ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-2000-216

П.Е.Жидков*

О БАЗИСНОСТИ БАРИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Направлено в журнал «Дифференциальные уравнения»

*E-mail: zhidkov@thsun1.jinr.ru

2000

1. Введение. Основные результаты

В работе рассматривается уравнение

$$-u''(x) + u(x) \int_0^1 k(x-y)u^2(y)dy = \lambda u(x), \quad x \in (0,1); \qquad (1)$$

здесь и далее все величины вещественны, в уравнении (1) $u(\cdot)$– неизвестная дважды непрерывно дифференцируемая функция, λ– спектральный параметр, а $k(\cdot)$– заданная периодическая с периодом 1 функция. Уравнение (1) можно интерпретировать как квантово-механическое уравнение среднего поля для одномерного твердого тела с периодической кристаллической структурой. Дополним его граничными условиями

$$u(0) = u(1) = 0 \qquad (2)$$

и нормировочным условием

$$\int_0^1 u^2(x)dx = 1. \qquad (3)$$

Если пара (λ, u), где $\lambda \in R$, а $u(x) \not\equiv 0$– дважды непрерывно дифференцируемая функция аргумента $x \in [0,1]$ – удовлетворяет условиям (1)-(3), то примем естественную терминологию, называя λ и u соответственно *собственным значением* и отвечающей ему *собственной функцией* задачи (1)-(3).

Вопросы существования пар собственных значений и отвечающих им собственных функций для задач, подобных (1)-(3), интенсивно изучались в литературе (см., например, [1-3]). При доказательстве следующего, отчасти технического, результата настоящей статьи, в частности, используются и развиваются идеи и методы из указанной литературы.

Теорема 1. *Пусть $k(\cdot)$– непрерывная, периодическая с периодом 1, четная функция аргумента $x \in R$. Тогда для любого целого $n \geq 0$ существует пара (λ_n, u_n), состоящая из собственного значения λ_n и отвечающей ему собственной функции u_n, определенной и удовлетворяющей уравнению (1) также для всех $x \in R$, такая, что*

(а) нулями функции $u_n(x)$ являются в точности точки $\frac{k}{n+1}$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$;
(б) функция $u_n(x)$ нечетна относительно каждого своего нуля $\frac{k}{n+1}$ и $u_n(x) > 0$ при $x \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right)$;
(в) семейство функций $\{u_n(x)\}_{n=0,1,2,...}$ равномерно ограничено по $x \in R$.

Отметим, что вопрос о единственности (с точностью до знака) решения u_n с n нулями в $(0,1)$ открыт. Ввиду очевидного сходства в поведении функций u_n и функций $e_n(x) = \sqrt{2}\sin\pi(n+1)x$, где $n = 0, 1, 2, ...$, вытекающего из утверждений (а)-(в) теоремы 1, и того факта, что система $\{e_n\}_{n=0,1,2,...}$ есть базис во многих стандартных пространствах, например в $L_2(0,1)$, возникает естественный вопрос о том, не обладает ли система $\{u_n\}_{n=0,1,2,...}$ какими-либо свойствами полноты, базисности и т. п. в некотором стандартном пространстве функций. В настоящей работе изучается этот вопрос. Некоторые интересные результаты в этом направлении для систем собственных функций (решений) ряда нелинейных задач представлены в монографии [4]. Подобные вопросы для систем собственных функций нелинейных локальных задач типа Штурма–Лиувилля рассматривались автором настоящей работы в [5-7]; была доказана базисность (в ряде случаев, базисность Рисса и Бари) этих систем.

Напомним теперь ряд определений, часть которых известна. Система элементов $\{x_n\}_{n=0,1,2,...}$ сепарабельного гильбертова пространства H над полем вещественных чисел называется *базисом* этого пространства, если для любого $x \in H$ существует единственная последовательность вещественных чисел $\{a_n\}_{n=0,1,2,...}$ такая, что $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_x$ в H. Две системы $\{x_n\}_{n=0,1,2,...}$ и $\{y_n\}_{n=0,1,2,...}$ из H называются *квадратично близкими*, если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||x_n - y_n||_H^2 < \infty$. В соответствии с [8], базис, квадратично близкий к ортонормированному, называется *базисом Бари*. По поводу свойств базисов Бари см., например, [8-10].

