Р2-2001-117

И.Д.Манджавидзе[1], А.Н.Сисакян

# ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЕ ОПИСАНИЕ ОГРАНИЧЕННЫХ СВЯЗЯМИ ПРОЦЕССОВ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

[1]Институт физики, Тбилиси

*Посвящается светлой памяти*
*Александра Михайловича Балдина —*
*замечательного ученого и человека.*

# 1 Введение

Предлагаемый обзор посвящен попытке описать неравновесные процессы, ограниченные высокой группой симметрии. Наиболее близким для авторов примером таких процессов являются процессы множественного рождения адронов, хотя, по-видимому, этим не ограничится разнообразие физических приложений изложенного формализма.

Итак, мы попытаемся сформулировать теорию возмущений для задач неравновесной, в данном случае релятивистской, термодинамики с учетом связей, сопутствующих высокой симметрии задачи. А именно мы хотим описать диссипацию кинетической энергии сталкивающихся частиц в массы адронов. Этот процесс мы будем понимать как одну из форм "термализации" начального состояния. Мы будем полагать, что при этом первичная энергия "тратится" на массы цветовых составляющих адронов, а также "спрятана" в энергии связи цветовых зарядов.

Надо отметить несомненную важность самой проблемы определения понятия "равновесия" в диссипативных системах. Например, интерес к этому вопросу зачастую обусловлен тем, что в таких системах переход к равновесию понимается как стремление к определенному "порядку" [1].

В данной постановке задачи нас будет интересовать $S$-матричная формулировка, в которой мы можем произвольно задать начальное и конечное состояния на бесконечно удаленных гиперповерхностях $\sigma_\infty$. Мы полагаем, что симметрии, через соответствующие законы сохранения, включая скрытые ("полиномиального типа"), как-то могут ограничить процесс диссипации и тем самым повлиять на вероятность реализации тех или иных асимптотических состояний на $\sigma_\infty$. Вопросы "насколько" и "как" будут предметом дальнейшего обсуждения.

## 1.1 Процессы диссипации энергии и множественное рождение частиц

Строго говоря, в экспериментах по неупругому рассеянию релятивистских частиц мы не имеем возможности контролировать время процесса множественного рождения (см. [2, 3], где этот вопрос изучался в рамках формализма функций Вигнера [4], а также [5], где этот же вопрос обсуждался с общих позиций). Поэтому мы лишь косвенно можем судить о собственном времени процесса, контролируя только его результат. Например, введя коэффициент неупругости $\kappa = 1 - \varepsilon_{\max}/E$, где $\varepsilon_{\max}$ - энергия самой быстрой частицы в данной системе отсчета[1] и $E$ - полная энергия, мы можем контролировать степень диссипации, выбирая конкретные $\kappa$. Или же можно рассматривать среднюю кинетическую энергию рожденных частиц $1/\beta_c$, если флюктуации в окрестности $\beta_c$ не очень велики. Самым простым параметром (однако, возможно, не с точки зрения экспериментатора) является множественность рожденных частиц $n$. Очевидно, что диссипация будет значительной, если $\kappa \to 1$ или же если $n \to n_{\max} = E/m_h$ ($m_h \simeq 0,2$ ГэВ - характерная масса адронов). В этих условиях $\beta_c \to \infty$.

Считается, что в физике адронов связи, которые являются следствием неабелевой калибровочной симметрии, приводят к удержанию цветового заряда внутри бесцветных адронов. Помимо этого, что, по-видимому, более важно, эти же связи препятствуют полной термализации очень "горячего", при высоких энергиях сталкивающихся частиц, начального состояния. Действительно, при полной термализации средняя множественность рожденных частиц $\bar{n}(E)$ должна была бы быть $\sim E$ [6]. Эксперимент же показывает, что средняя множественность пропорциональна всего лишь $\ln^2(E/m_h)$. Однако же возможны редкие флюктуации, когда множественность $n >> \bar{n}(E)$.

Можно думать поэтому, что влияние связей на формирование динамики множественного рождения адронов значительно. Однако они не играют решающей роли, как в полностью интегрируемых задачах [7, 8], поскольку определенная доля энергии все же диссипирует ($\bar{n}(E) \sim \ln^2(E/m_h) >> 1$). Поэтому мы будем полагать, что связи лишь как-то ограничивают динамику (подробнее см. в параграфе 1.3). Таким образом, будучи где-то между полностью интегрируемыми и полностью термализуемыми, рассматриваемая нами задача достаточно сложна.

Действительно, в физике множественного рождения, почти за три четверти века ее истории (в [9] приведены ссылки на пионерские публикации, касающиеся множественного рождения), накоплен огромный фактический материал. Однако строгих результатов не так уж и много. Так, в первую очередь следует выделить результаты, основанные на причинности и унитарности. К ним относится доказательство дисперсионных соотношений для двухчастичных амплитуд (см. [10] и цити-

[1]Мы будем рассматривать лишь систему центра масс.

руемую здесь литературу, а также [11]). Имеется также принципиально важное расширение этого подхода на инклюзивные процессы [12]. Что касается асимптотических оценок, то надо иметь в виду теоремы Фруассара и Померанчука для полных сечений (см., например, [13]). И это практически все, что есть из формальных основ теории сильных взаимодействий[2], описывающей процессы множественного рождения.

За десятилетия развития физики множественного рождения было проверено огромное число идей, основанных на эвристических предпосылках. Здесь мы хотели бы выделить некоторые из них. В первую очередь, это идея, базирующаяся на экспериментальном наблюдении, что средний поперечный импульс рожденных адронов ограничен и практически не зависит от энергии $E$ и множественности $n$ (по крайней мере при "не очень больших" $E$ и $n$). На этом наблюдении основан мультипериферический подход [14] и примыкающая к нему реджевская модель [15]. Эти схемы, даже не имея полного теоретического обоснования, до сих пор остаются одним из основных инструментов количественного описания множественного рождения.

Значительная систематизация экспериментальных данных была достигнута с использованием представления о масштабной инвариантности на малых расстояниях [16]. Далее, представления о дуальности, которая является следствием "кроссинг-симметрии" и правил сумм при конечной энергии [17], по-видимому, имеют фундаментальный характер [18]. Однако до сих пор мы не располагаем согласованной схемой, основанной на этих идеях, которая бы не противоречила условию унитарности и была способна дать экспериментально проверяемые предсказания [19].

С методологической точки зрения нам будет важно учитывать, что процесс диссипации первичной энергии $E$ в массы адронов является многокомпонентным и каждой из компонент этого процесса свойственны свои пространственно-временные масштабы и, по-видимому, различные механизмы множественного рождения. Предпринимались попытки осмыслить эту идею как с феноменологической [20], так и с чисто формальной позиции [21], с использованием разложения по корреляционным функциям. Последнее сходно с "групповым разложением" Майера [22].

Но, несмотря на все эти усилия, мы так и не имеем детальной количественной теории неупругих взаимодействий адронов. Заметим, вместе с тем, что неупругие взаимодействия определяют основную долю вкла-

[2]Мы не будем обсуждать такие чисто аксиоматические построения, как функции Вайтмана, или же теорему Хаага.

дов в полное сечение адронов (см., например, [23]). Поэтому неточности в количественных оценках роли тех или иных неупругих процессов в значительной степени тормозят дальнейшие экспериментальные исследования, которые в современных задачах весьма чувствительны к фоновым условиям.

Мы хотели бы отметить, что физика множественного рождения интересна также и сама по себе, хотя, возможно, она и не является сегодня "магистральной дорогой" развития физики, как, например, стандартная модель и сопутствующие ей проблемы (обнаружения хиггсовского бозона, иерархии масс и т.п.). В этом смысле, возможно, процессы рождения очень большого числа адронов представляют особый интерес, поскольку при очень большой множественности должно возбуждаться максимальное число степеней свободы [7].

Итак, сохраняющаяся до сих пор неопределенность с доминантными при высоких энергиях вкладами [24], то обстоятельство, что фрактальная размерность Реньи нетривиальна и существенно зависит от энергии и типа взаимодействующих частиц [25], несомненно, уменьшает надежду, что когда-нибудь будет создана количественная теория множественного рождения адронов в полном объеме (по-видимому, это явление по своей сложности сравнимо, например, с турбулентностью). Непосредственным следствием всего этого является наблюдающееся за последние два десятка лет падение числа публикаций на тему множественного рождения. В этой связи мы отметим, что именно асимптотика по множественности может оказаться наиболее "простой"(см. заключительную главу), поскольку мы ожидаем, что в этой области значений множественности применимо "статистическое описание" [7], т.е. детали процесса в этих условиях не должны быть столь уж важны.

Здесь надо подчеркнуть, что, однако, в отличие от ранее развиваемых гидродинамических и статистических моделей множественного рождения [26, 6], мы ожидаем наступления "гидродинамической стадии" [27] процесса термализации лишь в области очень больших значений множественности, т.е. она может реализоваться лишь как достаточно редкая флюктуация в процессе диссипации.

При написании данного обзора мы предприняли попытку построить теорию, которая могла бы описать динамику сильных взаимодействий как на малых расстояниях, где, по-видимому, влияние симметрийных связей незначительно, так и на больших, где связи принципиально следует учитывать.

Мы увидим, что конечное выражение (5. 39) для производящего функционала наблюдаемых (сечений рассеяния, корреляционных функций и т.д.), несмотря на формальную компактность, в действительности чрезвычайно громоздко, и поэтому, скорее всего, лишь численные методы могут быть сколько-нибудь эффективны (см. заключительную главу). Мы предпринимаем соответствующие усилия в этом направлении, однако описание предсказаний для эксперимента выходит за рамки данного обзора [28].

## 1.2 Микроканонический формализм

Мы начнем с того, что, строго говоря, амплитуды рождения $n$ частиц зависят от $(3n-4)$ переменных. Это число слишком велико[3], и было бы наивно надеяться построить точную схему описания, если все эти переменные существенны. (А это именно так, как говорилось выше [25].)

Поэтому, чтобы сформулировать задачу количественно, мы прежде попытаемся найти условия, когда ограниченным числом параметров можно описать систему. Вполне очевидно, что для этого следует предпринять попытку адаптировать методы статистической физики.

Замечательно, что при выполнении условий, напоминающих условие ослабления корреляций Н.Н.Боголюбова [29][4] (см. параграф 2.1, где эти условия выводятся), система, которая возникнет в результате рождения частиц, должна становиться "равновесной". А именно производящий функционал сечений неупругого рассеяния $\rho(\alpha, z)$, вычисленный с помощью $S$-матрицы, при выполнении вышеуказанных условий в точности совпадает со статистической суммой равновесной термодинамики в формулировке Швингера–Келдыша [30], с соответствующими периодическими граничными условиями Кубо–Мартина–Швингера [31]. Здесь надо отметить формальное утверждение, что термодинамики, построенные на основе периодического граничного условия Кубо–Мартина–Швингера, могут описывать лишь равновесное, в каноническом определении этого слова, состояние системы [32].

Причем мы покажем, что вышеуказанное ослабление корреляций оказывается необходимым и достаточным условием, чтобы наша термодинамика, основанная на $S$-матричном формализме, стала справедливой. В работе [3] предложена попытка описания кинетической стадии процесса, опирающаяся на гипотезу *локального равновесия* [33]. Если же корре-

[3]При энергиях современных ускорителей средняя множественность рожденных частиц достигает сотни.

[4]Важность принципа "обращения в ноль корреляторов" Боголюбова для процессов множественного рождения адронов неоднократно подчеркивал А.М.Балдин в обсуждениях с одним из авторов (А.Н.С.).

ляции не ослабевают, то мы остаемся в рамках обычного $S$-матричного описания, которое оперирует $(3n-4)$ независимыми переменными. В параграфе 2.1 мы вернемся к этому вопросу.

Из вышесказанного следует, что упомянутые условия ослабления корреляций, вообще говоря, не должны удовлетворяться в адронных процессах, поскольку имеются симметрийные связи. Однако можно рассмотреть асимптотику по $n$. Тогда если законы сохранения, сопутствующие симметрии задачи, лишь ограничивают динамику, то, отбирая очень большие множественности, мы тем самым подавляем влияние этих связей, сопутствующих данной симметрии. Это, конечно, должно упростить теорию. (Асимптотика по $n$ удобна также и потому, что в теории тогда имеется малый параметр $\sim \bar{n}(E)/n$. Можно использовать также то обстоятельство, что импульсы рожденных частиц должны быть относительно малы.)

Принципиальная важность физики очень больших множественностей подробно обсуждается в [7], и мы не будем этого в дальнейшем касаться. Здесь мы хотели бы отметить, что, по-видимому, в ион-ионных столкновениях "термализация", т.е. эффект ослабления корреляций, может быть достигнута при меньших значениях $n/\bar{n}(E)$ [34].

Можно заметить, что $n$ определяет лишь число импульсов в аргументе амплитуд множественного рождения $a_n(q_1, q_2, ..., q_n; E)$. Поэтому, если, например, нас интересует асимптотика по $n$, надо вычислять проинтегрированный по всему фазовому объему $|a_n(q_1, q_2, ..., q_n; E)|^2$, т.к. лишь в этом случае в наших формулах появится $n$ как параметр.

Все это естественно приводит к идее вместо многочастичных амплитуд рассматривать именно производящие функции (или же функционалы) $\rho(\alpha, z)$, которые выражаются через соответствующим образом "взвешенные" параметрами $\alpha$ и $z$ интегралы от $|a_n|^2$. Так, в простейшем варианте теории, чтобы сохранить возможность по нашему усмотрению "регулировать" конечное состояние процесса диссипации первичной энергии, введена зависимость от 4-вектора $\alpha = (-i\beta, \vec{\alpha})$, который сопряжен импульсам рожденных частиц, и от $z$, который сопряжен числу частиц (см. определение (2. 1)).

Итак, мы покажем в первую очередь, как можно ввести ("грубый", если использовать определение, предложенное в [35]) термодинамический формализм, который в значительной степени "экономен", поскольку использует ограниченный набор параметров (температуру ($\sim 1/\beta$), химический потенциал ($\sim \ln z$) и т.п.) и, вместе с тем, вполне способен описать систему. Будут найдены *необходимые и достаточные* условия такого описания (см. параграф 2.1). Подробности и дополнительный список литературы можно найти также в обзорах [7, 3].

## 1.3 Квантование со связями

Далее, поскольку лагранжианы современных теорий поля обладают высокой группой симметрии [36, 37], а вычислительная схема должна оперировать лишь независимыми степенями свободы, имеется проблема выделения последних. В каноническом формализме для этого используются соответствующие уравнения связи [38]. Однако эта процедура достаточно сложна и во многом неясна из-за громоздкости.

На раннем этапе построения теории сильных взаимодействий, основанной на калибровочной теории Янга–Миллса, было естественно использовать привычную схему вычислений, которая фактически повторяет отлично зарекомендовавшую себя квантовую электродинамику. При этом существенно то, что в такой формулировке, с применением тождества Славнова–Тейлора [39], теория Янга–Миллса оказалась перенормируемой [40].

Используемый для этого метод Фаддеева–Попова [41] помогает отделить динамические степени свободы от чисто калибровочных. Однако платой за это явилась неэрмитовость эффективного действия неабелевых калибровочных теорий. Во-первых, это значительно усложнило получение калибровочно инвариантных результатов, поскольку калибровочная инвариантность восстанавливается лишь в сумме вкладов диаграмм. Во-вторых, сама процедура выделения калибровочных степеней свободы оказалась неоднозначной в сильных калибровочных полях [42, 43]. В связи с этим в ряде работ (см., например, [44]) предлагается переформулировать теорию возмущений в терминах калибровочно-инвариантных полей. Как это сделать, мы покажем ниже (см. параграф 5.4).

Эти проблемы не играют особой роли, если в рассматриваемых приложениях взаимодействия и, соответственно, поля слабы. В результате в этом "режиме слабой связи" была предсказана "асимптотическая свобода", в основе которой лежит явление антиэкранировки цветового заряда [45]: "бегущий" параметр разложения

$$\alpha_s \propto \Big(1/\ln(q^2/\Lambda^2)\Big) << 1 \qquad (1.\ 1)$$

при $q^2 >> \Lambda^2$. Этот факт оказал решающее влияние на формирование адронной феноменологии последних десятилетий. Так, было найдено естественное объяснение масштабной инвариантности в глубоко неупругих процессах [46], было предсказано образование (КХД) струй [47].

Вместе с этим, из (1. 1) видно, что теория возмущений слабой связи, из-за полюса в $\alpha_s$ при $q^2 = \Lambda^2$, имеет ограниченную область применимости. Эту трудность можно устранить, введя в теорию определенное условие аналитичности [48]. Предпринимаются также усилия "исправить" теорию с учетом степенных поправок [49].

Однако все же остается проблема связей, также и калибровочных, которые существенны на больших расстояниях, где поля сильны, и поэтому они должны влиять на спектры "мягких" частиц. А именно такие частицы рождаются в области очень больших множественностей, и их, как отмечалось выше, желательно научиться описывать в первую очередь, т.к. они, должно быть, особенно просты [7].

Для учета связей мы воспользуемся идеей, которая весьма популярна в силу ее очевидности. Так, можно заметить, что инвариантная гиперповерхность $W$, которая сохраняет связи группы симметрии, определяется частным решением уравнения Лагранжа[5]. Тогда задача квантования могла бы быть сведена к квантованию инвариантной гиперповерхности $W$, что значительно проще, поскольку она может совпадать с фактор-пространством $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, а оно по определению однородно и изотропно в квазиклассическом приближении. Действительно, $\mathcal{G}$ - группа симметрии задачи и $\mathcal{H}$ - группа симметрии данного решения и поэтому $W = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ определяется сохраняющимся в квазиклассике генератором подгруппы, нарушенной данным решением.

Надо отметить, что оба подхода, как прямой, через непосредственный учет связей при квантовании, так и косвенный, через отображение задачи в пространство $W$, должны быть равнозначны. Основные положения нашей схемы, а также некоторые примеры ее приложения были изложены в [50–53,7]. Она использует косвенный метод учета связей, через отображение квантовой задачи в пространство $W$.

Имеется обширная библиография работ, посвященных квантованию систем со связями. Отметим, эта проблема существенна, когда кинетическая и потенциальная части лагранжиана одинаково значимы с точки зрения динамики. Именно такая кинематика реализуется при рождении "мягких" частиц.

В наиболее ранних работах рассматривалось квазиклассическое разложение Венцеля–Крамерса–Бриллюэна (ВКБ) [54], которое является прямым обобщением хорошо известного метода стационарной фазы. В

[5]Если связей недостаточно, чтобы выделить гиперповерхность $W$, тогда они не играют никакой роли в динамике, см. правило отбора $S8$, приведенное ниже.

дальнейшем этот формализм получил развитие в серии работ [55], где были предложены удобные граничные условия, что в значительной степени упростило вычисления. Эти работы были важны, поскольку позволили в полной мере осознать трудности "наивного" подхода к проблеме квантования теорий с высокой группой симметрии. Однако мы увидим, что ВКБ-схема квантования оказывается единственно возможной, поскольку только она сохраняет полную вероятность [64, 50, 51].

В работе [56] на первый план была выдвинута проблема выделения нединамических степеней свободы — "нулевых мод". Для этого на основании более ранних работ [57] было предложено воспользоваться понятием "коллективных переменных".

Для интегрируемых (1+1)-мерных теорий поля обратная задача рассеяния является каноническим преобразованием к переменным типа "действие-угол" (см. подробное изложение этого вопроса в [58]). Тогда естественно квантовать "протяженные объекты" типа солитонов в терминах именно "коллективных переменных", если они находятся в инволюции [59, 60]. Именно "коллективные переменные" были использованы как локальные координаты пространства $W$ в [52].

Таким образом, нам предстоит найти и описать полный набор квантовых состояний в $W$[6]. Эта задача значительна, если мы не знаем обратной задачи рассеяния, как в рассматриваемой нами в главах 4 и 5 (3+1)-мерной теории поля в метрике Минковского. Мы увидим, что определяющую роль в этом процессе будет играть именно равенство $W = \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

В обычных формулировках квантовой теории проблема отображения в пространство $W$ оказывается практически неразрешимой [62]. Попытки использовать для этого разложение континуального интеграла на решетке содержат значительную неопределенность, которая становится заметной при переходе к континуальному пределу [63].

Учитывая вышеприведенный опыт, мы поступим следующим образом. Рассмотрим для примера движение частицы в потенциальной яме. Спектральное представление для соответствующей амплитуды имеет вид

$$A(E, x_1, x_2) = \sum_l \frac{\psi(x_1)\psi^*(x_2)}{E - E_l + i\varepsilon}.$$

Если не интересоваться координатами, то удобно рассмотреть [55]

$$a(E) = \int dx A(E; x, x) = \sum_l \frac{1}{E - E_l + i\varepsilon} =$$

[6]Для квантовой теории солитонов было важно, что $S$-матрицы солитонов факторизуются [61].

$$= \sum_l \mathcal{P}\frac{1}{E - E_l} + i\pi \sum_l \delta(E - E_l),$$

где была использована ортонормируемость волновых функций $\psi(x)$.

