P2-2001-22

Н.А.Черников

ОДНОРОДНОЕ СТАТИЧЕСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определим пространство-время как произведение $M = E \times T$ евклидова пространства E на евклидову прямую T.

Выбирая единицу длины (например, сантиметр), задаем в E метрику. Это значит, что квадрат расстояния s между двумя точками в E, отмеченными индексами 1 и 2, в прямоугольных декартовых координатах x, y, z (в соответствии с теоремой Пифагора) равняется

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2. \tag{1}$$

Выбирая единицу времени (например, секунду), задаем метрику в T. Это значит, что время τ между двумя мгновениями в T, отмеченными индексами 1 и 2, в декартовой координате t равняется

$$\tau = t_2 - t_1. \tag{2}$$

Набор Ξ координат $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = t$ является простой координатной картой произведения $E \times T$, взаимно однозначно его покрывающей, так что пространство-время M является простым четырехмерным многообразием. Снабдив пространство-время M координатной картой Ξ, будем называть пару (M, Ξ) покоящейся системой отсчета и считать M четырехмерным аффинным пространством, так чтобы координаты, составляющие карту Ξ, стали аффинными координатами в M. При таких условиях мировая траектория частицы, движущейся в отсутствие внешней силы, представляется в M аффинной прямой. В частности, мировая траектория покоящейся частицы является "вертикальной" прямой, задаваемой в карте Ξ простейшими уравнениями вида

$$x = x_0, \ y = y_0, \ z = z_0. \tag{3}$$

Объявив M четырехмерным аффинным пространством, мы тем самым ввели в пространство-время M аффинную связность. Назовем ее фоновой и обозначим через $\check{\Gamma}$.

В ньютоновской теории гравитации фоновая связность $\check{\Gamma}$ присутствует в явном виде. О необходимости восстановления такой же связности в эйнштейновской теории гравитации см. письмо [1].

Отметим следующие четыре свойства фоновой связности $\check{\Gamma}$ в M.

1. В координатной карте Ξ все ее компоненты $\check{\Gamma}^a_{mn}$ равны нулю.

2. Ее тензор кривизны $\check{R}^a_{mnk}$ равен нулю.

3. Равенство
$$\check{\Gamma}^a_{mn} = 0 \tag{4}$$
сохраняется при переходе от карты Ξ к любой другой аффинной карте пространства-времени M.

4. Равенство
$$\check{R}^a_{mnk} = 0 \tag{5}$$
сохраняется при переходе от карты Ξ к любой другой координатной карте пространства-времени M.

Всякую симметричную связность, тензор кривизны которой равен нулю, мы будем называть примитивной. В подходящей координатной карте все компоненты примитивной связности обращаются в нуль (теорема Кристоффеля).

В ньютоновской и эйнштейновской теориях гравитации фоновая связность примитивна. В других теориях гравитации фоновая связность может быть непримитивной.

В теории гравитации Лобачевского, например, фоновая связность непримитивна. См. об этом [1].

В полевых теориях гравитационное поле описывается аффинной связностью. Назовем ее гравитационной и обозначим через Γ. Во всякой координаной карте ее компоненты Γ^a_{mn} являются функциями координат, составляющих эту карту.

Если гравитационное поле отсутствует, то гравитационная связность совпадает с фоновой. Можно сказать, что фоновая связность описывает гравитационное поле в его вакуумном состоянии. Гравитационное поле, пребывающее в своем вакуумном состоянии, тривиально.

Если в некоторой области пространства-времени гравитационное поле отсутствует, то в этой области тензорное поле

$$P^a_{mn} = \check{\Gamma}^a_{mn} - \Gamma^a_{mn} \tag{6}$$

аффинной деформации равняется нулю.

Если в некоторой области пространства-времени поле (6) аффинной деформации не равняется нулю, то в этой области присутствует нетривиальное гравитационное поле.

Гравитационная связность эквиаффинна. В частности, эквиаффинна фоновая связность.

