P4-2000-136

В.В.Пупышев

ФИЗИЧЕСКИЕ И ЛОЖНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ПАРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

---

*E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

1. Введение

Известно [1], что для достижения хорошей сходимости в разложении многочастичной волновой функции по гиперсферическому базису, как правило, приходится учитывать довольно много слагаемых.

Для оптимальной аппроксимации полного разложения волновой функции Фабр [2] предложил заменять такое разложение его подсуммой по гипергармоникам, содержащимся в гиперсферических рядах для парных потенциалов, и назвал такие гипергармоники потенциальными. Таким образом, по определению базис потенциальных гипергармоник является полным и удобным для представления парных взаимодействий, но, вообще говоря, не является полным для представления волновой функции.

Эфрос [3] впервые доказал, что базис гиперсферических функций можно упорядочить таким образом, что вклад базисных функций с ростом гипермомента будет резко уменьшаться. Первые члены такого базиса являются потенциальными гипергармониками.

В настоящей работе такие гипергармоники используются для построения и анализа разбиений произвольных центральных парных взаимодействий на физические и ложные слагаемые.

Чтобы избежать путаницы, следует отметить, что в литературе используются два совершенно различных по физическому смыслу определения понятий ложных решений и ложных слагаемых. В теории ядра [4] нетривиальное решение уравнения Шредингера, обладающее запрещенной для данного состояния системы тождественных частиц перестановочной симметрией, принято называть ложным (ду́ховым), т.е. физически нереализуемым, решением этого уравнения. Термин "ложные слагаемые" часто используется в аналогичном, т.е. связанном с принципом Паули [5], смысле.

Например, в книге [6] ложными (ду́ховыми) слагаемыми общего решения уравнений Фаддеева [7] или уравнений фаддеевского типа для системы тождественных частиц названы слагаемые, сумма которых по всем парам частиц обладает запрещенной принципом Паули перестановочной симметрией.

Совершенно в ином смысле, вообще говоря, не связанном с принципом Паули, термины "ложные решения" и "ложные слагаемые" употреблялись в серии работ [8] – [19]. В пионерских работах [8] – [11] ложными решениями системы уравнений фаддеевского типа были названы ее специальные решения, а именно, решения, взаимно компенсирующие друг друга при суммировании по всем парам не обязательно тождественных частиц. В недавних работах [12] – [15] ложное решение системы уравнений Фаддеева

$$(H_0 - E)\, \Psi_i = -V_i\, \Psi = -V_i \sum_{k=1}^{3} \Psi_k\,, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

для компонент Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 волновой функции Ψ трех, вообще говоря, различных частиц понималось в том же смысле. Под таким решением подразумевалось нетривиальное решение (S_1, S_2, S_3) этих уравнений, отвечающее тривиальному решению

$$\Psi = S_1 + S_2 + S_3 \equiv 0$$

соответствующего уравнения Шредингера:

$$(H_0 - E)\Psi = -V\Psi = -(V_1 + V_2 + V_3)\Psi\,. \tag{2}$$

Здесь H_0 и E – свободный гамильтониан и полная энергия трехчастичной системы, V_k – парное взаимодействие между частицами с номерами i и j, а символом V обозначено полное взаимодействие.

В работах [16] – [19] исследовалось разбиение компонент

$$\Psi_k = U_k + S_k\,, \quad k = 1, 2, 3,$$

общего решения уравнений Фаддеева (1) на слагаемые U_k, определяющие волновую функцию Ψ, и слагаемые S_k, не дающие в нее никакого вклада:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{3} \Psi_k = \sum_{k=1}^{3} (U_k + S_k) = \sum_{k=1}^{3} U_k \neq 0\,, \quad \sum_{k=1}^{3} S_k \equiv 0\,.$$

Функции U_k и S_k назывались физическим и, соответственно, ложным слагаемыми соответствующей фаддеевской компоненты Ψ_k.

Аналогичное по смыслу определение ложных слагаемых парных взаимодействий было принято в работе [18] для системы нескольких тождественных бозонов, а затем в работе [19], но для произвольной трехчастичной системы. В этих работах исследовались разбиения

$$V_k = V_k^u + V_k^s\,, \quad k = 1, 2, 3, \tag{3}$$

парных взаимодействий V_k на слагаемые V_k^u и V_k^s со свойствами

$$\sum_{k=1}^{3} V_k^u \neq 0\,, \quad \sum_{k=1}^{3} V_k^s \equiv 0\,. \tag{4}$$

Слагаемые V_k^u и V_k^s, обладающие только такими свойствами, назывались физическими и, соответственно, ложными.

Необходимо отметить, что такое определение физических слагаемых является не вполне корректным и требует уточнения. Действительно, взаимодействия V_k^u, $k = 1, 2, 3$, удовлетворяющие только условию (4), определены с точностью до ложных слагаемых, т.е. сами могут иметь ложные слагаемые. Поэтому разбиение (3), (4) парных взаимодействий, вообще говоря, неоднозначно.

Приведем поясняющий пример. Пусть взаимодействия V_k имеют нетривиальные слагаемые V_k^s. Тогда при каждом значении некоторого параметра α будет иметь место разбиение

$$V_k = V_k^u(\alpha) + V_k^s(\alpha),\; V_k^u(\alpha) \equiv V_k^u + \alpha V_k^s,\; V_k^s(\alpha) \equiv (1-\alpha) V_k^s\,,$$

слагаемые которого $V_k^u(\alpha)$ и $V_k^s(\alpha)$ подчиняются тем же условиям (4), что и слагаемые V_k^u и V_k^s:

$$\sum_{k=1}^{3} V_k^u(\alpha) \neq 0\,, \quad \sum_{k=1}^{3} V_k^s(\alpha) \equiv 0\,.$$

Уточним определение физических и ложных слагаемых, наложив еще одно условие: пусть из каждого взаимодействия V_k^u нельзя выделить нетривиальные слагаемые V_k^{us}, сумма которых тождественно равна нулю:

$$V_k^u \neq V_k^{uu} + V_k^{us} \;:\quad \sum_{k=1}^{3} V_k^{uu} \neq 0\,, \quad \sum_{k=1}^{3} V_k^{us} \equiv 0\,. \tag{5}$$

Слагаемые V_k^u и V_k^s сумм (3), подчиняющиеся обоим условиям (4) и (5), будем называть физическими и ложными, потому что первые определяют полное взаимодействие V, а вторые не дают в него никакого вклада:

$$V = \sum_{k=1}^{3} V_k = \sum_{k=1}^{3} (V_k^u + V_k^s) = \sum_{k=1}^{3} V_k^u \,.$$

Более корректное с математической точки зрения определение физических и ложных слагаемых дадим ниже.

Так как уравнение Шредингера (2) для волновой функции Ψ содержит парные взаимодействия только в виде их суммы V, то ложные слагаемые отсутствуют в этом уравнении:

$$(\, H_0 - E \,)\, \Psi = -V\, \Psi = -\Big(\sum_{k=1}^{3} V_k^u \Big)\, \Psi \,. \qquad (6)$$

По определению физические слагаемые не имеют компонент, взаимно компенсирующих друг друга при суммировании по всем парам частиц. Следовательно, разрешенная симметрия и динамика трехчастичной системы определяются не парными взаимодействиями V_k, а лишь их физическими слагаемыми V_k^u. Поэтому исследования физических и ложных слагаемых парных взаимодействий и их роли в задаче трех частиц представляется интересным.

Сугубо математическим проблемам, порожденным ложными слагаемыми взаимодействий в системах трех нетождественных частиц (критерий существования таких слагаемых, строение волновой функции и ее фаддеевских компонент), была посвящена предыдущая работа [19].

Основная цель настоящей работы – построить в явном виде физические и ложные слагаемые произвольных центральных взаимодействий и проанализировать физические условия, достаточные для существования ложных слагаемых осцилляторных и кулоновских взаимодействий.

2. Основные обозначения и известные формулы

Приведем необходимые для всей работы известные понятия и формулы теории гипергармоник [1], [20] – [25].

Символами m_i, $\mathbf{a}_i$ и μ_{ij} обозначим массу и радиус-вектор частицы с номером i и, соответственно, приведенную массу частиц с номерами i и $j \neq i$.