Введем еще некоторые обозначения. Пусть $a < b$. Через $(u,v)_{L_2(a,b)} = \int\limits_a^b u(x)v(x)dx$ и $||u||_{L_2(a,b)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{L_2(a,b)}$ обозначим соответственно скалярное произведение и норму стандартного (вещественного) гильбертова пространства $L_2(a,b)$, через $H^1(0,1)$– стандартное пространство Соболева, состоящее из функций, абсолютно непрерывных на $[0,1]$, первые производные которых принадлежат $L_2(0,1)$, а через $H_0^1(a,b)$– его подпространство, состоящее из функций, обращающихся в нуль при $x=a$ и $x=b$, в котором возьмем стандартное скалярное произведение $(u,v)_{H_0^1(a,b)} = \int\limits_a^b u'(x)v'(x)dx$ и соответствующую норму $||u||_{H_0^1(a,b)} = (u,u)^{\frac{1}{2}}_{H_0^1(a,b)}$. Основной результат настоящей статьи следующий.

Теорема 2. *Пусть $k(\cdot)$– непрерывная, периодическая с периодом 1, четная функция аргумента $x \in R$. Тогда произвольная последовательность $\{u_n\}_{n=0,1,2,\ldots}$ собственных функций задачи (1)-(3) из теоремы 1 (в частности, удовлетворяющая условиям (а)-(в) этой теоремы) является базисом Бари в $L_2(0,1)$.*

В разделе 2 доказана теорема 1, а в разделе 3 – теорема 2.

2. Доказательство теоремы 1

Лемма 1. *Пусть функция h определена и непрерывна на всей вещественной прямой и удовлетворяет условиям (а)-(б) теоремы 1 (вместо u_n) с некоторым целым $n \geq 0$. Тогда функция $(Kh)(x) = \int\limits_0^1 k(x-y)h^2(y)dy$ четна относительно каждой точки $\frac{m}{n+1}$, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.*

Доказательство. Пусть m таково, что $0 \leq 2m \leq n+1$. Пользуясь четностью и периодичностью функции $k(\cdot)$ и свойствами функции h, получаем

$$(Kh)\left(\frac{m}{n+1} - x\right) = \int\limits_0^1 k\left(\frac{m}{n+1} - x - y\right) h^2(y)dy =$$

$$= \int\limits_{-\frac{m}{n+1}}^{1-\frac{m}{n+1}} k(-x-z)h^2\left(\frac{m}{n+1} + z\right)dz = \int\limits_{-\frac{m}{n+1}}^{1-\frac{m}{n+1}} k(x+z)h^2\left(\frac{m}{n+1} - z\right)dz =$$

$$= \int\limits_{\frac{2m}{n+1}-1}^{\frac{2m}{n+1}} k\left(\frac{m}{n+1} + x - y\right) h^2(y)dy =$$

$$= \left(\int\limits_{0}^{\frac{2m}{n+1}} + \int\limits_{\frac{2m}{n+1}-1}^{0} \right) k\left(\frac{m}{n+1} + x - y\right) h^2(y)dy =$$

$$= \left(\int\limits_{0}^{\frac{2m}{n+1}} + \int\limits_{\frac{2m}{n+1}}^{1} \right) k\left(\frac{m}{n+1} + x - y\right) h^2(y)dy =$$

$$= (Kh)\left(\frac{m}{n+1} + x\right).$$

Для тех m, для которых $\frac{2m}{n+1} \notin [0,1]$, доказательство аналогично.

