

P5-2001-229

Е.П.Жидков, Е.Е.Перепелкин

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ
В ОКРЕСТНОСТИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ
ФЕРРОМАГНЕТИКА**

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

Введение:

В этой работе исследовалась нелинейная краевая задача в «области с углом». Постановка задачи возникла при поиске распределения магнитного поля. Для решения краевой задачи обычно используются численные методы, поэтому важно было изучить вопрос о свойствах гладкости решения в окрестности «угловой точки».

При рассмотрении работ, посвященных данной тематике, выяснилось что для нелинейных задач этот вопрос мало изучен. Однако аналогичные исследования проводились для линейных задач, например, в работах [1-5].

В работе [7] нами был исследован «квазилинейный» случай задачи магнитостатики, и позже в работе [8] мы описали метод нахождения частных решений нелинейного дифференциального уравнения, учитываемого при постановке задачи магнитостатики.

Здесь же мы рассматриваем случай нелинейной краевой задачи магнитостатики и приводим доказательство утверждения об ограниченности магнитного поля в окрестности «угловой точки».

1. Постановка краевой задачи

Рассматривается магнитная система, состоящая из ферромагнетика (область Ω_f), источников с током (область Ω_c) и вакуума (область Ω_v). В области Ω_c задан вектор плотности тока \vec{J} , не зависящий от времени и удовлетворяющий условию

$$\int_{\Omega_c} \vec{J}(p) d\omega_p = 0.$$

Для ферромагнетика задана функция магнитной проницаемости $\mu(H)$, где H - модуль напряженности магнитного поля. На границе раздела сред Γ источники с током отсутствуют.

Требуется найти распределение $\vec{B}(p)$ -вектора магнитной индукции и распределение $\vec{H}(p)$ -вектора напряженности магнитного поля при $p \in \Omega = \Omega_f \cup \Omega_v \cup \Omega_c$.

Уравнения Максвелла для такой постановки примут вид

$$\operatorname{div} \vec{B}(p) = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{H}(p) = \vec{J}(p), \quad p \in \Omega, \quad (1)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu(H) \vec{H}, \quad (2)$$

где μ_0 - постоянная величина, $\vec{J}(p) = 0$, $p \in \Omega \setminus \Omega_c$ а на границе Γ

$$B_{fn} = B_{vn}, \quad H_{f\tau} = H_{v\tau},$$

индексы n и τ - соответствуют нормальной и тангенциальной компонентам поля.

Пусть $\Omega \cup \Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Рассмотрим $S_\delta(Q)$, являющуюся δ - окрестностью «угловой точки» Q . «Угловой точкой» будем называть точку, в окрестности которой граница образована двумя гладкими кривыми, пересекающимися под некоторым углом (см.рис. 1). Здесь $\Omega_2 = \Omega_f \cap S_\delta(Q)$ соответствует области ферромагнетика, $\Omega_1 = \Omega_v \cap S_\delta(Q)$ соответствует области вакуума, Γ_0 - граница $S_\delta(Q)$, обозначения Γ_+ и Γ_- соответствуют границе Γ раздела сред ферромагнетик\вакуум. В силу отсутствия на границе Γ источников с током следует, что можно выбрать такое δ , при котором в $S_\delta(Q)$ будут отсутствовать источники с током. Следовательно, в рассматриваемой области поле \vec{H} будет потенциально, т.е. $\vec{H}_i(p) = -\nabla u_i(p)$ при $p \in \Omega_i$, $i=1,2$. Функцию $u(p)$ будем называть скалярным потенциалом. Используя уравнения (1), (2), запишем краевую задачу для области $S_\delta(Q)$:

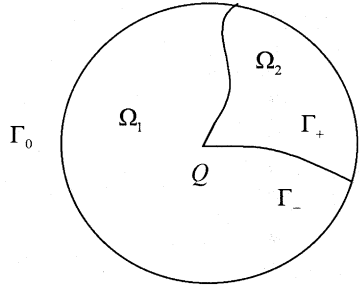


Рис. 1

$$\begin{cases} \operatorname{div} [\mu(|\nabla u_2(p)|) \nabla u_2(p)] = 0, & p \in \Omega_2, \\ \Delta u_1(p) = 0, & p \in \Omega_1, \\ u_1|_{\Gamma_-} = u_2|_{\Gamma_+}, \\ \mu(|\nabla u_2|) \frac{\partial u_2}{\partial n} \Big|_{\Gamma_+} = \frac{\partial u_1}{\partial n} \Big|_{\Gamma_-}, \\ u|_{\Gamma_0} = \Psi. \end{cases} \quad (3)$$