Введем три ($i = 1, 2, 3$) набора $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ – стандартных приведенных векторов Якоби [1, 21] в шестимерном координатном пространстве $\mathcal{R}^6 = \mathcal{R}_x^3 \oplus \mathcal{R}_y^3$ трех рассматриваемых частиц. Например,

$$\mathbf{x}_k \equiv \hbar^{-1} \sqrt{2\mu_{ij}} (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i)\,, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1)\,.$$

Каждой ($i = 1, 2, 3$) паре $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ сопоставим шестимерный вектор $\mathbf{r}_i \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in \mathcal{R}^6$ с обычными гиперсферическими координатами (r, Ω_i) [20]. Здесь: $r \equiv (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}$ – гиперрадиус, а $\Omega_i \equiv (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i)$ – совокупность пяти гиперсферических углов, таких что $\hat{q}$ – пара сферических углов трехмерного вектора $\mathbf{q} = \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$, а $\varphi_i \equiv \mathrm{arctg}\,(y_i/x_i)$.

В случае центральных парных взаимодействий сохраняется полная энергия E, квадрат $\ell(\ell+1)$ полного углового момента ($\mathbf{l} \equiv \mathbf{l}_{x_i} + \mathbf{l}_{y_i}$), его третья проекция m и четность σ по отношению к инверсии $\mathbf{r}_i \to -\mathbf{r}_i$.

Обычное ограничение, накладываемое на гладкость искомых решений уравнений Шредингера, – непрерывность всех производных второго порядка во всем шестимерном пространстве $\mathcal{R}^6$.

Пусть $\mathcal{A}^\varepsilon$ – класс функций, обладающих указанной гладкостью и заданным набором $\varepsilon \equiv (E, \ell, m, \sigma)$ сохраняющихся квантовых чисел, а $\mathcal{A}$ – объединение всех классов $\mathcal{A}^\varepsilon$. В классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ полный и ортонормированный на единичной сфере $\mathcal{S}^5$ в $\mathcal{R}^6$ угловой базис [20] образуют вполне определенные трехчастичные гипергармоники [21]:

$$\begin{aligned} Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i) &\equiv N_{Lab}\,(\sin\varphi_i)^a\,(\cos\varphi_i)^b\,P_n^{(a+1/2,\,b+1/2)}(\cos 2\varphi_i)\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{y}_i,\hat{x}_i)\,, \\ L &= a+b+2n,\; n=0,1...,\; \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{l},\; (-1)^{a+b}=\sigma\,. \end{aligned} \tag{7}$$

В классе $\mathcal{A}$ в том же смысле угловой базис образуют гипергармоники (7) с любыми $\ell = 0, 1, \ldots$ и $m = -\ell, -\ell+1, \ldots, \ell$.

Гипергамоники аргументов Ω_k и Ω_i, отвечающих различным ($k \neq i$) координатам Якоби, связаны унитарным преобразованием, сохраняющим все квантовые числа набора ε:

$$Y^{\ell m}_{Lcd}(\Omega_k(\Omega_i;\gamma_{ki})) = \sum_{ab}\,\langle\, ab|K(\gamma_{ki})|cd\rangle_{L\ell}\,Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)\,. \tag{8}$$

Здесь индексы a и b пробегают все допустимые при заданных L, ℓ и σ значения, а матричные элементы,

$$\langle ab|K(\gamma_{ki})|cd\rangle_{L\ell} \equiv \langle Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)|Y^{\ell m}_{Lcd}(\Omega_k)\rangle \equiv \int_{\mathcal{S}^5} d\Omega_i\,\left(Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i)\right)^*\,Y^{\ell m}_{Lcd}(\Omega_k)\,, \tag{9}$$

оператора кинематического преобразования $K(\gamma_{ki})$ [22] (коэффициенты Рейнала - Реваи [23]) параметрически зависят от кинематического угла [21]

$$\gamma_{ki} \equiv g_{ki}\,\mathrm{arctg}\,\left(m_j(m_1+m_2+m_3)/m_k m_i\right)^{1/2}\,. \tag{10}$$

По определению кинематических углов при $(k,i) = (1,2), (3,1), (2,3)$

$$g_{ki} = -g_{ik} = 1\,,\quad 0 < \gamma_{ki} < \pi/2\,,\quad \sum_{(k,i)}\gamma_{ki} = \pi\,. \tag{11}$$

В случае $\ell, c, d = 0$ коэффициенты Рейнала-Реваи выражаются через полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}$ известными формулами [24]:

$$\begin{aligned} \langle aa|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L0} &= (-1)^a\,\langle aa|K(\gamma_{ik})|00\rangle_{L0} = \\ &= C_{La}\,(\sin 2\gamma_{ki})^a\,P_{L/2-a}^{(a+1/2,\,a+1/2)}(\cos 2\gamma_{ki})\,, \\ C_{La} &\equiv N_{Laa}/2^a N_{L00}\,P_{L/2}^{(1/2,\,1/2)}(-1)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Символами V_k^{os} и V_k^c обозначим осцилляторные и кулоновские парные взаимодействия:

$$V_k^{os}(r_{ij}) \equiv \frac{1}{3}\,\mu_{ij}(\omega_k r_{ij})^2\,,\quad V_k^c(r_{ij}) \equiv \frac{z_i z_j e^2}{r_{ij}},\; r_{ij} \equiv |\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i|\,. \tag{13}$$

Здесь $\omega_k > 0$ – парная осцилляторная частота, $z_i e$, $z_j e$ – заряды частиц с номерами i и j, а e – заряд электрона.

3. Построение физических и ложных слагаемых

Прежде всего сформулируем физически- и математически-корректное определение терминов "физические" и "ложные" слагаемые произвольных (не обязательно центральных) парных взаимодействий. Для этого поясним, в каком смысле следует понимать соотношения (3) – (5).

Все физические свойства квантового состояния рассматриваемой трехчастичной системы не зависят от математического формализма, используемого для их описания, в частности от того, в каком из трех координатных представлений $\langle \mathbf{r}_i|, i = 1, 2, 3$, записывается волновая функция Ψ этого состояния и уравнение Шредингера (2) или (6), которому она подчинена. Поэтому понятие физических V_k^u и ложных V_k^s слагаемых взаимодействия V_k не должно зависеть от выбора координатного представления, в котором записываются соотношения (3) – (5). Далее, в квантовой механике [5] взаимодействие V_k, а значит и компоненты V_k^u и V_k^s его разбиения (3), всегда понимаются как операторы. В математике любой оператор всегда определяется в некотором пространстве или же классе функций. Всем упомянутым выше принципам удовлетворяет следующее определение физических и ложных слагаемых парных взаимодействий.

Для рассматриваемого класса функций операторы V_k^u и V_k^s будем называть физическими и ложными слагаемыми взаимодействия V_k, если эти операторы подчиняются двум условиям.

Во-первых, соотношения (4) выполняются в любом из трех координатных представлений $\langle \mathbf{r}_i|, i = 1, 2, 3$, и для любой функции Ψ этого класса:

$$\langle \mathbf{r}_i| \sum_{k=1}^{3} V_k^u(\mathbf{r}_k)| \Psi(\mathbf{r}_i) \rangle \neq 0 , \quad \langle \mathbf{r}_i| \sum_{k=1}^{3} V_k^s(\mathbf{r}_k)| \Psi(\mathbf{r}_i) \rangle \equiv 0 . \tag{14}$$

Во-вторых, условия (5) выполняются в аналогичном смысле: для каждого оператора V_k^u не существует разбиения на пару нетривиальных операторов V_k^{uu} и V_k^{us}, таких что в любом координатном представлении и для любой функции Ψ данного класса

$$\langle \mathbf{r}_i| \sum_{k=1}^{3} V_k^{uu}(\mathbf{r}_k)| \Psi(\mathbf{r}_i) \rangle \neq 0 , \quad \langle \mathbf{r}_i| \sum_{k=1}^{3} V_k^{us}(\mathbf{r}_k)| \Psi(\mathbf{r}_i) \rangle \equiv 0 . \tag{15}$$

Поясним основные идеи предлагаемого способа построения физических и ложных слагаемых центральных парных взаимодействий, основанного на представлении таких взаимодействий их гиперсферическими рядами.