В работе [1] доказано, что в той области пространства-времени, где нет источников гравитационного поля, последнее удовлетворяет уравнению

$$R_{mn} = \check{R}_{mn}. \tag{7}$$

В данной работе будем искать в четырехмерной области $z > 0$ пространства-времени M как ньютоновское, так и эйнштейновское нетривиальное гравитационное поле, не зависящее от x, y и t и удовлетворяющее уравнению

$$R_{mn} = 0. \tag{8}$$

Такое поле порождается массами, распределенными вне области $z > 0$ (то есть в области $z < 0$ и на плоскости $z = 0$) независимо от x, y и t.

Обратим особое внимание на то, что уравнению (8) мы подчиняем здесь не только эйнштейновское, но и ньютоновское гравитационное поле. О том, что в пустом пространстве ньтоновское гравитационное поле подчиняется уравнению Эйнштейна (8), см. наше письмо [1].

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЕНЗОРА КРИВИЗНЫ

Свойства тензора кривизны R^a_{kln} задаются аффинной связностью Γ^a_{mn}, так как (по определению)

$$R^a_{kln} = \partial_k \Gamma^a_{ln} - \partial_l \Gamma^a_{kn} + \Gamma^a_{ks}\Gamma^s_{ln} - \Gamma^a_{ls}\Gamma^s_{kn}. \tag{9}$$

Очевидно, что

$$R^a_{kln} + R^a_{lkn} = 0. \tag{10}$$

Интересны свертки

$$R_{ln} = R^a_{aln}\ , \quad \Omega_{kl} = R^a_{kla} \tag{11}$$

и

$$R^a_{lan} = -R_{ln}\ .$$

Нетрудно видеть, что

$$\Omega_{kl} = R^a_{kla} = \partial_k \Gamma_l - \partial_l \Gamma_k\ , \tag{12}$$

где

$$\Gamma_m = \Gamma^a_{ma}\ . \tag{13}$$

Свертка (13) называется свернутой связностью. Свертка (12) называется тензором кривизны свернутой связности (13).

Если

$$\Gamma^a_{nm} = \Gamma^a_{mn}\ , \tag{14}$$

то связность называется симметричной. Такая связность задается уравнениями

$$\frac{d^2x^a}{d\tau^2} + \Gamma^a_{mn}\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau} = 0 \tag{15}$$

геодезических.

Наряду с (10), тензор кривизны симметричной связности обладает следующим свойством:

$$R^a_{kln} + R^a_{nkl} + R^a_{lnk} = 0 \,. \tag{16}$$

Отсюда следует, что

$$\Omega_{kl} + R_{kl} = R_{lk} \,. \tag{17}$$

Следовательно, в случае симметричной связности равенство

$$R_{kl} = R_{lk} \tag{18}$$

эквивалентно равенству

$$\Omega_{kl} = 0 \,. \tag{19}$$

Симметричная связность называется эквиаффинной, если она удовлетворяет условию (19).

Следствие: так как тензор энергии-импульса симметричен, то всякое решение уравнения Эйнштейна представляется в виде эквиаффинной связности.

3. МЕТРИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ В M В ОТСУТСТВИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ

Рассмотренная фоновая связность в M не дает возможности отличать частицы, которые могут покоиться в системе отсчета (M, Ξ), от частиц, которые покоиться не могут (к числу последних относятся фотоны и тахионы). Такую возможность дают метрические объекты.

В отсутствие гравитационного поля метрические объекты представляются в карте Ξ дифференциальными формами с постоянными коэффициентами. В одном случае они выделяют в группе аффинных преобразований, действующих в M, неоднородную группу Галилея, в другом — неоднородную группу Лоренца (то есть группу Пуанкаре).