Фиксируем произвольное целое $n \geq 0$ и рассмотрим множество M, состоящее из всех функций $g \in H_0^1(0,1)$, обращающихся в нуль в точках $0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, ..., 1$, нечетных относительно этих точек и таких, что $||g||_{L_2(0,1)} = 1$. Ввиду предположений о потенциале $k(\cdot)$ выражение

$$\Phi(g) = \frac{1}{4} \int\limits_0^1 dx \left\{ g^2(x) \int\limits_0^1 k(x-y) g^2(y)dy \right\}$$

ограничено на M, поэтому

$$\inf_{g \in M} E(g) > -\infty, \tag{4}$$

где $E(g) = \frac{1}{2}||g||^2_{H_0^1(0,1)} + \Phi(g)$.

Лемма 2. *Точная нижняя грань в (4) достигается на некотором $\overline{u} \in M$, причем $\overline{u}$ неотрицательно в $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$.*

Доказательство. Пусть $\{w_m\}_{m=1,2,3,...}$– произвольная минимизирующая последовательность для задачи минимизации (4). Ввиду ограниченности $\Phi(g)$ на M эта последовательность ограничена, следовательно, слабо компактна, в $H_0^1(0,1)$. Не ограничивая общности рассуждений, будем считать ее слабо сходящейся в указанном пространстве к некоторому $\overline{u}$. Тогда последовательность w_m сильно сходится к $\overline{u}$ в $L_2(0,1)$; в частности, $||\overline{u}||_{L_2(0,1)} = 1$ и, следовательно, $\overline{u} \in M$.

Докажем, что $\Phi(w_m) \to \Phi(\overline{u})$ при $m \to \infty$. Имеем для любого $x \in [0,1]$

$$|(Kw_m)(x) - (K\overline{u})(x)| \leq \int\limits_0^1 |k(x-y)| \cdot |w_m^2(y) - \overline{u}^2(y)| dy \to 0$$

при $m \to \infty$ равномерно по $x \in [0,1]$, так как ядро $k(\cdot)$ непрерывно и ограничено. Поэтому

$$|\Phi(w_m) - \Phi(\overline{u})| \leq \int\limits_0^1 |(Kw_m)(x) w_m^2(x) - (K\overline{u})(x)\overline{u}^2(x)| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_0^1 \left\{ |(Kw_m)(x) - (K\overline{u})(x)| w_m^2(x) + |(K\overline{u})(x)| \cdot |w_m^2(x) - \overline{u}^2(x)| \right\} dx \to$$

$$\to 0 \text{ при } m \to \infty,$$

и требуемая сходимость $\Phi(w_m)$ к $\Phi(\overline{u})$ доказана.

В силу известного свойства $\liminf\limits_{m\to\infty} ||w_m||^2_{H_0^1(0,1)} \geq ||\overline{u}||^2_{H_0^1(0,1)}$, поэтому $E(\overline{u}) \leq \inf\limits_{g \in M} E(g)$, откуда $E(\overline{u}) = \inf\limits_{g\in M} E(g)$. Наконец, заметим, что для функции w, равной $|\overline{u}|$ на $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$ и принадлежащей M, выполнено $E(w) = E(u)$, так что функцию $\overline{u}$ можно считать неотрицательной в $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$. Ввиду леммы 1 ее продолжение на всю вещественную прямую такое, что $\overline{u}\left(\frac{m}{n+1} + x\right) = -\overline{u}\left(\frac{m}{n+1} - x\right)$ для любых $x \in R$ и $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ является решением уравнения (1).

Через u_n обозначим функцию $\overline{u}$ из доказательства леммы 2.