Причина появления ложных слагаемых достаточно проста: гиперсферические ряды парных взаимодействий V_k содержат, вообще говоря, все базисные гипергармоники, а гиперсферическое разложение полного взаимодействия V при определенных условиях на массы частиц и параметры парных взаимодействий может не содержать гипергармоник с определенными квантовыми числами. Подсуммы гиперсферических рядов для парных взаимодействий по таким (запрещенным и кинематикой, и формой парных потенциалов) гипергармоникам и будут ложными слагаемыми V_k^s этих взаимодействий, а оставшиеся подсуммы – физическими слагаемыми V_k^u.

Центральные взаимодействия определены как операторы умножения на соответствующие функции $V_k(x_k)$, поэтому их физические и ложные слагаемые действуют на произвольную функцию аналогичным образом (как операторы умножения на функции V_k^u и V_k^s). Следовательно, физические (ложные) слагаемые для класса $\mathcal{A}$ будут физическими (ложными) для любого класса $\mathcal{A}^\varepsilon$. Поэтому далее не указываем, для какого именно класса функций построенные слагаемые являются физическими и ложными.

Приступим к определению запрещенных значений L для произвольной системы нетождественных частиц с центральными парными взаимодействиями. Разложим такие взаимодействия по всему базису (7). Благодаря их сферической симметрии в рядах останутся только гипергармоники Y_{L00}^{00}:

$$V_k(x_k) = \sum_{L=0,2,\ldots} V_k^L(r)\, Y_{L00}^{00}(\Omega_k)\,, \quad k=1,2,3. \tag{16}$$

Используя эти ряды и правила (8) и (9), получим функциональное разложение полного взаимодействия в выбранном представлении $\langle \mathbf{r}_i|$:

$$V(\mathbf{r}_i) = \sum_{L=0,2,\ldots} \sum_{a=0}^{L/2} {}^i V_a^L(r)\, Y_{Laa}^{00}(\Omega_i)\,, \tag{17}$$

$${}^i V_a^L(r) \equiv \delta_{a0}\, V_i^L(r) + \sum_{k\neq i} \langle aa|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L0}\, V_k^L(r)\,. \tag{18}$$

Таким образом, из-за сферической симметрии парных взаимодействий, базис потенциальных гипергармоник Y_{Laa}^{00}, $L=0,2,\ldots$, $a=0,1,\ldots,L/2$, оказывается полным для разложения полного взаимодействия.

Так как базисные функции Y_{Laa}^{00} линейно независимы по обоим индексам L и a, то в любом из трех $(i=1,2,3)$ координатных представлений ряд (17) не содержит потенциальных мультиполей V_1^L, V_2^L, V_3^L с некоторым фиксированным L тогда и только тогда, когда все мультиполи (18) этого ряда с индексами $i=1,2,3$ и $a=0,\ldots,L/2$ тождественно равны нулю. Это условие равносильно следующей конечной $(a=0,\ldots,L/2)$ цепочке не зацепляющихся друг с другом систем из трех $(i=1,2,3)$ тождеств по r:

$$\mathbf{N}^{La}\,\mathbf{V}^L(r) = 0\,, \quad a=0,\ldots,L/2\,, \quad \forall r\geq 0\,. \tag{19}$$

Здесь $\mathbf{V}^L$ – столбец $(V_1^L, V_2^L, V_3^L)^T$, а $\mathbf{N}^{La}$ – матрица с элементами

$$N_{ii}^{La} \equiv \delta_{a0}\,, \quad N_{ki}^{La} \equiv \langle aa|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L0}\,, \quad k\neq i=1,2,3. \tag{20}$$

Если для данного L найдется хотя бы одно значение индекса a, при котором матрица $\mathbf{N}^{La}$ не вырождена, то всей цепочке тождеств (19) будут удовлетворять только тривиальные мультиполи $(V_i^L\equiv 0, i=1,2,3)$.

Найдем те значения L, при которых матрицы $\mathbf{N}^{La}$, $a=0,\ldots,L/2$, вырождены. Заменив матричные элементы (20) по формулам (12) и положив по определению $(k,i)\equiv(1,2),(2,3),(3,1)$, выведем равенство

$$\begin{aligned} \det \mathbf{N}^{La} &= \delta_{a0} - \delta_{a0}\, C_{L0}^2 \sum_{(k,i)} \left(P_{L/2}^{(1/2,\,1/2)}(\cos 2\gamma_{ki}) \right)^2 + \\ &+ (1+(-1)^a)\, C_{La}^3 \prod_{(k,i)} (\sin 2\gamma_{ki})^a\, P_{L/2-a}^{(a+1/2,\,a+1/2)}(\cos 2\gamma_{ki})\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Пусть $L = 0$, тогда индекс a принимает только одно значение $a = 0$. Согласно формулам (12) все элементы (20) матрицы $\mathbf{N}^{00}$ равны единице независимо от значений кинематических углов. Поэтому система трех условий (19) с $L, a = 0$ вырождается в одно тождество по переменной r:

$$V_1^0(r) + V_2^0(r) + V_3^0(r) = 0\,. \tag{22}$$

При $L = 2$ имеется две ($a = 0, 1$) системы условий (19). В силу соотношений (11), (12), (20) и (21) при любых значениях кинематических углов

$$N_{ki}^{2a} = \delta_{ki}\,(-1)^a \cos(2\gamma_{ki} - a\pi/2),\ \det \mathbf{N}^{2a} = 0,\ a = 0, 1; k, i = 1, 2, 3.$$

Поэтому обе ($a = 0, 1$) исследуемые системы (19) сводятся к одной и той же системе из двух условий:

$$V_1^2(r)\, \sin 2\gamma_{12} = V_3^2(r)\, \sin 2\gamma_{23}\,, \quad V_2^2(r)\, \sin 2\gamma_{12} = V_3^2(r)\, \sin 2\gamma_{31}\,. \tag{23}$$

Рассмотрим все оставшиеся случаи, когда $L = 4, 6, \ldots$ Четное число $L > 2$ либо кратно, либо не кратно четырем. Если L кратно четырем: $L = 4p$, $p = 1, 2, ...$, то при $a = L/2 = 2p$, согласно формуле (21),

$$\det \mathbf{N}^{4p,2p} = 2\, C_{4p,2p}^3 \prod_{(k,i)} (\,\sin 2\gamma_{ki}\,)^{2p}\,.$$

Следовательно, при любых допустимых значениях (11) кинематических углов матрица $\mathbf{N}^{4p,2p}$ не вырождена. Пусть L – не кратно четырем: $L = 4p + 2$, $p = 1, 2, \ldots$ При $a = 2p$ по формуле (21) находим

$$\det \mathbf{N}^{4p+2,2p} = 2\, \left(C_{4p+2,2p}\, P_1^{(2p+1/2,\, 2p+1/2)}(1) \right)^3 \prod_{(k,i)} (\sin 2\gamma_{ki})^{2p}\, \cos 2\gamma_{ki}\,.$$

Значит, матрица $\mathbf{N}^{4p+2p,2p}$ вырождена тогда и только тогда, когда один из кинематических углов равен $\pi/4$. Из соотношений (11) следует, что два кинематических угла одновременно не могут быть равными $\pi/4$. Пусть $\gamma_{12} = \pi/4$, тогда $\gamma_{31}, \gamma_{23} \neq \pi/4$ и в силу равенств (12) имеем $N_{ij}^{4p+2,2p} = 0$, $i, j = 1, 2$, $N_{13}^{4p+2p,2p} \neq 0$. Поэтому система уравнений (19) с $L = 4p + 2$, $a = 2p$ имеет только одно нетривиальное решение:

$$V_1^{4p+2}(r) = \frac{\sin 4\gamma_{23}}{\sin 4\gamma_{31}} \left(\frac{\cos 2\gamma_{23}}{\cos 2\gamma_{31}} \right)^{2p-1} V_2^{4p+2}(r)\,, \quad V_3^{4p+2}(r) = 0\,,$$

но это решение не удовлетворяет первой ($L = 4p + 2, a = 0$) системе уравнений (19) рассматриваемой цепочки ни при каких значениях углов γ_{23}, γ_{31}.