В случае Галилея время t абсолютно в ньютоновом смысле этого слова, в связи с чем в M задается линейная форма

$$d\tau = dt. \tag{20}$$

Наряду с этой формой в случае Галилея в M задается вырожденная кометрика

$$\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \otimes \frac{\partial}{\partial z}. \tag{21}$$

В случае Галилея тахионы являются мгновенными переносчиками взаимодействия между материальными точками; их мировые траектории лежат в трехмерных плоскостях вида $t = t_0$. В этом случае масса тахиона равна нулю. В этом же случае и форма (20) для тахиона равна нулю. Для частиц, которые могут покоиться в системе отсчета (M, Ξ), форма (20) нулю не равняется.

В случае Лоренца в M задается геометрия с метрикой

$$-\frac{1}{c^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz) + dt \otimes dt \tag{22}$$

и кометрикой

$$\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \otimes \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} \otimes \frac{\partial}{\partial t}. \tag{23}$$

Для тахионов квадратичная форма (22) принимает отрицательные значения. Для фотонов она принимает нулевые значения. Для частиц, которые могут покоиться в системе отсчета (M, Ξ), форма (22) принимает положительные значения.

В квадратичных формах (22) и (23) через c обозначена скорость света, входящая в преобразование Лоренца

$$\acute{x} = x, \quad \acute{y} = y, \quad \acute{z} = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}, \quad c^2\acute{t} = \frac{c^2 t - vz}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}. \tag{24}$$

Галилеевский случай теории относительности и ньютоновский случай теории гравитации будем отмечать знаком $c = \infty$ бесконечности скорости света.

Лоренцевский случай теории относительности и эйнштейновский случай теории гравитации будем отмечать знаком $c < \infty$ конечости скорости света.

При $c \to \infty$ случай $c < \infty$ переходит в случай $c = \infty$.

Например, преобразование Лоренца (24) в пределе $c \to \infty$ переходит в преобразование Галилея

$$\acute{x} = x, \quad \acute{y} = y, \quad \acute{z} = z - vt, \quad \acute{t} = t. \tag{25}$$

Заметим, что фоновая связность в полевых теориях гравитации не зависит от скорости света c.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ $c = \infty$

В случае $c = \infty$ гравитационная связность задается с помощью ньютоновского потенциала

$$U = U(x,\ y,\ z) \tag{26}$$

и ньютоновских уравнений

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial z} \tag{27}$$

движения материальной точки в гравитационном поле.

В случае $c = \infty$ ничто не нарушает ньютоновой абсолютности времени, и форма (20) сохраняется. Поэтому для материальной точки полагаем

$$\frac{dt}{d\tau} = 1. \tag{28}$$

Из (27) и (28) следуют уравнения вида (15), а именно:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0, \qquad \frac{d^2t}{d\tau^2} = 0.$$

Поэтому следующие три компоненты гравитационной связности равны

$$\Gamma^1_{44} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \Gamma^2_{44} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \Gamma^3_{44} = \frac{\partial U}{\partial z}, \tag{30}$$

а остальные компоненты равны нулю.

Мы получили сейчас эквиаффинную связность, так как она симметрична и свертка Γ_n в карте Ξ равна нулю, а следовательно, и $\Omega_{kl} = 0$.

Теперь находим следующие компоненты гравитационного тензора кривизны:

$$R^a_{k44} = -R^a_{4k4} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^k \partial x^a}. \tag{31}$$

Остальные компоненты этого тензора равны нулю.

Все компоненты свернутого тензора кривизны в данном случае равны нулю, кроме одной, равной

$$R_{44} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}. \tag{32}$$

Следовательно, в случае $c = \infty$ уравнение $R_{mn} = 0$ эквивалентно уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{33}$$

По условию решаемой задачи такому уравнению должен подчиняться потенциал U в области $z > 0$, и в этой области он должен не зависеть от x и y. Полагая, что $U = 0$ при $z = 0$, находим, что в области $z > 0$ потенциал U равен $U = gz$, где $g = const$. Константа g равна ускорению свободного падения материальной точки в области $z > 0$ на плоскость $z = 0$. Поэтому согласно (27) $g > 0$.

