omega_0$ обеспечивает следующее свойство полноты $\Phi(k_1, k_2)$: для любого двухмезонного состояния

$$\Phi_2 = \sum_{k_1'} \sum_{k_2'} f(k_1', k_2')\Phi(k_1', k_2')$$

имеем

$$\sum_{k_1} \sum_{k_2} |\Phi(k_1, k_2) >< \Phi|k_1, k_2)|\Phi_2 = \Phi_2\,.$$

Используя условие эрмитовости (16), получаем

$$\Delta^V E_0 = -\frac{g^2}{8\Omega} \sum_p \sum_q |F_{12}(\vec p, \vec q, \vec p - \vec q)|^2 \varepsilon_p \varepsilon_q w_{p-q} (\varepsilon_p + \varepsilon_q + w_{p-q})\,, \tag{22}$$

$$\Delta^V w_k = \Delta^V E_k - \Delta^V E_0 = N(\vec k)/w_k\,, \tag{23}$$

$$N(\vec k) \equiv \frac{g^2}{8\Omega} \{ \sum_p F_{12}^2(\vec p, \vec p - \vec k, \vec k)/\varepsilon_p \varepsilon_{p-k} (w_k - \varepsilon_p - \varepsilon_{p-k}) -$$

$$-\sum_p F_{12}^2(\vec{p},\vec{p}+\vec{k},-\vec{k})/\varepsilon_p\varepsilon_{p+k}(w_k+\varepsilon_p+\varepsilon_{p+k})\}\,. \qquad (24)$$

Формулу (24) для $N(\vec{k})$ (Neutral meson) можно переписать, произведя замену переменной суммирования $\vec{p}\to\vec{p'}=-\vec{p}$ во второй сумме $\sum_p$ в (24). Из условия инвариантности V (см. (15)), относительно трехмерных вращений следует, что $F_{12}(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k})$ зависит только от вращательных инвариантов $p^2,k^2,\ \vec{p}\cdot\vec{k}$. Поэтому

$$F_{12}(-\vec{p}\,',-\vec{p}\,'+\vec{k},-\vec{k})=F_{12}(\vec{p}\,',\vec{p}\,'-\vec{k},\vec{k})\,.$$

Вводя интегрирование $\int d^3p$ вместо $\sum_p$ (ср. (17)), получаем

$$N(\vec{k})=\frac{g^2}{(4\pi)^3}\int d^3p\frac{F_{12}(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k})}{\varepsilon_p\varepsilon_{p-k}}[\frac{1}{w_k-\varepsilon_p-\varepsilon_{p-k}}-\frac{1}{w_k+\varepsilon_p+\varepsilon_{p-k}}]\,. \qquad (25)$$

2.6. Поправка к энергии заряженного (Charged) одномезонного состояния $b_p^\dagger\Omega_0$ вычисляется аналогично. Получаем

$$\Delta^M\varepsilon_p=-\delta m^2/2\varepsilon_p, \qquad \Delta^V\varepsilon_p=\Delta^V E_p-\Delta^V E_0=C(\vec{p})/\varepsilon_p\,, \qquad (26)$$

$$C(\vec{p})=\frac{g^2}{(4\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\varepsilon_{p-k}w_k}[\frac{F_{11}^2(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k})}{\varepsilon_p-\varepsilon_{p-k}-w_k}-\frac{F_{12}^2(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k})}{\varepsilon_p+\varepsilon_{p-k}+w_k}]\,. \qquad (27)$$

2.7. Другой способ приближенного вычисления поправок к энергиям частиц использует специальное унитарное преобразование H (см., например, [10-12]). Его целью может быть, в частности, получение квазипотенциала между двумя частицами. Помимо потенциала получается поправка к энергиям частиц и возникает проблема их сведения к сдвигам масс, обсуждаемая в [11,12]. Для рассматриваемой модели теории поля эти поправки получены в [12]. Они совпадают с вычисленными выше $\Delta^V w_k$ и $\Delta^V\varepsilon_p$, как можно показать (для этого могут понадобиться замены переменных интегрирования). Заметим, что этот способ допускает использование непрерывных значений импульсов на всех этапах вычислений.