Итак, одновременно нетривиальные мультиполи V_i^L, $i = 1, 2, 3$, центральных парных взаимодействий (16) могут удовлетворять тождествам (19) только в двух случаях: $L = 0$, $a = 0$ и $L = 2$, $a = 0, 1$. Матрицы этих тождеств вырождены при любых кинематических углах, а сами тождества сводятся, соответственно, к условию (22) при $L = 0$ и к условиям (23) в случае $L = 2$.

Пусть $\mathcal{E}$ – множество значений индекса L, для которых справедливы цепочки тождеств (19). Как было доказано, $\mathcal{E}$ может содержать только два элемента $L = 0$ и $L = 2$. Подсуммы

$$
\begin{aligned}
V_k^u(\mathbf{r}_k) &= \sum_{L \notin \mathcal{E}} V_k^L(r)\, Y_{L00}^{00}(\Omega_k)\,, \\
V_k^s(\mathbf{r}_k) &= \sum_{L \in \mathcal{E}} V_k^{Ls}(\mathbf{r}_k) = \sum_{L \in \mathcal{E}} V_k^L(r)\, Y_{L00}^{00}(\Omega_k)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

рядов (16) будут физическими и ложными слагаемыми парных взаимодействий. Действительно, такие подсуммы по их построению подчиняются соотношениям (14), а из ряда V_k^u нельзя выделить подсуммы V_k^{uu} и V_k^{us} со свойствами (15). Для краткости компоненту $V_k^{Ls} \equiv V_k^L Y_{L00}^{00}$ будем называть частным ложным слагаемым с данным $L \in \mathcal{E}$.

В частном случае трех тождественных частиц имеем $m_1, m_2 = m_3$ и согласно формулам (10), (11) и (16)

$$
\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31} = \pi/3\,, \qquad V_1^L(r), V_2^L(r) = V_3^L(r)\,,\ L = 0, 2, \ldots
$$

Поэтому условие (22) никогда не выполняется, а условия (23) выполняются всегда. Следовательно, любые парные взаимодействия между тождественными частицами всегда имеют ложные слагаемые с $L = 2$.

4. Ложные слагаемые подобных взаимодействий

Центральные парные взаимодействия типа

$$
V_k(x_k) = c_k\, F(x_k)\,, \quad k = 1, 2, 3, \tag{25}
$$

где F – некоторая квадратично-интегрируемая на $\mathcal{S}^5$ функция, а c_1, c_2 и c_3, вообще говоря, не равные коэффициенты, будем называть подобными взаимодействиями, потому что их функциональная зависимость от расстояния описывается одной и той же функцией F.

Для подобных взаимодействий достаточные условия существования частных ложных слагаемых (22) и (23) с $L = 0$ и $L = 2$ сводятся к соответствующим условиям, не содержащим переменную r и связывающим массы частиц и параметры взаимодействий:

$$
c_1 + c_2 + c_3 = 0\,, \tag{26}
$$

$$
c_1 \sin 2\gamma_{12} = c_3 \sin 2\gamma_{23}\,, \quad c_2 \sin 2\gamma_{12} = c_3 \sin 2\gamma_{31}\,. \tag{27}
$$

Так как $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31} > 0$, то условия (26) и (27) не могут выполняться одновременно. Поэтому для подобных взаимодействий множество $\mathcal{E}$ состоит всего из одного элемента $L = 0$ или $L = 2$.

Если выполняется условие (26), то согласно определению (24) слагаемые

$$
\begin{aligned}
V_k^{Ls}(\mathbf{r}_k) &= c_k\, F^L(r)\, Y_{L00}^{00}(\Omega_k) = (\delta_{L0} + L\delta_{L2})\, \pi^{-3/2} F^L(r)\, \cos L\varphi_k\,, \\
F^L(r) &\equiv (4 - L)\pi^{-1/2} \int_0^{\pi/2} d\varphi\, \left(\sin(L+2)\varphi\right)^2\, F(r\cos\varphi)
\end{aligned}
\tag{28}
$$

с $L = 0$ будут ложными. Если выполняются оба соотношения (27), то ложными будут слагаемые (28) с $L = 2$.

Осцилляторные и кулоновские парные взаимодействия (13) являются особо важными подобными взаимодействиями. Дело в том, что осцилляторные взаимодействия широко используются в модельных расчетах разных трехчастичных систем [26], а кулоновские взаимодействия являются безмодельными и играют исключительно важную роль в трехчастичных системах самых разных типов (ядерных, атомных, молекулярных). Поэтому и осцилляторные, и кулоновские взаимодействия необходимо тщательно исследовать на наличие ложных слагаемых. Основные цели такого анализа: найти условия, при которых в системе трех нетождественных частиц с осцилляторными взаимодействиями полное взаимодействие зависит только от гиперрадиуса, выявить классы трехчастичных систем, для которых кулоновские взаимодействия заведомо не имеют ложных слагаемых, и описать классы, для которых достаточные условия существования ложных слагаемых кулоновских взаимодействий могут выполняться точно или же выполняются приближенно.

Пусть взаимодействия (25) – осцилляторные (13):

$$c_k = \frac{\hbar^2}{6}\,\omega_k^2 > 0\,, \quad F(x_k) = x_k^2\,, \quad k = 1, 2, 3\,.$$

Тогда их гиперсферические разложения (16) содержат всего два члена:

$$V_k(x_k) = \frac{\pi^{3/2}}{24}\,(\hbar\omega_k r)^2\,\left(2Y^{00}_{000}(\Omega_k) + Y^{00}_{200}(\Omega_k)\right)\,, \tag{29}$$

условия (26) не выполняются, а условия (27) сводятся к равенствам

$$(m_1 + m_2)\,\omega_1^2 = (m_2 + m_3)\,\omega_3^2\,, \quad (m_1 + m_2)\,\omega_2^2 = (m_1 + m_3)\,\omega_3^2\,.$$

При таких соотношениях между массами и парными осцилляторными частотами первые слагаемые сумм (29) являются физическими, вторые – ложными, а полное взаимодействие (17) не зависит от гиперсферических углов как при одинаковых, так и различных массах частиц:

$$V(\mathbf{r}_i) = \frac{1}{4}\,(\omega r)^2\,, \quad \omega^2 \equiv \frac{2}{3}\,\frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_2 + m_3}\,(\hbar\,\omega_1)^2\,, \quad i = 1, 2, 3.$$

Все решения уравнения Шредингера (6) с таким взаимодействием обладают полной перестановочной симметрией и могут быть найдены в явном виде.

Например, в случае $\ell = 0$ спектр описывается формулами [25]

$$\Psi(\mathbf{r}_i; E_p) = s^2\,L_p^2(s)\,\exp(-s/2)\,Y^{00}_{000}(\Omega_i);\; E = E_p = (3 + 2p)\,\omega,\; s \equiv \omega r^2/2,$$

где L_p^2 – полином Лагерра [27], а $p = 0, 1, \ldots$

Пусть взаимодействия (25) – кулоновские (13), тогда

$$c_k = \hbar^{-1} z_i z_j e^2\,\sqrt{2\mu_{ij}}\,, \quad F(x_k) = 1/x_k\,, \quad k = 1, 2, 3.$$

Поэтому достаточные условия (26) и (27) существования ложных слагаемых с $L = 0$ или $L = 2$ сводятся к соответствующим соотношениям:

$$z_1 z_2\,\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} + z_2 z_3\,\sqrt{\frac{m_2 m_3}{m_2 + m_3}} + z_1 z_3\,\sqrt{\frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}} = 0\,, \tag{30}$$

$$(z_1\,\delta_{i2} + z_2\,\delta_{i1})\left(\frac{m_i+m_3}{m_1+m_2}\right)^{3/2} = z_3\left(\frac{m_3}{m_1\delta_{i2}+m_2\delta_{i1}}\right)^{1/2}, \quad i=1,2, \tag{31}$$

а формулы (28), описывающие такие слагаемые, принимают вид

$$V_k^{Ls}(\mathbf{r}_k) = \hbar^{-1}e^2 z_i z_j\sqrt{2\mu_{ij}}\left(1-\frac{L}{10}\right)\frac{16}{3\pi^2 r}\cos L\varphi_k,\ k=1,2,3,\ L=0,2. \tag{32}$$

Условия (30) и (31) инвариантны относительно одновременной перестановки масс и зарядов любых двух частиц и могут быть записаны в терминах отношений масс и зарядов двух каких-то частиц к массе и, соответственно, к заряду оставшейся частицы. Для определенности за единицу массы примем массу третьей частицы, т.е. положим $m_3 = 1$ и обозначим $a \equiv z_1/z_3$, $b \equiv z_2/z_3$. Массы m_1 и m_2 считаем неизвестными, а все три заряда заданными, но принимающими любые целые отрицательные или положительные значения. Для конкретных примеров известные значения масс частиц в атомных единицах (аем) берем из справочника [28].