Лемма 3. *Функция u_n является собственной функцией задачи (1)-(3), отвечающей некоторому собственному значению $\lambda_n \in R$.*

Доказательство. Очевидно, множество X всех функций $\varphi \in H_0^1(0,1)$, нечетных относительно точек $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1}$, является линейным подпространством $H_0^1(0,1)$, т. е. гильбертовым пространством. Кроме того, ясно, что функционал E непрерывно дифференцируем на X. Поэтому по известной теореме о неопределенных множителях (см., например, [11]) найдется $\lambda_n \in R$ такое, что

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left[E(u_n + \alpha\varphi) + \frac{1}{2}\lambda_n ||u_n + \alpha\varphi||^2_{L_2(0,1)} \right] \Bigg|_{\alpha=0} = 0$$

для любого $\varphi \in X$, т. е.

$$\int_0^1 \left\{ u_n'(x)\varphi'(x) + u_n(x)\varphi(x) \int_0^1 k(x-y)u_n^2(y)dy + \lambda_n u_n(x)\varphi(x) \right\} dx = 0 \tag{5}$$

для любого $\varphi \in X$. Далее, в силу леммы 1, указанных ранее свойств функций u_n и $\varphi \in X$ и (5), получаем

$$(n+1) \int_0^{\frac{1}{n+1}} \left\{ u_n'(x)\varphi(x) + u_n(x)\varphi(x) \int_0^1 k(x-y)u_n^2(y)dy + \right.$$

$$\left. + \lambda_n u_n(x)\varphi(x) \right\} dx = 0, \tag{6}$$

где $\varphi \in H_0^1\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$ произвольно. Из (6) сразу вытекает, учитывая непрерывность по x выражения $(Ku_n)(x) = \int\limits_0^1 k(x-y)u_n^2(y)dy$, что $u_n(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1) в интервале $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$ (доказательство см., например, в [12]). В силу нечетности u_n относительно точек $0, \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, ..., 1$ и по непрерывности, эта функция удовлетворяет (1) всюду на $[0, 1]$, а также условиям (2) и (3).

Докажем еще, что $u_n(x) \neq 0$ для всех $x \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right)$. Действительно, если $u_n(x_0) = 0$ для некоторого x_0 из этого интервала, то, поскольку u_n– дважды непрерывно дифференцируемая функция, не меняющая знака в $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$, имеем $u_n'(x_0) = 0$. Но тогда, поскольку $h(x) = (Ku_n)(x)$– непрерывная функция, по теореме единственности решения задачи Коши:

$$-u_n''(x) + u_n(x)h(x) = \lambda_n u_n(x), \quad u_n(x_0) = u_n'(x_0) = 0,$$

получаем $u_n(x) \equiv 0$, что противоречиво. Итак, $u_n(x) > 0$ в $\left(0, \frac{1}{n+1}\right)$. Тем самым, все утверждения теоремы 1, кроме (в), доказаны.

Докажем (в). Предположим противное, т. е. что последовательность функций $\{u_n(x)\}_{n=0,1,2,...}$ не является равномерно ограниченной по $x \in [0, 1]$. Тогда существуют ее подпоследовательность $\{u_{n_m}\}_{m=1,2,3,...}$ и последовательность вещественных чисел $\{d_m\}_{m=1,2,3,...}$ такие, что $d_m \in \left(0, \frac{1}{n+1}\right)$ и что $u_{n_m}(d_m) \to +\infty$ при $m \to \infty$.

Рассмотрим последовательность задач минимизации:

$$\text{найти} \quad \inf_{\substack{g \in H^1(0,d_m) \\ g(0)=0,\ g(d_m)=u_{n_m}(d_m)}} \int\limits_0^{d_m} [g'(x)]^2 dx, \quad m = 1,2,3,\dots.$$

Ясно, что их решениями являются функции $g_m(x) = u_{n_m}(d_m) d_m^{-1} x$, $x \in [0, d_m]$, $m = 1,2,3,\dots$. Отсюда следует, поскольку ясно, что последовательность $\Phi(u_{n_m})$ ограничена, что

$$E(u_{n_m}) \geq -C + \frac{1}{2}(n_m+1)^2 u_{n_m}^2(d_m) = \alpha_m (n_m+1)^2 - C, \qquad (7)$$

