СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р5-2000-52

Е.П.Жидков, Е.Е.Перепелкин

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ОБЛАСТИ С УГЛОМ

2000

1. Постановка краевой задачи

Ставится задача магнитостатики о нахождении распределения магнитного поля в окрестности угловой точки ферромагнетика (см. рис.1). Из уравнений Максвелла и из соотношений на границе раздела сред (считаем, что токи отсутствуют в рассматриваемой области) следует

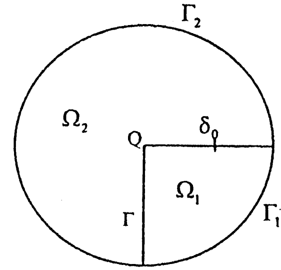

Рис.1

$$\operatorname{div}\vec{B}(p)=0, \quad \operatorname{rot}\vec{H}(p)=0, \quad p\in\Omega;$$
$$\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_1-\vec{B}_2\right)=0, \quad \vec{n}\times\left(\vec{H}_1-\vec{H}_2\right)=0, \quad p\in\Gamma,$$

где Ω - область ферромагнетика и вакуума, Γ - граница раздела сред, $\vec{B},\vec{H}$ - векторы индукции и напряженности магнитного поля соответственно. Для области ферромагнетика Ω_2 можно записать $\vec{B}=\mu_0\mu(H)\vec{H}$, где $H=\left|\vec{H}\right|$, $\mu(H)$ - магнитная проницаемость, μ_0 - магнитная постоянная; для области вакуума Ω_1: $\vec{B}=\mu_0\vec{H}$. Из - за отсутствия в области $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$ источников с током следует потенциальность поля, отсюда, справедливо представление

$$\vec{H}(p)=-\nabla u(p), \quad p\in\Omega, \quad u(p)=\begin{cases}u_1(p), & p\in\Omega_1,\\ u_2(p), & p\in\Omega_2,\end{cases}$$

где $u(p)$ - скалярный потенциал. Тогда постановка краевой задачи примет вид

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\left[\mu\left(\left|\nabla u_2(p)\right|\right)\nabla u_2(p)\right]=0, \quad p\in\Omega_2,\\
&\Delta u_1(p)=0, \quad p\in\Omega_1,\\
&u_1\big|_{\Gamma_-}=u_2\big|_{\Gamma_+},\\
&\mu\left(\left|\nabla u_2(p)\right|\right)\frac{\partial u_2}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_+}=\frac{\partial u_1}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_-},\\
&u_1\big|_{\Gamma_1}=\Psi_1; \quad u_2\big|_{\Gamma_2}=\Psi_2,
\end{aligned}\tag{1.1}$$

где функция $\mu(H)$ удовлетворяет условиям

1. $\mu(H)\in C^{(1)}[0,+\infty)$;
2. для $H\in[0,+\infty)$, $\mu(H)>1$; (1.2)
3. $\mu(H)\xrightarrow{H\to+\infty}1$.

Рассмотрим функцию $\overline{\mu}(H)$, аналог функции $\mu(H)$, у которой второе и третье условия заменены на следующе

$$\text{для } H'\geq H_0,\quad \overline{\mu}(H')=1 \tag{1.3}$$

где H_0 - «достаточно велико». В дальнейшем будем предполагать, что решение краевой задачи (1.1) $u\in C(\Omega\cup\Gamma\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2)$, из этого следует, что $\exists C_0>0 \quad \forall p\in\Omega\cup\Gamma\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2 \quad : \quad |u(p)|<C_0$.

2. Об одной краевой задаче

Прежде чем приступить к основным утверждениям данной статьи, рассмотрим вспомогательную задачу, которая подробно разобрана в [1]. Итак, рассмотрим краевую задачу (см. рис.2)

$$\left.\begin{array}{l}
\operatorname{div}[q\nabla u(p)]=0,\quad p\in\Omega \\
u|_{\Gamma_-}=u|_{\Gamma_+} \\
q_2\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_+}=q_1\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma_-} \\
u|_{\Gamma_1}=\Psi_1;\quad u|_{\Gamma_2}=\Psi_2
\end{array}\right\},\ \text{где } q=\begin{cases} q_1, & p\in\Omega_1, \\ q_2, & p\in\Omega_2, \end{cases}$$

$$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2,$$
$$\Omega_1=\{(r,\varphi):\ 0<r<r_0\quad |\varphi|<\pi/4\},$$
$$\Omega_2=\{(r,\varphi):\ 0<r<r_0\quad |\varphi|>\pi/4\},$$