Отметим еще подход к вычислению поправок к энергии электрона, представленный в лекциях Дирака [13].

3. Перенормировка массы и регуляризация

При выборе H_F в качестве гамильтониана нулевого приближения сумма поправок $\Delta^V w_k$ (см. (23)) и $\Delta^M w_k$ (см. (19)) должна равняться нулю (см. конец подраздела 2.1):

$$\Delta^V w_k=-\Delta^M w_k=-\delta\mu^2/2w_k \qquad \text{или} \qquad N(\vec{k})+\delta\mu^2/2=0\,. \qquad (28)$$

Таким образом, $N(\vec{k})$ не должно зависеть от $\vec{k}$. Отметим, что (28) получено без предположения $\delta\mu^2<<\mu^2$, ср. вывод родственного соотношения (2) (но, конечно, надо предполагать, что вычисленные $\Delta^V w_k$ и $\Delta^M w_k$ дают основной вклад по сравнению с последующими приближениями).

Аналогичное (28) соотношение должно иметь место для $C(\vec{p})$ (см. (26) и (27)):

$$C(\vec{p}) = -\delta m^2/2\,. \tag{29}$$

В этом разделе обсуждается доказательство постоянства $N(\vec{k})$ и $C(\vec{p})$.

3.1. Складывая члены в квадратной скобке в (25), перепишем $N(\vec{k})$ в виде

$$N(\vec{k}) = -\frac{2g^2}{(4\pi)^3}\int \frac{d^3p}{\varepsilon_p}\frac{F_{12}^2(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k})}{(\varepsilon_p+\varepsilon_{k-p})^2-w_k^2} - \frac{2g^2}{(4\pi)^3}\int \frac{d^3p}{\varepsilon_{k-p}}\frac{F_{12}^2(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k})}{(\varepsilon_p+\varepsilon_{k-p})^2-w_k^2} \tag{30}$$

(ср. приложение A.4 в [11]). В знаменателях интегралов (30) фигурирует выражение

$$I(\vec{p},\vec{k}) = (\varepsilon_p+\varepsilon_{k-p})^2 - w_k^2 = 2[(\varepsilon_p\varepsilon_{k-p} - \vec{p}(\vec{k}-\vec{p})] + 2m^2 - \mu^2\,. \tag{31}$$

I сводится к скалярному произведению двух четырехвекторов $a_\mu = (\varepsilon_p, \vec{p})$ и $b_\mu = (\varepsilon_{k-p}, \vec{k}-\vec{p})$ и является лоренцевским инвариантом, не изменяющимся при одновременном лоренцевском преобразовании a_μ и b_μ. Но в отличие от $a_\mu a_\mu$ и $b_\mu b_\mu$ I есть переменный инвариант в том смысле, что он изменяется, если, например, $\vec{k}$ фиксировано, а $\vec{p}$ изменяется. Если $2m > \mu$, то $I > 0$.

Во втором интеграле в (30) (назовем его $N_2(\vec{k})$) сделаем замену переменных интегрирования $\vec{p} \to \vec{p}\,' = \vec{k} - \vec{p}$. После этого подынтегральное выражение в N_2 оказывается совпадающим с подынтегральным выражением первого интеграла $N_1(\vec{k})$ в (30), если

$$F_{12}(\vec{p},\vec{q},\vec{k}) = F_{12}(-\vec{q},-\vec{p},\vec{k}), \qquad \vec{q} = \vec{p} - \vec{k}\,.$$

Это равенство выполняется при выборе $F_{12} = F(I)$, который мы делаем в дальнейшем. Пределы интегрирования по $\vec{p}$ и $\vec{p}\,'$ тоже совпадают (они бесконечные). Поэтому $N_2 = N_1$ и $N = 2N_1$.