где $\alpha_m \to +\infty$ при $m \to \infty$, а $C > 0$ не зависит от m. Но в силу равномерной ограниченности по $x \in [0,1]$ последовательности $(Ku_{n_m})(x)$, следующей из условия $||u_{n_m}||_{L_2(0,1)} = 1$, по стандартной теореме сравнения (надо сравнить задачу (1),(2) с задачей

$$-v'' = \mu v, \quad v(0) = v(1) = 0,$$

где $\mu-$ спектральный параметр, n-м собственным значением которой является $\mu_n = (\pi(n+1))^2$) получим существование $C_1 > 0$ такого, что

$$|\lambda_n - \mu_n| \leq C_1, \quad n = 0,1,2,\dots \qquad (8)$$

Умножим теперь уравнение (1), записанное для u_{n_m}, на u_{n_m} и проинтегрируем получившееся тождество от 0 до 1. В силу (8) получим существование $C_2 > 0$ такого, что

$$||u_{n_m}||^2_{H_0^1(0,1)} \leq (\pi(n_m+1))^2 + C_2, \quad m = 1,2,3,\dots,$$

что ввиду ограниченности последовательности $\{\Phi(u_n)\}_{n=0,1,2,\dots}$ противоречит (7). Теорема 1 полностью доказана.

3. Доказательство теоремы 2

В настоящей работе для доказательства теоремы 2 используются идеи из работ [5-7]. Напомним, что в соответствии с [9,10] базис $\{x_n\}_{n=0,1,2,\dots}$ вещественного гильбертова пространства H называется *базисом Рисса*, если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ с вещественными коэффициентами a_n

сходится в H тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Система элементов $\{x_n\}_{n=0,1,2,...} \subset H$ называется $\omega-$ *линейно независимой*, если равенство $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_n = 0$, где a_n- вещественные коэффициенты, возможно в H, только если $a_n = 0$ для всех n. Согласно известной теореме Н.К. Бари (см. [8-10]) $\omega-$ линейно независимая последовательность элементов H, квадратично близкая к базису Рисса, является базисом Рисса в H (в действительности, в работах [9,10] приведено несколько более слабое утверждение, однако доказательство из [10] полностью применимо к указанному выше случаю).

Ввиду этих фактов и определений из раздела 1 для доказательства теоремы 2 достаточно доказать $\omega-$ линейную независимость последовательности $\{u_n\}_{n=0,1,2,...}$ и ее квадратичную близость к ортонормированному базису $\{e_n\}_{n=0,1,2,...}$ в $L_2(0,1)$. Приступим к доказательству этих двух свойств последовательности $\{u_n\}_{n=0,1,2,...}$.

Лемма 4. *В разложениях*

$$u_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^n e_m, \quad n = 0,1,2,...,$$

понимаемых в смысле пространства $L_2(0,1)$, $a_0^n = ... = a_{n-1}^n = 0$ *и* $a_n^n > 0$ *для каждого* n.

Доказательство. Напомним, прежде всего, что разложение функции из $L_2(0,1)$ в ряд Фурье по функциям e_m в $L_2(0,1)$ единственно. Далее, ясно, что подпоследовательность последовательности $\{e_m\}_{m=0,1,2,...}$ тех функций e_m, которые обращаются в нуль в точке $\frac{1}{n+1}$, т. е. последовательность $\{e_{m(n+1)-1}\}_{m=1,2,3,...}$, является ортогональным базисом в $L_2\left(0,\frac{1}{n+1}\right)$. Возьмем любой номер n и разложим функцию u_n в ряд Фурье по функциям указанной подпоследовательности в $L_2\left(0,\frac{1}{n+1}\right)$:

$$u_n = \sum_{m=1}^{\infty} b_{m(n+1)-1}^n e_{m(n+1)-1}. \tag{9}$$

Поскольку каждая функция u_n нечетна относительно точек $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, ..., \frac{n}{n+1}$, а каждая функция $e_{m(n+1)-1}$ нечетна относительно любого своего корня, в частности, относительно тех же точек, получаем, что для любого n разложение (9) справедливо в каждом из пространств

$L_2\left(\frac{l}{n+1}, \frac{l+1}{n+1}\right)$, где $l = 1, 2, ..., n$, т. е. разложение (9) имеет место в $L_2(0,1)$. Таким образом, в силу отмеченной выше единственности ряда Фурье (на отрезке $[0,1]$), $a^n_{m(n+1)-1} = b^n_{m(n+1)-1}$, $m = 1, 2, 3, ...$, и $a^n_l = 0$, если $l \neq m(n+1) - 1$ для любого $m = 1, 2, 3, ...$; в частности, $a^n_0 = ... = a^n_{n-1} = 0$ при любом n. Наконец, $a^n_n > 0$ при каждом n, так как знаки функций u_n и e_n совпадают всюду.