Далее надо заметить, что нас в действительности не интересуют ненаблюдаемые значения $E \neq E_l$. Тогда достаточно вычислять лишь абсорбционную часть

$$\mathrm{Im}\ a(E) = \pi \sum_l \delta(E - E_l).$$

Это означает, что мы отбрасываем континуум (не реализуемых в природе) состояний с $E \neq E_l$.

Однако мы не умеем формулировать теорию в терминах абсорбционных частей амплитуд. Чтобы обойти эту трудность, мы рассмотрим

$$r(E) = \int dx_1 dx_2 \left|A(E, x_1, x_2)\right|^2 = \sum_l \left|\frac{1}{E - E_l + i\varepsilon}\right|^2$$

и воспользуемся оптической теоремой (условием унитарности)

$$\varepsilon r(E) = \varepsilon \sum_l \left|\frac{1}{E - E_l + i\varepsilon}\right|^2 = \frac{1}{2i}\sum_l \left\{\frac{1}{E - E_l - i\varepsilon} - \frac{1}{E - E_l + i\varepsilon}\right\} =$$

$$= \pi \sum_l \delta(E - E_l) = \mathrm{Im}\ a(E),$$

которая указывает на то, что наблюдаемые определяются абсорбционной частью амплитуд. Это общее положение, и оно должно выполняться всегда.

Формально условие унитарности, обеспечивающее сохранение полной вероятности, реализуется в результате сокращения действительной части. Мы хотим воспользоваться этим сокращением, чтобы доопределить функциональную меру интегралов для амплитуд [64].

Обобщению этого механизма сокращения на теоретико-полевую задачу посвящена вторая часть данного обзора. А именно мы покажем, что функциональная мера для $\rho(\alpha, z)$ содержит функциональную $\delta$-функцию, которая определяет полный набор вкладов. Это, в свою очередь, дает возможность отобразить *квантовую* теорию на любое многообразие, и в частности на фактор-пространство.

Подчеркнем еще раз, что мы решаем ограниченную задачу вычисления вероятностей, которые по определению определяются модулем соответствующих амплитуд. Или же, используя условие унитарности, мы ограничимся вычислением абсорбционных частей амплитуд. Следует отметить, однако, что если квантовые возмущения включаются адиабатически [65], то, применяя дисперсионные соотношения, мы можем вычислить также и полные амплитуды.

Здесь надо подчеркнуть, что, как отмечалось выше, $\rho(\alpha, z)$ определяется интегралами именно от $|a_n|^2$. Тогда, используя оптическую теорему, мы выразим $\rho(\alpha, z)$ через абсорбционную часть, что и замыкает наш формализм, поскольку последняя будет определена на $\delta$-образной функциональной мере.

Таким образом, в первую очередь мы определим структуру теории возмущений в терминах полевых переменных, которая совпадает с обычной ВКБ-схемой, и затем, воспользовавшись $\delta$-образностью функциональной меры, мы отобразим теорию возмущений в пространство $W = \mathcal{G}/\mathcal{H}$.

Итак, во второй части обзора будет приведена теория возмущений в фактор-пространстве $W = \mathcal{G}/\mathcal{H}$ более простой конформной $(3+1)$-мерной скалярной теории в реальном времени. Мы не знаем общей структуры пространства $W$, поэтому рассмотренная в данном обзоре реализация в пространстве $W = O(4,2)/O(4) \times O(2)$ [66] является только примером. В остальном формула (5. 39) для производящих функций сечений множественного рождения точна.

Теория Янга–Миллса будет рассмотрена в третьей части (глава 5). Важнейшим результатом является теория возмущений, которая не требует фиксации калибровки (параграф 5.4). Очевидно, что это достигается тем, что мы описываем квантовые возмущения в пространстве $W$, а не в пространстве полей (точнее, потенциалов калибровочных полей Янга–Миллса).

## 1.4 Основные положения и результаты

Обзор состоит из трех частей.

В первой части (глава 2) описывается связь с термодинамикой в реальном времени. Основным результатом параграфа 2.1 будет факторизованное представление $\rho(\alpha, z)$ (см. предложение $S1$), которое позволяет не различать механические и термодинамические возмущения. Этот результат важен, поскольку, строго говоря, квантовые возмущения могут влиять на термодинамику, и наоборот. Поэтому всегда имелась проблема временного упорядочения этих возмущений [67]. Например, в [68] предлагалось рассматривать "термальные" возмущения отдельно от "механических". Поэтому результат параграфа 2.1 имеет самостоятельную ценность.

В параграфе 2.2 мы воспользуемся возможностью записать $\rho(\alpha, z)$ в факторизованном виде и покажем, что $\rho(\alpha, z)$ определена на $\delta$-образной функциональной мере Дирака, что доказывает унитарность ВКБ-схемы.

Во второй части строится теория возмущений в фактор-пространстве (главы 3 и 4). В параграфе 3.1 мы рассмотрим простейший пример отображения в пространство $W$, и в параграфе 3.2 мы приведем общую теорию отображения. Нам будет важно показать возможность редукции к $W$ и механизм расслоения $W = T^*W \times R$, где $q$-числа принадлежат $T^*W$ и $R$ включает $c$-числовые нулевые моды.

Все это мы продемонстрируем прежде на примере более простой $O(4,2)$-инвариантной скалярной теории поля. Здесь нам будет важно уметь найти меру $\rho(\alpha, z)$, которая бы учитывала законы сохранения энергии-импульса. Этот вопрос нетривиальный, поскольку мы описываем неупругое рассеяние частиц через протяженный, подобный солитонам, объект (см. параграф 4.3).

И, наконец, в третьей части (глава 5) будет приведено явное выражение для производящего функционала $\rho(\alpha, z)$ в теории Янга–Миллса. Результатом будет теория возмущений в сильной связи (разложение по обратным степеням константы взаимодействия) для $\rho(\alpha, z)$. Мы покажем, что новая теория возмущений свободна от расходимостей, по крайней мере в секторе векторных полей, и сформулирована так, что не требует фиксации калибровки (см. параграф 5.4). Последнее избавляет нас от необходимости вводить "духи" Фаддеева–Попова и бороться с неоднозначностями Грибова.

# 2 Теория поля в реальном времени и при конечных температурах

В $S$-матричной интерпретации термодинамики роль частицы играет точка, откуда излучается (или же где поглощается) частица с данным импульсом. При этом надо иметь в виду, что, вообще говоря, 4-координата этой точки не имеет смысла, поскольку следует учитывать соотношение неопределенности. Эта картина двойственна, т.к., с одной стороны, находясь на массовой поверхности, излученные частицы свободны, однако, с другой стороны, импульсное распределение этих частиц не совпадает с излучением черного тела, поскольку эти частицы излучаются взаимодействующими полями. Об этих особенностях развиваемой интерпретации желательно помнить [7, 3] при чтении дальнейшего материала.

## 2.1 Теория $S$-матрицы при конечных температурах

В данном параграфе мы покажем, что при определенных условиях можно установить количественную аналогию между термодинамическим описанием систем большого числа частиц и $S$-матричным формализмом, принятым для описания процесса множественного рождения. Для простоты изложения мы начнем рассмотрение с простейшей массивной, скалярной, действительной теории поля. Конкретный вид лагранжиана при этом нам не важен.

Итак, в первую очередь надо ввести понятие производящего функционала сечений $\rho(\alpha, z) \equiv \rho(\alpha_i, \alpha_f; z_i, z_f)$. В рассматриваемом простейшем варианте теории мы можем следить лишь за импульсами частиц $q_j$ и $p_j$ данной массы $m$, $p_j^2 = q_j^2 = m^2$. Будем полагать, что

$$|a_{mn}(p_1, p_2, ..., p_m; q_1, q_2, ..., q_n)|^2 \delta\left(P - \sum_{j=1}^{m} p_j\right) \delta\left(P - \sum_{j=1}^{n} q_j\right) =$$

$$= \int \frac{d^4\alpha_i}{(2\pi)^4} \frac{d^4\alpha_f}{(2\pi)^4} \mathrm{e}^{iP(\alpha_i+\alpha_f)} \prod_{j=1}^{m} \frac{\epsilon(p_j)\ \delta}{(2\pi)^3 \delta z_i(p_j)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\epsilon(q_j)\ \delta}{(2\pi)^3 \delta z_f(q_j)} \rho(\alpha, z)\bigg|_{z_i=z_f=0}, \tag{2. 1}$$

где $a_{mn}(p_1, p_2, ..., p_m; q_1, q_2, ..., q_n) = a_{mn}(p, q)$ - амплитуда перехода $m$-частичного состояния в $n$-частичное и $P$ - полный 4-импульс сталкивающихся частиц:

$$P = \sum_j p_j = \sum_j q_j.$$

Обратив равенство (2. 1), найдем $\rho(\alpha, z)$.

Мы хотим показать (см. также [69]), что

*S1. Если справедлива редукционная формула и если поверхностный член*

$$\int dx\, \partial_\mu \{u \partial^\mu u\} = \int_{\sigma_\infty} dx_\mu \{u \partial^\mu u\} = 0, \tag{2. 2}$$

*где $\sigma_\infty$ - бесконечно удаленная гиперповерхность, то производящий функционал сечений множественного рождения $\rho(\alpha, z)$ представим в факторизованном виде:*

$$\rho(\alpha, z) = \mathrm{e}^{-\mathbf{N}(\varphi;\alpha,z)} \rho_0(\varphi), \tag{2. 3}$$

*где $\rho_0(\varphi)$ определен в (2. 14) и $\mathbf{N}(\varphi; \alpha, z)$ — в (2. 15).*

Это представление для производящего функционала будет играть ключевую роль, т.к. вся "внешняя" информация, в виде зависимости от параметров $\alpha$ и $z$, содержится в операторе $\mathbf{N}(\varphi;\alpha,z)$, а информация о взаимодействующих полях включена в функционал $\rho_0(\varphi)$.

Можно полагать, что оператор $\mathbf{N}(\varphi;\beta,z)$ проецирует систему взаимодействующих полей на наблюдаемые состояния. Причем, т.к. внешнее влияние включено адиабатически, предполагается, что $\rho_0(\varphi)$ и все ее производные существуют.

Для демонстрации справедливости предложения *S1* мы введем стандартное определение амплитуд (см. [3] и цитируемую там литературу) через редукционную формулу:

$$a_{mn}(p;q) = \prod_{k=1}^{m} \hat{\varphi}(p_k) \prod_{k=1}^{n} \hat{\varphi}^*(q_k)\, Z(\varphi). \tag{2. 4}$$

Символ "^" будет означать вариационную (или обычную) производную в точке ноль. Например,

$$\hat{\varphi}(q) \equiv \int dx\, \mathrm{e}^{-iqx} \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \equiv \int dx\, \mathrm{e}^{-iqx} \hat{\varphi}(x) \tag{2. 5}$$

и в самом конце всех вычислений вспомогательное поле $\varphi$ следует положить равным нулю.

Амплитуда перехода вакуума в вакуум во внешнем (вспомогательном) поле $\varphi(x)$ имеет вид

$$Z(\varphi) = \int Du\, \mathrm{e}^{iS_0(u)} \mathrm{e}^{-iV(u+\varphi)}, \tag{2. 6}$$

где $S_0$ - свободная часть действия:

$$S_0(u) = \frac{1}{2} \int_{C_+} dx\, ((\partial_\mu u)^2 - m^2 u^2) \tag{2. 7}$$

и $V$ описывает взаимодействия:

$$V(u) = \int_{C_+} dx\, v(u). \tag{2. 8}$$

Интегралы по времени в (2. 7) и (2. 8) определены на временном контуре Миллса [70], который будет выбран следующим образом:

$$C_\pm : t \to t \pm i\epsilon, \quad \epsilon \to +0, \quad -\infty \leq t \leq +\infty, \tag{2. 9}$$

что эквивалентно $i\epsilon$-предписанию Фейнмана.

Рассмотрим

$$r(P;z)=\sum_{n,m}\frac{1}{m!n!}\int d\omega_m(p;z_i)d\omega_n(q;z_f)\delta(P-\sum_{k=1}^{m}p_k)\delta(P-\sum_{k=1}^{n}q_k)|a_{mn}|^2, \qquad (2.\ 10)$$

где элемент фазового объема

$$d\omega_m(q;z)=\prod_{k=1}^{m}\frac{dq_k z(q_k)}{(2\pi)^3 2\varepsilon(q_k)},\ \varepsilon(q)=(q^2+m^2)^{1/2}$$

включает "хорошую" весовую функцию $z(q)$.

Подставив (2. 4) в (2. 10), мы найдем, используя фурье-разложение для $\delta$-функций,

$$r(P,z)=\int\frac{d\alpha_i}{(2\pi)^4}\frac{d\alpha_f}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{iP(\alpha_i+\alpha_f)}\rho(\alpha,z), \qquad (2.\ 11)$$

где

$$\rho(\alpha,z)=\mathrm{e}^{-\mathbf{N}_+(\hat\varphi;\alpha_i,z_i)-\mathbf{N}_-(\hat\varphi;\alpha_f,z_f)}\rho_0(\varphi), \qquad (2.\ 12)$$

$$\mathbf{N}_\pm(\hat\varphi;\alpha,z)\equiv\int d\omega_1(q;z)\,\mathrm{e}^{-iq\alpha}\hat\varphi_\pm(q)\hat\varphi^*_\mp(q) \qquad (2.\ 13)$$

и

$$\rho_0(\varphi)=Z(\varphi_+)Z^*(-\varphi_-). \qquad (2.\ 14)$$

Если ввести обозначение

$$\mathbf{N}(\hat\varphi;\alpha,z)=\mathbf{N}_+(\hat\varphi;\alpha_i,z_i)+\mathbf{N}_-(\hat\varphi;\alpha_f,z_f), \qquad (2.\ 15)$$

то (2. 13), (2. 15) дают определение оператора $\mathbf{N}(\hat\varphi;\alpha,z)$ и (2. 14) определяет $\rho_0(\varphi)$.

Мы хотели бы обратить внимание на то, что основная величина, которая рассматривается, $\sim|a_{mn}|^2$, фактически содержит удвоенное число степеней свободы, т.е. более сложна, чем просто амплитуда $a_{mn}$. На первый взгляд было бы поэтому естественно попытаться найти аналогию с термодинамикой, оперируя лишь амплитудами. Такие попытки имели место, однако при этом возникали нефизические "пинч-сингулярности", которые сокращаются лишь при удвоении числа степеней свободы. Более того, опыт термополевого описания показывает, что подобное усложнение необходимо. Достаточно подробное обсуждение этого вопроса можно найти в [77, 5]. $\star$

Далее мы хотели бы отметить:

*S2. Представление (2. 3) допускает также, вместо (2. 2), периодическое граничное условие*

$$\int_{C_+} dx\, \partial_\mu \{u_+\partial^\mu u_+\} - \int_{C_-} dx\, \partial_\mu \{u_-\partial^\mu u_-\} = 0, \qquad (2.\ 16)$$

*где $u_+$ и $u_-$ — полностью независимые друг от друга поля на контурах $C_+$ и $C_-$ соответственно.*

Напомним, что равенство (2. 4) представляет собой редукционную формулу, которая основана на важном предположении о достаточно "хорошем" поведении полей на бесконечности.

Предложение $S2$ означает, однако, что рассматривая величины $\sim |a_{mn}|^2$, мы можем использовать более слабое условие (2. 16), которое также обеспечивает отсутствие поверхностного члена, но не предполагает, что поля (и их первые производные) должны достаточно быстро убывать на бесконечности.

В нашем случае необходимо и достаточно предположить, что поля $u_+$ и $u_-$, и их первые производные, совпадают на $\sigma_\infty$:

$$u_+(x \in \sigma_\infty) = u_-(x \in \sigma_\infty). \qquad (2.\ 17)$$

Мы будем называть это условие "периодичным граничным условием". Оно наиболее общее и будет сохранено до конца вычислений. $\star$

Равенство (2. 12) может быть записано также в виде

$$\rho(\alpha, z) = \exp\left\{i\int dxdx' \left(\hat{\phi}_+(x)D_{+-}(x-x'; z_f, \alpha_f)\hat{\phi}_-(x') - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \hat{\phi}_-(x)D_{-+}(x-x'; z_i, \alpha_i)\hat{\phi}_+(x')\right)\right\}\rho_0(\phi), \qquad (2.\ 18)$$

где если взять $z = 1$, то $D_{+-}$ и $D_{-+}$ - обычные положительно- и отрицательно- частотные функции Грина [65]. Так,

$$D_{+-}(x-x'; z, \alpha) = -i\int d\omega_1(q)\, z\, \mathrm{e}^{iq(x-x'-\alpha)}$$

описывает процесс распространения частицы, рожденной в момент $x_0$ и далее поглощенной в момент $x_0'$, $x_0 > x_0'$, где $\alpha$ совпадает с 4-координатой системы. Эти функции удовлетворяют однородным уравнениям

$$(\partial^2 + m^2)_x G_{+-} = (\partial^2 + m^2)_x G_{-+} = 0.$$

Предположим теперь, что $Z(\phi)$ может быть вычислено в виде ряда по степеням константы взаимодействия. При этом удобно воспользоваться следующим преобразованием (напомним, что $\hat{X}$ означает производную по $X$ в нуле):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-iV(\phi)} &= \mathrm{e}^{-i\int dx\, \hat{j}(x)\, \hat{\phi}'(x)}\mathrm{e}^{i\int dx\, j(x)\, \phi(x)}\mathrm{e}^{-iV(\phi')} = \\
&= \mathrm{e}^{\int dx\, \phi(x)\, \hat{\phi}'(x)}\mathrm{e}^{-iV(\phi')} = \\
&= \mathrm{e}^{-iV(-i\hat{j})}\mathrm{e}^{i\int dx\, j(x)\, \phi(x)}.
\end{aligned} \tag{2. 19}
$$

Выбрав тогда первое равенство в (2. 19), мы найдем

$$
Z(\phi) = \mathrm{e}^{-i\int dx\, \hat{j}(x)\hat{\Phi}(x)}\mathrm{e}^{-iV(\Phi+\phi)}\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\int dxdx' j(x)D_{++}(x-x')j(x')}, \tag{2. 20}
$$

где $D_{++}$ - обычные причинные функции Грина:

$$
(\partial^2 + m^2)_x G_{++}(x-y) = \delta(x-y).
$$

Подставив (2. 20) в (2. 18), после простых действий с дифференциальными операторами мы найдем выражение

$$
\rho(\alpha, z) = \mathrm{e}^{-iV(-i\hat{j}_+)+iV(-i\hat{j}_-)}\times
$$

$$
\begin{aligned}
\times \exp\{\frac{i}{2}\int dxdx' \,(j_+(x)D_{+-}(x-x',\alpha_1)j_-(x') - j_-(x)D_{-+}(x-x',\alpha_2)j_+(x') - \\
-j_+(x)D_{++}(x-x')j_+(x') + j_-(x)D_{--}(x-x')j_-(x'))\},
\end{aligned} \tag{2. 21}
$$

где

$$
D_{--} = (D_{++})^*
$$

- антикаузальная функция Грина.

Рассматривая систему большого числа частиц, можно упростить задачу, выбрав систему центра масс $P = (P_0 = E, \vec{0})$. При этом можно полагать, что $\alpha_{0,k}$: $\alpha_{0,k} = -i\beta_k, \mathrm{Im}\beta_k = 0, k = i, f$ [71, 72]. В этом случае мы будем иметь $\rho = \rho(\beta, z)$.

В дальнейшем мы хотим использовать $\beta$, наравне с энергией, как еще один параметр, характеризующий систему рожденных частиц. Следует помнить, однако, что для этого необходимы специальные условия, чтобы $\beta$ можно было совместить с энергией. Они выглядят следующим образом [7]:

*S3. Спектр энергии вторичных частиц описывается экспонентой Больцмана, если и только если центральные по энергии моменты $K_l$ достаточно малы:*

$$
|K_l(n)|^{2/l} << K_2(n), \quad l = 3, 4, ... \tag{2. 22}
$$

Отметим, что эти условия напоминают принцип ослабления корреляций Боголюбова при приближении к состоянию равновесия [29][7].

Напомним, что

$K_1(n) =< \varepsilon; n >$ - средняя энергия рожденных частиц;

$K_2(n) =< \varepsilon^2; n > - < \varepsilon; n >^2$ - дисперсия распределения вторичных частиц по энергии;

$K_3(n) =< \varepsilon^3; n > -2 < \varepsilon^2; n >< \varepsilon; n > +3 < \varepsilon; n >^3$ - третий центральный по энергии момент и т.д.

Нам следует показать истоки (2. 22) и справедливость определения

$$< \varepsilon^l; n >= \frac{1}{\sigma_n} \int d\omega_l(q) \prod_{i=1}^{l} \varepsilon(q_i) \frac{d^l \sigma_n}{dq_1 \cdots dq_l}, \quad \varepsilon(q) = \sqrt{q^2 + m_h^2}, \qquad (2.\ 23)$$

где $\sigma_n$ - сечение рождения $n$ частиц и $d^l \sigma_n / dq_1 \cdots dq_l$ - дифференциальное сечение, см (2. 28).