Функция Ψ считается известной и является «достаточно» гладкой. Относительно функции $\mu(H)$ считаются выполненными следующие условия:

$$\mu \in C^{(1)}[0, +\infty), \quad (4)$$

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} \mu'(H)H = 0, \quad (5)$$

$$\lim_{H \rightarrow +\infty} \mu(H) = 1. \quad (6)$$

Будем рассматривать случай, когда существует сколь угодно малая δ -окрестность точки Q , в которой не найдется двух точек p_1, p_2

$(p_1, p_2 \in \Omega_i \cap S_\delta(Q), i=1,2)$ с одинаковым магнитным полем $\vec{B}(p_1) = \vec{B}(p_2)$ при $p_1 \neq p_2$. А функции $\vec{B}(p), \vec{B}'_x(p), \vec{B}'_y(p)$ в такой δ -окрестности точки Q не ведут себя как функции, имеющие осцилляции с бесконечной частотой, например, как $y = \sin(1/x)$ при $x \rightarrow 0$. Формально такие условия запишутся так:

$\exists \delta > 0$:

$$\forall p_1, p_2 \in \overset{\circ}{S}_\delta(Q) \cap (\Omega_i \cup \Gamma_\pm), p_1 \neq p_2: \nabla u_i(p_1) \neq \nabla u_i(p_2),$$

$$\forall p \in \overset{\circ}{S}_\delta(Q) \cap \Omega: \rho(p) = u_{i,xx}u_{i,yy} - u_{i,xy}^2 \neq 0, \quad (7)$$

$$\overset{\circ}{S}_\delta(Q) \cap \Omega_i = \bigcup_{n=1}^{N_i} \Omega_n(f_i), \quad \Omega_n(f_i) \cap \Omega_m(f_i) = 0, \quad m \neq n,$$

$$\text{где } f_i = \{u_{i,x}, u_{i,y}, u_{i,xx}, u_{i,xy}, u_{i,yy}\}, \quad i=1,2 \quad N_i - \text{конечно},$$

f может принимать любое из перечисленных выше значений, а $\Omega_n(f)$ - области монотонности функции f (под монотонностью здесь понимается монотонность функции $f(x, y)$ по каждой переменной x и y).

Также считается, что в δ -окрестности точки Q в соответствии с уравнением $\text{div} \vec{B} = 0$ (см. (1)) выполнено условие

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \quad (8)$$

где S - граница области V , содержащей точку Q . Величина $d\vec{S} = \vec{n}dS$, где \vec{n} - вектор внешней нормали к границе S области V . Нарушение условия (8) приводит к существованию в точке Q магнитных зарядов.

Таким образом, задача сводится к нахождению функции $u(p)$, являющейся решением задачи (3) и удовлетворяющей условиям (7), (8).

Ниже приводится доказательство утверждения об ограниченности первых производных решения краевой задачи (3).

2. Основное утверждение

Рассмотрим краевую задачу (3) в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$, изображенной на рис.2. Обозначим $\Gamma_0 = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$,

$\Omega_1 = \{(r, \varphi): 0 < r < r_0, 3\pi/2 < \varphi < 2\pi\}$ соответствует области вакуума,

$\Omega_2 = \{(r, \varphi): 0 < r < r_0, 0 < \varphi < 3\pi/2\}$ соответствует области ферромагнетика.

$$\Gamma_1 = \left\{ (r_0, \varphi): \frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi \right\}, \Gamma_2 = \left\{ (r_0, \varphi): 0 < \varphi < \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

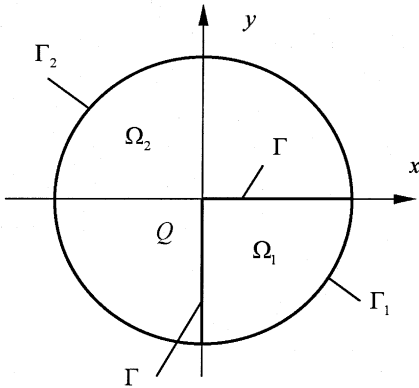


Рис. 2

Γ - граница раздела сред ферромагнетик\вакуум. Функция $\mu(H)$ удовлетворяет условиям (4), (5), (6).