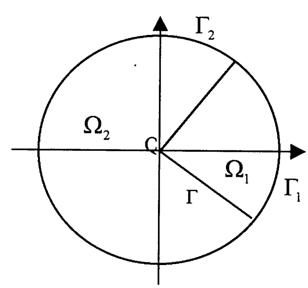

Рис.2

где $\Psi_i\in C^{(1)}(\Gamma_i)$, $i=1,2$ (см. рис.2). Введем полярную систему координат. Решение будем искать методом разделения переменных: $u\sim R(r)\cdot\Phi(\varphi)$. В результате имеем

$$\Phi''+\lambda^2\Phi=0,\quad r^2R''+rR'-\lambda^2R=0.$$

Таким образом, для $R(r)$ в силу ограниченности в нуле $u(p)$, получим решение $R(r) \sim r^{\lambda}$, а для $\Phi(\varphi)$ - собственные функции, которые распадаются на две группы:

1. симметричные относительно $\varphi = 0$;
2. антисимметричные относительно $\varphi = 0$.

В первом случае собственные функции примут вид

$$\Phi_{\lambda}^{(1)}(\varphi) = \begin{cases} \cos(\lambda\varphi), & |\varphi| < \pi/4, \\ a_{\lambda} \cos(\lambda(\pi - \varphi)), & |\varphi| > \pi/4. \end{cases}$$

Здесь постоянная a_{λ} определяется из соотношения на границе для нормальных производных

$$a_{\lambda} = -\left[q_1 \sin\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right)\right] \Big/ \left[q_2 \sin\left(\lambda \frac{3\pi}{4}\right)\right],$$

а для определения собственных значений λ воспользуемся соотношением непрерывности для решения $u(r,\varphi)$ на границе раздела

$$-\frac{q_1}{q_2} = \frac{\cos\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\lambda \frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\lambda \frac{3\pi}{4}\right) \sin\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Таким образом, или $\operatorname{tg}\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right) = 0$ и тогда $\lambda = 4n$, или $\lambda = \pm\lambda_1 \pm 4n$, где λ_1 - наименьший корень уравнения

$$-\frac{q_1}{q_2} = \left[3 - \operatorname{tg}^2\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right)\right] \Big/ \left[1 - 3\operatorname{tg}^2\left(\lambda \frac{\pi}{4}\right)\right]. \tag{2.1}$$

Особенность в решение будет вносить член ряда $r^{\lambda_1}\Phi_{\lambda_1}(\varphi)$ при $\lambda_1 < 1$. Из (2.1) следует, что

$$\lambda_1 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad q_1 = q_2. \tag{2.2}$$

Это означает, что если $q_1 = q_2$, то $|\nabla u(p)|$ - будет ограничен.

3. Поведение решения краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу (1.1) с функцией магнитной проницаемости $\bar{\mu}$, область Ω, показана на рис.1.

Утверждение

$$\exists K > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad 0 < \rho(p,Q) < \delta \quad : \quad |\nabla u(p)| < K,$$

где $\rho(p,Q)$ - расстояние между точками p и Q, а под ограниченностью на Γ понимается ограниченность на Γ_+ и на Γ_-.

Доказательство

Будем доказывать от противного. Предположим, что это не так, тогда

$$\forall K > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad 0 < \rho(p,Q) < \delta \quad : \quad |\nabla u(p)| \geq K.$$

Возьмем $K = \max\left(H_0, 4C_0\sqrt{\pi}\right)$, $0 < \delta_0 < \delta$, тогда для $p: \quad 0 < \rho(p,Q) \leq \delta_0$ должно выполняться условие

$$|\nabla u(p)| \geq H_0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\mu}(H) = 1. \tag{3.1}$$