Чтобы найти условия (2. 22), рассмотрим интегралы

$$a_{mn}(E, z) = \oint \frac{dz_i}{2\pi i z_i^{m+1}} \frac{dz_f}{2\pi i z_f^{n+1}} \int \frac{d\beta_i}{2\pi i} \frac{d\beta_f}{2\pi i}\, \mathrm{e}^{(\beta_i + \beta_f)E} \mathrm{e}^{-F(z,\beta)}, \qquad (2.\ 24)$$

где замкнутый контур по $z$ охватывает точку $z = 0$ и

$$F(z, \beta) = -\ln \rho(\beta, z).$$

Интегралы в (2. 24) будем вычислять методом стационарной фазы. Для этого, так же как в микроканоническом формализме, следует найти решение уравнения состояния

$$E = \frac{\partial}{\partial \beta_k} F(\beta, z), \quad k = i, f, \qquad (2.\ 25)$$

что определяет наиболее вероятные значения $\beta_k$ при данном $E$ (и $z$). Уравнения (2. 25) всегда имеют положительные действительные решения [72]. Причем в силу закона сохранения энергии решения совпадают:

$$\beta_k = \tilde{\beta}(E, z), \quad \tilde{\beta} > 0.$$

Чтобы найти наиболее вероятные значения $z$, следует решить уравнения

$$m = -z_i \frac{\partial}{\partial z_i} F(\beta, z), \quad n = -z_f \frac{\partial}{\partial z_f} F(\beta, z). \qquad (2.\ 26)$$

[7] В англоязычной литературе [73] используется термин "the principle of vanishing correlation".

Уравнения (2. 25) и (2. 26) надо решать совместно. В физике частиц число начальных частиц $m = 2$, и поэтому достаточно знать лишь решение $z_c = \tilde{z}(\beta_c, n) = z_c(E, n)$ уравнения для $z_f$.

Разложение подынтегрального выражения в (2. 24) в окрестности $\tilde{\beta}(E, z) = \beta_c(E, n)$ дает асимптотический ряд, поскольку

$$F(z, \beta) = -\ln \rho(\beta, z)$$

– существенно нелинейная функция. Это означает, что, вообще говоря, флюктуации в окрестности $\beta_c(E, n)$ произвольно велики. Следует полагать при этом, что разложение в окрестности $\beta_c(E, n)$ существует, например, в смысле Бореля[8]. Тогда можно найти асимптотическую оценку ряда. Условиями справедливости этой оценки будут неравенства

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial \beta^l} F(\beta_c, z_c) \right|^{2/l} << \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} F(\beta_c, z_c), \quad l > 2. \tag{2. 27}$$

Отсюда нетрудно найти условия (2. 22) и соответствующее определение (2. 23).

Определим теперь явный вид $\partial^l F(z, \beta)/\partial \beta^l$. Начнем со случая $l = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta, z) = \frac{1}{\rho(\beta, z)} \frac{\partial}{\partial \beta} \rho(\beta, z) =$$

$$= \frac{1}{\rho(\beta, z)} \sum_n n \int d\omega_n(q, z)\, \mathrm{e}^{-\beta \sum_j \varepsilon(q_j)} \varepsilon(q_1) |a_n|^2.$$

Здесь коэффициент $n$ есть следствие тождественности частиц. Введем теперь ненормированное на поток сталкивающихся частиц дифференциальное сечение:

$$\frac{d^l \tilde{\sigma}(\beta, z)}{dq_1 d_2 \cdots dq_l} = \sum_{n \geq l} n(n-1) \cdots (n-l+1) \int d\omega_{n-l}(q, z)\, \mathrm{e}^{-\beta \sum_j \varepsilon(q_j)} |a_n|^2,$$

где вновь учтена тождественность частиц.

Если полная энергия $E$ и число частиц $n$ заданы, то надо, положив $z =$const, рассматривать величину

$$\frac{d^l \sigma_n(E)}{dq_1 d_2 \cdots dq_l} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{dz}{z^{n+1}} \int \frac{d\beta}{2\pi i}\, \mathrm{e}^{\beta E} \frac{d^l \tilde{\sigma}(\beta, z)}{dq_1 d_2 \cdots dq_l}. \tag{2. 28}$$

---

[8]Этот вопрос практически не изучен. Можно, однако, воспользоваться аналогией между высокотемпературным разложением равновесной термодинамики, т.е разложением по степеням $\beta$, и разложением по константе взаимодействия. В этом смысле положительный ответ на вопрос о существовании рядов по степеням $\beta$ представляется естественным.

Вообще говоря, интегралы по $z$ и $\beta$ фиксируют точные законы сохранения числа частиц и энергии. Однако предположим, что эти законы сохранения можно учесть приближенно. В этом случае сумма энергий рожденных частиц равна $E$ лишь с экспоненциальной точностью. То же самое мы предполагаем относительно числа рожденных частиц. Чтобы найти, в окрестности каких значений энергии $1/\beta_c$ и числа рожденных частиц $1/\ln z_c$ концентрируются энергии и число рожденных частиц, надо решить уравнения (2. 25) и (2. 26). И тогда

$$\frac{d^l\sigma_n(E)}{dq_1 d_2\cdots dq_l} = z_c^{-(n+1)} \mathrm{e}^{\beta_c E} \frac{d^l\tilde{\sigma}(\beta_c, z_c)}{dq_1 d_2\cdots dq_l} \Upsilon_l(E,n),$$

где $\Upsilon_l(E,n)$ включает гауссовы поправки от интегрирования в окрестности $\beta_c(E,n)$ и $z_c(E,n)$. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial\beta_c}F(\beta_c, z_c) = \frac{\Upsilon_1(E,n)e^{\beta_c E}}{z_c^{(n+1)}\rho(\beta_c, z_c)} \int \varepsilon(q_1) d\omega_1(q_1, z_c) \frac{d\tilde{\sigma}(\beta_c, z_c)}{dq_1} =$$

$$= \frac{1}{\rho(\beta_c, z_c)} \int \varepsilon(q_1) d\omega_1(q_1, 1) \frac{d\sigma_n(E)}{dq_1} =< \varepsilon^1; n >= K_1(n). \qquad (2.\ 29)$$

Поступая аналогично, можно найти, что

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta_c^2}F(\beta_c, z_c) = \frac{1}{\rho(\beta_c, z_c)} \int \varepsilon(q_1) d\omega_1(q_1, 1) \varepsilon(q_2) d\omega_1(q_2, 1) \frac{d^2\sigma_n(E)}{dq_1 dq_2} -$$

$$- \left\{ \frac{1}{\rho(\beta_c, z_c)} \int \varepsilon(q_1) d\omega_1(q_1, 1) \frac{d\sigma_n(E)}{dq_1} \right\}^2 = K_2(n). \qquad (2.\ 30)$$

В общем случае будем иметь

$$\frac{\partial^l}{\partial\beta_c^l}F(\beta_c, z_c) = K_l(n). \qquad (2.\ 31)$$

Подставив это выражение в (2. 27), мы найдем (2. 22).

Те же самые соображения могут быть применимы для $z$. Тогда, если условия справедливости асимптотических оценок выполняются, мы могли бы интерпретировать $\beta_c$ как температуру, $\mu_c = (\ln z_c)/\beta_c$ — как химический потенциал и, наконец, $F(z_c, \beta_c)/\beta_c$ — как свободную энергию. Если эта интерпретация справедлива, то точку, из которой испускается частица с импульсом $q$, можно интерпретировать как "частицу" с импульсом $q$. Однако, вообще говоря, эта интерпретация содержит неточность, которая связана с невозможностью ввести одновременно координату этой точки [3]. ⋆

Предложенная интерпретация параметров $\beta_c$ и $z_c$ представляется естественной, если отметить, что *структура* (2. 21) та же, что у производящей функции Ниеми–Семенова [74], которая получена в рамках теории Швингера–Келдыша [75, 76]. Различие имеется лишь в определении функций Грина $D_{ij}$, $i,j=+,-$, что может оказаться существенным.

Уточним теперь, в каких условиях возможна предложенная выше интерпретация $\rho(\beta_c, z_c)$ как статистической суммы, с параметрами $1/\beta_c$ и $z_c$, интерпретируемыми как температура и активность соответственно.

*S4. В рамках периодического граничного условия (2. 17) если флюктуации в окрестности решения уравнения (2. 25) гауссовы, если корреляции на гиперповерхности $\sigma_\infty$ исчезают, то термодинамика имеет $S$-матричную интерпретацию, в которой $\rho(\beta, z)$ имеет смысл большой статистической суммы.*

Действительно, *предположим* для этого [69], что наша система сталкивающихся частиц есть подсистема более широкой системы, включающей также невзаимодействующие (свободные) частицы (последние будут моделировать термостат).

В результате больцмановская экспонента $\exp\{-\beta\varepsilon\}$ заменится на соответствующее статистике число заполнения $\bar{n}(\beta\varepsilon)$. Это изменит лишь вид функций Грина $D_{ij}$. Схематически доказательство этого выглядит следующим образом. Так, функции Грина, встречающиеся в формализме, должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}(\partial^2+m^2)_x G_{+-}(x-y) &= (\partial^2+m^2)_x G_{-+}(x-y)=0,\\ (\partial^2+m^2)_x G_{++}(x-y) &= (\partial^2+m^2)^*_x G_{--}(x-y)=\delta(x-y).\end{aligned} \tag{2. 32}$$

Далее важно учесть, что граничное условие (2. 17) допускает более общее решение этих уравнений:

$$\begin{aligned}G_{ii} &= D_{ii}+g_{ii},\\ G_{ij} &= g_{ij}, \quad i\neq j,\end{aligned} \tag{2. 33}$$

где $g_{ij}$ – решение однородного уравнения

$$(\partial^2+m^2)_x g_{ij}(x-y)=0, \quad i,j=+,-, \tag{2. 34}$$

которые следует различать по принадлежности к различным временным контурам $C_\pm$. Следовательно,

$$g_{ij}(x-x') = \int d\omega(q)\, e^{iq(x-x')} n_{ij}(q), \tag{2. 35}$$

где, напомним, $q^2 = m^2$. Неизвестные функции $n_{ij}(q)$ определяются как среднее от полей

$$u(\sigma_\infty): \quad n_{ij} \sim< u(\sigma_\infty) \cdots u(\sigma_\infty) > .$$

Простейшим из них является следующее:

$$n_{ij} \sim< u_i u_j >\sim< u^2(\sigma_\infty) > . \tag{2. 36}$$

Здесь было учтено периодическое граничное условие (2. 17). Но тогда $n_{ij}(q)$ должно совпасть с числом заполнения излучения черного тела.

Формальный вывод окончательных формул повторяет [69] (см. также [3]). Мы найдем, что

$$n_{++}(q_0) = n_{--}(q_0) == \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\beta_1+\beta_2}{2}|q_0|} - 1} \equiv \tilde{n}\left(|q_0|\frac{\beta_1+\beta_2}{2}\right) \tag{2. 37}$$

и

$$n_{+-}(q_0) == \Theta(q_0)\left(1 + \tilde{n}(q_0\beta_1)\right) + \Theta(-q_0)\tilde{n}\left(-q_0\beta_1\right), \tag{2. 38}$$

$$n_{-+}(q_0) = \Theta(q_0)\tilde{n}(q_0\beta_2) + \Theta(-q_0)(1 + \tilde{n}(-q_0\beta_2)). \tag{2. 39}$$

Это приводит к следующим функциям Грина:

$$i\tilde{G}_{ij}(q, (\beta)) = \begin{pmatrix} \frac{i}{q^2-m^2+i\epsilon} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{q^2-m^2-i\epsilon} \end{pmatrix} +$$

$$+2\pi\delta(q^2 - m^2)\begin{pmatrix} \tilde{n}(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}|q_0|) & \tilde{n}(\beta_2|q_0|)a_+(\beta_2) \\ \tilde{n}(\beta_1|q_0|)a_-(\beta_1) & \tilde{n}(\frac{\beta_1+\beta_2}{2}|q_0|) \end{pmatrix} \tag{2. 40}$$

и

$$a_\pm(\beta) = -\mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}(|q_0|\pm q_0)}.$$

С учетом $S2$ производящий функционал можно записать в стандартном виде:

$$\rho_{cp}(\beta) = \exp\left\{-iV(-i\hat{j}_+) + iV(-i\hat{j}_-)\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{i}{2}\int dx dx' j_i(x) G_{ij}(x - x', (\beta)) j_j(x')\right\}. \tag{2. 41}$$

Суммирование по повторяющимся индексам предполагается.

Причем если условия (2. 22) удовлетворяются, то

$$G_{+-}(t - t') = G_{-+}(t - t' - i\beta), \quad G_{-+}(t - t') = G_{+-}(t - t' + i\beta). \tag{2. 42}$$

Эти равенства представляют собой периодические граничные условия Кубо–Мартина–Швингера. В канонической формулировке термодинамики они обычно используются, чтобы определить в формализме зависимость от температуры.

В результате мы получили большую статистическую сумму, определенную на временном контуре Миллса [70]:

$$C_\infty:\ C_+ + C_-;\ C_\pm:\ t \to t \pm i\varepsilon,\ \varepsilon \to +i0,\ |t| \le \infty. \tag{2. 43}$$

Чтобы получить отсюда теорию, определенную на временном контуре Ниеми–Семенова $C_{SK}$, мы должны иметь право добавить вклады, определенные на мнимо-временном контуре

$$C_{\mathrm{Im}}:\ t \in \lim_{t_f \to +\infty} (t_f + i\varepsilon, t_f - i\varepsilon).$$

Но это возможно, лишь если функции Грина обращаются в ноль на $C_{\mathrm{Im}}$. Можно показать, что это условие выполняется по крайней мере в рамках канонической теории возмущений [77].

Итак, если $C = C_+ + C_- + C_{\mathrm{Im}}$ и имеет место периодическое граничное условие Кубо–Мартина–Швингера [3], то $\rho(\beta, z)$, найденное в (2. 21), имеет стандартное интегральное представление:

$$\rho(\beta, z) = \int D_C\phi\, \mathrm{e}^{iS_C(\phi)}.$$

Аналитическим продолжением это представление можно привести к представлению Матсубары для большой статистической суммы в мнимом времени [74].

Отметим здесь, что в нашей $S$-матричной формулировке теории поля при конечных температурах вклады от $C_{\mathrm{Im}}$ отсутствуют с самого начала. Иными словами, наш подход и подход, основанный на каноническом формализме Гиббса–Больцмана, различаются вкладами от $C_{\mathrm{Im}}$. Как говорилось выше, наличие вкладов от $C_{\mathrm{Im}}$ определяется корреляционными свойствами на бесконечно удаленной гиперповерхности.$\star$

И наконец, по определению производящий функционал $\rho(\beta, z)$ может быть использован как генератор событий для описания ускорительных экспериментов [79, 3]. Например, если

$$\rho_{nm}(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_m) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\delta}{\delta z_i(p_j)} \prod_{j=1}^{n} \frac{\delta}{\delta z_f(q_j)}\, \rho(\beta, z)|_{z=0}, \tag{2. 44}$$

то

$$\frac{1}{J(s)} \sum_n \int_s \rho_{2n}(q_1, ..., q_n; p_1, p_2) = \sigma_{tot}(s),$$

где $\sigma_{tot}$ - полное сечение ($J$ — обычный нормировочный фактор). В этом выражении интегрирование по импульсам частиц ведется с ограничением $s = (p_1 + p_2)^2$.

Кроме того, большая статистическая сумма может быть выражена через

$$\sum_{n,m} \int_{(\beta_i, z_i; \beta_f, z_f)} \rho_{nm}(q_1, ..., q_n; p_1, ..., p_m), \tag{2. 45}$$

где $\rho_{nm}$ было определено в (2. 44). Суммирование по числу частиц и интегрирование по импульсам частиц ведется с ограничениями: средняя энергия частиц в начальном (конечном) состоянии есть $1/\beta_i(1/\beta_f)$ и активность начального (конечного) состояния есть $z_i(z_f)$. Следует добавить лишь, что подобное описание совпадает с микроканоническим подходом, когда температура вводится как лагранжев множитель.

В работе [3] излагается попытка использовать полученную выше интерпретацию в случае, когда система еще не достигла "гидродинамической фазы", когда для полного описания спектра энергий частиц достаточно знать их среднюю энергию. Можно предположить, что в "кинетической стадии", предшествующей "гидродинамической", мы можем ввести лишь локальные температуры.

Тогда, используя формализм Вигнера, нам следует в (2. 40) заменить $\beta_k \to \beta_k(x)$, $k = i, f$, где $x$ - координата Вигнера [4]. Подчеркнем, что такая интерпретация возможна лишь в силу того, что мы "измеряем" температуру невзаимодействующими частицами [3].

## 2.2 Унитарное определение меры

Мы хотим показать теперь, что

*S5. Если имеет место факторизованная структура (2. 3), то, в силу унитарности $S$-матрицы, производящая функция (или производящий функционал) $\rho(\beta, z)$ имеет вид*

$$\rho(\beta, z) = \mathrm{e}^{-i\mathbf{K}(j\varphi)} \int DM(u)\, \mathrm{e}^{-iU(u;\varphi)} \mathrm{e}^{-N(\beta,z;u)}, \tag{2. 46}$$

*где*

$$N(\beta, z; u) = n(\beta_i, z_i; u) + n^*(\beta_f, z_f; u),$$

$$n(\beta, z; u) = \int d\omega_1(q, z)\, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon(q)} \Gamma(q, u) \Gamma^*(q, u), \tag{2. 47}$$

$$\Gamma(q, \phi) = \int dx\, \mathrm{e}^{-iqx} (\partial^2 + m^2) u(x), \quad q^2 = m^2, \tag{2. 48}$$

$$U(u,\varphi)=V(u+\varphi)-V(u-\varphi)-2\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,\varphi(x)v'(u)=O(\varphi^3), \quad (2.\ 49)$$

$$DM(u)=\prod_x du(x)\,\delta(\partial_\mu^2 u+m^2u+v'(u)-j), \quad (2.\ 50)$$

$$2\mathbf{K}(j\varphi)=\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,\hat{j}(x)\hat{\varphi}(x). \quad (2.\ 51)$$

*После всех вычислений следует положить, что $j=\varphi=0$.*

Вывод представления (2. 46) приведен, например, в [7]. Так, используя факторизацию, мы можем отдельно рассматривать

$$\rho_0(\phi)=\int Du_+Du_-\ \mathrm{e}^{iS_0(u_+)-iV(u_++\varphi_+)}\mathrm{e}^{-iS_0(u_-)+iV(u_--\varphi_-)}, \quad (2.\ 52)$$

где $u_-$ и $\varphi_-$ определены на комплексно сопряженном контуре $C_-$. Поля $\varphi_\pm$ несут всю внешнюю информацию, и интегралы должны включать лишь замкнутые траектории.

Вместо двух независимых полей $u_+$ и $u_-$ мы введем [64]

$$u(x)_\pm=u(x)\pm\varphi(x) \quad (2.\ 53)$$

с равенством

$$\int_{\sigma_\infty}dx_\mu\,\varphi(x)\partial^\mu u(x)=0, \quad (2.\ 54)$$

где $\sigma_\infty$ — бесконечно удаленная времениподобная гиперповерхность, обеспечивающим периодическое граничное условие. Мы выберем следующее решение (2. 54):

$$\varphi(x\in\sigma_\infty)=0, \quad (2.\ 55)$$

что гарантирует справедливость условия (2. 17). Тогда полное действие

$$(S_0(u_+)-V(u_+)-S_0(u_-)+V(u_-))$$

описывает движение по замкнутому пути с "точек поворота" $u(x\in\sigma_\infty)$. Интегрирование по $u(x\in\sigma_\infty)$ подразумевается в силу того, что выбрано именно периодическое граничное условие [3]. Для простоты, вплоть до параграфа 4.3, мы будем полагать, что

$$\lim_{u_\pm=u}(S_0(u_+)-V(u_+)-S_0(u_-)+V(u_-))=0. \quad (2.\ 56)$$

Мы будем рассматривать $\varphi$ как виртуальное поле. Введя вспомогательное поле $\phi(x,t)$

$$\phi(x,t\in C_\pm)=\phi_\pm(x,t\in C_\pm)$$

и предполагая следующее определение вариационных производных:

$$\frac{\delta\phi(x,t\in C_i)}{\delta\phi(x',t'\in C_j)} = \delta_{ij}\delta(x-x')\delta(t-t'), \quad i,j=+,- \ ,$$

мы можем написать, см. (2. 14):

$$\mathbf{N}_{\pm}(\varphi;\beta,z) = \int d\omega_1(q,z)\mathrm{e}^{-\beta\varepsilon(q)}\int_{C_+}dx\int_{C_-}dy\hat{\varphi}_{\pm}(x)\hat{\varphi}_{\mp}(y)\mathrm{e}^{\pm iq(x-y)}. \quad (2.\ 57)$$

Используя это обозначение, выделим в экспоненте (2. 52) линейный по $(\phi+\varphi)$ член:

$$V(u+(\phi+\varphi)) - V(u-(\phi+\varphi)) =$$
$$= U(u,\phi+\varphi) + 2\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,(\phi(x)+\varphi(x))v'(u) \quad (2.\ 58)$$

и

$$S_0(u+\varphi) - S_0(u-\varphi) = s_0(u) - 2i\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,\varphi(x)(\partial_\mu^2+m^2)u(x). \quad (2.\ 59)$$

Разложение по $(\phi+\varphi)$ может быть записано в виде

$$\mathrm{e}^{-iU(u,\phi+\varphi)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2i}\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\hat{\jmath}(x)\hat{\varphi}'(x)}\mathrm{e}^{i2\mathrm{Re}\int_{C_+}dxdt\,j(x)(\phi(x)+\varphi(x))}\mathrm{e}^{-iU(u,\varphi')}, \quad (2.\ 60)$$

где, как обычно, $\hat{\jmath}(x)$, $\hat{\varphi}'(x)$ – соответствующие вариационные производные. В самом конце вычислений вспомогательные переменные $(j,\varphi')$ следует положить равными нулю.