В силу упомянутой перестановочной инвариантности для описания всех возможных соотношений между массами и зарядами трех частиц, при которых выполняются условия (30), достаточно исследовать все положительные решения $m_2 = m_2(m_1; a, b)$ эквивалентного этому условию и обезразмеренного уравнения

$$ab\sqrt{\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}} + a\sqrt{\frac{m_1}{m_1+1}} + b\sqrt{\frac{m_2}{m_2+1}} = 0\,, \tag{33}$$

как функции положительного аргумента m_1 и параметров a и b.

По той же причине для полного описания всех соотношений между массами и зарядами, при которых выполняются условия (31), достаточно исследовать все положительные двухпараметрические решения $(m_1, m_2) = (m_1(a,b), m_2(a,b))$ эквивалентной этим условиям системы уравнений

$$m_1 = \frac{m_2 - (b^2 m_2)^{1/3}}{(b^2 m_2)^{1/3}-1}, \quad m_2 = \frac{m_1 - (a^2 m_1)^{1/3}}{(a^2 m_1)^{1/3}-1}\,. \tag{34}$$

Найти точные решения уравнений (33) и (34) в общем случае не удалось. Эти уравнения исследовались численными и асимптотическими методами.

Обсудим основные результаты анализа уравнения (33).

Для системы из трех одноименно заряженных частиц $(a, b > 0)$, а значит и в случае трех тождественных частиц, уравнение (33) не имеет решений.

При условиях $m_1 = m_2$ и $a^{-1} + b^{-1} < 2^{-1/2}$ это уравнение имеет единственное положительное решение

$$m_2(m_1; a, b) = m_1(a, b) = 2\left(a^{-1}+b^{-1}\right)^2 - 1\,, \tag{35}$$

которое в частном случае $|a| = |b|$, т.е. при $|z_1/z_2| = 1$, принимает вид

$$m_2(m_1; a, a) = m_1(a) = 8a^{-2} - 1\,, \tag{36}$$

поэтому $m_1, m_2 = m_3$, если $|a| = 1/2$, т.е. при $z_1, z_2 = -2z_3$.

Соотношениям (35) и (36) не удовлетворяют массы любых трехчастичных систем типа "два электрона + тяжелый заряженный остов", ибо для таких систем $m_1, m_2 =$

$m_e \ll m_3 = 1$, где $m_e \approx 5 \cdot 10^{-4}$ аем – масса электрона. Кулоновские взаимодействия в системах указанного типа не имеют ложных слагаемых с $L = 0$.

С относительной точностью порядка m_e/m_3 соотношения $m_1, m_2 = m_3$, и $z_1, z_2 = -2z_3$, а значит и равенства (36), выполняются для всех трехчастичных систем из двух положительно заряженных ионов A^{++} и отрицательно заряженного иона A^- с одного и того же атома A с массой m_3. В таких системах с упомянутой точностью кулоновские взаимодействия имеют ложные слагаемые (32) с $L = 0$.

Пусть теперь m_1, вообще говоря, не равно m_2. Опишем поведение всех решений $m_2(m_1; a, b)$ уравнения (33) в различных пределах.

Начнем со случая $|a|, |b| \to 0$, $a/b = \text{const}$, который реализуется, если z_1, z_2 фиксированы, а $|z_3|$ возрастает. В этом случае оба значения m_1 и $m_2(m_1; a, b)$, при которых имеются ложные слагаемые (32) с $L = 0$, монотонно возрастают с увеличением $|z_3|$. Координаты (m_1, m_2) точек на любой кривой $m_2(m_1; a, b)$ таковы, что $m_1, m_2 \gg m_3 = 1$. Для примера, поясняющего указанную зависимость, решения $m_2(m_1; a, b)$ уравнения (33), вычисленные при фиксированных $z_1, z_2 = 1$ и разных $z_3 = -2, -3, -4$, указанных цифрами над кривыми, изображены на рисунке 1.

В рассмотренном выше случае ложные слагаемые с $L = 0$ могут быть в системах из двух однозарядных ($|z_1|, |z_2| = 1$), но тяжелых ионов ($m_1, m_2 \gg m_3$), и одного многозарядного ($|z_3| > 1$), но легкого иона.

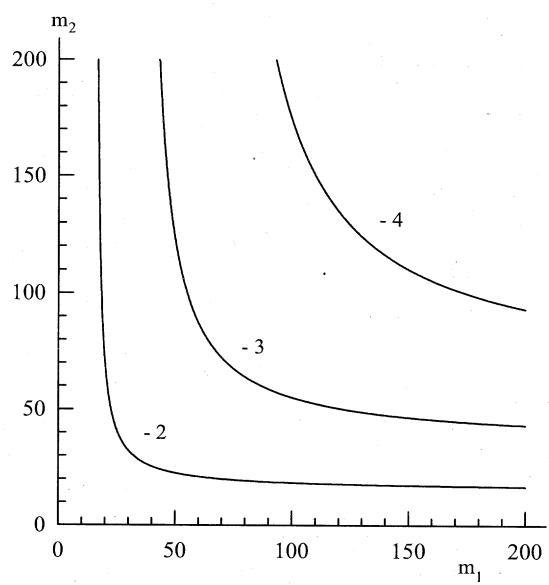

Рисунок 1: Функции $m_2(m_1; a, b)$ при фиксированных $z_1 = 1$, $z_2 = 1$ и разных $z_3 = -2, -3, -4$

Характер сгущения решений уравнения (33) при $a = \text{const}$ и $|b| \to \infty$, например, при постоянных z_1, z_3 и растущем $|z_2|$, определяется соотношением между величиной $|a|$ и единицей. Возможны три случая.

При $|a| = 1$ и $|b| \to \infty$ решения $m_2(m_1; a, b)$ этого уравнения монотонно сгущаются справа к его предельным ($|b| = \infty$) решениям – полупрямым $m_1 = 1, m_2 > 0$ и $m_1 \geq 1, m_2 = 0$. Для пояснения этой зависимости в качестве примера на рисунке 2 изображены графики решений $m_2(m_1; a, b)$, вычисленных при фиксированных $z_1, -z_3 = 1$ и разных $z_2 = 1, 2, 3$, указанных цифрами у кривых.

В рассмотренном случае ($|a| = 1$) массы двух частиц, при которых могут быть ложные слагаемые с $L = 0$, ограничены снизу условиями $m_1 > m_3$ и $m_2 > 0$. Такие условия могут реализоваться для систем из двух одинаково заряженных ($|z_1| = |z_3|$) частиц, сравнимых по массе ($m_1 \sim m_3$), и третьей частицы с меньшей массой, но большим зарядом ($|z_2| > |z_1|$).