3.2. Предполагая, что

$$F_{11}(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k}) = F_{12}(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k}) \equiv F(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k})\,, \tag{32}$$

аналогично преобразуем выражение (27) для $C(\vec{p})$:

$$C(\vec{p}) = -\frac{2g^2}{(4\pi)^3}\int \frac{d^3k}{w_k}\frac{F^2(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k})}{(w_k+\varepsilon_{p-k})^2-\varepsilon_p^2} - \frac{2g^2}{(4\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\varepsilon_{k-p}}\frac{F^2(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k})}{(w_k+\varepsilon_{p-k})^2-\varepsilon_p^2}\,. \tag{33}$$

Во втором интеграле в (33) (обозначим его $C_2(\vec{p})$) сделаем замену переменных $\vec{k} \to \vec{q} = \vec{p} - \vec{k}$:

$$C_2(\vec{p}) = -\frac{2g^2}{(4\pi)^3}\int \frac{d^3q}{\varepsilon_q}\,\frac{F^2(\vec{p},\vec{q},\vec{p}-\vec{q})}{(w_{p-q}+\varepsilon_q)^2-\varepsilon_p^2}\,. \tag{34}$$

Знаменатели в $C_2(\vec{p})$ и первом интеграле $C_1(\vec{p})$ в (33) содержат лоренцевские инварианты

$$I_1 = (w_k + \varepsilon_{p-k})^2 - \varepsilon_p^2; \qquad I_2 = (w_{p-q} + \varepsilon_q)^2 - \varepsilon_p^2 . \tag{35}$$

Подчеркнем, что ввиду предположения (32) интегралы $C(\vec{p})$ и $N(\vec{k})$ содержат одну и ту же обрезающую функцию F. Будем считать ее функцией инварианта I (см. (31)). Таким образом, имеем в $C_1(\vec{p})$ и $C_2(\vec{p})$ соответственно

$$F(\vec{p},\vec{p}-\vec{k},\vec{k}) = F((\varepsilon_p+\varepsilon_{k-p})^2 - w_k^2), \qquad F(\vec{p},\vec{q},\vec{p}-\vec{q}) = F((\varepsilon_p+\varepsilon_q)^2 - w_{p-q}^2) . \tag{36}$$

Функции в правых частях (36) могут рассматриваться как одна и та же функция Φ от комбинации $(\varepsilon_p + \varepsilon_q)^2 - w_k^2$ (не являющейся лоренцевским инвариантом, вообще говоря), взятая на поверхности $\vec{p} - \vec{q} - \vec{k} = 0$. Первая получается из Φ, когда в качестве независимых переменных выбраны $\vec{p}$ и $\vec{k}$, и тогда $\vec{q} = \vec{p} - \vec{k}$ (и $(\varepsilon_p + \varepsilon_q)^2 - w_k^2$ оказывается инвариантом). Вторая получается при $\vec{k} = \vec{p} - \vec{q}$.

3.3. Интегралы $N(\vec{k})$ и $C(\vec{p})$ расходятся в локальном случае, когда $F_{11} = F_{12} = 1$. Имеется много причин для отказа иметь дело с расходящимися интегралами. В частности, бесконечность поправок $\Delta^V w_k = N(\vec{k})/w_k$ противоречит условию применимости теории возмущений [13]. Обсуждение вопроса о постоянстве $C(\vec{p})$ и $N(\vec{k})$ тоже требует, чтобы они были сходящимися. Действительно, в стандартном математическом анализе есть один несобственный элемент ∞ (или два: $\pm\infty$). Он обладает свойством $\infty + a = \infty$ и $\infty \cdot a = \infty$ для любого конечного положительного a ($\infty - \infty$ есть неопределенность). Поскольку имеем одну бесконечность, то не имеет смысла выражение "бесконечное $C(\vec{p})$ зависит (или не зависит) от $\vec{p}$". Однако именно так формулируют результат своего исследования постоянства $C(\vec{p})$ авторы [12] (см. их "Appendix"). В отличие от [12] здесь обсуждается постоянство регуляризованных (конечных) $C(\vec{p})$ и $N(\vec{k})$.