В результате

$$\rho_0(\varphi) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2i}\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,\hat{\jmath}(x)\hat{\varphi}(x)}\int\prod_x du(x)\,\delta(\partial_\mu^2 u+m^2u+v'(u)-j)\times$$
$$\times\mathrm{e}^{is_0(u)}\mathrm{e}^{-iU(u,\varphi)}\mathrm{e}^{2i\,\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,(j(x)-v'(u))\varphi(x)}, \quad (2.\ 61)$$

где функциональная $\delta$-функция была определена равенством

$$\prod_x\delta(\partial_\mu^2u+m^2u+v'(u)-j) = \int D\varphi\,\mathrm{e}^{-2i\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\,(\partial_\mu^2u+m^2u+v'(u)-j)\varphi(x)}. \quad (2.\ 62)$$

Здесь следует помнить, что в силу выбранного периодического граничного условия и (2. 55) произведение $\delta$-функций (2. 62) не включает значения $x\in\sigma_\infty$. Это означает, что "точки поворота" $u(x\in\sigma_\infty)$ полностью произвольны. Последнее приводит к возникновению интегралов по объему фактор-пространства $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, т.е. по нулевым модам.

Равенство (2. 61) можно записать также в следующей эквивалентной форме:

$$\rho_0(\phi) = \mathrm{e}^{-i\hat{K}(j\varphi)} \int DM(u)\, \mathrm{e}^{is_0(u)-iU(u,\varphi)} \mathrm{e}^{2i\,\mathrm{Re}\int_{C_+} dx\,\phi(x)(\partial_\mu^2+m^2)u(x)}, \quad (2.\ 63)$$

используя при этом то обстоятельство, что равенство

$$\partial_\mu^2 u + m^2 u = -v'(u) + j \quad (2.\ 64)$$

точное.

Отметим в заключение, что контур $C_+$ в (2. 51) не может быть сдвинут на действительную ось.

Далее, поскольку экспонента в (2. 63) линейна по $\varphi(t \in C_+)$ и по $\varphi(t \in C_-)$ по отдельности, результат действия оператора $\exp\{-\mathbf{N}_+(\hat{\varphi}; \alpha_i, z_i) - \mathbf{N}_-(\hat{\varphi}; \alpha_f, z_f)\}$ дает (2. 46). $\star$

В заключение главы приведем важнейшие следствия $\delta$-образности функциональной меры.

*S6. Следует учитывать лишь точные решения $u_c$ уравнения*

$$\partial_\mu^2 u + m^2 u + v'(u) = 0. \quad (2.\ 65)$$

Это очевидно, поскольку функциональный интеграл определен на $\delta$-образной мере (2. 50) и возмущения траектории $u_c$ источником $j$ учитываются по теории возмущений.

Здесь мы полагаем, что, как следует из определения генерирующего ряд теории возмущений оператора $\exp\{-i\mathbf{K}(j\varphi)\}$, точный смысл равенства (2. 64) сохраняется при всех значениях $j(x)$, и в частности при $j(x) = 0$.$\star$

Это важное следствие исключает из рассмотрения вклады приближенных решений уравнения движения. В этом смысле полученный формализм оказывается *простым*, свободным от неопределенностей.

*S7. Производящий функционал $\rho$ описывается суммой всех решений, включая тривиальное, уравнения (2. 65).*

Причем это заключение справедливо независимо от "расстояний" между экстремумами действия. Оно следует из того, что $\delta$-функция имеет нулевую ширину:

$$\delta(x) = \lim_{\sigma=0} \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma^2}} e^{-x^2/\sigma^2}.$$

Можно заметить, что в $\rho$ отсутствуют интерференционные вклады от различных решений (2. 65), которые обязательно возникают, если амплитуды записаны в виде суммы вкладов экстремумов действия. Это означает, что в нашем подходе учтена ортогональность пространств Гильберта, которые натянуты на решения (2. 65). $\star$

Однако надо иметь в виду, что, если имеется несколько решений и нет внешних условий, определяющих, какое из них следует учитывать, т.е. в ситуации общего положения, мы должны уметь выделить "физическое" решение. Для этого мы введем следующее правило отбора.

*S8. Пусть $u_c$ и $u'_c$ - решения (2. 65) и пусть $W$ и $W'$ — соответствующие фактор-пространства. Пусть также $V$ — объем $W$ и $V'$ — объем $W'$. Если мы предположим, что $V > V'$, то вклады $u'_c$ можно опустить с точностью $\sim V'/V$. Если это отношение равно нулю, тогда мы будем говорить, что вклады $u'_c$ реализуются на мере ноль.*

Это правило отбора очевидно, если учесть *S7*: поскольку $\delta$-образная мера определяет полный набор вкладов и по всем вкладам следует суммировать, в ситуации общего положения в сумме мы должны отбросить все реализующиеся на нулевой мере вклады.

Отбор по размерности $W$ означает, что наибольший вклад дают те конфигурации полей, которые максимально нарушают симметрию классического действия.$\star$

Однако надо помнить, что в теории поля возможны чисто вакуумные "переходы", связывающие различные вакуумы, которые не отвечают какой-либо динамике. Эти вклады не входят в полную систему, определяемую уравнением (2. 65) в реальном времени (здесь не обсуждаются вклады, которые можно получить *аналитическим продолжением* в область мнимых значений времени). Мы полагаем, что они должны быть добавлены к обсуждаемым вкладам, поскольку им отвечает иная топология полей [81, 82].

Рассмотрение следует начать с "тривиального" решения, объем фактор-пространства которого равен точке, т.е. размерность соответствующего фактор-пространства $\dim W_0 = 0$. Следующим точным регулярным в реальном времени решением является 8-параметрическое $O(4) \times O(2)$-инвариантное решение, $\dim W = 8$ [66]. Наличие нетривиального решения означает, что "тривиальными" конфигурациями полей следует пренебречь при квантовании полей Янга–Миллса.

"Вакуумные вклады" мнимого времени могут быть отброшены, как следует из правила отбора $S8$, если и только если они реализуются на мере ноль. В теории Янга–Миллса имеется точное регулярное в мнимом времени инстантонное решение, для которого $\dim W_{inst} = 5$ [83]. Поэтому этим решением можно пренебречь. Имеются также мультиинстантонные приближенные решения. Однако размерность их фактор-пространства не превышает $\dim W_{inst}$ [84].

# 3 Квантование на фактор-многообразиях

## 3.1 Введение в теорию преобразований

Получив теорию, определенную на $\delta$-образной мере, мы должны в первую очередь найти решения уравнения (2. 64) в виде ряда по степеням $j(x)$. На этом этапе наш подход, если забыть о правиле отбора $S8$, практически ничем не отличается от обычного метода стационарной фазы ВКБ [50, 51]. Он даже несколько сложнее последнего, поскольку, как отмечалось выше, содержит удвоенное число степеней свободы. Однако в действительности дальнейшие вычисления в рамках этой ВКБ-схемы проблематичны.

В нашем представлении проблема заключается в следующем. Предположим, что мы знаем решение $u_c(x)$ уравнения (2. 65). Тогда, в первом порядке по $j(x)$, мы должны решить уравнение

$$(\partial_\mu^2 + v''(u_c))G(x, x'; u_c) = \delta(x - x'), \tag{3. 1}$$

что и представляет определенную проблему.

Дело в том, что, несмотря на кажущуюся простоту, проблема описания движения частицы во внешнем поле, в данном случае $u_c(\mathbf{x}, t)$, конфигурация которого зависит от времени, в действительности столь же сложна, что и исходная задача, поскольку частица в таком поле может бесконтрольно как приобретать, так и терять энергию (см. описание этого вопроса, например, в [80]). Формальная проблема заключается в том, см. (3. 1), что, поскольку поле зависит от 4-координаты, пространство, в котором распространяется частица, потеряло однородность и изотропность.

Это и есть основная проблема, которая будет решена в данной главе. Точнее, мы покажем, как можно обойти эту проблему, перейдя в (3. 2) к новым динамическим переменным. А именно мы выберем такие переменные, чтобы пространство стало однородным и изотропным.

В дальнейшем нас будет интересовать движение в фазовом пространстве. Для этого вместо (2. 46) мы рассмотрим

$$\rho(\beta, z) = \mathrm{e}^{-i\mathbf{K}(j\varphi)} \int DM(u,p)\, \mathrm{e}^{-iU(u;\varphi)} \mathrm{e}^{N(\beta,z;u)}, \tag{3. 2}$$

где

$$DM(u) = \prod_x du(x)dp(x)\, \delta\left(\dot u(x) - \frac{\delta H_j}{\delta p(x)}\right) \delta\left(\dot p(x) - \frac{\delta H_j}{\delta u(x)}\right) \tag{3. 3}$$

и полный гамильтониан

$$H_j(u,p) = \int d^3x \left\{\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(\nabla u)^2 + m^2u^2 + v(u) - ju\right\} \tag{3. 4}$$

включает энергию квантовых возмущений $j(\mathbf{x},t)u(\mathbf{x},t)$.

Заметим, что переход к фазовому пространству отразился лишь на мере $DM(u,p)$ и нетрудно проверить, что представление (3. 3) тождественно совпадает с (2. 46). Это позволяет считать, что мы просто перешли к более удобному для нас "формализму первого порядка".

Чтобы вычислить интеграл (3. 2), надо прежде всего найти все решения уравнений

$$\dot u(x) = \frac{\delta H_j}{\delta p(x)}, \quad \dot p(x) = -\frac{\delta H_j}{\delta u(x)}. \tag{3. 5}$$

Далее мы можем показать, что

*S9. Если*

*— функциональная мера $\delta$-образна (диракова),*

*— оператор, генерирующий ряд теории возмущений $\mathbf{K}$, известен,*

*— функционал, описывающий взаимодействия $U(u,\varphi)$, задан,*

*то формализм допускает произвольные нелинейные канонические преобразования.*

Это утверждение основано на том, что $\delta$-функциональная мера определяет полный набор вкладов в функциональный интеграл.

(См., однако, обсуждение правила отбора $S8$. В связи с этим подчеркнем, что если теория не может быть определена на мере Дирака, как, например, в евклидовых теориях поля, то утверждение *S9* не имеет места.)

Чтобы продемонстрировать *S9*, рассмотрим задачу из квантовой механики, которая является (0+1)-мерной аналогией теории поля. Соответствующая мера

$$DM(u,p) = \prod_t du dp\, \delta\left(\dot u - \frac{\partial H_j}{\partial p}\right) \delta\left(\dot p + \frac{\partial H_j}{\partial u}\right), \tag{3. 6}$$

где полный гамильтониан

$$H_j = \frac{1}{2}p^2 + v(u) - ju \tag{3. 7}$$

оказывается явно зависящим от времени через $j(t)$.

Мы можем ввести новую пару сопряженных координат $(\xi, \eta)$ вместо $(u, p)$. Для этого мы подставим

$$1 = \int D\xi D\eta \prod_t \delta\left(\eta - \frac{1}{2}p^2 - m^2u^2 - v(u)\right)\delta\left(\xi - \int^u dx(2(\eta - v(x)))^{-1/2}\right). \tag{3. 8}$$

Здесь важно учесть, что обе меры, по $(u, p)$ в (3. 6) и по $(\xi, \eta)$ в (3. 8), $\delta$-образны, т.е. имеют одинаковую мощность. Это позволяет уверенно менять порядки интегрирования и сначала проинтегрировать по $(u, p)$.

Однако это справедливо при следующем условии. Как говорилось выше, $\delta$-образность меры ведет к необходимости суммировать по всем решениям уравнения Лагранжа. Иными словами, все фазовое пространство $(u, p)$ должно быть разбито на подпространства, разделенные линиями бифуркации [82]. Причем траектории, принадлежащие каждому из подпространств, имеют различные топологии. В этом смысле каждая из траекторий (фазовых потоков) *полностью* принадлежит своему подпространству. Предполагается, что мы знаем структуру фазового пространства и, меняя вышеуказанный порядок интегрирования, мы рассматриваем конкретное подпространство.

Чтобы вычислить интегралы, мы можем воспользоваться $\delta$-функциями из (3. 6). В этом случае $\delta$-функции из (3. 8) будут давать ограничения на динамику, т.е. определять связи, в данном случае налагаемые начальными условиями, которые мы задаем с помощью $\xi$ и $\eta$.

Однако если воспользоваться $\delta$-функциями из (3. 8), тогда мы совершим отображение $(u, p) \to (\xi, \eta)$. Отметим, что алгебраические уравнения

$$\eta = \frac{1}{2}p^2 + m^2u^2 + v(u), \quad \xi = \int^u dx\,(2(\eta - v(x)))^{-1/2} \tag{3. 9}$$

полностью определяют траекторию $u_c(\xi, \eta)$ и $p_c(\xi, \eta)$ в фазовом пространстве. Оставшиеся после интегрирования по $u$ и $p$ две $\delta$-функции

$$\delta\left(\dot{u}_c - \frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right)\delta\left(\dot{p}_c + \frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right)$$

определят динамику в фактор-пространстве $W$.

Таким образом, можно утверждать, что отображение в $W$ автоматически учитывает связи, т.к. оба из перечисленных выше путей вычисления полностью адекватны друг другу.

Действительно, используя $\delta$-функции (3. 8), мы найдем

$$DM(\xi,\eta) = \prod_t \delta\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right)\delta\left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right), \tag{3. 10}$$

поскольку наше отображение каноническое, $\{\xi(u,p),\eta(u,p)\} = 1$, где

$$h_j(\xi,\eta) = \eta - ju_c(\xi,\eta) = H_j(u_c,p_c) \tag{3. 11}$$

– преобразованный гамильтониан и $(u,p)_c(\xi,\eta)$ – решение алгебраических уравнений (3. 9).

Отметим, преобразование меры никак не затрагивает структуру оператора $\mathbf{K}$ и функционала $U$.

Приведенное выше решение копирует канонические отображения классической механики [82]. Оно основано на предположении, что алгебраические уравнения, см. (3. 9), полностью решают механическую задачу. В этом случае обычно говорят, что задача вполне интегрируема. ⋆

Итак, в приведенном выше примере мы разбили задачу на две части. В первой из них мы нашли фазовый поток $(u,p)_c(\xi,\eta)$, и во второй части мы решаем динамическую задачу нахождения $(\xi,\eta) = (\xi,\eta)(t) \in W$ через уравнения

$$\dot{\xi} = \frac{\partial h_j}{\partial \eta} = 1 - j\frac{\partial u_c}{\partial \eta},\ \dot{\eta} = -\frac{\partial h_j}{\partial \xi} = j\frac{\partial u_c}{\partial \eta}, \tag{3. 12}$$

что отвечает квантованию фактор-пространства $W$. Заметим, что явный вид $p_c$ нам оказался ненужным.

Разложим решение уравнений (3. 12) по $j$:

$$\xi_j(t) = \xi_0(t) + \int dt'\xi_1(t,t')j(t') + ...$$
$$\eta_j(t) = \eta_0(t) + \int dt'\eta_1(t,t')j(t') + ... \tag{3. 13}$$

Подставив эти разложения, найдем, что

$$\xi_0 = t_0 + t,\ \eta_0 = const. \tag{3. 14}$$

Соответственно,

$$\dot{\xi}_1(t,t') = -\delta(t-t')\frac{\partial u_c(\xi_0,\eta_0)}{\partial \eta_0(t)},\ \dot{\eta}_1(t,t') = +\delta(t-t')\frac{\partial u_c(\xi_0,\eta_0)}{\partial \xi_0(t)}. \tag{3. 15}$$

Функция Грина $g(t,t')$ этих уравнений трансляционно инвариантна:

$$\partial_t g(t,t') = \delta(t-t'). \tag{3. 16}$$

Нетрудно видеть, что

*S10. Если справедливо $i\varepsilon$-предписание Фейнмана, то*

$$g(t-t') = \theta(t-t'),\ \ g(0) = 1, \tag{3. 17}$$

*где $\theta(t-t')$ – ступенчатая функция.*

Действительно, с учетом $i\varepsilon$-предписания фурье-образ (3. 16) имеет вид

$$(\omega + i\varepsilon)\tilde{g}(\omega) = 1, \tag{3. 18}$$

что и дает (3. 17).

Заметим, что, в отличие от причинной функции Грина $G(t,t')$, которая есть сумма опережающей и запаздывающей частей, $g(t-t')$ зависит лишь от одной последовательности $t$ и $t'$. Однако, как будет видно из дальнейшего, окончательная теория будет обратима во времени [52]. Отметим также единственность решения (3. 17).

Мы будем использовать также соотношения

$$g(t-t')g(t'-t) = 0,\ \ \ 1 = g(t-t') + g(t'-t),\ \ \ t \neq t', \tag{3. 19}$$

рассматривая $g(t-t')$ как обобщенную функцию.

Надо отметить также, что граничное условие

$$g(0) = 1,$$

см. (3. 17), ниоткуда не следует. Оно выбрано нами исходя из опыта решения задач квантовой механики [50]. ⋆

Итак, отобразив задачу на фактор-пространство $W$, мы нашли путь решения уравнения для функции Грина. Однако задача отображения в фактор-пространство $W$ остается все же незавершенной, т.к. остается зависимость от $j$ – "лагранжева" источника квантовых флюктуаций.

*S11. Если ряд теории возмущений, генерируемый оператором* $\mathbf{K}$, *существует, то существует также и представление (3. 2), в котором*

$$DM(\xi,\eta) = \prod_t d\xi d\eta\, \delta(\dot{\xi} - 1 - j_\xi)\delta(\dot{\eta} - j_\eta), \tag{3. 20}$$

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re}\int_{C_+} dt\ (\hat{\jmath}_\eta(t)\hat{e}_\eta(t) + \hat{\jmath}_\xi(t)\hat{e}_\xi(t)), \tag{3. 21}$$

$$\varphi \to \varphi_c = e_\eta \frac{\partial u_c}{\partial \xi} - e_\xi \frac{\partial u_c}{\partial \eta} \equiv (\varphi_\eta \hat{\xi} - \varphi_\xi \hat{\eta}) u_c. \tag{3. 22}$$

Будем для простоты рассматривать (0+1)-мерную теорию. Действие оператора, генерирующего ряды теории возмущений, дает

$$\mathrm{e}^{-\frac{i}{2}\mathrm{Re}\int_{C_+} dt\, \hat{\jmath}(t)\hat{\varphi}(t)} \mathrm{e}^{-iU_T(x_c,\varphi)} \prod_t \delta\left(\dot{\xi} - 1 + j\frac{\partial x_c}{\partial \eta}\right) \delta\left(\dot{\eta} - j\frac{\partial x_c}{\partial \xi}\right) =$$

$$= \int D\varphi_\xi D\varphi_\eta\, \mathrm{e}^{2i\mathrm{Re}\int_{C_+} dt\, ((\dot{\xi}-1)\varphi_\xi + \dot{\eta}\varphi_\eta)} \mathrm{e}^{-iU_T(u_c,\varphi_c)}, \tag{3. 23}$$

где $\varphi_c$ определено в (3. 22). Интегралы по $(\varphi_h, \varphi_\theta)$ будут, как обычно, вычисляться при помощи разложения в ряд:

$$\mathrm{e}^{-iU_T(u_c,\varphi_c)} = \sum_{n_\xi,n_\eta=0}^{\infty} \frac{1}{n_\xi! n_{eta}!} \int \prod_{k=1}^{n_\xi} (dt_k \varphi_\xi(t_k)) \prod_{k=1}^{n_\eta} (dt'_k \varphi_\eta(t'_k)) \times$$

$$\times P_{n_\xi,n_\eta}(u_c; t_1, ..., t_{n_x}, t'_1, ..., t_{n_\eta}), \tag{3. 24}$$

где

$$P_{n_\xi,n_\eta}(u_c; t_1, ..., t_{n_x}, t'_1, ..., t_{n_\eta}) = \prod_{k=1}^{n_\xi} \hat{\varphi}'_\xi(t_k) \prod_{k=1}^{n_\eta} \hat{e}'_\eta(t'_k)\, \mathrm{e}^{-iU_T(u_c,\varphi'_c)} \tag{3. 25}$$

с $\varphi'_c \equiv \varphi_c(\varphi'_\xi, \varphi'_\eta)$, и производные в этом равенстве вычисляются при $\varphi'_h = 0$, $\varphi'_\theta = 0$. В то же самое время

$$\prod_{k=1}^{n_\xi} \varphi_\xi(t_k) \prod_{k=1}^{n_\eta} \varphi_\eta(t'_k) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n_\xi} (i\hat{\jmath}_\xi(t_k)) \prod_{k=1}^{n_\eta} (i\hat{\jmath}_\eta(t'_k))\, \mathrm{e}^{-2i\mathrm{Re}\int_{C_+} dt\, (j_\xi(t)\varphi_\xi(t) + j_\eta(t)\varphi_\eta(t))}. \tag{3. 26}$$

Предел $(j_\xi, j_\eta) = 0$ предполагается. Подставив (3. 25), (3. 26) в (3. 23), мы найдем новое представление для $R(E)$, в котором $DM$, $\mathbf{K}$ и $\varphi_c$ определены равенствами (3. 20), (3. 21) и (3. 22).