При выполнении условий (7), (8) можно доказать следующее утверждение об ограниченности магнитного поля в δ -окрестности угловой точки Q .

Утверждение.

Пусть $u_i(p)$, $i=1,2$ - решение краевой задачи (1.3), удовлетворяющее условиям (7), (8). Тогда

$$\exists C \geq 0, \forall p \in \overset{\circ}{S}_\delta(Q) : |\nabla u_i(p)| < C, \quad i=1,2.$$

Для доказательства этого утверждения нам понадобятся две леммы.

Лемма 1.

Пусть $y(x) \in C[0,1]$ и $y(0)=0$ и существует $y'(x)$ на отрезке $[0,1]$, непрерывная всюду за исключением, может быть, точки $x=0$. Также $\exists \delta > 0 \quad x \in (0, \delta] : y'(x)$ - монотонная функция.

Тогда

$$\int_0^\delta [y'(x)]^2 x dx - \text{ограничен.}$$

Доказательство леммы 1.

Если $|y'(x)|$ - ограничен в точке $x=0$, тогда сразу получаем доказательство. Рассмотрим случай, когда $|y'(x)|$ - неограниченно растет при приближении к точке $x=0$. Так как $y'(x)$ - монотонная функция на $(0, \delta]$, то, не ограничивая общности, будем считать, что $\exists \delta_1 < \delta \quad \forall x \in (0, \delta_1] : y'(x) > 0$.

Сначала покажем, что $\exists C > 0 \quad \forall x \in (0, \delta_1] : y'(x) \leq \frac{C}{x}$. Допустим, что это не так,

т.е. $\forall C > 0 \quad \exists x_0 \in (0, \delta_1] : y'(x_0) \geq \frac{C}{x_0}$. Т.к. $y'(x)$ - монотонная функция и она

растет при приближении к точке $x=0$, то при $x < x_0 : y'(x) > y'(x_0)$, следовательно, должно выполняться условие $S_1 = \int_0^{x_0} y'(x) dx > S_2 = \int_0^{x_0} \frac{C}{x} dx$ (см. рис.3). Отсюда получаем, что $y(x_0) > C \lim_{t \rightarrow 0} \ln t$, но этого не может быть, т.к. $y(x) \in C[0,1]$ и, следовательно, ограничена.

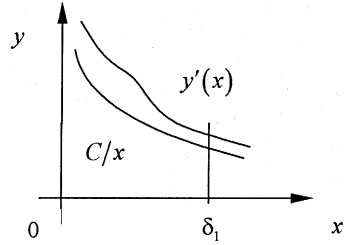


Рис. 3

Теперь рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\delta_1} [y'(x)]^2 x dx.$$

$$\int_0^{\delta_1} [y'(x)]^2 x dx = \int_0^{\delta_1} y'(x) y'(x) x dx \leq C \int_0^{\delta_1} y'(x) dx = Cy(\delta_1),$$

что и требовалось показать.

Лемма 2 (обобщение для 2-мерного случая).

Если функция $u(r, \varphi) \in C(\bar{\Omega})$ и $u(0, \varphi) = 0$ и обладает непрерывной производной по каждому аргументу всюду в Ω , за исключением, может быть, точки Q (см.рис.4), и

$\exists \delta > 0 : S_\delta(Q) \cap \Omega = \bigcup_{n=1}^N \Omega_n(f)$, а

$\Omega_i(f) \cap \Omega_j(f) = \emptyset, i \neq j$, где

$\Omega_n(f)$ - области монотонности

функции f (под монотонностью

функции $f(x, y)$ понимается

монотонность по каждому

аргументу x и y), а f может быть функцией u_x и u_y , и N - конечное число.

Тогда $u(p) \in W_2^1(\Omega)$.

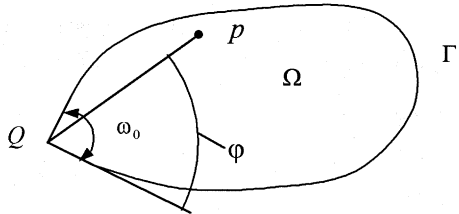


Рис. 4

Доказательство леммы 2.