Лемма 5. *Система функций* $\{u_n\}_{n=0,1,2,...}$ $\omega-$ *линейно независима в* $L_2(0,1)$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. что система функций $\{u_n\}_{n=0,1,2,...}$ не является $\omega-$ линейно независимой в $L_2(0,1)$. Тогда существует последовательность вещественных чисел $\{c_n\}_{n=0,1,2,...}$ такая, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n u_n = 0$ в $L_2(0,1)$, где для некоторого целого $l \geq 0$ $c_0 = ... = c_{l-1} = 0$ и $c_l \neq 0$. Умножим последнее равенство скалярно в $L_2(0,1)$ на e_l. Ввиду леммы 4 получим $c_l a^l_l = 0$. Но $a^l_l > 0$ по лемме 4, а $c_l \neq 0$ по предположению. Полученное противоречие доказывает лемму 5.

Лемма 6. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ||u_n - e_n||^2_{L_2(0,1)} < \infty$.

Доказательство. Сначала докажем существование постоянной $C > 0$ такой, что

$$|u'_n(0) - e'_n(0)| \leq C \text{ и } |u'_n(1) - e'_n(1)| \leq C \text{ для всех } n = 0, 1, 2, ... \quad (10)$$

Для этого сначала умножим уравнение (1), записанное для $u = u_n$, на u_n и проинтегрируем по отрезку $[-1, 1]$ (это возможно, так как $u_n(\cdot)$ и $k(\cdot)$– периодические функции, так что, в частности, $u'_n(-1) = = u'_n(1)$), тогда ввиду равномерной ограниченности последовательности $\{(Ku_n)(x)\}_{n=0,1,2,...}$ по x получим

$$2\lambda_n - C_1 \leq \int\limits_{-1}^{1} [u'_n(x)]^2 dx \leq 2\lambda_n + C_1 \quad (11)$$

для некоторой постоянной $C_1 > 0$, не зависящей от n. Далее, умножим то же самое уравнение на $2xu'_n(x)$ и проинтегрируем по $[-1, 1]$.

Интегрируя по частям и используя (11), придем к оценке

$$\left|[u_n'(1)]^2 - 2\lambda_n\right| \le \frac{1}{2}\left(C_1 + \int\limits_{-1}^{1} |xu_n(x)(Ku_n)(x)|dx\right),$$

где последний член в правой части по теореме 1 ограничен постоянной, не зависящей от n, поэтому и поскольку в силу (8) $\lambda_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ получаем

$$|\,|u_n'(1)| - \sqrt{2\lambda_n}| \le C_2$$

с постоянной $C_2 > 0$, не зависящей от n. Поскольку $|e_n'(1)| = \sqrt{2\mu_n}$, так как знаки величин $u_n'(1)$ и $e_n'(1)$ совпадают по теореме 1(а),(б) и в силу (8), отсюда следует вторая из оценок (10). Первая оценка может быть получена аналогично, так что считаем неравенства (10) доказанными.