3.4. Введение регуляризации означает изменение теории (т.е. ее исходных положений), причем это должно быть сделано до получения ее следствий, в частности, поправок к энергиям. Это изменение должно быть согласованным с известными требованиями к квантовой теории: эрмитовость H или унитарность оператора эволюции, релятивистская ковариантность и т.д. Регуляризация не должна производиться ad hoc ("формалистическая" регуляризация по терминологии Паули и Вилларса, см., например, [4] конец гл. 20), так как это может означать использование разных регуляризованных теорий для вычисления разных эффектов. Здесь для регуляризации используются функции F_{mn}, имеющие смысл формфакторов нелокального взаимодействия V.

3.5. Выбираем $F_{11} = F_{12} = F(I)$ (см. выше). Такой формфактор может регуляризовать одновременно $N(\vec{k})$ и $C(\vec{p})$. Действительно, $I(\vec{p},\vec{k})$ (см. (31)) увеличивается не только с ростом $\vec{p}$ при фиксированном $\vec{k}$, но и с ростом $\vec{k}$ при фиксированном $\vec{p}$ (например, $I(0,\vec{k}) = 2m\varepsilon_k + 2m^2 - \mu^2$). Достаточно быстро убывающая с ростом I функция $F(I)$ обеспечивает сходимость и $N(\vec{k})$ и $C(\vec{p})$.

Регуляризованные таким образом N и C оказываются постоянными. Действительно, N и C имеют вид

$$\int \frac{d_p^3}{\varepsilon_p} f(I) \qquad \text{и} \qquad \int \frac{\mathrm{d}^3\mathrm{k}}{\omega_\mathrm{k}} \mathrm{g}(\tilde{\mathrm{I}}, \mathrm{I}), \tag{37}$$

где f зависит от инварианта (31), а g от (31) и одного из инвариантов (35). Заметим, что d^3p/ε_p и d^3k/w_k тоже есть лоренцевские инварианты. Интеграл (предел суммы) лоренцевских инвариантов есть лоренцевский инвариант. Он не может изменяться при изменении неинвариантной величины ($\vec{k}$ в случае N и $\vec{p}$ в случае C), т.е. N не может зависеть от $\vec{k}$, а C – от $\vec{p}$.

Задав конкретный вид $F(I)$, можно использовать соотношения $N = \delta\mu^2/2$ (см.(28)) и $C = \delta m^2/2$ (см. (29)) для явного выражения μ_0 и m_0 через m, μ, g и параметры F.

3.6. Фактически выше была подобрана регуляризация, достаточная для того чтобы сделать N и C постоянными. Необходимость ее не была доказана. Так же можно сформулировать результат ранних работ по вычислению поправок к энергии частицы (см. [9,14-16]). В них сначала рассматривался интеграл типа $C(\vec{p})$ (см., например, (33)) при $F = 1$. Вместо $\vec{k}$ вводились новые переменные интегрирования, одной из которых является лоренцевский инвариант J типа (35). Оказывается, что исходный интеграл сводится к (расходящемуся) интегралу по одной переменной J. После этого вводилась его регуляризация посредством обрезания по J:$J \leq M^2$. Такая регуляризация ad hoc выглядит естественной после сведения исходного интеграла к интегралу по $J(\vec{p}, \vec{k})$. Но в терминах первоначальных переменных $\vec{p}$ и $\vec{k}$ это означает, например, интегрирование по значениям $\vec{k}$, лежащим внутри области, граница которой описывается уравнением вида $J(\vec{p}, \vec{k}) = M^2$. Можно сказать, что для каждого $\vec{p}$ подбирается своя область интегрирования по $\vec{k}$, такая, что исходный регуляризованный интеграл $C(\vec{p})$ оказывается не зависящим от $\vec{p}$.

В только что описанном подходе фактически используются разные регуляризации для $C(\vec{p})$ (по инварианту типа (35)) и для $N(\vec{k})$ (по инварианту (31)). Это означает употребление разных регуляризованных теорий для вычисления разных поправок в то время как все вычисления должны производиться в рамках одной теории взаимодействующих частиц. В нашем подходе (см. подраздел (3.5)) использована одна общая регуляризация для N и C.