Введем полярную систему координат (r, φ) с центром в точке Q (см. рис.4). Рассмотрим $u(r, \varphi)$ вдоль луча из точки Q , как функцию от r . Можно подобрать такой полуинтервал этого луча $(0, \delta_1]$, что функция

$u_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi$ будет монотонна на нем, и, не ограничивая общности, считать при этом $u_r > 0$. Далее по аналогии с доказательством леммы 1 можно показать, что для $\varphi \in [0, \omega_0], r \in (0, \delta_1]$: $|u_r(r, \varphi)| \leq \frac{C_1}{r}$. Рассмотрим производную u_φ в области $\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(Q) \cap \Omega$. Любую дугу с радиусом $r \in (0, \delta_1]$, содержащуюся в области $\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(Q) \cap \Omega$, можно разбить на конечное число интервалов монотонности для функции $u_\varphi = r(u_y \cos \varphi - u_x \sin \varphi)$ и, следовательно, на конечное число интервалов знакопостоянства. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\omega_0} |u_\varphi(r, \varphi)| d\varphi &= \sum_{\Delta_i^+} \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} u_\varphi(r, \varphi) d\varphi - \sum_{\Delta_i^-} \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} u_\varphi(r, \varphi) d\varphi = \\ &= \sum_{\Delta_i^+} [u(r, \omega_i) - u(r, \omega_{i-1})] + \sum_{\Delta_i^-} [u(r, \omega_{i-1}) - u(r, \omega_i)]; \end{aligned} \quad (9)$$

где Δ_i^\pm - интервалы знакопостоянства («+» соответствует положительному значению функции, «-» соответствует отрицательному значению функции).

Из (9) видно, что такой интеграл ограничен. Перейдем в выражении (9) к пределу при $r \rightarrow 0$, получим

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{\omega_0} |u_\varphi(r, \varphi)| d\varphi = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow 0} u_\varphi(r, \varphi) = 0, \quad (10)$$

т.е. $\exists C_2 > 0 \quad \forall p \in \overset{\circ}{S}_{\delta_1}(Q) \cap \Omega: |u_\varphi(p)| < C_2$.

Рассмотрим производную u_x (для u_y все аналогично):

$u_x = u(r, \varphi)_x = u_r r_x + u_\varphi \varphi_x = u_r \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} u_\varphi$. Из сделанных выше оценок следует:

$|u_x| = \left| u_r \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{r} u_\varphi \right| \leq |u_r| + \frac{1}{r} |u_\varphi| \leq \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r} = \frac{C_0}{r}$. Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(\varrho) \cap \Omega} u_x^2(p) d\omega_p &= \int_{\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(\varrho) \cap \Omega} u_x^2(p) d\omega_p + \int_{\left(\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(\varrho) \setminus \overset{\circ}{S}_{\delta_1}(\varrho)\right) \cap \Omega} u_x^2(p) d\omega_p = \\ &= \int_{\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(\varrho) \cap \Omega} |u_x(p)| \cdot |u_x(p)| r dr d\varphi + \int_{\left(\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(\varrho) \setminus \overset{\circ}{S}_{\delta_1}(\varrho)\right) \cap \Omega} u_x^2(p) d\omega_p \leq \\ &\leq C_0 \int_{\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(\varrho) \cap \Omega} |u_x(p)| \cdot r dr d\varphi + \int_{\left(\overset{\circ}{S}_{\delta_1}(\varrho) \setminus \overset{\circ}{S}_{\delta_1}(\varrho)\right) \cap \Omega} u_x^2(p) d\omega_p. \end{aligned} \quad (11)$$

Второй интеграл в (11) ограничен, поэтому рассмотрим только первый:

$$\int_{\dot{s}_\delta(\varrho) \cap \Omega} |u_x(p)| \cdot dr d\varphi \leq \int_0^{\omega_0} |\cos \varphi| d\varphi \int_0^{\delta_1} |u_r| dr + \int_0^{\omega_0} |\sin \varphi| |u_\varphi| d\varphi \int_0^{\delta_1} \frac{1}{r} dr \leq$$

$$\leq \int_0^{\omega_0} d\varphi \int_0^{\delta_1} |u_r| dr + \int_0^{\omega_0} |u_\varphi| d\varphi \int_0^{\delta_1} \frac{1}{r} dr.$$
(12)

В силу монотонности и знакопостоянства функций u_r на $(0, \delta_1]$ и знакопостоянства u_φ на интервалах Δ_i^\pm можно, не ограничивая общности, вместо $|u_r|$ рассматривать u_r и, воспользовавшись (9), записать следующее.