В этом выражении все переменные возмущаются отдельными источниками, и поэтому их перенормировки могут быть проанализированы по отдельности. Очевидно, что размерность теории никак не может повлиять на вывод окончательной формулы. ⋆

## 3.2 Общая теория преобразований

Приведенный выше пример показывает выделенную роль канонических преобразований переменных интегрирования. Это, во-первых, позволяет получить функциональную меру, которая свободна от "духов". И, во-вторых, фактор-пространство $W$ оказывается однородным и изотропным, см. (3. 14), в результате чего уравнение для функции Грина становится разрешимым, поскольку мы переходим в этом случае к переменным типа "действие-угол".

Однако показанное выше решение задачи отображения, по-видимому, непригодно в общем случае. Так, в первую очередь, мы не можем быть уверены, что преобразование в $W$ является каноническим. Например, в кулоновской задаче из-за скрытой $O(4)$-симметрии соответствующее фактор-пространство не является симплектическим [50, 51].

Вместе с этим, общие принципы квантовой теории (соотношение неопределенностей) диктуют условие, что квантовые степени свободы должны принадлежать симплектическому подпространству $T^*W$. Иными словами, вообще говоря, мы должны иметь

$$W = T^*W \times R, \tag{3. 27}$$

где $R$ - пространство $c$-числовых нулевых мод. Все это означает также, что размерность $T^*W$ может не совпадать с размерностью исходного фазового пространства. Равенство (3. 27) означает, что мы должны уметь отделить квантовые степени свободы, принадлежащие $T^*W$, если хотим отобразить динамику в фактор-пространство $\mathcal{H}/\mathcal{G}$.

Более того, в интегрируемых моделях теории поля имеется *бесконечное* число (полиномиальных) законов сохранения. По этой причине использованная выше схема преобразований в кокасательное расслоение $T^*W$ (отображение момента [82]), основанная на решении алгебраических уравнений типа (3. 9), вообще говоря, неудобна.

Поэтому в данной главе мы попытаемся обобщить схему преобразований. Мы сформулируем более общий способ замены переменных в функциональном интеграле, который можно использовать и в теории поля, т.е.

– в системе с бесконечным числом степеней свободы,

– если даже отображение не каноническое.

Мы воспользуемся следующей идеей. Как можно было заметить, классический фазовый поток $(u,p)_c$ полностью принадлежит $W = (\xi,\eta)$. Тогда можно попытаться обратить задачу, полагая, что

(i) многообразие $W \neq \emptyset$ можно восстановить, если известны соответствующие потоки $(u,p)_c$;

(ii) квантовые возмущения не выводят $(u,p)_c$ из $W$.

Мы покажем ниже, что эти предположения оправданы.

Начнем с утверждения, что

*S12. Формализм (0+1)-мерной теории поля, основанный на $\delta$-образной мере, позволяет отделить описание фазовых потоков на кокасательном расслоении $T^*W$ от динамики в фактор-пространстве произвольной размерности $W$, если*

$$W = T^*W = \mathcal{G}/\mathcal{H}. \tag{3. 28}$$

Пусть

$$\Delta(u,p) = \int \prod_t d\xi \delta\eta \; \delta(u(t) - u_c(\xi,\eta))\delta(p(t) - p_c(\xi,\eta)) \tag{3. 29}$$

– функционал переменных $u$ и $p$. Мы полагаем, что $(\xi,\eta) \in W$. В этом выражении $u_c$ и $p_c$ – произвольные заданные функции $(\xi,\eta)(t)$. Наша цель – редуцировать задачу до такого уровня, когда $u_c$ и $p_c$ совпадут с решением уравнений Гамильтона.

Надо отметить, что равенства

$$u(t) = u_c(\xi,\eta),\; p(t) = p_c(\xi,\eta)$$

всегда могут быть удовлетворены при произвольных $\xi$ и $\eta$. Это действительно так, поскольку интегрирование по $u$ и $p$ включает и $u(t) = u_c(\xi,\eta)$, $p(t) = p_c(\xi,\eta)$. Поэтому, вообще говоря, $\Delta(u,p) \neq 0$. Точнее, нам необходимо и достаточно предположить справедливость неравенства

$$\Delta_c(\xi,\eta) = \int \prod_t d\bar{\xi} d\bar{\eta} \delta \left( \frac{\partial u_c}{\partial \xi} d\bar{\xi} + \frac{\partial u_c}{\partial \eta} d\bar{\eta} \right) \delta \left( \frac{\partial p_c}{\partial \xi} d\bar{\xi} + \frac{\partial p_c}{\partial \eta} d\bar{\eta} \right) \neq 0. \tag{3. 30}$$

Отметим, что это условие только на $u_c$ и $p_c$. Оно означает, что производные функций $u_c$ и $p_c$ в направлении вектора $(\bar{\xi},\bar{\eta})$ равны нулю, если и только если все компоненты этого вектора равны нулю.

Чтобы совершить отображение, надо подставить в интегралы

$$1 = \frac{\Delta(u,p)}{\Delta_c(\xi,\eta)}$$

и проинтегрировать по $u$ и $p$, используя $\delta$-функции (3. 29).

В результате мы найдем меру, которая выглядит следующим образом:

$$DM(\xi,\eta) = \frac{1}{\Delta_c(\xi,\eta)} \prod_t d\xi d\eta\, \delta\left(\dot{u}_c - \frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right) \delta\left(\dot{p}_c + \frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right). \qquad (3.\ 31)$$

Далее мы можем написать:

$$\delta\left(\dot{u}_c - \frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right) \delta\left(\dot{p}_c + \frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right) =$$

$$= \delta\left(\frac{\partial u_c}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial u_c}{\partial \eta}\dot{\eta} - \frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right) \delta\left(\frac{\partial p_c}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial p_c}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right) =$$

$$= \int \prod_t d\bar{\xi} d\bar{\eta} \delta\left(\bar{\xi} - \left\{\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right\}\right) \delta\left(\bar{\eta} - \left\{\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right\}\right) \times$$

$$\times \delta\left(\frac{\partial u_c}{\partial \xi}\bar{\xi} + \frac{\partial u_c}{\partial \eta}\bar{\eta} + \{u_c, h_j\} - \frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right) \times$$

$$\times \delta\left(\frac{\partial p_c}{\partial \xi}\bar{\xi} + \frac{\partial p_c}{\partial \eta}\bar{\eta} + \{p_c, h_j\} + \frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right),$$

где скобки Пуассона

$$\{X, h_j\} = \frac{\partial X}{\partial \xi}\frac{\partial h_j}{\partial \eta} - \frac{\partial X}{\partial \eta}\frac{\partial h_j}{\partial \xi} \qquad (3.\ 32)$$

и введена вспомогательная функция $h_j = h_j(\xi,\eta)$. Определим ее соотношениями

$$\{u_c, h_j\} - \frac{\partial H_j}{\partial p_c} = 0, \quad \{p_c, h_j\} + \frac{\partial H_j}{\partial u_c} = 0. \qquad (3.\ 33)$$

Эти равенства всегда могут быть выполнены, до тех пор пока функции $u_c$ и $p_c$ произвольны.

В результате, учитывая (3. 33), поскольку в (3. 30) существенны лишь $\bar{\xi} = 0$ и $\bar{\eta} = 0$, мы получаем

$$\delta\left(\dot{u}_c - \frac{\partial H_j}{\partial p_c}\right) \delta\left(\dot{p}_c - \frac{\partial H_j}{\partial u_c}\right) =$$

$$= \prod_t \delta\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right) \delta\left(\dot{\eta} - \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right) \times$$

$$\times \int \prod_t d\bar{\xi} d\bar{\eta} \delta\left(\frac{\partial u_c}{\partial \xi}\bar{\xi} + \frac{\partial u_c}{\partial \eta}\bar{\eta}\right) \delta\left(\frac{\partial p_c}{\partial \xi}\bar{\xi} + \frac{\partial p_c}{\partial \eta}\bar{\eta}\right) =$$

$$= \prod_t \delta\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right) \delta\left(\dot{\eta} - \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right) \Delta_c(\xi, \eta).$$

Подставив это выражение, мы найдем искомую преобразованную меру

$$DM(\xi, \eta) = \prod_t \delta\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right) \delta\left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right), \tag{3. 34}$$

в которой функциональный детерминант сократился.

Напомним теперь, что переменные $(\xi, \eta) \in T^*W$, т.е. уравнения (3. 33), описывают движение на кокасательном расслоении. В действительности приведенное выше преобразование представляет собой простую замену $(u,p)(t)$ на сложные функции $(u,p)_c(\xi(t), \eta(t))$. Эта замена пока не несет динамической нагрузки исходной задачи в том смысле, что или $(u,p)_c(\xi(t), \eta(t))$, или же $h_j(\xi, \eta)$ остаются пока произвольными, с точностью до условия (3. 30). Теперь нам следует уточнить эти величины. Следующее предложение очевидно:

*S13. Если имеет место равенство*

$$h_j(\xi, \eta) = H_j(u_c, p_c), \tag{3. 35}$$

*то $(u,p)_c(\xi, \eta)$ на мере (3. 34) описывает фазовый поток в исходном фазовом пространстве.*

Формальное доказательство этого равенства достаточно просто. Так, например,

$$\dot{u}_c(\xi, \eta) = \frac{\partial u_c}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial u_c}{\partial \eta}\dot{\eta} \equiv \{u_c, h_j\} = \frac{\partial H_j}{\partial p_c}.$$

Здесь сначала была использована $\delta$-образность меры (3. 34) и далее – первое из равенств (3. 33). То же самое нетрудно получить для $p_c(\xi, \eta)$. В этом смысле приведенный выше вывод повторяет результат $S12$.

Итак, с учетом (3. 35) если $(u,p)_c(\xi(t), \eta(t))$ удовлетворяют уравнениям

$$\{u_c, H_j\} - \frac{\partial H_j}{\partial p_c} = 0, \quad \{p_c, H_j\} + \frac{\partial H_j}{\partial u_c} = 0, \tag{3. 36}$$

то мера $DM(\xi, \eta)$ имеет вид (3. 34) и каноническая система уравнений

$$\dot{\xi} = \frac{\partial h_j}{\partial \eta}, \quad \dot{\eta} = -\frac{\partial h_j}{\partial \xi} \tag{3. 37}$$

описывает поток в фактор-пространстве $W$, которое имеет симплектическую структуру. Это завершает доказательство $S12$. $\star$

Надо здесь заметить, что нами рассматривался вариант теории, для которой фактор-пространство совпадает с его кокасательным расслоением, т.е. нами рассматривался случай, когда $W$ - симплектическое многообразие, см. (3. 28). Однако

*S14. Формализм (0+1)-мерной теории поля, основанный на $\delta$-образной мере, допускает также расширение пространства до симплектического многообразия $(\xi, \eta) \in T^*V$ произвольной размерности, $\dim T^*V \geq \dim W$.*

Иными словами, мы хотим показать, что можно рассматривать отображение в пространство произвольной размерности, но снабженное симплектической метрикой. При этом должен существовать механизм отделения "ненужных" степеней свободы расширенного фактор-пространства $T^*V$ от динамических, так чтобы зависимость от них в дальнейшем можно было сократить. Это означает возможность редукции $T^*V$ до физического фактор-пространства $W$. Мы будем полагать на этом этапе, что $W$ - симплектическое пространство, $W = T^*W$.

Отметим, что вплоть до условия (3. 34) мы могли полагать, что размерность $T^*W$ произвольна. Чтобы сформулировать схему редукции, пусть $W$ есть подпространство

$$T^*V: \; W \subset T^*V,$$

т.е. $\dim T^*V \geq \dim W$. Выделим, соответственно, физическую группу переменных $(\xi, \eta)$ так, чтобы

$$(\xi, \eta) \in W, \quad \dim\{\xi\} = \dim\{\eta\}, \tag{3. 38}$$

а остальные переменные $(\xi', \eta')$ будем считать "нефизическими". Мы можем предположить при этом, что

$$\frac{\partial u_c}{\partial \xi'} \sim \frac{\partial u_c}{\partial \eta'} \sim \varepsilon \to 0, \quad \frac{\partial p_c}{\partial \xi'} \sim \frac{\partial p_c}{\partial \eta'} \sim \varepsilon \to 0, \tag{3. 39}$$

т.е. в пределе $\varepsilon = 0$ зависимость от нефизических степеней свободы исчезает.

С учетом разбиения (3. 39) оператор $\mathbf{K}$ можно записать в виде

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re} \int_{C_+} dt \left\{ \hat{\jmath}_\xi \cdot \hat{e}_\xi + \hat{\jmath}_\eta \cdot \hat{e}_\eta + \hat{\jmath}_{\xi'} \cdot \hat{e}_{\xi'} + \hat{\jmath}_{\eta'} \cdot \hat{e}_{\eta'} \right\}.$$

Однако, с учетом (3. 39) два последних слагаемых в пределе $\varepsilon = 0$ могут быть опущены. В результате

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re} \int_{C_+} dt \left\{ \hat{\jmath}_\xi \cdot \hat{e}_\xi + \hat{\jmath}_\eta \cdot \hat{e}_\eta \right\}. \tag{3. 40}$$

Рассмотрим теперь меру $DM$. Учитывая разбиение (3. 39), а также явный вид оператора (3. 40), можно написать:

$$DM(\xi,\eta)=\prod_t \delta\left(\dot{\xi}-\frac{\partial h_j}{\partial\eta}\right)\delta\left(\dot{\eta}+\frac{\partial h_j}{\partial\xi}\right)\delta\left(\dot{\xi}\right)\delta\left(\dot{\eta}\right),$$

поскольку зависимость от вспомогательных переменных исчезает в пределе $\varepsilon=0$. Отметим теперь, что

$$\int\prod_t dX(t)\delta(\dot{X})=\int dX(0).$$

Поэтому

$$DM(\xi,\eta)=d\xi'(0)d\eta'(0)\prod_t \delta\left(\dot{\xi}-\frac{\partial h_j}{\partial\eta}\right)\delta\left(\dot{\eta}+\frac{\partial h_j}{\partial\xi}\right). \qquad (3.\ 41)$$

Мы будем полагать в дальнейшем, что интеграл по $\xi'(0)$, $\eta'(0)$ сократится нормировкой. Что и требовалось показать. $\star$

Следующее обобщение $S14$ очевидно:

*S15. Квантовые степени свободы могут образовать только четномерные симплектические многообразия.*

Это заключение естественно вписывается в классическую схему квантования, в основе которой лежит соотношение неопределенности. Однако замечательно, что обсуждаемая схема квантования способна выделить подмножество $q$-чисел. Мы будем обозначать его через $T^*W$.

Итак, мы намерены показать, что мы способны определить разбиение

$$W=T^*W\times R, \qquad (3.\ 42)$$

где $R$ - подпространство $c$-чисел. Чтобы увидеть его, пусть вместо равенства (3. 38) имеем, например,

$$(\xi,\eta)\in W,\quad \dim\{\xi\}>\dim\{\eta\}. \qquad (3.\ 43)$$

Напомним, что по определению $T^*V$ - четномерное симплектическое многообразие. Все это означает, что оператор $\mathbf{K}$ имеет вид

$$2\mathbf{K}=\mathrm{Re}\int_{C_+}dt\left\{(\hat{\jmath}_\xi\cdot\hat{e}_\xi)_{N_\eta}+(\hat{\jmath}_\eta\cdot\hat{e}_\eta)_{N_\eta}+\right.$$

$$\left.+\left(\hat{\jmath}_\xi\cdot\hat{e}_\xi\right)_{(N_\xi-N_\eta)}+\left(\hat{\jmath}_{\eta'}\cdot\hat{e}_{\eta'}\right)_{(N_\xi-N_\eta)}\right\},$$

где $N_X = \dim\{X\}$ и скалярное произведение $(X \cdot Y)_N$ содержит $N$ слагаемых. Таким образом, мы добавили $(N_\xi - N_\eta)$ недостающее число переменных $\eta'$. Производные по остальным нефизическим переменным мы опустили в силу $S14$.

Отметим теперь, что в $\mathbf{K}$ последнее слагаемое, $\sim \hat{e}_{\eta'}$, в пределе $\varepsilon = 0$ может быть опущено. По этой причине надо полагать в дальнейшем, что $j_{\eta'} = 0$. В результате в пределе $\varepsilon = 0$ мы найдем меру

$$DM(\xi, \eta) = \prod_t d^{(N_\eta)}\xi \; d^{(N_\xi - N_\eta)}\xi' \; d^{(N_\eta)}\eta \; d^{(N_\xi - N_\eta)}\eta' \times$$

$$\times \delta^{(N_\xi)} \left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right) \delta^{(N_\eta)} \left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right) \delta^{(N_\xi - N_\eta)} \left(\dot{\xi}'\right) \delta^{(N_\xi - N_\eta)} \left(\dot{\eta}' + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right),$$

где было учтено, что $(\partial h_j / \partial \eta') = 0$. Далее, мы всегда можем произвести замену $\dot{\eta}' + \partial h_j / \partial \xi \rightarrow \dot{\eta}'$, поскольку зависимости от $\eta'$ нет. В результате

$$DM(\xi, \eta) = d^{(N_\xi - N_\eta)}\xi'(0) \prod_t d^{(N_\eta)}\xi \; d^{(N_\eta)}\eta \delta^{(N_\eta)} \left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right) \delta^{(N_\eta)} \left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right).$$

Мы для сокращения записи опустили дифференциальную меру $d^{(N_\xi - N_\eta)}\eta'$ как ненужную, поскольку зависимости от $\eta'$ нигде нет.

Заметим, что в мере исчезла зависимость от $j_\xi$, где $\xi$ сопряжена здесь $\eta'$, $\dim \xi = (N_\xi - N_\eta)$. Именно это явление приводит к редукции тех квантовых степеней свободы, которые не составляют канонически сопряженных пар.

Очевидно, что если окажется, что $\dim\{\xi\} < \dim\{\eta\}$, то тогда следует поменять местами $\xi$ и $\eta$ в исходном выражении для $\mathbf{K}$. Таким образом, в общем случае

$$DM(\xi, \eta) = d\Omega_{(N_\xi - N_\eta)} \prod_t \delta^{(\min\{N\})} \left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right) \delta^{(\min\{N\})} \left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right), \tag{3. 44}$$

где при условии, что $\Theta(0) = 1/2$,

$$d\Omega_{(N_\xi - N_\eta)} = \Theta(N_\xi - N_\eta) d^{(N_\xi - N_\eta)}\xi(0) + \Theta(N_\eta - N_\xi) d^{(N_\eta - N_\xi)}\eta(0) \tag{3. 45}$$

- мера интегралов $c$-числовых переменных и, соответственно,

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re} \int_{C_+} dt \left\{ (\hat{\jmath}_\xi \cdot \hat{e}_\xi)_{(\min\{N\})} + (\hat{\jmath}_\eta \cdot \hat{e}_\eta)_{(\min\{N\})} \right\}, \tag{3. 46}$$

где

$$\min\{N\} = \min(N_\xi, N_\eta).$$

Мы показали, таким образом, что если переменная $X$ не имеет канонически сопряженной пары, то ее надо рассматривать как $c$-число и

$$\dim T^*W = \min\{N\}.$$

Возможность выделить $d\Omega_{(N_\xi - N_\eta)}$ означает, что $W$ факторизуется на прямое произведение (3. 42). $\star$

Мы можем теперь перейти к рассмотрению полевых переменных. Промежуточной моделью может служить пример, когда $u(t)$ - $N$-компонентная величина. Тогда $u_{\mathbf{i}}(t) = u(\mathbf{i}, t)$ можно полагать образом поля на *пространственной* решетке, где $\mathbf{i}$ - координата ячейки. В результате мы пришли к предложению:

*S16. Если*

*(i)* $u_c(\mathbf{x}, t; \xi, \eta)$, $p_c(\mathbf{x}, t; \xi, \eta)$ *- точное не сингулярное решение уравнения*

$$\{u_c, h_j\} - \frac{\delta H_j}{\delta p_c} = 0, \quad \{p_c, h_j\} + \frac{\delta H_j}{\delta u_c} = 0, \tag{3. 47}$$

*(ii) удовлетворяющее условию (3. 30), причем*

*(iii) выбрано равенство*

$$h_j(\xi, \eta) = H_j(u_c, p_c), \tag{3. 48}$$

*где*

*(iv) полный гамильтониан*

$$H_j(u_c, p_c) = \int d^3x \tilde{H}_j(u_c, p_c) =$$

$$= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} (\nabla u_c)^2 + m^2 u^2 + v(u) - ju \right\}, \tag{3. 49}$$

*то дифференциальная мера скалярной теории на фактор-пространстве* $(\xi, \eta) \in W$ *имеет вид*

$$DM(\xi, \eta) = d\Omega_{(N_\xi - N_\eta)} \prod_t \delta \left( \dot{\xi}(t) - \frac{\delta h_j}{\delta \eta(t)} \right) \delta \left( \dot{\eta}(t) + \frac{\delta h_j}{\delta \xi(t)} \right), \tag{3. 50}$$

*где*

$$\dim\{\xi\} = \dim\{\eta\} = \min\{N_\xi, N_\eta\}$$

*и*

$$d\Omega_{(N_\xi - N_\eta)} = \Theta(N_\xi - N_\eta) d^{(N_\xi - N_\eta)} \xi(0) + \Theta(N_\eta - N_\xi) d^{(N_\eta - N_\xi)} \eta(0),$$

*и оператор, генерирующий квантовые возмущения,*

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re} \int_{C_+} dt \left\{ \hat{j}_\xi(t) \cdot \hat{e}_\xi(t) + \hat{j}_\eta(t) \cdot \hat{e}_\eta(t) \right\}. \tag{3. 51}$$

Доказательство этого утверждения прямо следует из утверждений $S12$ - $S15$. Замечательно, что теоретико-полевая задача на фактор-пространстве совпадает с квантово-механической. $\star$

Подставив (3. 47) в (3. 48), мы найдем равенства

$$\{u_c(\mathbf{x}; \xi(t), \eta(t)), u_c(\mathbf{y}; \xi(t), \eta(t))\} = 0,$$

$$\{p_c(\mathbf{x}; \xi(t), \eta(t)), p_c(\mathbf{y}; \xi(t), \eta(t))\} = 0,$$

$$\{u_c(\mathbf{x}; \xi(t), \eta(t)), p_c(\mathbf{y}; \xi(t), \eta(t))\} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{3. 52}$$

которые должны выполняться при любом значении $j(\mathbf{x}, t)$. Таким образом, найденная схема квантования переносит каноническую схему в фактор-пространство.