3.7. Итак, для полного решения проблемы сведения $\Delta\varepsilon \to \delta m^2$ надо еще показать, что регуляризованная теория с необходимостью должна быть такой, чтобы $N(\vec{k})$ и $C(\vec{p})$ были постоянными. На примере нелокального взаимодействия (15) это можно было бы осуществить следующим образом. Согласно Дираку [17], теория может считаться лоренц-инвариантной, если ее операторы полного импульса $\vec{P}$, энергии H, момента $\vec{M}$ и лоренцевских преобразований $\vec{N}$ удовлетворяют коммутационным соотношениям группы Пуанкаре. Тогда, в частности, из

$$[N_i H] = iP_i, \qquad [N_i P_j] = i\delta_{ij} H\,, \qquad i,j = 1,2,3\,, \tag{38}$$

будет следовать, что $H^2 - P^2$ коммутирует с $\vec{N}$, т.е. является лоренцевским инвариантом, как и комбинация $\varepsilon^2 - p^2$ одночастичных собственных значений H и $\vec{P}$. Как известно, требование Дирака выполняется в случае локальной теории, когда все генераторы группы Пуанкаре получаются из исходного лоренц-инвариантного лагранжиана с помощью тензора энергии-импульса. Надо показать, что оно выполняется и в нелокальной теории при условии, что формфакторы $F_{mn}(\vec{p},\vec{q},\vec{k})$ на поверхности $\vec{p}-\vec{q}-\vec{k}=0$ зависят от лоренцевских инвариантов типа (31). Относительно попыток реализации этой программы в случае простых нелокальных полевых моделей (см., например, [18,19]). Она не реализована в общем случае.

В этой ситуации результат проведенного обсуждения проблемы сведения можно сформулировать следующим образом. Исходим из того, что регуляризованные поправки к энергии должны сводиться к поправкам к массе. Было показано, что для этого формфакторы соответствующей нелокальной теории должны быть выбраны определенным образом: они должны зависеть от лоренц-инвариантной комбинации двух своих трехимпульсных аргументов. Указана конкретная такая комбинация (31), обеспечивающая регуляризацию и сведение одновременно для нейтральной и заряженной частиц.

4. Сравнение с ковариантным подходом

В современных изложениях перенормировки массы используется фактически иное определение массы вместо стандартного (1). Например: "Массы будут обычно определяться как изолированные полюсы двухточечных функций" [1]. Полюс пропагатора частицы в нулевом приближении совпадает с "голой" массой m_0. Полюс точного пропагатора называют физической массой m. Сдвиг массы $\Delta m = m - m_0$ в порядке g^2 определяется выражением $\Delta m = -\Sigma^{(2)}(m^2)$, где $\Sigma^{(2)}$ соответствует диаграмме собственной энергии (см., например, [3]). Например, в случае заряженного бозона, взаимодействующего локально с нейтральным полем, имеем

$$\Sigma^2(p^2) \sim g^2 \int d^4k G(p-k) D(k)\,. \tag{39}$$

Вычислим $\Sigma^{(2)}(m^2)$ нековариантно, интегрируя сначала по k_0 (см. [4] для случая фермиона и [12], sect. IV, для случая заряженного мезона в рамках обсуждаемой здесь модели). В последнем случае получаем формулу, совпадающую с C/m_0 (см. (27)) в локальном пределе $F_{mn}=1$ (формула (65) в [12]). Заметим, что сдвиг массы $\Delta m = m - m_0$ связан с $\delta m^2 = m^2 - m_0^2$ соотношением

$$\Delta m = \delta m^2/2m_0 = C/m_0\,,$$

если считать, что $m + m_0 \simeq 2m_0$. Таким образом нерегуляризованные сдвиги масс совпадают при обоих определениях массы. Как отмечено в [12], полученный результат можно рассматривать как вариант доказательства независимости $C(\vec{p})$ от $\vec{p}$.