Введем полярную систему координат с центром в точке Q. Пусть $u(r,\varphi)$ - решение нашей краевой задачи, удовлетворяющее условию (3.1), тогда на $\Gamma_\pm$ оно должно удовлетворять условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0, \varphi)\right|_{\varphi=0+} = \left.\frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0, \varphi)\right|_{\varphi=0-}, \tag{3.2}$$

а в силу непрерывности $u(\delta_0, \varphi)$ должно выполняться

$$\left.u(\delta_0, \varphi)\right|_{\varphi=0+} = \left.u(\delta_0, \varphi)\right|_{\varphi=0-} = u(\delta_0, 0). \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что $\exists \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0, 0) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0, \varphi)\Big|_{\varphi=0+} = \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\delta_0, \varphi)\Big|_{\varphi=0-}$,

таким образом, положив

$$\overline{\Psi}_i(\varphi) = u_i(\delta_0, \varphi), \quad i = 1,2\,, \ \overline{\Psi} = \begin{cases} \overline{\Psi}_1, & \overline{\Gamma}_1, \\ \overline{\Psi}_2, & \overline{\Gamma}_2, \end{cases}$$

$$\overline{\Gamma} = \{(\delta_0, \varphi): \quad 0 < \varphi \le 2\pi\}\ ,$$

получаем в δ_0 - окрестности точки Q краевую задачу

$$\begin{aligned} &\Delta u_1(p) = 0, \quad p \in \Omega_1, \\ &\Delta u_2(p) = 0, \quad p \in \Omega_2, \\ &\frac{\partial u_2}{\partial n}\Big|_{\Gamma_+} = \frac{\partial u_1}{\partial n}\Big|_{\Gamma_-}, \\ &u_1\big|_{\Gamma_-} = u_2\big|_{\Gamma_+}, \\ &u\big|_{\overline{\Gamma}} = \overline{\Psi}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\overline{\Psi} \in C^{(1)}(\overline{\Gamma})$. Из (2.2) (а также из [1]) получаем, что (3.4) не имеет особенностей, т.е. $\lim_{p \to Q} |\nabla u(p)| = \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} \le 4C_0\sqrt{\pi} = K$, где a_1 и b_1 - коэффициенты ряда Фурье для функции $u(p)$ на границе $\overline{\Gamma}$. Следовательно, получили противоречие, которое и доказывает наше утверждение.

Литература

[1] Г.Стренг, Дж. Фикс. Теория метода конечных элементов. М. «Мир», 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 марта 2000 года.

Жидков Е.П., Перепелкин Е.Е. P5-2000-52
Краевая задача для уравнения эллиптического типа
в области с углом

Данная работа посвящена изучению поведения решения краевой задачи для нелинейного эллиптического уравнения в области с углом. Постановка краевой задачи возникает в магнитостатике при отыскании распределения магнитного поля методом двух скалярных потенциалов в области, содержащей ферромагнетик и вакуум. Нелинейность задачи обусловлена зависимостью свойства среды (магнитной проницаемости) от самого искомого поля. В связи с тем, что решение такой задачи приходится искать численными методами, встает вопрос о поведении решения краевой задачи в окрестности угловой точки ферромагнетика. В данной работе показано, что если функция магнитной проницаемости удовлетворяет определенным условиям, то соответствующее решение краевой задачи будет иметь ограниченный градиент.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2000

Перевод авторов

Zhidkov E.P., Perepelkin E.E. P5-2000-52
The Boundary Value Problem for Elliptic Equation
in the Corner Domain

This work is devoted to the studies of the solution behavior of the boundary value problem for a nonlinear elliptic equation in the corner domain. The formulation of the boundary value problem arises in magnitostatics when finding the magnetic field distribution by the method of two scalar potentials in the domain comprising ferromagnetic and vacuum. The problem nonlinearity is stipulated by the dependence of the medium properties (magnetic permeability) on the solution to be found. In connection with that the solution of such a problem has to be found by numerical methods, a question arises about the behavior of the boundary value problem solution around the angular point of the ferromagnetic. This work shows that if the magnetic permeability function meets certain requirments, the corresponding solution of the boundary value problem will have a limited gradient.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Technigues and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2000

Редактор Е.Ю.Шаталова. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 28.03.2000
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 0,43
Тираж 325. Заказ 51939. Цена 52 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области