# 4 $O(4,2)$-инвариантная скалярная теория

Мы начнем рассмотрение со скалярной теории, которая более проста, чем теория векторных полей Янга–Миллса, но обладает самой высокой, перед общекоординатными преобразованиями, конформной группой симметрии $O(4,2)$.

## 4.1 Производящий функционал скалярного безмассового поля

Мы будем вычислять $2N$-мерный функциональный интеграл

$$\rho(\beta, z) = \mathrm{e}^{-i\mathbf{K}(je)} \int DM(\xi, \eta)\, \mathrm{e}^{-iU(u_c;\varphi_c)} \mathrm{e}^{-N(\beta, z; u_c)} \tag{4. 1}$$

для $O(4,2)$-инвариантной скалярной теории. Здесь

$$N(\beta, z; u_c) = n(\beta_i, z_i; u_c) + n^*(\beta_f, z_f; u_c), \tag{4. 2}$$

$$n(\beta, z; u_c) = \int d\omega_1(q, z)\, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon(q)} \Gamma(q, u_c) \Gamma^*(q, u_c), \tag{4. 3}$$

$$\Gamma(q, u_c) = \int dx\, \mathrm{e}^{-iqx} \partial^2 u_c(x), \quad q^2 = 0, \tag{4. 4}$$

$$U(u_c;\varphi_c) = 2g\mathrm{Re}\int_{C_+} d^3x dt\, \varphi_c^3(\mathbf{x},t) u_c(\mathbf{x};\xi(t),\eta(t)), \tag{4. 5}$$

$$\varphi_c(\mathbf{x},t) = e_\xi(t)\frac{\partial u_c(\mathbf{x};\xi(t),\eta(t))}{\partial\eta(t)} - e_\eta(t)\frac{\partial u_c(\mathbf{x};\xi(t),\eta(t))}{\partial\xi(t)}, \tag{4. 6}$$

$$DM(u) = d\Omega\prod_t d\xi(t)d\eta(t)\,\delta\left(\dot\xi - \frac{\partial h}{\partial\eta} - j_\xi\right)\delta\left(\dot\eta + \frac{\partial h}{\partial\xi} - j_\eta\right), \tag{4. 7}$$

где

$$h(\xi,\eta) = h_j(\xi,\eta)\big|_{j=0},$$

и, наконец,

$$2\mathbf{K}(j\varphi) = \mathrm{Re}\int_{C_+} dt\,\{\hat\jmath_\xi(t)\cdot\hat e_\xi(t) + \hat\jmath_\eta(t)\cdot\hat e_\eta(t)\}\,. \tag{4. 8}$$

Предполагается, что

$$W = T^*W\times R,\quad (\xi,\eta)\in T^*W,\quad \dim W = 8,\quad \dim T^*W = 2N \le 8. \tag{4. 9}$$

Следует здесь отметить, что, вообще говоря, $\Gamma(q,u_c)\neq 0$, поскольку, даже если поля достаточно быстро убывают на $\sigma_\infty$, $u_c = u_c(\mathbf{x};\xi(t),\eta(t))$ зависит от сингулярных (обобщенных) функций $\xi(t)$ и $\eta(t)$, которые определены через функцию Грина (3. 17), см. $S10$.

Нам будет удобно произвести такую замену переменных в $2N$-мерном функциональном интеграле (4. 1), чтобы исключить в мере (4. 7) зависимость от $2N$ источников $j_x$, $j_\eta$. Пусть производится сдвиг

$$\begin{aligned}\xi(t) &\to \xi(t) + \int dt_1 g(t-t_1)j_\xi(t) \equiv \xi(t) + \xi_j(t),\\ \eta(t) &\to \eta(t) + \int dt_1 g(t-t_1)j_\eta(t) \equiv \eta(t) + \eta_j(t),\end{aligned} \tag{4. 10}$$

где $g(t-t_1)$ - функция Грина (3. 17). Тогда везде

$$u_c = u_c(\mathbf{x};\xi(t)+\xi_j(t),\eta(t)+\eta_j(t)). \tag{4. 11}$$

Следовательно,

$$DM(\xi,\eta) = d\Omega\prod_t d\xi(t)d\eta(t)\,\delta\left(\dot\xi - \omega(\eta+\eta_j)\right)\delta\left(\dot\eta\right). \tag{4. 12}$$

Здесь мы учли, что $\xi$ и $\eta$ - канонически сопряженные переменные и, соответственно,

$$\frac{\partial h}{\partial\xi} = 0. \tag{4. 13}$$

Было введено также обозначение

$$\omega_i(\eta) = \frac{\partial h(\eta)}{\partial \eta_i}. \tag{4. 14}$$

Произведя сдвиг (4. 10), мы должны переопределить генерирующий возмущения оператор следующим образом:

$$2\mathbf{K} = \mathrm{Re} \int_{C_+} dt \left\{ \hat{\xi}_j(t) \cdot \hat{e}_\xi(t) + \hat{\eta}_j(t) \cdot \hat{e}_\eta(t) \right\} =$$

$$= \mathrm{Re} \int_{C_+} dt dt_1 \, \theta(t - t_1) \left\{ \hat{\jmath}_\xi(t_1) \cdot \hat{e}_\xi(t) + \hat{\jmath}_\eta(t_1) \cdot \hat{e}_\eta(t) \right\}. \tag{4. 15}$$

## 4.2 Структура $O(4,2)/O(4) \times O(2)$ фактор-пространства

Нас будет интересовать квантование $O(4) \times O(2)$-инвариантного решения [86]:

$$u_c(x) = \left\{ \frac{-(\varsigma - \sigma)^2}{g(x-\varsigma)^2(x-\sigma)^2} \right\}^{1/2}. \tag{4. 16}$$

Оно регулярно, если 4-векторы $\varsigma$ и $\sigma$ комплексны, и оно действительно, если

$$\varsigma^* = \sigma = x_0 + i\lambda'. \tag{4. 17}$$

Тогда (4. 16) может быть записано в виде

$$\sqrt{g} u_c(x) = \left\{ \frac{4\eta^2}{(\eta^2(x+x_0)^2 - 1)^2 + 4(\eta(x+x_0)_\mu \lambda^\mu)^2} \right\}^{1/2}, \tag{4. 18}$$

где $\lambda^2 = \lambda_0^2 - \lambda_i^2 = +1$. Это решение зависит от 8 параметров $(x_{0\mu},\ \lambda_i,\ \eta)$, где $\mu = 0, 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3$.

Подставив эти выражения в

$$h = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\, p_c^2 + \frac{1}{2}(\nabla u_c)^2 + \frac{g}{4}\, u_c^4 \right\}, \tag{4. 19}$$

мы найдем, что

$$h = \eta \Phi(\lambda_i^2). \tag{4. 20}$$

Равенство (4. 20) можно считать *определением* набора переменной $\eta$.

Мы будем полагать, что "физическое" фактор-пространство $W$ ограничено неравенствами

$$\eta^2 \geq 0, \quad -\infty \leq \lambda_i \leq +\infty, \quad -\infty \leq x_{0\mu} \leq +\infty. \tag{4. 21}$$

Заметим, что первое из этих неравенств обеспечивает положительность энергии классического поля.

Нам надо теперь определить редукцию квантовых степеней свободы, которая ведет к

$$W = T^*W \times R. \tag{4. 22}$$

Для этого мы должны еще раз рассмотреть уравнения (3. 47)

$$\{u_c, h\} - \frac{\delta H}{\delta p_c} = 0, \quad \{p_c, h\} + \frac{\delta H}{\delta u_c} = 0. \tag{4. 23}$$

Как отмечалось выше, уравнения (3. 47) должны выполняться для любых $j_\xi$, $j_\eta$, и в частности при $j_\xi = 0$, $j_\eta = 0$. Поэтому с учетом (4. 20) первое из уравнений (4. 23) дает

$$\frac{\partial u_c}{\partial \xi}\frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{\delta H}{\delta p_c} = p_c. \tag{4. 24}$$

В результате нетрудно найти, что искомая параметризация поля имеет вид ($\lambda \equiv |\lambda_i|$):

$$u_c(\mathbf{x}; \xi, \eta) = \frac{2\eta\Phi^2(\lambda)}{\sqrt{g}} \left\{ \left(\eta^2\xi^2 - \Phi^2(\lambda)\eta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^2 - \Phi^2(\lambda)\right)^2 + \right.$$

$$\left. +4\eta^2\Phi^2(\lambda) \left(\xi(1+\lambda^2)^{1/2} - \Phi(\lambda)\lambda_i(x - x_0)_i\right)^2 \right\}^{-1/2}. \tag{4. 25}$$

Нетрудно проверить, что (4. 25) удовлетворяет первому из уравнений (4. 24) тождественно.

Параметризация (4. 25) удобна тем, что в этом случае

$$DM = d^3\lambda d^3x_0 \prod_t d\xi d\eta \delta(\dot{\xi} - \Phi(\lambda))\delta(\dot{\eta}). \tag{4. 26}$$

Тогда уравнения

$$\dot{\xi}(t) = \Phi(\lambda), \ \dot{\eta}(t) = 0 \tag{4. 27}$$

определяют динамику в пространстве $W$ и имеют решения

$$\xi(t) = \Phi(\lambda)(t - t_0), \ \eta(t) = \eta_0 = const, \tag{4. 28}$$

что завершает определение функциональной меры в фактор-пространстве $W = O(4,2)/O(4) \times O(2)$. Подставив (4. 28) в (4. 25), мы найдем, что полученное таким образом решение удовлетворяет исходному уравнению Лагранжа тождественно.

В результате мы получили

$$\{\xi, \eta\} \in T^*W, \ \dim T^*W = 2; \quad \{x_{0i}, \lambda_i\} \in R, \ \dim R = 6. \tag{4. 29}$$

## 4.3 Законы сохранения в фактор-пространстве

Вернемся к граничному условию (2. 17). Оно означает, что

$$u_c(x \in \partial\sigma^+_\infty) = u_c(x \in \partial\sigma^-_\infty), \qquad (4.\ 30)$$

где $\partial\sigma^\pm_\infty$ - границы на бесконечно удаленной гиперповерхности $\sigma_\infty$ ветви $C_\pm$ соответственно. Условия (4. 30), в зависимости от топологии поля $u_c(\mathbf{x}, t)$, могут ограничить решения уравнений (4. 27).

Чтобы прокомментировать это замечание, рассмотрим прежде простейшую задачу о движении частицы в потенциальной яме $v(u)$. Действие этой задачи имеет вид

$$S_T(u) = \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{2}\dot{u}^2 - v(u) \right\},$$

где $(0, T)$ - интервал движения, т.е. начало движения никак не задано. Если энергия частицы $E$ задана, то по $T$ следует проинтегрировать. Таким образом, мера Дирака $DM$ этой задачи содержит две $\delta$-функции [64]. Обычная (одномерная) $\delta$-функция дает уравнение

$$E = -\eta_q + H_j(u(T)),$$

где $\eta_q$ - энергия квантовых поправок и $H_j(u(T))$ - полный гамильтониан в момент времени $T$. Вторая, функциональная $\delta$-функция дает уравнение движения

$$\ddot{u} + m^2 u + v'(u) = j.$$

Решение этого уравнения при $j = 0$ задается, например, энергией $\eta(0)$ и начальным моментом времени $\xi(0)$. Напомним, что, вообще говоря, по $\eta(0)$, $\xi(0)$ следует проинтегрировать.

При получении $\delta$-образной меры Дирака было использовано периодическое граничное условие

$$u(t \in \partial C_+(T)) = u(t \in \partial C_-(T)).$$

Далее, поскольку мы хотим описать периодическое движение в потенциальной яме, это граничное условие может быть удовлетворено для множества значений $\xi(0)$. Так, нетрудно найти, что если $\xi(t \in C_\pm) \equiv \xi_\pm$, то

$$\xi_+ - \xi_- = \Delta\xi = kP(E) + t_0, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$$

где $P(E)$ - период и $0 \le t_0 \le P(E)$. Именно эта необходимость суммировать по всем $k$ приводит к квантованию уровней энергии [64]. Отметим также, что граничное условие дает равенство

$$\eta_+ = \eta_-,$$

где $\eta(t \in C_\pm) \equiv \eta_\pm$.

Поскольку $\eta$ и $\xi$ составляют канонически сопряженную пару (см. параграф 3.1), они могут быть использованы как обобщенные импульс и координата соответственно. Тогда, нормируя $\xi$ на период, мы найдем, что полученная выше неопределенность с выбором начального условия отвечает вращению с числом поворотов $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, т.е. число $k$ определяет, сколько раз покрывается окружность при отображении $(u, p) \to (\xi, \eta)$. При этом следует просуммировать по всем целым $k$.

Это же явление приводит к тому, что импульсы и положения топологических солитонов модели $sin$-Гордона, определенных на ветвях $C_+$ и $C_-$, совпадают, но с точностью до некоторого числа. Суммирование по его значениям приводит к квантованию топологического заряда солитонов и, соответственно, к их стерильности по отношению к испусканию и поглощению частиц [52].

Таким образом, если исследуется задача с замкнутой классической траекторией, тогда наши граничные условия приводят к периодическим соотношениям между константами интегрирования $\xi(0)_+$ и $\xi(0)_-$, принадлежащими соответственно контурам $C_+$ и $C_-$. Это свойство траекторий в конфигурационном пространстве формулируется обычно как условие существования группы гомотопий [87].

Имеется также другая возможность, когда траектория незамкнута, т.е. не имеет каких-либо топологических свойств. Однако все же надо учитывать, что граничное условие (2. 17) обеспечивает замкнутость траектории на полном временном контуре $C = C_+ + C_-$. В этом случае, условно, мы будем говорить о синглете группы гомотопий.

Итак, в первую очередь нам следует определить отношение рассматриваемого вклада к группе гомотопий. Нетрудно найти, что топологический заряд обсуждаемого $O(4) \times O(2)$-инвариантного решения равен нулю [66]. Таким образом, нами рассматривается синглет группы гомотопий. Покажем, однако, что

*S17. Перенормированный тензор энергии-импульса $Q_\mu = T_{\mu\mu}(u_c)$ совпадает с полным 4-импульсом налетающих частиц.*

Подставив решение (4. 28) в (4. 25), из (4. 30) мы получим равенство

$$\eta_-^2 \left\{ \left( \eta_+^2 (t + t_+)^2 - \eta_+^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_+)^2 - 1 \right)^2 + \right.$$

$$\left. +4\eta_+^2 \left( (t + t_+)(1 + \lambda_+^2)^{1/2} - \lambda_{i+}(x - x_+)_i \right)^2 \right\} =$$

$$= \eta_+^2 \left\{ \left( \eta_-^2 (t + t_-)^2 - \eta_-^2 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_-)^2 - 1 \right)^2 + \right.$$

$$+4\eta_-^2\left((t+t_-)(1+\lambda_-^2)^{1/2}-\lambda_{i-}(x-x_-)_i\right)^2\Bigg\},$$

которое должно выполняться при $x_\mu \in \sigma_\infty$. Отсюда непосредственно находим, что

$$\eta_+=\eta_-,\quad \lambda_{i-}=\lambda_{i-},\ i=1,2,3. \tag{4. 31}$$

Однако никаких условий на $x_{\mu,\pm}$ не возникает.

В результате дифференциальная мера (4. 26) в действительности имеет вид

$$dM=d^3\lambda d\eta d^4x_+d^4x_-=\frac{1}{16}d^3\lambda d\eta d^4x_0d^4\Delta, \tag{4. 32}$$

где

$$\Delta=x_+-x_-,\quad x_0=x_++x_-.$$

Произведя сдвиги $x\to x-x_\pm$, мы можем выделить из $\Gamma(q,u_c)$ зависимость от $x_\pm$:

$$|\Gamma(q,u_c)|^2=\mathrm{e}^{iq\Delta}|\Gamma'(q,u_c)|^2, \tag{4. 33}$$

где $\Gamma'(u_c)$ уже не зависит от $x_0$. Мы увидим, что вариация поля по $x_\pm$ дает множитель $\exp\{-iQ_\mu\Delta^\mu\}$, где $Q_\mu(u_c)=T_{\mu\mu}(u_c)$ - перенормированный тензор энергии-импульса.

Разлагая подынтегральное выражение по степеням $|\Gamma(q,u_c)|^2$ и учитывая (4. 33), мы найдем, что в результате интегрирования по $\Delta$ возникнет $\delta$-функция закона сохранения энергии-импульса:

$$\delta^4(\sum_i p_i-Q(u_c)), \tag{4. 34}$$

которая связывает полный 4-импульс налетающих (или же рожденных) частиц с 4-импульсом классического поля $Q_\mu(u_c)$.

Покажем теперь, что в (4. 34) $Q_\mu$ - тензор энергии-импульса. По определению

$$U(u_c,e)=\Big(S_{C_+}(u_c+e)-S_{C_-}(u_c-e)\Big)+2\mathrm{Re}\int_{C_+}dx\left(\partial^2u_c+v'(u_c)\right)e \tag{4. 35}$$

или, что то же самое,

$$U(u_c,e)=\left\{S(u_c)-g\int dx\,u_c(x)e(x)^3\right\}_{C_+}-\left\{S(u_c)+g\int dx\,u_c(x)e(x)^3\right\}_{C_-}. \tag{4. 36}$$

Рассмотрим разность

$$\delta S(u_c)=S_{C_+}(u_c)-S_{C_-}(u_c),$$

которой в предыдущих выражениях мы пренебрегали, см. (2. 56). Эта разность есть вариация действия $\delta S(u_c)$ относительно группы трансляций:

$$x_\mu \to x_\mu + \delta x_\mu, \quad \delta x_\mu = \Delta_\mu.$$

Тогда, в низшем порядке по $\Delta$,

$$\delta S(u_c) = \Delta^\mu T_{\mu\mu}(u_c) + \widetilde{\delta S}(\Delta), \tag{4. 37}$$

где $T_{\mu\mu}(u_c)$ - тензор энергии-импульса поля и последний член включает высшие степени $\Delta$. Нетрудно проверить, что этот член не играет никакой роли. Действительно, мы можем написать:

$$\mathrm{e}^{-i\widetilde{\delta S}(\Delta)} = \mathrm{e}^{i\hat\tau\hat\sigma}\mathrm{e}^{-i\varsigma\Delta}\mathrm{e}^{-i\widetilde{\delta S}(\tau)}, \tag{4. 38}$$

где $\hat\sigma$ означает соответствующую производную в нуле. Подставив это выражение, мы найдем, что $\delta$-функция закона сохранения имеет вид

$$\mathrm{e}^{i\hat\tau\hat\varsigma}\delta(\sum_i p_i - Q - \varsigma)\mathrm{e}^{-i\widetilde{\delta S}(\tau)}. \tag{4. 39}$$

Однако сдвиг аргумента $\delta$-функции невозможен, т.к.

$$(\mathrm{e}^{-i\hat\varsigma\hat\tau} - 1)\delta(\sum_i p_i - Q - \varsigma)\mathrm{e}^{-i\widetilde{\delta S}(\tau)} \equiv 0. \tag{4. 40}$$

При этом было использовано следующее свойство $\delta$-функции:

$$\frac{\partial}{\partial\varsigma}\delta\left(\sum_i p_i - Q - \varsigma\right)\Big|_{\varsigma=0} = -\delta\left(\sum_i p_i - Q\right)\frac{\partial}{\partial Q}.$$

Это завершает доказательство *S17.* $\star$

В результате

$$\rho(\alpha, z) = \mathrm{e}^{-i\mathbf{K}}\int dM\, \mathrm{e}^{iQ_\mu(u_c)\Delta^\mu}\mathrm{e}^{-iU(u_c,\varphi)}\mathrm{e}^{-N(\alpha,z;u_c)}, \tag{4. 41}$$

где $dM$ определено в (4. 32).