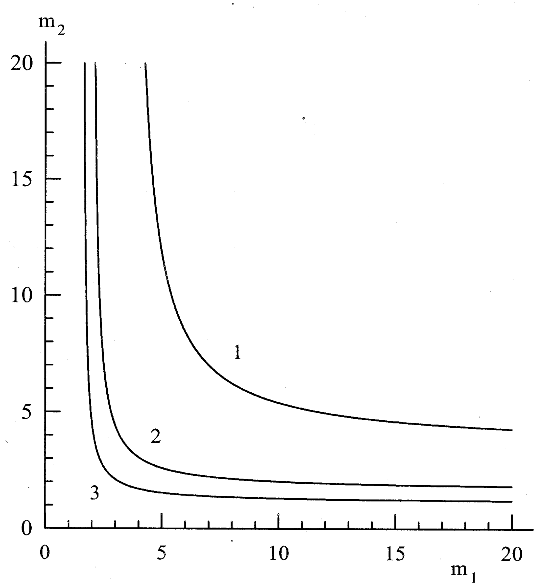

Рисунок 2: Функции $m_2(m_1; a, b)$ при фиксированных $z_1 = 1$, $z_2 = -3$ и разных $z_2 = 1, 2, 3$

Если $|a| < 1$, то с ростом $|b|$ решения уравнения (33) монотонно сгущаются справа к его предельному ($|b| = \infty$, т.е. $|z_2| = \infty$) решению:

$$m_2(m_1; a, \pm\infty) = \frac{1 - a^2}{a^2 m_1 - 1} m_1, \quad m_1 \geq a^{-2}, \tag{37}$$

которое имеет ненулевые асимптоты $m_1 = a^{-2}$ и $m_2 = a^{-2} - 1$. Для наглядного примера на рисунке 3 сплошными кривыми изображены решения $m_2(m_1; a; b)$, вычисленные при фиксированных $z_1 = 1, z_3 = -2$ и разных $z_2 = 2, 3, 6$, а пунктирной линией показано предельное ($z_2 = \infty$) при тех же z_1 и z_3 решение (37).

В описанном случае ($|a| < 1, \forall b$) ложные слагаемые с $L = 0$ могут быть, если массы двух частиц ограничены снизу условиями $m_1 > a^{-2}$ и $m_2 > a^{-2} - 1$ и поэтому превышают массу третьей частицы.

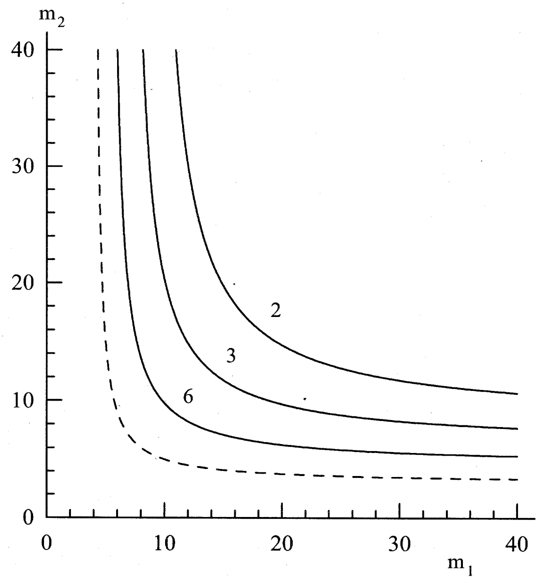

Рисунок 3: Сплошные кривые – функции $m_2(m_1; a, b)$ при $z_1 = 1, z_3 = -2$ и $z_2 = 2, 3, 6$. Пунктирная кривая – предельное ($z_2 = \infty$) решение (37)

В оставшемся случае $|a| > 1$ при некотором достаточно большом $|b|$ решения уравнения (33) становятся двухзначными и при дальнейшем увеличении $|b|$ монотонно сходятся справа к его предельным ($|b| = \infty$) решениям

$$m_2(m_1; a, \pm\infty) = \frac{a^2 - 1}{1 - a^2 m_1} m_1 \, , m_1 \leq a^{-2} \, ; \quad m_2(m_1; a, \pm\infty) = 0 \, , m_1 > 0 \, . \tag{38}$$

Чтобы продемонстрировать переход от однозначных решений к двухзначным, на рисунке 4 сплошными кривыми изображены решения $m_2(m_1; a; b)$, вычисленные при фиксированных $z_1 = 2, z_3 = -1$ и разных $z_2 = 2, 3, 4$, а пунктирной линией показано первое предельное ($z_2 \to \infty$) при тех же z_1 и z_3 решение (38).

Обоим предельным решениям (38) удовлетворяют сколь угодно малые массы m_1 и m_2. Следовательно, в случае $|a| > 1$ ложные слагаемые с $L = 0$ могут быть в системах из двух легких ($m_1, m_2 \ll m_3$) по сравнению с третьей, частиц, причем заряд второй частицы должен быть достаточно большим ($|z_2| > |z_3|$).

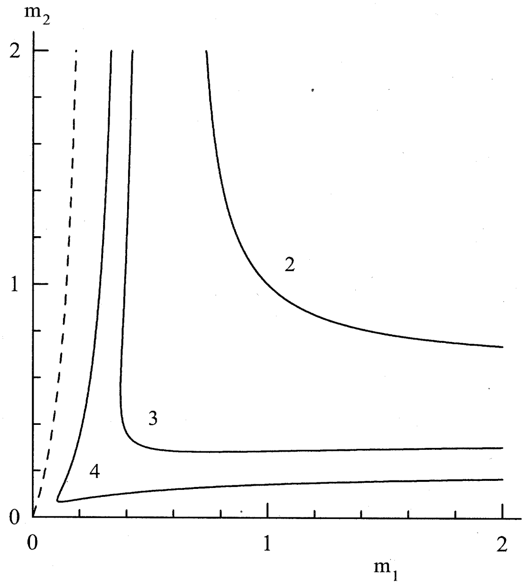

Рисунок 4: Сплошные кривые – функции $m_2(m_1; a, b)$ при $z_1 = 2, z_3 = -1$ и $z_2 = 2, 3, 4$. Пунктирная кривая – первое предельное ($z_2 = \infty$) решение (38)

Обсудим основные результаты анализа системы уравнений (34).

Эта система имеет положительные решения, если все три частицы одноименно заряжены ($a, b > 0$). Решения не зависят от знака зарядов z_1, z_2 и z_3. Поэтому ограничимся исследованием случая $z_1, z_2, z_3 > 0$.

При $a, b = 1$, т.е. при $z_1, z_2 = z_3$, имеется единственное решение $(m_1, m_2) = (1, 1)$. Значит, в любой системе из трех тождественных частиц кулоновские взаимодействия имеют ложные слагаемые (32) с $L = 2$.

Пусть $a = b \neq 1$, т.е. $z_1 = z_2 \neq z_3$. При $m_1 \neq m_2$ исследуемая система (34) не совместна. Если положить $m_1 = m_2$, то ее оба уравнения подстановкой $x = 1/m_1$ сведутся к кубическому уравнению

$$x^3 + 3x^2 + (3 - 8a^{-2})x + 1 = 0\,,$$

Его нетрудно решить известным способом [27]. Действительные положительные решения $x = x^+$ и $x = x^-$ существуют только при условии $a \leq \sqrt{32/27} \approx 1.08866$. Им отвечают следующие два решения системы (34):

$$
\begin{aligned}
(m_1, m_2) &= (m^{\pm}, m^{\pm}),\ m^{\pm} \equiv \frac{1}{x^{\mp}} = \left(\frac{2}{a}\sqrt{\frac{2}{3}}(\cos\alpha \mp \sqrt{3}\sin\alpha) - 1\right)^{-1}, \qquad (39) \\
\alpha &\equiv \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{32}{27a^2} - 1\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Компоненты $m^{\pm}$ при всех рациональных a подчиняются соотношениям

$$
\begin{aligned}
&0 < m^- < 2\,, \quad 2 < m^+ < \infty\,, \\
&m^- = (2\sqrt{2}a^{-1} - 1)^{-1}\,(1 + o(1))\,, \quad m^+ = 8a^{-2} + O(a^{-3})\,, \quad a \to 0\,.
\end{aligned}
$$

Поэтому ложные слагаемые кулоновских взаимодействий с $L = 2$ могут быть в системах из двух одинаковых легких и однозарядных частиц и одной тяжелой многозарядной частицы ($m_1, m_2 = m^- \ll m_3$) или же в системах из двух одинаковых тяжелых частиц и третьей легкой, но опять же многозарядной частицы ($m_1, m_2 = m^+ \gg m_3$).