$$\int_0^{\omega_0} d\varphi \int_0^{\delta_1} |u_r| dr = \int_0^{\omega_0} (u(\delta_1, \varphi) - u(0, \varphi)) d\varphi,$$

$$\int_0^{\omega_0} |u_\varphi| d\varphi \int_0^{\delta_1} \frac{1}{r} dr = \int_0^{\delta_1} \sum_{\Delta_i^+} [u(r, \omega_i) - u(r, \omega_{i-1})] \frac{dr}{r} +$$

$$+ \int_0^{\delta_1} \sum_{\Delta_i^-} [u(r, \omega_i) - u(r, \omega_{i-1})] \frac{dr}{r}.$$
(13)

Интеграл (13) ограничен. Рассмотрим только первый интеграл в (14) (второй рассматривается аналогично). Особенность в интеграле $\int_0^{\delta_1} \frac{u(r, \omega_0)}{r} dr$ будет определяться поведением подынтегральной функции в точке $r=0$, т.к. $u(0, \omega_0) = 0$. Видно, что $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{u(r, \omega_0)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} u_r(r, \omega_0)$, т.е. в некоторой «достаточно малой» окрестности точки $r=0$ функция $\frac{u(r, \omega_0)}{r}$ ведет себя как $u_r(r, \omega_0)$, следовательно, интеграл $\int_0^{\delta_1} \frac{u(r, \omega_0)}{r} dr$ будет сходящимся. Таким образом,

$$\int_{\dot{s}_\delta(\varrho) \cap \Omega} u_x^2(p) d\omega_p - \text{сходится, аналогично показывается сходимость интеграла}$$

$$\int_{\dot{s}_\delta(\varrho) \cap \Omega} u_y^2(p) d\omega_p, \text{ что в конечном счете дает ограниченность нормы } \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2.$$

Доказательство утверждения.

Доказательство будет вестись от противного. Будем предполагать, что при выполнении указанных выше условий $|\nabla u|$ решения краевой задачи в окрестности «угловой точки» будет неограниченно расти.

Далее воспользуемся преобразованием Лежандра, суть которого заключается в следующем. Пусть у нас есть некоторая поверхность в

пространстве x, y, u . Задание такой поверхности возможно двумя способами. Можно или задавать поверхность как множество точек, определенное функцией $u(x, y)$, или рассматривать эту поверхность как огибающую семейства ее касательных плоскостей, т.е. написать уравнение, которому должна удовлетворять плоскость, чтобы быть касательной плоскостью к этой поверхности. Второй способ задания поверхности лежит в основе преобразования Лежандра [6]. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} u(x, y) + \omega(\xi, \eta) &= x\xi + y\eta, \\ u_x &= \xi, \quad u_y = \eta, \quad x = \omega_\xi, \quad y = \omega_\eta, \\ u_{xx} &= \rho\omega_{\eta\eta}, \quad u_{xy} = -\rho\omega_{\xi\eta}, \quad u_{yy} = \rho\omega_{\xi\xi}, \end{aligned} \quad (15)$$

где ρ якобиан отображения Лежандра

$$\rho = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2, \quad \frac{1}{\rho} = \omega_{\xi\xi}\omega_{\eta\eta} - \omega_{\xi\eta}^2. \quad (16)$$

Преобразование Лежандра существенно отличается по своему характеру от простого преобразования координат, ибо оно ставит в соответствие не точке точку, а элементу поверхности (x, y, u, u_x, u_y) элемент поверхности $(\xi, \eta, \omega, \omega_\xi, \omega_\eta)$.

В силу условий (7) в $S_8(Q)$ возможно преобразование Лежандра. Применим преобразование (15) к уравнениям $\operatorname{div}(\mu\nabla u_2) = 0$ и $\Delta u_1 = 0$, из постановки краевой задачи (3) получим

$$[1 + \xi^2 f(r')] \omega_{2\eta\eta} - 2\xi\eta f(r') \omega_{2\xi\eta} + [1 + \eta^2 f(r')] \omega_{2\xi\xi} = 0, \quad (17)$$

$$\Delta \omega_1 = 0, \quad (18)$$

где $r' = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, $f(r') = \frac{\mu'(r')}{\mu(r')r'}$. Сделав дополнительное преобразование координат

$$\tilde{\xi} = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad \tilde{\eta} = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \quad (19)$$

и учтя условие (8), получим, что «области Ω_1 и Ω_2 » перейдут в «области $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$ », см.рис.5.