# 5 Неабелевы калибровочные теории

Ниже мы рассмотрим лишь векторные калибровочные поля, полагая, что взаимодействия с полями материи (кварков) могут быть учтены по теории возмущений. Поэтому часть результатов данной главы для теории поля Янга–Миллса будет иметь ограниченную область применимости. Например, мы не можем утверждать, что перенормировка массы кварков отсутствует. Этот вопрос требует дополнительного обсуждения.

## 5.1 Теория Янга–Миллса на мере Дирака

Действие рассматриваемой теории

$$S(A) = \frac{1}{2g} \int d^4x \, F_{\mu\nu a}(A) F_a^{\mu\nu}(A) \tag{5. 1}$$

$O(4,2)$-инвариантно. Поля Янга–Миллса

$$F_{\mu\nu a}(A) = \partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - C_a^{bc} A_{\mu b} A_{\nu c} \tag{5. 2}$$

- коварианты неабелевых калибровочных преобразований. Мы не будем фиксировать калибровочную группу.

Для простоты начнем рассмотрение с интеграла

$$\mathcal{N} = \mathrm{e}^{-i\mathbf{K}(je)} \int DM \, \mathrm{e}^{-2iU(A,e)}, \tag{5. 3}$$

где мера

$$DM(A) = \prod_{\mu,a} \prod_x dA_\mu^a(x,t) \delta(D_a^{\nu b} F_{\nu\mu b} - j_{\mu a}) \tag{5. 4}$$

явно конформно и калибровочно инвариантна, если $j_{\mu a} = 0$. Ковариантная производная

$$D_a^{\mu b} = \partial^\mu \delta_a^b + C_a^{bc} A_c^\mu.$$

Оператор, генерирующий возмущения,

$$2\mathbf{K}(je) = \mathrm{Re} \int_{C_+} d^4x \frac{\delta}{\delta j_a^\mu(x,t)} \frac{\delta}{\delta e_{\mu a}(x,t)}. \tag{5. 5}$$

Как обычно, $j_{\mu a}$ и $e_a^\mu$ следует взять равными нулю в самом конце вычислений. Функционал

$$\begin{aligned} -2U(A,e) = (S_{C_+}(A+e) - S_{C_-}(A-e)) - \\ -2\mathrm{Re} \int_{C_+} d^4x \, e_a^\mu(x) \frac{\delta S(A)}{\delta A_a^\mu} + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{5. 6}$$

описывает взаимодействия. Все величины определены на комплексном контуре Миллса. В (5. 6) можно опускать члены $\sim \epsilon \to +0$. Следовательно, $U(A,e) = O(e^3)$ и содержит лишь нечетные степени $e_{a\mu}$. Это означает, что $U(A,e)$ может быть записан в форме

$$U(A,e) = -\int d^4x \left\{ e_a^\mu(x) \frac{\delta}{\delta A_a^\mu(x)} \right\}^3 S(A). \tag{5. 7}$$

## 5.2 Формализм первого порядка

Нековариантный формализм с "электрическим" полем

$$E_a^i = F_a^{i0} \tag{5. 8}$$

представляет введение в необходимое нам гамильтоново описание. Действие в этом случае имеет вид

$$S_{C\pm}(A,F) = \frac{1}{g}\int_{C\pm} d^4x \left\{ \dot{\mathbf{A}}_a \cdot \mathbf{E}_a + \frac{1}{2}(\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{B}_a^2(\mathbf{A})) - A_{0a}(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E})_a \right\}, \tag{5. 9}$$

где "магнитное" поле

$$\mathbf{B}_{ia}(\mathbf{A}) = (\mathrm{rot}\mathbf{A})_{ia} + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}[\mathbf{A}_j, \mathbf{A}_k]_a \tag{5. 10}$$

не является независимой величиной и было введено лишь для краткости записи формул. Отметим, что $A_{0a}$ не имеет сопряженной пары и действие $S$ линейно по этой величине.

Мера (5. 4) может быть записана в формализме первого порядка:

$$DM(\mathbf{A},\mathbf{P}) = \prod_a \prod_x d\mathbf{A}_a(x)\, d\mathbf{P}_a(x)\, \delta(\mathbf{D}_a^b \cdot \mathbf{P}_b) \times$$

$$\times \delta\left( \dot{\mathbf{P}}_a(x) + \frac{\delta H_j(\mathbf{A},\mathbf{P})}{\delta \mathbf{A}_a(x)} \right) \delta\left( \dot{\mathbf{A}}_a(x) - \frac{\delta H_j(\mathbf{A},\mathbf{P})}{\delta \mathbf{P}_a(x)} \right), \tag{5. 11}$$

где $d\mathbf{A}_a(x) d\mathbf{P}_a(x) = \prod_i dA_{ia} d\mathbf{P}_{ai}(x)$ и $H_j(\mathbf{A},\mathbf{P})$ - полный гамильтониан:

$$H_j = \frac{1}{2g}\int d^3x \left( \mathbf{P}_a^2 + \mathbf{B}_a^2(\mathbf{A}) \right) + \int d^3x \mathbf{j}_a \mathbf{A}_a, \tag{5. 12}$$

$\mathbf{P}_a(x) \equiv \mathbf{E}_a(x)$ - сопряженный $\mathbf{A}_a(x)$ импульс и $\mathbf{B}_a(\mathbf{A})$ было определено в (5. 10). В $DM$ может быть введена дополнительная $\delta$-функция:

$$\prod_a \prod_x \delta(\mathbf{B}_a^i - (\mathrm{rot}\mathbf{A})_a^i - \frac{1}{2}\varepsilon_{jk}^i [A^j, A^k]_a). \tag{5. 13}$$

Тогда гамильтониан в (5. 12) оказывается симметричной по полям $\mathbf{E}_a$ и $\mathbf{B}_a$ структурой.

Отметим, что первая $\delta$-функция в (5. 11) является следствием линейности действия по $A_{0a}$. Временная компонента $A_{0a}$ действительно имеет смысл лагранжева множителя закона Гаусса:

$$\mathbf{D}_a^b \cdot \mathbf{P}_b = 0. \tag{5. 14}$$

Следует подчеркнуть отсутствие уравнения для $A_{0a}$. Более того, зависимость от $A_{0a}$ полностью исчезла, т.к. описывающий взаимодействия функционал $U(A, e)$ определяется третьей производной по $A_{\mu a}$, см. (5. 7).

## 5.3 Отображение в фактор-пространство

Мера (5. 11) не имеет физического смысла, поскольку зависит от трех (для данного $a$) вектор-потенциалов $\mathbf{A}_a(x)$. Чтобы исключить нефизические степени свободы, обычно используется фиксирующий калибровку *ansatz* Фаддеева–Попова. Однако нам будет более удобен иной подход.

Так же как во второй главе, мы введем

$$\Delta(A, P) = \int D\xi D\eta \times$$

$$\times \prod_a \delta\left(\mathbf{A}_a(x) - \mathbf{u}_a(x; \xi(x), \eta(x))\right) \delta\left(\mathbf{P}_a(x) - \mathbf{p}_a(x; \xi(x), \eta(x))\right), \tag{5. 15}$$

чтобы реализовать преобразование

$$u: \ (A, P)_a(x) \to (\xi, \eta)(x) \tag{5. 16}$$

с помощью сложных векторных функций $(\mathbf{u}, \mathbf{p})_a(x; \xi(x), \eta(x))$ к локальным в *пространстве-времени* функциям $(\xi, \eta)(x)$. Предполагается, что $\Delta \neq 0$.

Совершив преобразование (5. 16), мы найдем

$$DM(\xi, \eta) = \frac{1}{\Delta_c(u)} \prod_a \prod_x d\xi d\eta d\lambda_a dq_a \delta(\mathbf{D}_a^b \cdot \mathbf{p}_b) \times$$

$$\times \delta\left(\dot{\mathbf{u}}_a(x) - \frac{\delta H_j}{\delta \mathbf{p}_a(x)}\right) \delta\left(\dot{\mathbf{p}}_a(x) + \frac{\delta H_j}{\delta \mathbf{u}_a(x)}\right). \tag{5. 17}$$

Вообще говоря, набор $\xi, \eta$ произволен. Это отмечалось в параграфе 3.2 (см. *S14*). Поэтому мы можем рассматривать фазу калибровочных преобразований $\lambda_a$ и сопряженный ей заряд $q_a$ наравне с $\xi$ и $\eta$. Однако для удобства зависимость от $\lambda_a(\mathbf{x}, t)$ и $q_a(\mathbf{x}, t)$ была выделена из наборов $\xi(t)$ и $\eta(t)$.

Повторив приведенные во второй главе вычисления, мы найдем

$$DM(\xi, \eta, \lambda, Q) = \prod_{x,t,a} d\xi d\eta d\lambda dq \delta\left(\mathbf{D}_a^b(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{p}_b\right) \times$$

$$\times \delta\left(\dot{\lambda}_a - \frac{\delta h_j}{\delta q_a}\right) \delta\left(\dot{q}_a + \frac{\delta h_j}{\delta \lambda_a}\right) \delta\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right) \delta\left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right). \qquad (5.\ 18)$$

Равенство (5. 18) выполняется, если и только если $h_j$ определены уравнениями Пуассона (при заданных 3-векторах $\mathbf{u}_a$ и $\mathbf{p}_a$):

$$\{\mathbf{u}_a(x), h_j\} = \frac{\delta H_j}{\delta \mathbf{p}_a(x)},\ \{\mathbf{p}_a(x), h_j\} = -\frac{\delta H_j}{\delta \mathbf{u}_a(x)}. \qquad (5.\ 19)$$

При этом $(\xi, \eta)$ и $(\lambda, q)$ в скобках Пуассона выбраны как канонически сопряженные пары.

Если добавить к (5. 19) еще одно равенство:

$$h_j(\xi, \eta, \lambda, q) = H_j(\mathbf{u}_a, \mathbf{p}_a), \qquad (5.\ 20)$$

то, как было показано выше, $\mathbf{u}_a$ и $\mathbf{p}_a$ должны совпадать с решениями исходных уравнений, при условии что (5. 19) удовлетворяются на мере (5. 18). Тогда

$$\mathbf{D}_a^b(u) \cdot \mathbf{p}_b \equiv 0, \qquad (5.\ 21)$$

поскольку $\mathbf{p}_b$ - решение уравнений (5. 19) при произвольных $j_{\mu a}$. Этот замечательный результат является следствием отображения в инвариантное пространство $\mathcal{G}/\mathcal{H}$, которому классический фазовый поток полностью принадлежит. Таким образом, соответствующая (5. 21) $\delta$-функция в (5. 18) дает тождественно

$$\prod_x \delta(0).$$

Этот бесконечный множитель сократится нормировкой и не будет явно выписываться.

Итак, описанное отображение дает

$$DM(\xi, \eta, \lambda, Q) = \prod_{x,t;a} d\lambda_a dq_a d\xi d\eta\, \delta\left(\dot{\lambda}_a\right) \delta\left(\dot{q}_a + \frac{\delta h_j}{\delta \lambda_a}\right) \times$$

$$\times \delta\left(\dot{\xi} - \frac{\partial h_j}{\partial \eta}\right) \delta\left(\dot{\eta} + \frac{\partial h_j}{\partial \xi}\right). \qquad (5.\ 22)$$

Здесь было учтено, что $(u,p)_a$ не зависят от $q_a$. Гамильтониан $h_j$ определяется равенством (5. 20):

$$2gh_j = \int d^3x \left(p_a^2 + \mathbf{B}_a^2(u)\right) + \int d^3x\, \mathbf{j}_a \mathbf{u}_a \equiv h + J, \tag{5. 23}$$

где $h$ - невозмущенный силой $\mathbf{j}_a$ гамильтониан.

Воспользовавшись предложением *S15*, мы можем исключить зависимость от $q_a$:

$$DM(\xi,\eta,\lambda) = dR \prod_{x;a} d\lambda_a d\xi d\eta\, \delta(\dot{\lambda}_a)\delta\left(\dot{\xi} - \omega - j_\xi\right)\delta\left(\dot{\eta} - j_\eta\right), \tag{5. 24}$$

где "скорость" $\omega = \partial h/\partial\eta$. В остальном ничто не изменяется по сравнению со скалярной теорией, рассмотренной в предыдущей главе.

Как следует из (5. 24), мы должны рассматривать не зависящие от времени калибровочные преобразования

$$\dot{\lambda}_a(x) = 0. \tag{5. 25}$$

Чтобы устранить это ограничение, мы должны обобщить (5. 19). Так, если вместо первого уравнения в (5. 19) рассматривать равенство

$$\{\mathbf{u}_a(x;\xi,\eta,\lambda), h_j\} = \frac{\delta H_j}{\delta \mathbf{p}_a(x)} - \Omega_a(x)\frac{\partial \mathbf{u}(x;\xi,\eta,\lambda)}{\partial\lambda_a}, \tag{5. 26}$$

то в (5. 24) следует произвести замену

$$\prod_{x;a} d\lambda_a(x)\delta(\dot{\lambda}_a(x)) \to \prod_{x;a} d\lambda_a(x)\delta(\dot{\lambda}_a(x) - \Omega_a(x)), \tag{5. 27}$$

где $\Omega_a(x)$ - произвольная функция $y$ и $t$. Это представление для калибровочной меры - наиболее общее в нашем формализме.

В результате основные элементы теории Янга–Миллса в фактор-пространстве $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ выглядят следующим образом:

(i) Мера

$$DM(\xi,\eta,\lambda) = dR \prod_{x;a} d\lambda_a d\xi d\eta \delta(\dot{\lambda}_a(x) - \Omega_a(x))\delta(\dot{\xi} - \omega - j_\xi)\delta(\dot{\eta} - j_\eta). \tag{5. 28}$$

Можно заметить, что

$$\int \prod_{x;a} d\lambda_a \delta(\dot{\lambda}_a(x) - \Omega_a(x))$$

означает интегрирование по всем функциям $\lambda_a(\mathbf{x}, t)$ произвольной зависимости от времени. В то же самое время

$$\frac{\int \prod_{x;a} d\lambda_a \delta(\dot{\lambda}_a(x) - \Omega_a(x))}{\int \prod_{x;a} d\lambda_a} \equiv 0. \qquad (5.\ 29)$$

Следовательно, наша нормировка на объем калибровочной группы отличается от стандартной. Но это никак не должно повлиять на окончательный ответ, поскольку лишь калибровочно инвариантные величины будут вычисляться.

(ii) Генерирующий квантовые возмущения оператор

$$2\mathbf{K}(je) = \int dt\{\hat{\jmath}_\xi \hat{e}_\xi + \hat{\jmath}_\eta \hat{e}_\eta\}. \qquad (5.\ 30)$$

(iii) Функционал $U(\mathbf{u}, \mathbf{e}_a)$, описывающий взаимодействие, зависит от

$$\mathbf{e}_a = e_{\xi_i} \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial \eta_i} - e_{\eta_i} \frac{\partial \mathbf{u}_a}{\partial \xi_i}, \qquad (5.\ 31)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Отметим, что $\lambda_a(x)$ - $c$-числовая функция и зависимость от нединамических переменных исчезла в результате редукции.

## 5.4 Калибровочная инвариантность и расходимости

Надо отметить, что "нефизические" степени свободы автоматически исключаются, если теория возмущений формулируется в калибровочно-инвариантных терминах цветового электрического $\mathbf{E}_a$ и магнитного $\mathbf{B}_a$ полей. Итак, мы можем предложить в рамках изложенного выше формализма следующее утверждение:

*S18. Каждый порядок по $1/g$ новой теории возмущений явно калибровочно инвариантен.*

Чтобы продемонстрировать это утверждение, надо воспользоваться тем, что оператор $\mathbf{K}(je)$ действует в фактор-подпространстве $TW^*$. Тогда достаточно показать, что функционал $U(\mathbf{u}, \mathbf{e}_a)$ калибровочно инвариантен.

Для этого воспользуемся следующим представлением:

$$U(\mathbf{u}, \mathbf{e}_a) = \frac{1}{g} \int dx \prod_{k=1}^{3} \left\{ \left( e_{\xi_i} \frac{\partial \mathbf{u}_{a_k}}{\partial \eta_i} - e_{\eta_i} \frac{\partial \mathbf{u}_{a_k}}{\partial \xi_i} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{a_k}} \right\} F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu a}, \qquad (5.\ 32)$$

которое можно получить, если использовать явный вид $e_a$, см. (5. 31). Это выражение явно калибровочно инвариантно, т.к. оператор

$$\left\{\left(\mathbf{e}_\xi \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{a_k}}{\partial \eta} - \mathbf{e}_\eta \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_{a_k}}{\partial \xi}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{a_k}}\right\}$$

- синглет преобразований калибровочной группы.

Действительно, (5. 32) может быть записано в виде следующего рекуррентного соотношения:

$$U(\mathbf{u}, \mathbf{e}_a) = \frac{1}{g}\int dx \left\{e_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} - e_\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\right\} F_2(\mathbf{u}), \tag{5. 33}$$

где знак скалярного произведения означает суммирование по всем канонически сопряженным парам $(\xi, \eta)$ и следует полагать, что $F_2(\mathbf{u}) = F_2(\mathbf{u}(\xi, \eta))$ — сложная функция $\xi$, $\eta$. Точно так же

$$F_2(\mathbf{u}(\xi, \eta)) = \left\{e_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} - e_\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\right\} F_1(\mathbf{u}(\xi, \eta)),$$

$$F_1(\mathbf{u}(\xi, \eta)) = \left\{e_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} - e_\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\right\} F^{\mu\nu a}(\mathbf{u}(\xi, \eta)) F_{\mu\nu a}(\mathbf{u}(\xi, \eta)). \tag{5. 34}$$

Заметим теперь, что дифференциальный оператор в $F_1(\mathbf{u})$ не зависит от поля $\mathbf{u}_a$. Поэтому $F_1(\mathbf{u})$ - калибровочно инвариантная величина. По той же причине все $F_l(\mathbf{u})$, $l = 2, 3$, калибровочно инвариантны. Что и требовалось показать. ⋆

Этот результат означает, что вклады теории возмущений не могут нарушить неабелеву калибровочную симметрию. Далее можно показать следующую важную особенность рассматриваемой теории возмущений.

*S19. Теория возмущений в фактор-пространстве не содержит расходимостей по крайней мере в секторе векторных полей, если*

$$|S(u)| < \infty. \tag{5. 35}$$

Результат действия оператора квантовых возмущений дает выражение

$$\mathcal{N} = \int DM : \mathrm{e}^{-2i\mathbf{U}(u,j)} :, \tag{5. 36}$$

где оператор

$$\mathbf{U}(\mathbf{u}, j) = \int \frac{dt}{3!(2i)^3} \left\{\hat{\jmath}_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} - \hat{\jmath}_\eta \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}\right\} \tilde{F}_2(\mathbf{u}) \tag{5. 37}$$

и

$$\tilde{F}_2(\mathbf{u}) = \int d^3x\, F_2(\mathbf{u}). \qquad (5.\ 38)$$

Из (5. 37) и (5. 34) непосредственно следует условие (5. 35) $\star$

### 5.5 Производящий функционал в теории Янга–Миллса

Будущий генератор событий мы предлагаем строить, исходя из следующих соображений:

$$\rho(\alpha, z) = \int dM(\xi_0, \eta_0; \lambda_a) : \mathrm{e}^{-i\mathbf{U}(\mathbf{u}_c, \mathbf{e})} : \mathrm{e}^{iQ_\mu(u_c)\Delta^\mu} \mathrm{e}^{-N(\alpha, z; \mathbf{u}_c)}, \qquad (5.\ 39)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{u}_c, \mathbf{e})$ было определено в (5. 37).

Функционал $N(\alpha, z; \mathbf{u}_c)$ был введен в (4. 2), и он выражается (см. (4. 3)) через "вершину"

$$\Gamma(q, \mathbf{u}_c) = \int dx\, \mathrm{e}^{iqx} \frac{\delta S_0(\mathbf{u}_c)}{\delta \mathbf{u}_c(x)}.$$

В действительности, если цветовой заряд удерживается, определенная таким образом производящая функция тривиальна, $\partial\rho(\alpha, z)/\partial z \equiv 0$.

Таким образом, при изложенном формализме теории возмущений, который замкнут в том смысле, что свободен от расходимостей и поэтому может быть использован на любых расстояниях, основная задача заключается в определении асимптотических состояний, т.е. фундаментального лагранжиана теории и соответствующего ему функционала $N(\alpha, z; \mathbf{u}_c)$.

## 6 Заключение

Может создаться впечатление, что мы вступаем в новый этап построения теории Янга–Миллса, когда основная формула для производящего функционала $\rho(a, z)$, способная описать взаимодействия на любых расстояниях, может быть записана лишь в одну строку. При этом расчеты столь сложны, что с ними могут справиться лишь достаточно мощные компьютеры. В результате все промежуточные этапы вычислений будут "спрятаны" в компьютере и не потребуют нашего участия.

Однако в действительности это не так. Мы хотим отметить, что точное вычисление интегралов (5. 39), скорее всего, непосильно даже для современных компьютеров и оно вряд ли будет когда-либо достижимо.