Для справки значения $m^{\pm}$, вычисленные по формулам (39) при фиксированных $z_1, z_2 = 1$ и разных z_3, приведены во втором и третьем столбцах таблицы 1. Эти данные позволяют к двум данным и одинаковым частицам подобрать такую третью частицу, чтобы кулоновские взаимодействия в получившейся системе из трех частиц имели бы ложные слагаемые с $L = 2$. Приведем два поясняющих примера.

Пусть две частицы – протоны ($z_1, z_2 = 1$ и $m_1, m_2 \approx 1.007$ аем), а заряд искомой третьей частицы $z_3 = 2$. Положим $m_1, m_2 = m^- = 1.007$ аем. Из таблицы 1 при $z_3 = 2$ находим $m^- = 0.224581 m_3$. Следовательно, $m_3 \approx 4.0966$ аем. Масса 4.0026 аем двухзарядного иона $^4He^{++}$ близка к найденной.

Если две частицы – дейтроны ($z_1, z_2 = 1$ и $m_1, m_2 = 2.0141$ аем) и заряд третьей искомой частицы $z_3 = 2$, то, используя таблицу 1 аналогичным образом, получаем $m_3 \approx 8.19366$ аем. Двухзарядный ион $^8Be^{++}$ имеет массу 8.005 аем, примерно равную найденной.

Если $a = 1 \neq b$, т.е. $z_1 = z_3 \neq z_2$, и $b \geq \sqrt{27/32} \approx 0.91856$, то система уравнений (34) имеет только два решения $(m_1, m_2) = (1, m^{\pm})$, где

$$
m^{\pm} \equiv 2b\sqrt{\frac{2}{3}}(\,\cos\beta \pm \sqrt{3}\,\sin\beta\,) - 1\,, \quad \beta \equiv \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{32}{27}b^2 - 1\right)^{1/2}.
$$

Их вторые компоненты $m^{\pm}$ обладают асимптотиками

$$
m^- = 1/8b^2 + O(b^{-3})\,, \quad m^+ = 2\sqrt{2}\,b - 1 + O(b^{-1})\,, \quad b \to \infty\,.
$$

Случай $a \neq b = 1$ рассматривается аналогичным образом.

Пусть теперь $a \neq b$ и $a, b \neq 1$, т.е. все три заряда разные, тогда система уравнений (34) всегда имеет два положительных решения $(m_1, m_2) = (m_1^{\pm}, m_2^{\pm})$. Опишем их поведение в различных предельных случаях.

Если $a, b \to 0$, но $c \equiv a/b = \mathrm{const}$ (например, z_1 и z_2 фиксированы, а z_3 увеличивается), то обе компоненты m_1^- и m_2^- первого решения сходятся к нулю, а обе компоненты m_1^+ и m_2^+ второго решения неограниченно возрастают:

$$
\begin{aligned}
m_1^- &= \frac{a}{(1+c)^{3/2}} + O(a^2)\,, \quad m_2^- = \frac{b}{(1+c)^{3/2}} + O(b^2)\,; \\
m_1^+ &= a^{-2}\,(1+c)^3 + O(a^3)\,, \quad m_2^+ = b^{-2}\,(1+c)^3 + O(b^3)\,, \quad a, b \to 0\,.
\end{aligned}
$$

Следовательно, кулоновские взаимодействия могут иметь ложные слагаемые с $L = 2$ в трехчастичных системах двух типов. Системы первого типа состоят из двух легких частиц с массами $m_i = m_i^- \ll m_3$, $i = 1, 2$, и третьей тяжелой и многозарядной частицы. Системы второго типа (m_1^+, m_2^+) образуют две тяжелые частицы с массами $m_i = m_i^+ \gg m_3$, $i = 1, 2$, превышающими массу третьей частицы, заряд которой достаточно велик.

Для справочных целей значения масс $m_1^\pm$ и $m_2^\pm$, полученные численным решением системы уравнений (34) при фиксированных $z_1 = 1, z_2 = 2$ и различных z_3, приведены в последних четырех столбцах таблицы 1.

Таблица 1

Решения (m_1, m_2) системы уравнений (34) при разных z_3,
в случае $z_1, z_2 = 1$ – решения (39): $(m_1, m_2) = (m^-, m^-), (m^+, m^+)$,
в случае $z_1 = 1, z_2 = 2$ – решения $(m_1, m_2) = (m_1^-, m_2^-), (m_1^+, m_2^+)$

	$z_1 = 1, z_2 = 1$		$z_1 = 1, z_2 = 2$			
z_3	m^-	m^+	m_1^-	m_2^-	m_1^+	m_2^+
2	0.24581	28.8949	0.46758	0.04182	11.1812	23.9129
3	0.14424	68.9563	0.29378	0.03792	28.0961	57.7122
4	0.10229	124.976	0.21404	0.03278	51.7430	104.979
5	0.07928	196.988	0.16432	0.02898	82.1148	165.737
6	0.06473	284.989	0.13413	0.02473	119.244	239.990
7	0.05470	388.993	0.11319	0.02189	163.118	327.743
8	0.04737	508.994	0.09786	0.01959	213.745	428.995
9	0.04177	644.995	0.08617	0.01772	271.122	543.746
10	0.03735	796.995	0.07696	0.01617	335.248	671.997
15	0.02443	1796.99	0.05011	0.01118	757.124	1515.75
20	0.01816	3196.99	0.03713	0.00854	1347.82	2697.02
∞	0.00000	∞	0.00000	0.00000	∞	∞

Осталось описать поведение двух решений этой системы в случае $b \to \infty$ и $a = \text{const} \neq 1$, например, при фиксированных z_1 и z_3 и увеличивающемся z_2. Компонента m_1^- первого решения сходится к точке a слева, если $a < 1$, и справа, если $a > 1$, а компонента m_2^- этого же решения в любом случае стремится к нулю:

$$\begin{aligned} m_1^- &= a\left(1 + \frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2}\frac{a-1}{(1+a)^3}\right) + O(b^{-4}), \\ m_2^- &= \frac{a^3}{b^2}\frac{1}{(1+a)^3} + O(b^{-4}), \quad b \to \infty . \end{aligned}$$

Компонента m_1^+ второго решения сходится справа или слева к точке a^{-2}, если $a < 1$ и, соответственно, $a > 1$, а компонента m_2^+ этого же решения всегда неограниченно возрастает:

$$\begin{aligned} m_1^+ &= a^{-2}\left(1 + 3\frac{a}{b}\frac{1-a^2}{(1+a^2)^{3/2}}\right) + O(b^{-2}), \\ m_2^+ &= a^{-3}b\,(1+a^2)^{3/2} + 4a^{-2} - 2 + O(b^{-1}), \quad b \to \infty . \end{aligned}$$

Следовательно, кулоновские взаимодействия могут иметь ложные слагаемые с $L = 2$ в трехчастичных системах двух типов. К первому типу относятся системы, образованные двумя частицами, сравнимыми по массам и зарядам $(m_1 = m_1^- \sim m_3, z_1 \sim z_3)$, и второй легкой $(m_2 = m_2^- \ll m_3)$, но многозарядной $(z_2 > z_1)$ частицей. Системы второго типа состоят из двух легких $(m_1 = m_1^+ \sim m_3)$ и одной тяжелой $(m_2 = m_2^+ \gg m_3)$ и многозарядной частицы.

Значения численных решений $(m_1^\pm, m_2^\pm)$ системы уравнений (34) при различных z_2 и фиксированных $z_1 = 1, z_3 = 2$ или $z_1 = 2, z_3 = 1$ приведены в таблице 2. Если заданы заряды z_1, z_3 и масса m_3 третьей частицы, то с помощью этой таблицы можно определить массы m_1 и m_2 двух других частиц и заряд z_2, при которых кулоновские взаимодействия имеют ложные слагаемые с $L = 2$.