Изложенное сравнение $\Sigma^{(2)}(m^2)$ и C является формальным, поскольку в локальном случае обе величины расходятся. Обсуждение связи $\Sigma^{(2)}_{reg}$ и C_{reg} ограничим следующим важным замечанием. Вставим в подынтегральное выражение (39) множитель $F^2(I)$, где I дается формулой (31). Полученный интеграл при $p_0 = \sqrt{p^2 + m^2}$ после интегрирования по k_0 оказывается равным C_{reg} (см. (27)) в случае $F_{11} = F_{12} = F(I)$. Подчеркнем, что описанная регуляризация $\Sigma^{(2)}$ производится с помощью лоренцевского инварианта, построенного из четырехвекторов $a_\mu = (\sqrt{p^2 + m^2}, \vec{p})$ и $b_\mu = (\sqrt{(\vec{k} - \vec{p})^2 + m^2}, \vec{k} - \vec{p})$. Обычно в ковариантном подходе регуляризация осуществляется с помощью инвариантной функции от четырехвекторов $(p_0, \vec{p})$ и $(k_0, \vec{k})$ (с переменными $p_\mu p_\mu$ и $k_\mu k_\mu$), фигурирующих в формуле (39) для локального $\Sigma^{(2)}$.

5. Заключение

Обычное ковариантное рассмотрение перенормировки массы использует определение физической массы частицы как точки полюса точного пропагатора, в то время как в этой работе применяется стандартное определение $m^2 = \varepsilon_p^2 - \vec{p}^2$, где ε_p — энергия наблюдаемой свободной частицы с импульсом $\vec{p}$. Как аргументировано во Введении, ε_p должна определяться соответствующим собственным значением полного гамильтониана H. Для приближенного вычисления ε_p здесь используется стандартная стационарная (нековариантная) теория возмущений (с уточнениями, необходимыми в случае теории поля). Другой способ, основанный на унитарном преобразовании H, дает те же результаты.

В обсуждаемом нековариантном подходе главной оказывается проблема сведения: поправка $\Delta\varepsilon_p$ к энергии частицы в релятивистской теории должна сводиться к сдвигу масс $\Delta m = m - m_0$. Эта проблема осложняется расходимостями, которые требуют регуляризации. Если эта проблема решена, то перенормировка массы производится так же, как в ковариантном подходе: вводятся массовые контрчлены, регуляризация и т.д. Из аргументированного в подразд. 3.4 подхода к регуляризации следует, что для последовательной перенормировки локальной теории нужна релятивистская регуляризованная теория (например, типа нелокальной, описанной в подразд. 3.7).

Обсуждаются прежние подходы к решению проблемы сведения. Указывается единая регуляризация, обеспечивающая сведение одновременно для заряженных и нейтральных частиц. Она использует специфические лоренцевские инварианты, построенные из двух трехмерных импульсов. В локальном случае полученные сдвиги масс совпадают со сдвигами масс в стандартном ковариантном подходе.

Благодарю Б.М.Барбашова и В.В.Нестеренко за полезные замечания и обсуждения.

Литература

[1] К.Ициксон, Ж.-Б.Зюбер. Квантовая теория поля. ("Мир", Москва 1984) т.1 гл. 7.1. C.Itzykson, J.-B.Zuber. Quantum Field Theory (McGraw Hill, New York 1980) ch.7.1.

[2] Дж.Д.Бьеркен, С.Д.Дрелл. Релятивистская квантовая теория ("Наука", Москва 1978) т.1, гл. 8. J.D.Bjorken, S.D.Drell. Relalivistic Quantum Mechanics (McGraw Hill, New York 1965) ch.8.

[3] F.Mandle, G.Shaw. Quantum Field Theory (John Wiley, New York 1984) ch. 9.

[4] С.Швебер, Г.Бете, Ф.Гофман. Мезоны и поля (ИИЛ Москва 1957) т.1, гл. 20. S.S.Schweber, H.A.Bethe, F.Hoffman. Mesons and Fields (Row, Peteson, New York 1955) v.1, ch.20.

[5] С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля (ИИЛ, Москва 1963) гл. 15. S.S.Schweber. An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory (Row, Peterson, New York 1961) ch.15.

[6] А.Мессиа. Квантовая механика ("Наука", Москва 1979) т.2, гл. XVI A.Messiah. Quantum Mechnaics (North Holland, Amsterdam 1961) v.2, ch.XVI.