В качестве константы g можно выбрать ускорение свободного падения тела, измеренное в г. Дубне.

В качестве плоскости $z = 0$ можно выбрать пол, на котором стоит в г. Дубне экс-чемпион мира. В 1952 году он ускорял протоны до энергии 480 МэВ [2], намного опережая своего соперника, который в Беркли (США) ускорял тогда протоны до энергии 340 МэВ.

В данном случае в карте Ξ единственная отличная от нуля компонента гравитационной связности равна

$$\Gamma^3_{44} = g. \tag{34}$$

Тензор кривизны такой связности равен нулю, но физик легко узнает в полученном решении ту модель гравитационного поля, которую он в обязательном порядке изучал в средней школе.

А вот тензор аффинной деформации (6) в данном случае нулю не равен. В карте Ξ не равна нулю единственная его компонента, а именно:

$$P^3_{44} = \check{\Gamma}^3_{44} - \Gamma^3_{44} = -g. \tag{35}$$

5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В СЛУЧАЕ $c < \infty$

Докажем, что решение задачи в случае $c < \infty$ представляется метрикой

$$g_{mn} dx^m \otimes dx^n = -\frac{1}{c^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz) + V^2 dt \otimes dt, \tag{36}$$

где поначалу предполагается, что псевдопотенциал V не зависит от времени, а затем доказывается, что

$$V = 1 + \frac{gz}{c^2}. \tag{37}$$

Гравитационная связность в случае $c < \infty$ определяется как связность Кристоффеля

$$\Gamma^a_{mn} = \frac{1}{2} g^{as} (\partial_m g_{sn} + \partial_n g_{sm} - \partial_s g_{mn}) \qquad (38)$$

для метрики (36).

Чтобы найти гравитационную связность (38), воспользуемся методом, указанным Фоком в книге [3].

Согласно этому методу уравнения геодезических (15) в данном случае получаются из уравнений

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^a} - \frac{\partial F}{\partial x^a} = 0, \qquad (39)$$

где

$$F = \frac{1}{2}[-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + V^2 \dot{t}^2]. \qquad (40)$$

Подставляя (40) в (39) и полагая затем $\dot{x^a} = \frac{dx^a}{d\tau}$, в результате получаем следующие уравнения вида (15):

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + c^2 V V_x \frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\tau^2} + c^2 V V_y \frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0, \qquad (41)$$

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} + c^2 V V_z \frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\tau} = 0, \quad \frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{2}{V}(V_x \frac{dx}{d\tau} + V_y \frac{dy}{d\tau} + V_z \frac{dz}{d\tau})\frac{dt}{d\tau}.$$

Поэтому следующие компоненты гравитационной связности в данном случае равны

$$\Gamma^1_{44} = c^2 V \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \Gamma^2_{44} = c^2 V \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \Gamma^3_{44} = c^2 V \frac{\partial V}{\partial z}, \qquad (42)$$

$$\Gamma^4_{14} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x} = \Gamma^4_{41}, \quad \Gamma^4_{24} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial y} = \Gamma^4_{42}, \quad \Gamma^4_{34} = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial z} = \Gamma^4_{43},$$

а остальные равны нулю.

Как и всякая связность Кристоффеля, полученная связность эквиаффинна. В данном случае

$$\Gamma_m = \Gamma^4_{4m}. \qquad (43)$$

Теперь находим компоненты свернутого гравитационного тензора кривизны

$$R_{ka} = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial x^k \partial x^a}, \quad k \neq 4, \quad a \neq 4, \tag{44}$$

$$R_{4k} = R_{k4} = 0, \quad k \neq 4,$$

$$R_{44} = c^2 V\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right). \tag{45}$$

Следующие компоненты тензора кривизны R^a_{kln} равны

$$R^a_{k44} = -R^a_{4k4} = c^2 V \frac{\partial^2 V}{\partial x^k \partial x^a}, \tag{46}$$

$$R^4_{k4a} = -R^4_{4ka} = \frac{1}{V}\frac{\partial^2 V}{\partial x^k \partial x^a}, \tag{47}$$

а остальные равны нулю.