Таблица 2

Решения $(m_1, m_2) = (m_1^\pm, m_2^\pm)$ системы уравнений (34) при разных z_2 в случаях $z_1 = 1, z_3 = 2$ и $z_1 = 2, z_3 = 1$

	$z_1 = 1, z_3 = 2$				$z_1 = 2, z_3 = 1$			
z_2	m_1^-	m_2^-	m_1^+	m_2^+	m_1^-	m_2^-	m_1^+	m_2^+
2	0.46758	0.04181	11.1812	23.9129	2.13866	0.08944	0.08944	2.13866
3	0.48683	0.01733	7.74749	26.3706	2.05410	0.03559	0.12907	3.40375
4	0.49281	0.00953	6.45574	30.5375	2.02920	0.01933	0.15489	4.73027
5	0.49544	0.00603	5.80685	35.3366	2.01835	0.01278	0.17222	6.08560
6	0.49686	0.00417	5.42262	40.4295	2.01262	0.00838	0.18441	7.45570
7	0.49772	0.00305	5.17085	46.6801	2.00922	0.00613	0.19339	8.83415
8	0.49824	0.00233	4.99372	51.0241	2.00703	0.00468	0.20025	10.2176
9	0.49862	0.00184	4.86261	56.4288	2.00554	0.00369	0.20565	11.6046
10	0.49884	0.00149	4.76178	61.8737	2.00448	0.00298	0.20998	12.9935
15	0.49952	0.00066	4.47991	89.4068	2.00198	0.00132	0.22322	19.9573
20	0.49972	0.00037	4.34995	117.159	2.00112	0.00074	0.22989	26.9333
∞	0.50000	0.00000	4.00000	∞	2.00000	0.00000	0.25000	∞

5. Заключение

Просуммируем основные результаты. Ложные слагаемые произвольных парных взаимодействий в системе нетождественных частиц существуют при вполне определенных условиях (22) или (23). Для любых подобных взаимодействий (25) эти условия вырождаются в соотношения (26) и (27), не содержащие гиперрадиуса, а в случае кулоновских взаимодействий – в равенства (30) и (31), связывающие массы и заряды частиц. Гиперугловая зависимость ложных слагаемых описывается в общем случае суперпозициями функций Y_{000}^{00} и Y_{200}^{00}, а в случае подобных взаимодействий – либо функцией Y_{000}^{00}, либо функцией Y_{200}^{00}. В системе трех тождественных частиц ложные слагаемые парных взаимодействий существуют всегда и являются членами их гиперсферических рядов с индексом $L = 2$.

Обсудим физические следствия существования ложных слагаемых.

Согласно представлениям (24) физические и ложные слагаемые взаимодействия V_k пары частиц с номерами i и j зависят от координат третьей частицы с номером k.

Поэтому и физические, и ложные слагаемые парных взаимодействий описывают определенные трехчастичные силы. Следовательно, если ложные слагаемые существуют, то полное взаимодействие (сумма трех физических слагаемых) не содержит никаких двухчастичных компонент, т.е. является полностью трехчастичным. Указанная причина появления трехчастичных сил и ее следствие являются новыми результатами в теории трехчастичных сил [29].

Как было показано, если осцилляторные парные взаимодействия имеют ложные слагаемые, то полное взаимодействие в системе трех нетождественных частиц и ее волновые функции обладают полной перестановочной симметрией.

Согласно формулам (3) и (32) в случае $\mathcal{E} = \{L = 0\}$ ложные и физические слагаемые кулоновских взаимодействий зависят от координаты x_k и от координаты y_k:

$$
\begin{aligned}
V_k^s(x_k, y_k) &= \hbar^{-1} z_i z_j e^2 \sqrt{2\mu_{ij}}\, \frac{16}{3\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}}, \\
V_k^u(x_k, y_k) &= \hbar^{-1} z_i z_j e^2 \sqrt{2\mu_{ij}} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{16}{3\pi^2} \frac{1}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \right).
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Поэтому каждое парное кулоновское взаимодействие V_k по абсолютной величине больше своего физического слагаемого V_k^u. Значит, наличие ложных слагаемых приводит к ослаблению кулоновского отталкивания в паре частиц во всем трехчастичном пространстве. В частности, если все три частицы лежат на одной прямой ($y_k = 0$), то согласно формулам (40) имеем $V_k^u / V_k \approx 0.4$. Поэтому следует ожидать, что вероятность слияния двух одноименно заряженных ядер может существенно увеличиться в присутствии такой третьей частицы, для которой кулоновские взаимодействия имеют ложные слагаемые с $L = 0$.

Проблема физических и ложных слагаемых парных взаимодействий представляется важной и интересной для дальнейших исследований.

Литература

1. *Джибути Р.И., Шитикова К.В.* Метод гиперсферических функций в атомной и ядерной физике. М.: Энергоатомиздат, 1993.

2. *Fabre de la Ripelle M.* // Report IPNO/TH 157. Orsay. 1969.

3. *Эфрос В.Д.*// ЯФ. 1972. Т.15. С.226.

4. *Вильдермут К., Тан Я.* Единая теория ядра. М.: Мир, 1980.

5. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М: Наука, 1974.

6. *Шмид Э., Цигельман Х.* Проблема трех тел в квантовой механике. М.: Наука, 1979.

7. *Меркурьев С.П., Фаддеев Л.Д.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.

8. *Adhikari S.K., Glöckle W.* // Phys. Rev. 1979. V.C19. P.616.

9. *Levin F.S.* // Ann. Phys. (NY). 1980. V.130. P.139.

10. *Evans J.W.* // J. Math. Phys. 1981. V.22. P.1672.

11. *Evans J.W., Hoffman D.K.* // J. Math. Phys. 1981. V.22. P.2858.

12. *Яковлев С.Л.* // ТМФ. 1995. Т.102. С.323.

13. *Руднев В.А., Яковлев С.Л.* // ЯФ. 1995. Т.58. С.1762.

14. *Пупышев В.В.* // ТМФ. 1996. Т.107. С.501.

15. *Пупышев В.В.* // ЭЧАЯ. 1999. Т.30. С.1562.

16. *Friar J.L., Gibson B.F., Payne G.L.* // Phys. Rev. 1980. V.C22. P.284.

17. *Pupyshev V.V.* // Preprint E4-85-313. JINR. Dubna. 1985.

18. *Fabre de la Ripelle M., Larsen S.Y.* // Few-Body Systems. 1992. V.13. P.199.

19. *Пупышев В.В.* // Препринт Р5-99-314. ОИЯИ. Дубна. 1999.

20. *Н.Я. Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.

21. *Джибути Р.И., Крупенникова Н.Б.* Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.

22. *Пупышев В.В.* // ЯФ. 1999. Т.62. С.1955.

23. *Raynal J., Revai J.* // Nuovo Cimento. 1970. V.A68. P.612.

24. *Смородинский Я.А., Эфрос В.Д.* // ЯФ. 1973. Т.17. С.210.

25. *Смирнов Ю.Ф., Шитикова К.В.* // ЭЧАЯ. 1977. Т.8. С.845.

26. *Мошинский М.* Гармонический осциллятор в современной физике от атомов до кварков. М:. Мир, 1972.

27. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука. 1979.

28. *Немец О.Ф., Гофман Ю.В.* Справочник по ядерной физике. Киев: Наукова думка, 1975.

29. *Berman B.L., Gibson B.F. (Editors).* The Three-Body Force in the Three-Nucleon System. Lecture Notes in Physics. V.260. Berlin, Heidelberg, NewYork: Springer-Verlag. 1986.

Рукопись поступила в издательский отдел
7 июня 2000 года

Пупышев В.В. Р4-2000-136
Физические и ложные слагаемые
центральных парных взаимодействий

Метод потенциальных гипергармоник применен для построения разбиений центральных парных взаимодействий в системе трех частиц на физические слагаемые, определяющие полное взаимодействие, и ложные слагаемые, не дающие в него никакого вклада. Дан анализ физических условий, достаточных для существования ложных слагаемых осцилляторных и кулоновских взаимодействий.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод автора

Pupyshev V.V. P4-2000-136
Physical and Spurious Terms of Two-Body Central Potentials

The potential-hyperharmonic method is applied to construct the splitting of central pair interactions into physical terms, defining the total interaction, and spurious terms, contributing nothing to it.
The analysis of physical conditions sufficient for spurious terms of oscillator and Coulomb interactions to exist is given.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 14.06.2000
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 2,09
Тираж 360. Заказ 52075. Цена 2 р. 51 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области