[7] Г.Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей (ГИТТЛ, Москва 1947) гл. 1.5. G.Wentzel. Quantum Theory of Fields (Intescience Publ., New York 1949) ch.1.5.

[8] А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика (ГИФМЛ, Москва 1959) изд.2, гл. I, §1.4. A.I.Akhiezer, V.B.Berestetskii. Quantum Electrodynamics (Interscience, New York 1965) ch.1.

[9] В.Гайтлер. Квантовая теория излучения (ГИИЛ, Москва 1956) гл.6, §29. W.Heitler. The Quantum Theory of Radiation (Clarendon Press, Oxford 1954).

[10] E.C.Kemble. Fundamentals of Quantum Mechanics (Dover, New York 1937) ch. XI, Sect. 48c.

[11] A.S.Shebeko, M.I.Shirokov. Unitary transformations in Quantum Field Theory and Bound States. ЭЧАЯ, 2001, 32, вып. 1.

[12] A.Kruger, W.Gloeckle. Phys.Rev. 1999 C60, N2, 024004.

[13] П.А.М. Дирак. Лекции по квантовой теории поля. ("Мир", Москва 1971). P.A.M.Dirac. Lectures in Quantum Field Theory (Yeshiva University, New York 1967).

[14] W.Pauli, M.E.Rose. Phys.Rev. 1936 49, 462.

[15] S.N.Gupta. Proc.Phys.Soc. 1950 63, 681.

[16] R.Rawabe, H.Umezawa. Progr.Theor.Phys. 1949 4, 461.

[17] P.A.M.Dirac. Rev.Mod.Phys. 1949, 21, 392.

[18] H.Kita, Progr.Theor.Phys. 1966, 35, 934.

[19] H.Kita, Progr.Theor.Phys. 1968, 39, 1333.

**Рукопись поступила в издательский отдел
20 ноября 2000 года.**

Широков М.И. Р2-2000-277
Перенормировка массы в нековариантной теории возмущений

В ковариантном подходе к перенормировке массы масса частицы определяется как полюс ее пропагатора. Здесь принимается стандартное определение массы: $m^2 = E^2(p) - \vec{p}^{\,2}$, где $E(p)$ — энергия наблюдаемой свободной частицы, которая должна сопоставляться с одночастичным собственным значением полного гамильтониана. Для приближенного вычисления $E(p)$ используется стационарная теория возмущений. В этом нековариантном подходе возникает проблема, отсутствующая в ковариантном: надо показать, что поправка $\Delta E(p)$ к «голой» энергии $\sqrt{p^2 + m_0^2}$ сводится к сдвигу массы $m - m_0$. Показано, что это сведение обеспечивается, если для регуляризации возникающих расходимостей используется специфический лоренц-инвариантный формфактор. Обсуждаются прежние решения этой проблемы. В локальном пределе полученные сдвиги масс оказываются теми же, что и в ковариантном подходе.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод автора

Shirokov M.I. P2-2000-277
Mass Renormalization Using Noncovariant Perturbation Theory

In the covariant approach to the mass renormalization the particle mass is defined as the particle propagator pole. Here the standard mass definition is adopted: $m^2 = E^2(p) - \vec{p}^{\,2}$, $E(p)$ being the observable free particle energy. It is argued, that $E(p)$ must correspond to one-particle eigenvalue of the total Hamiltonian. The standard stationary perturbation theory is used for the eigenvalue determination. In this noncovariant approach the problem arises which is absent in the covariant way: one must show that correction $\Delta E(p)$ to the «bare» energy $\sqrt{p^2 + m_0^2}$ reduces to the mass shift $m - m_0$. The reduction is shown to be ensured if for the regularization of the arising divergencies one uses a peculiar Lorentz-invariant formfactor. Previous considerations of the problem are discussed. In the local limit the obtained mass shifts turn out to be the same as in the covariant approach.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 24.11.2000
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 1,26
Тираж 425. Заказ 52373. Цена 1 р. 52 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области