Надо отметить тем более, что из предыдущих формул совсем не очевидно, что цветовой заряд перманентно удерживается внутри адронов. Этот вопрос интенсивно обсуждается нами.

При этом, конечно, надо начинать с более простых задач. И которые допускали бы приближения, оправданные конкретными условиями задачи. Одной из них является асимптотика по множественности, когда $n \to n_{\max}$. Анализ этой асимптотики показывает, что в таком случае процесс должен быть "жестким" в том смысле, что мы можем ожидать превышения среднего поперечного импульса над средним продольным в $\pi/4$ раза. Но тогда это область асимптотической свободы, когда $\alpha_s << 1$, и можно воспользоваться предсказаниями КХД.

Анализ предсказаний КХД в этом режиме показывает, тем не менее, что, идеология главного логарифмического приближения в данном случае неприемлема, поскольку логарифмической точности оценок вкладов оказывается недостаточно для описания кинематических условий, когда импульсы частиц несильно разнятся (коэффициент неупругости близок к единице) [7][9]. По этой причине способность КХД дать предсказания в области очень больших множественностей невелика. Предложенная теория возмущений "сверхсходящаяся", и поэтому мы надеемся на получение более высокой (степенной) точности предсказаний.

Другой класс интересных, на наш взгляд, задач связан с глубоко неупругими рассеяниями. Они также предполагают взаимодействия на малых расстояниях и поэтому должны быть достаточно просты. Наш интерес к этой задаче связан с тем, что построенная теория представляет собой разложение по степеням обратной константы взаимодействия. В такой формулировке понятие бегущего параметра разложения неприемлемо [53]. Поэтому особенно интересно выяснить, как у нас формулируется асимптотическая свобода. Помимо этого, в нашей формулировке отсутствует понятие "глюона" и, соответственно, нет инфракрасных расходимостей. Поэтому интересно исследовать в рамках нашего подхода так называемую "проблему малых $x$" [88].

Формулируя теорию в терминах функциональных интегралов, естественно использовать разложение на решетке. Надо отметить, что подынтегральное выражение в (5. 39) не содержит производных по времени и поэтому представление на временной решетке не будет содержать неоднозначностей, которые присущи представлению интегралов по путям (см., например, [89] и цитируемую там литературу).

Шаг решетки может зависеть от условий исследуемой задачи. Напри-

[9]Авторы особенно благодарят Л.Н.Липатова за обсуждение этого вопроса.

мер, нетрудно понять, что в асимптотике по множественности импульсы частиц малы. Тогда, в первом приближении, конфигурация классического поля $\mathbf{u}_a$ не играет значительной роли. Именно в этом смысле асимптотика по множественности представляет собой простейший случай.

И наконец, хорошо известно, что $S$-матричная интерпретация функций Вигнера позволяет сформулировать теорию в терминах кинетических уравнений, а также проследить за корректностью такого описания в свете квантовых возмущений [2, 3]. Это может перебросить мостик от теоретико-полевого описания к описанию диссипативных структур. Например, изложенный выше формализм может оказаться полезным при исследовании устойчивости упорядоченных структур, возникающих в диссипативных системах [90], понять роль, которую играют топология и структура фактор-пространства в их формировании и устойчивости. А это может иметь важное прикладное значение.

В заключение мы хотим поблагодарить В.Г.Кадышевского за неизменный интерес к изложенному выше подходу. Отдельные результаты обсуждались в разное время с Дж.Аллаби, А.М.Балдиным, И.М.Дреминым, В.И.Кувшиновым, В.А.Матвеевым, И.Р.Пригожиным, М.В.Савельевым, В.И.Савриным, И.Л.Соловцовым, А.Н.Тавхелидзе, А.Т.Филипповым и Д.В.Ширковым, которым нам приятно выразить глубокую признательность. Мы хотим также поблагодарить Э.А.Кураева, Л.Н.Липатова, И.Пазиашвили, Э.Саркисяна-Гринбаума и А.Ушверидзе за полезные обсуждения критических деталей подхода. Мы благодарим участников семинара "Симметрии и интегрируемые системы" ЛТФ им. Н.Н.Боголюбова (ОИЯИ) за постоянное внимание к данной проблеме. Нам приятно выразить благодарность В.В.Воронюку за помощь в подготовке рукописи к печати. Один из авторов (И.Д.М.) считает своим долгом поблагодарить А.А.Славнова за предоставленную возможность обсудить изложенные в обзоре идеи на семинаре Математического института им. В.А.Стеклова. Авторы особенно благодарны А.А.Логунову, предложившему написать данный обзор.

# Список литературы

[1] G.Nicolis and I.Prigogin, *Self-organization in nonequilibrium systems* (New York, Wiely & Sons, 1977)

[2] P.Carruthers and F.Zachariasen, Phys. Rev., D13 (1986) 950 ;
P.Carruthers and F.Zachariasen, Rev. Mod. Phys., 55 (1983) 245

[3] J.Manjavidze, Part. & Nucl., 30 (1999) 124

[4] E.Wigner, Phys. Rev., 40, (1932) 749;
K.Hisimi, Proc. Phys. Math. Soc. Jap., 23 (1940) 264;
R.J.Glauber, Phys. Rev. Lett., 10 (1963) 84;
E.C.G.Sudarshan, Phys. Rev. Lett., 10 (1963) 177;
R.E.Cahill and R.G.Glauber, Phys. Rev., 177 (1969) 1882;
S.Mancini, V.I.Man'ko and P.Tombesi, Quant. Semicl. Opt., 7 (1995) 615;
V.I.Man'ko, L.Rose and P.Vitale, hep-th/9806164

[5] H.Umezawa, H.Matsumoto and M.Tachiki, *Thermo-Field Dynamics and Condensed States* (Amsterdam, 1982)

[6] E.Fermi, Progr. Theor. Phys., 4 (1950) 570, Phys. Rev., 81 (1950) 115, *ibid* 92 (1953) 452;
L.D.Landau, Izv. AN SSSR, 17 (1953) 85

[7] J.Manjavidze and A.Sissakian, Phys. Rep., 346 (2001) 1

[8] В.Захаров, ЖЭТФ, 65 (1973) 219

[9] D.V.Skobeltzin, Z. Phys., 54 (1929) 68; C. R. Acad. Sci., 194 (1932) 118;
G.V.Watagin, Z. der Phys., 688 (1934) 92

[10] Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, (М., Наука, 1984)

[11] В.Г.Кадышевский, ЖЭТФ, 46 (1964) 654, 872

[12] А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили и В.А.Петров, см. *Квантовая теория поля и их следствия* (М.: Наука, 1977) 181;
A.A.Logunov and M.A.Mestvirishvili, CERN TH/1659;
A.A.Logunov, M.A.Mestvirishvili, Nguen Van Hieu, Phys. Lett., 25B (1967) 611;
A.A.Logunov and M.A.Mestvirishvili, CERN, TH-1707, 1973

[13] В.Де Альфаро, С.Фубини, Г.Фурлан, К.Росетти, *Токи в физике адронов* (М., Мир, 1976)

[14] E.Kuraev, L.Lipatov and V.Fadin, Sov. Phys. JETP, 44 (1976) 443; Zh. Eksp. Teor. Fiz., 71 (1976) 840;
L.Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys., 20 (1975) 94;
V.Gribov and L.Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys., 15 (1972) 438, 675;
G.Altarelli and G.Parisi, Nucl. Phys., B126 (1977) 298;
I.V.Andreev, *Chromodynamics and Hard Processes at High Energies* (Nauka, Moscow, 1981)

[15] V.N.Gribov, Proc. VIII LIYF Winter School Phys., Leningrad, vol.II (1973) 5;
O.V.Kancheli, JETP Lett., 18 (1973) 157;
V.N.Gribov, Moscow I ITEP school, v.1 (1973) 65;
H.D.I.Abarbanel, J.D.Bronzan, R.L.Sugar and A.K.White, Phys. Rep., 21C (1975) 119;
J.Koplik and A.H.Mueller, Phys. Rev., D12 (1975) 3638;
M.Baker and K.Ter-Martirosyan, Phys. Rep., 28C (1976) 1

[16] V.A.Matveev, R.M.Muradyan, A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cim. Lett., 5 (1973) 907;
V.A.Matveev, R.M.Muradyan and A.N.Tavkhelidze, Lett. Nuovo Cim., 7 (1973) 719;
S.Brodski and C.Farrar, Phys. Rev. Lett., 31 (1973) 1153

[17] A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze and L.D.Soloviev, Phys. Lett., 24B (1967) 181;

[18] J.Polchinski, hep-th/9611050

[19] J.Ellis, hep-ph/9804440

[20] В.А.Матвеев, А.Н.Сисакян, Л.А.Слепченко. ЯФ (1976) 432;
A.N.Sissakian, L.A.Slepchenko, Fizika, 10 (1978) 21 ;
А.Н.Сисакян, Н.Б.Скачков, Сб. "Научное сотр. в яд. физ.", (М.: Атомиздат, 1986);
С.Мавродиев, В.К.Митрюшкин, А.Н.Сисакян, Г.Т.Торосян, ЯФ, 30 (1979) 245;
S.V.Chekanov, W.Kittel and V.I.Kuvshiniv, J. Phys., G23 (1997) 951

[21] J.Manjavidze, Part. & Nucl., 16 (1985) 44

[22] J.E.Mayer and M.G.Mayer, Statistical Mechanics (Wiley, New York, 1940)

[23] D.E.Groom *et al.*, Eur. Phys. J. **C15**, 1 (2000)

[24] P.V.Landshoff, Nucl. Phys., 25B (1992) 129;
E.Levin, DESY 97-213, hep-ph/9710546; DESY 98-118, hep-ph/9808483

[25] E.A.De Wolf, I.M.Dremin and W.Kittel, Phys. Rep. 270 (1996) 1;
P.Bozek, M.Ploszajczak and R.Botet, Phys. Rep., 252 (1995) 101

[26] R.Hagedorn, Nuovo Cim., 35 (1965) 216;
E.L.Feinberg, Phys. Rep., 56 (1972) 237;
И.В.Андреев, И.М.Дремин, УФН, 122 (1977) 37

[27] М.Кац, *Вероятность и смежные вопросы физики*, Прил. I: Г.Е.Уленбек, (М.: Мир, 1963)

[28] J.Manjavidze and A.Sissakian, Second VHM Physics Workshop, Dubna, 7-9 April (2001), to be published

[29] N.N.Bogolyubov, *Studies in Statistical Mechanics,* (North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1962)

[30] J.Schwinger, J. Math. Phys., **A9**, 2363 (1994);
L.Keldysh, JETP (Sov. Phys.), **20**, 1018 (1964)
N.P.Landsman and Ch.G. van Weert, Phys. Rep., **145**, 141 (1987)

[31] M.Martin and J.Schwinger, Phys. Rev., 115 (1959) 342;
R.Kubo, J. Phys. Soc. Japan, 12 (1957) 570

[32] R.Haag, N.Hugengoltz and M.Winnink, Commun. Math. Phys., 5 (1967) 5

[33] D.N.Zubarev, *Nonequilibrium statistical thermodynamics*, (Cons. Bureau, New York, 1974)

[34] A.M.Baldin and A.A.Baldin, Phys. Part. Nucl., 29 (1988) 232;
A.M.Baldin and A.I.Malakhov, JINR Rap. Comm., 1(87) (1998) 5

[35] G.E.Uhlenbeck, in: *Probability and Related Topics* (Interscience Publ., London, New York, 1957)

[36] C.N.Yang, R.I.Mills, Phys. Rev., 96 (1954) 191

[37] Н.Н.Боголюбов, Б.В.Струминский, А.Н.Тавхелидзе, Препринт ОИЯИ, Д-1968, Дубна (1965);
M.Han and Y.Nambu, Phys. Lett., 138B (1965) 1005

[38] П.А.М.Дирак, *Лекции по квантовой механике* (М.: Мир, 1968)

[39] J.C.Taylor, Nucl. Phys., B33 (1971) 436;
А.А.Славнов, ТМФ, 10 (1972) 99;
V.A.Rubakov, Classical and Gauge Fields (Editorial URSS, Moscow, 1999)

[40] G.'t Hooft and M.Veltman, *Diagrammar*, Rep.# 73-9-CERN, CERN (1973)

[41] L.D.Faddeev and V.N.Popov, Phys. Lett., 25B (1967) 29

[42] V.N.Gribov, Nucl. Phys., **B139**, 246 (1978).

[43] I.M.Singer, Comm. Math. Phys., **60**, 7 (1978);
M.F.Atiyah and J. D. S. Jones, Comm. Math. Phys., **61**, 97 (1978).

[44] S.V.Shabanov, Phys. Rep., 326 (2000) 1;
B.De Witt and C.Molina-Paris, hep-th/9808163

[45] D.J.Gross and F.Wilczek, Phys. Rev. Lett., 30 (1973) 1343;
H.D.Politzer, Phys. Rev. Lett., 30 (1973) 1346

[46] Yu.L.Dokshitser, D.I.Dyakonov and S.I.Troyan, Phys. Rep., 58 (1980) 211;
E.Kuraev, J.Manjavidze and A.Sissakian, hep-ph/0003074

[47] K.Konishi, A.Ukawa and G.Veneziano, Phys. Lett., B80 (1979) 259;
A.Basseto, M.Ciafaloni and G.Marchesini, Nucl. Phys., B163 (1980) 477

[48] D.V.Shirkov, hep-ph/0012283

[49] V.I.Zakharov, Prog. Theor. Phys. Suppl., 131 (1998) 107;
F.V.Gubarev, M.I.Polikarpov, V.I.Zakharov, hep-ph9908292

[50] J.Manjavidze and A.Sissakian, Theor. Math. Phys., 123 (2000) 776

[51] J.Manjavidze, J. Math. Phys., 41 (2000) 5710, hep-th/0104252

[52] J.Manjavidze and A.Sissakian, J. Math. Phys., 42 (2001) 641, hep-ph/0104297

[53] J.Manjavidze and A.Sissakian, J. Math. Phys., to be published (2001), hep-ph/0104298

[54] L.D.Faddeev and V.E.Korepin, Phys. Rep., 42C (1978) 1

[55] R.Dashen, B.Hasslacher and A.Neveu, Phys. Rev., D10 (1974) 4114, *ibid.*, D10 (1974) 4130

[56] R.Jackiw, Rev. Mod. Phys., 49, 681 (1977)

[57] N.Bogoliubov and S.Tyablikov, Zh. Eksp. Theor. Phys., 19 (1949) 256

[58] Л.А.Тахтаджян, Л.Д.Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов,* (М.:Наука, 1986)

[59] Л.Д.Фаддеев, Л.А.Тахтаджян, УМН, 29 (1974) 249;
R.Jackiw, C.Nohl and C.Rebbi, Particles and Fields: proceedings, Banff, Canada, 25 Aug. - 3 Sept., 1977, ed. D.H.Boal and A.N.Kamal (Plenum, New York, 1978)

[60] G.W.Mackey, *Induced Representation of Groups and Quantum Mechanics*, (Benjamin, New York, 1969);
N.Woodhouse, *Geometric quantization*, (OUP, Oxford, 1980);
N.P.Landsman and N.Linden, Nucl. Phys., B365 (1991) 121;
N.P.Landsman, Rev. Math. Phys., 2 (1991) 45, 73;
C.J.Isham, *Relativity, Groups and Topology II*, eds. B.S.De Witt and R.Stora (North-Holland, Amsterdam, 1984)

[61] R.Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1982);
A.B.Zamolodchikov and A.B.Zamolodchikov, Phys. Lett., **72B**, 503 (1978)

[62] S.F.Edwards and Y.V.Gulyaev, Proc. Poy. Soc.(London), A279 (1964) 229;
M.S.Marinov, Phys. Rep., 60 (1980) 1

[63] B.S.De Witt, Rev. Mod. Phys., 29 (1957) 377

[64] J.Manjavidze, Sov. Nucl. Phys., 45 (1987) 442

[65] N.N.Bogolyubov and D.V.Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (Intersc. Publ., N.Y., 1959)

[66] V.De Alfaro, S.Fubini and G.Furlan, Phys. Lett., 65B (1976) 163; V.De Alfaro, S.Fubini and G.Furlan, Acta Phys. Austr. Suppl., XXII (1980) 51

[67] T.Bibilashvili and I.Pasiashvili, Ann. Phys. (NY), 220 (1992) 134

[68] P.Kadanoff and P.C.Martin, Ann. Phys.(NY), 24 (1963) 419

[69] J.Schwinger, *Particles, Sources, Fields*, Vol.1 (Addison-Wesley, 1970)

[70] R.Mills, *Propagators for Many-Particle Systems* (Gordon & Breach, Science, NY, 1970)

[71] E.Byukling and K.Kajantie, *Particles Kinematics* (John Wiley & Sons, London, 1973)

[72] M.Martin and J.Schwinger, Phys. Rev., 115 (1959) 342

[73] N.N.Bogolyubov, Physica, 26 (1960) S1

[74] A.J.Niemi and G.Semenoff, Ann. Phys. (NY), 152 (1984) 105

[75] J.Schwinger, J. Math. Phys., A9 (1994) 2363

[76] L.Keldysh, JETP (Sov. Phys.), 20 (1964) 1018; P.M.Bakshi and K.T.Mahanthappa, J. Math. Phys., 4 (1961) 1; *ibid.* (1961) 12

[77] N.P.Landsman and Ch.G. van Weert, Phys. Rep., 145 (1987) 141; E.Calsetta and B.L.Hu, Phys. Rev., D37 (1988) 2878

[78] V.E.Korepin anf L.D.Faddeev, Theor. Math. Phys., 25 (1975) 147

[79] J.Manjavidze and A.Sissakian, JINR Rap. Comm. 2/281 (1988) 13

[80] Б.М.Барбашов, ЖЭТФ, 48 (1965) 607

[81] S. Smale, Inv. Math., 11:1 45 (1970); R. Abraham and J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics* (Benjamin - Cummings Publ. Comp., Reading, Mass., 1978)

[82] В.И.Арнольд, *Математические методы классической механики*, М.: Наука, 1989)

[83] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, A.S.Schwartz, Yu.S.Tyupkin, Phys. Lett., 59B (1975) 85

[84] A.M.Polyakov, Nucl. Phys., B120 (1977) 429

[85] L.Landau and R.Peierls, Zs. Phys., 69 (1931) 56

[86] A.Actor, Rev. Mod. Phys., 51 (1979) 461

[87] L. S. Boya, J. F. Carinena and J. Mateos, Fotschr. Phys., 26 (1978) 175

[88] L.V.Gribov, E.M.Levin and M.G.Ryskin, Phys. Rep., C100 (1983) 1

[89] C.Grosche, *Path integrals, hyperbolic spaces, and Selberg trace formulae* (Word Scientific, Singapore, 1995)

[90] П.Гленсдорф, И.Пригожин, *Термодинамическая теория структуры устойчивости и флуктуаций* (М.: Мир, 1973)

# Содержание



---

Рукопись поступила в издательский отдел
1 июня 2001 года.

Манджавидзе И.Д., Сисакян А.Н. P2-2001-117
Теоретико-полевое описание ограниченных связями процессов диссипации энергии

Работа посвящена теоретико-полевому описанию процессов диссипации, ограниченных высокой группой симметрии. Формализм излагается на примере процессов множественного рождения адронов, в котором переход к термодинамическому равновесию происходит в результате диссипации кинетической энергии сталкивающихся частиц в массы адронов. Динамика этих процессов ограничена необходимостью учитывать связи, ответственные за «невылетание» цветового заряда. Развита более общая $S$-матричная формулировка термодинамики неравновесных диссипативных процессов, и найдено необходимое и достаточное условие корректности такого описания. По своему смыслу оно сходно с условием «ослабления корреляций», которое, по Боголюбову, должно иметь место при приближении системы к равновесию. Физически такая ситуация должна возникать в процессах с очень большой множественностью, по крайней мере если масса адронов отлична от нуля. Излагается также новая схема теории возмущений сильной связи, удобная для учета симметрийных ограничений на динамику процессов диссипации. Приводится обзор литературы, посвященной обсуждаемой проблеме.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2001

Перевод авторов

Manjavidze J.D., Sissakian A.N. P2-2001-117
Field-Theoretical Description of Restricted by Constrains Energy Dissipation Processes

The paper contains field-theoretical interpretation of the dissipation processes restricted by the high symmetry group. Formalism is described on the basis of the hadron multiple production example where the tendency to equilibrium is achieved through the incident kinetic energy transition into the secondary hadrons mass. The dynamics of this process is restricted by the constrains which are connected with the colour charge confinement. The general $S$-matrix formulation of the nonequilibrium dissipation processes thermodynamics is developed. The necessary and sufficient condition of correctness of the approach is found. This condition reminds the Bogoliubov's correlations relaxation condition near the equilibrium. Physically this situation may be realized if the multiplicity is high enough, at least if the hadron mass is not equal to zero. The paper contains description of new perturbation theory which is useful if the symmetry constrains should be taken into account. The paper includes necessary list of references.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2001

Редактор А.Н.Шабашова. Макет Р.Д.Фоминой

Подписано в печать 05.07.2001
Формат 70 × 100/16. Офсетная печать. Уч.-изд. л. 5,05
Тираж 475. Заказ 52755. Цена 6 р.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области