Следовательно, в случае $c < \infty$ уравнение $R_{mn} = 0$ эквивалентно уравнению

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^k \partial x^a} = 0, \quad k \neq 4, \quad a \neq 4. \tag{48}$$

Поэтому в четырехмерной области $z > 0$ псевдопотенциал V является линейной функцией от x, y и z. Согласно (46) и (47) в этой области, как и в случае $c = \infty$, гравитационный тензор кривизны равен нулю.

По условию решаемой задачи псевдопотенциал V должен не зависеть от x и y, так что в области $z > 0$ он является линейной функцией $V = a + bz$. Так как метрика (36) на плоскости $z = 0$ должна совпадать с невозмущенной метрикой (22), то $a = 1$. При этом вместо (28) мы получаем равенство

$$c^2 V^2 \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2 = c^2\,. \tag{49}$$

Отсюда находим

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{V^2 - v^2/c^2}}, \quad v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 . \quad (50)$$

Интеграл энергии в случае $c < \infty$ имеет следующий вид:

$$E = \left(V^2 \frac{dt}{d\tau} - 1\right)c^2 = \left(\frac{V^2}{\sqrt{V^2 - v^2/c^2}} - 1\right)c^2 . \quad (51)$$

В пределе $c \to \infty$ последнее выражение должно переходить в известное школьникам выражение

$$E = \frac{1}{2}v^2 + gz . \quad (52)$$

Приравнивая (51) и (52) при $v^2 = 0$, получаем $bc^2 = g$.

Итак, доказано равенство (37), в силу которого в карте Ξ три компоненты тензора аффинной деформации (6) равны

$$P^3_{44} = -g\left(1 + \frac{gz}{c^2}\right), \quad P^4_{34} = -\frac{g}{c^2 + gz} = P^4_{43}, \quad (53)$$

а остальные равны нулю.

Список литературы

1. Черников Н.А. Письма в ЭЧАЯ No. 1 [98]-2000. С. 23.

2. Джелепов В.П. Лаборатория ядерных проблем. В сб. Первый ускоритель Дубны (К 50-летию синхроциклотрона ОИЯИ). Под общ. ред. Н.А.Русаковича.
Дубна, ОИЯИ, 99-304, 1999. С. 6.

3. Фок В.А. Теория пространства, времени и тяготения. М.: Гостехиздат, 1961. С. 72; С. 180.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 февраля 2001 года.

Черников Н.А.
Р2-2001-22
Однородное статическое гравитационное поле

Однородное статическое гравитационное поле рассматривается здесь в четырехмерной области $z > 0$ (и только в области $z > 0$) пространства-времени M с декартовыми координатами x, y, z и t. Рассматриваемое поле порождается массами, распределенными вне области $z > 0$. Предполагается, что часть этих масс распределена в четырехмерной области $z < 0$ пространства-времени M с не зависящей от x, y и t объемной плотностью, а другая часть распределена на трехмерной плоскости $z = 0$ пространства-времени M с не зависящей от x, y и t поверхностной плотностью.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2001

Перевод Г.Г.Сандуковской

Chernikov N.A.
P2-2001-22
A Homogeneous Static Gravitational Field

In this paper a homogeneous static gravitational field is considered in the four-dimensional area $z > 0$ (and only in area $z > 0$) of a space-time M with cartesian coordinates x, y, z and t. The considered field is created by masses, distributed outside area $z > 0$. It is supposed that a part of these masses is distributed in the four-dimensional area $z < 0$ of a space-time M with a volume density, independent of x, y and t. The other part is distributed on the three-dimensional plane $z = 0$ of space-time M with a surface density, independent of x, y and t.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2001

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 11.05.2001
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 1,13
Тираж 425. Заказ 52628. Цена 1 р. 36 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области