Пусть $w_n(x) = u_n(x) - e_n(x)$. По теореме 1(в) и (8)

$$-w_n''(x) + W_n(x) = \mu_n w_n(x), \quad x \in (0,1), \tag{12}$$

$$w_n(0) = w_n(1) = 0, \tag{13}$$

где $\{W_n(x)\}_{n=0,1,2,\dots}$– равномерно ограниченная по $x \in [0,1]$ последовательность непрерывных функций. Умножая (12) на $2xw_n'(x)$ и интегрируя по $[0,1]$ полученное тождество с применением интегрирования по частям, ввиду (10) и (13) имеем

$$C_3 - ||w_n||^2_{H_0^1(0,1)} - 2\int\limits_0^1 xW_n(x)w_n'(x)dx \ge \mu_n ||w_n||^2_{L_2(0,1)}$$

с постоянной $C_3 > 0$, не зависящей от n. Поскольку очевидно

$$-2\int\limits_0^1 xW_n(x)w_n'(x)dx \le ||w_n||^2_{H_0^1(0,1)} + \int\limits_0^1 x^2W_n^2(x)dx,$$

и последний член в правой части этого неравенства ограничен сверху постоянной, не зависящей от n, отсюда следует, что
$\mu_n||w_n||^2_{L_2(0,1)} \le C_4, \quad n = 0,1,2,\dots$, где $C_4 > 0$ не зависит от n. Следовательно, $||u_n - e_n||_{L_2(0,1)} \le C_4^{\frac{1}{2}}\pi^{-1}(n+1)^{-1}, \quad n = 0,1,2,\dots$, откуда

$$\sum_{n=0}^{\infty} ||u_n - e_n||^2_{L_2(0,1)} < \infty.$$

Таким образом, система функций $\{u_n\}_{n=0,1,2,...}$ $\omega-$ линейно независима и квадратично близка к ортонормированному базису в $L_2(0,1)$ и теорема 2 полностью доказана.

Исследование частично поддержано РФФИ, грант № 98-01-00190.

Литература

1. Lions P.L. Nonlinear Anal.: Theory, Meth. Appl. 1980. V. **4**. No 6. P. 1063-1073.

2. Lieb E.H. Studies in Appl. Math. 1977. V. **57**. No 2. P. 93-105.

3. Жидков П.Е. Матем. сборник. 1992. Т. **183**. No 2. С. 102-111.

4. Махмудов А.П. Основы нелинейного спектрального анализа. Баку: Изд-во Азербайджанского гос. ун-та им. С.М. Кирова, 1984.

5. Жидков П.Е. Матем. сборник. 2000. Т. **191**. No 3. С. 43-52.

6. Zhidkov P.E. JINR Commun. E5-98-61. Dubna. 1998.

7. Жидков П.Е. Препр. ОИЯИ. Р5-98-261. Дубна. 1998.

8. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965.

9. Бари Н.К. ДАН СССР. 1946. Т. **54**. No 5. С. 383-386.

10. Бари Н.К. Ученые записки МГУ. 1951. Т. **148**. Математика. Вып. 4. С. 69-107.

11. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965.

12. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 сентября 2000 года.

Жидков П.Е. P5-2000-216
О базисности Бари системы собственных функций одного нелинейного интегродифференциального уравнения

Рассматривается нелинейное интегродифференциальное уравнение на отрезке с нулевыми граничными условиями Дирихле и некоторым нормировочным условием, содержащее спектральный параметр, которое может возникнуть в приближении среднего поля при квантово-механическом описании твердого тела. Доказано существование счетного множества решений и исследованы свойства этих решений. Основной результат работы состоит в доказательстве базисности Бари произвольной последовательности решений задачи, обладающих заданными свойствами, существование которой доказано.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод автора

Zhidkov P.E. P5-2000-216
On the Property of Being a Bary Basis for a System of Eigenfunctions of a Nonlinear Integro-Differential Equation

We consider a nonlinear integro-differential equation on a segment with zero Dirichlet boundary conditions and a normalization condition, containing a spectral parameter, which can arise in the mean field approximation for a quantum-mechanical description of a solid. We prove the existence of a countable set of solutions and investigate properties of these solutions. The main result consists in proving the property of being a Bary basis for a sequence of solutions of the problem, possessing a given behavior, the existence of which is proved.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 09.10.2000
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 1,23
Тираж 325. Заказ 52269. Цена 1 р. 48 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области