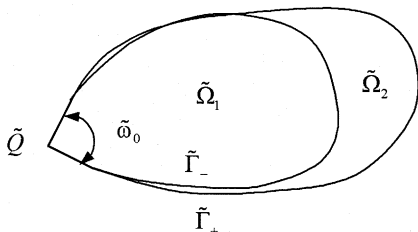


Рис. 5

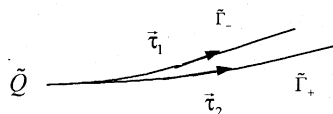


Рис. 6

Будем также обозначать $\tilde{\Gamma}_i$ границы областей $\tilde{\Omega}_i$, где $i=1,2$. Границы $\tilde{\Gamma}_\pm$ есть обозначение «границы Γ » после отображения Лемандра.

Покажем, что при отображении угол α между касательными векторами $\tilde{\tau}_1$ и $\tilde{\tau}_2$ к границам $\tilde{\Gamma}_+$ и $\tilde{\Gamma}_-$, соответственно, в точке \tilde{Q} равен нулю (см. рис. 6). Отображение (19) сохраняет угол между границами $\tilde{\Gamma}_+$ и $\tilde{\Gamma}_-$ в точке \tilde{Q} , поэтому для простоты выкладок рассмотрим $\eta_{1\xi}$ и $\eta_{2\xi}$ в координатной системе (ξ, η) . Из граничных условий известно, что $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, $\eta_1 = \mu(r'_2)\eta_2$, где $r'_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta_2^2}$, поэтому

$$\eta_{1\xi} = \mu_{r'_2} r'_2 \eta_2 + \mu \eta_{2\xi} = \mu_{r'_2} \eta_2 \frac{\xi + \eta_2 \eta_{2\xi}}{r'_2} + \mu \eta_{2\xi}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \lim_{r'_2 \rightarrow +\infty} \eta_{1\xi} &= \lim_{r'_2 \rightarrow +\infty} \mu_{r'_2} \frac{\eta_2}{\sqrt{1 + (\eta_2/\xi)^2}} + \lim_{r'_2 \rightarrow +\infty} \mu_{r'_2} \frac{\eta_2 \eta_{2\xi}}{\sqrt{1 + (\xi/\eta_2)^2}} + \\ &+ \lim_{r'_2 \rightarrow +\infty} \eta_{2\xi} = \lim_{r'_2 \rightarrow +\infty} \eta_{2\xi} \left(1 + \frac{\mu_{r'_2} \eta_2}{\sqrt{1 + (\xi/\eta_2)^2}} \right) = \lim_{r'_2 \rightarrow +\infty} \eta_{2\xi}; \end{aligned} \quad (21)$$

здесь учтено, что $\lim_{r' \rightarrow +\infty} \mu(r') = 1$ и $\lim_{r' \rightarrow +\infty} \mu_{r'}(r')r' = 0$. Таким образом, из (21) видно, что касательные к границам $\tilde{\Gamma}_+$ и $\tilde{\Gamma}_-$ в точке \tilde{Q} совпадают.

Рассмотрим поведение решений $w_1(t, \varphi)$ и $w_2(t, \varphi)$ в областях $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$ соответственно, где $w_i(t, \varphi) = \omega_i(\xi, \eta)$ $i=1,2$ $t = \sqrt{\xi^2 + \tilde{\eta}^2}$. Покажем, что из

граничных условий следуют соотношения: $\frac{w_{1\xi}|_{\tilde{\Gamma}_-}}{w_{2\xi}|_{\tilde{\Gamma}_+}} \rightarrow 1$, $\frac{w_{1\tilde{\eta}}|_{\tilde{\Gamma}_-}}{w_{2\tilde{\eta}}|_{\tilde{\Gamma}_+}} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow 0$.

$$\omega_{1\xi}|_{\tilde{\Gamma}_-} = \omega_{2\xi}|_{\tilde{\Gamma}_+}, \quad \omega_{1\tilde{\eta}}|_{\tilde{\Gamma}_-} = \omega_{2\tilde{\eta}}|_{\tilde{\Gamma}_+}, \quad (22)$$

$$\omega_{i\xi} = w_{i\xi} \tilde{\xi}_\xi + w_{i\tilde{\eta}} \tilde{\eta}_\xi, \quad \omega_{i\tilde{\eta}} = w_{i\xi} \tilde{\xi}_\eta + w_{i\tilde{\eta}} \tilde{\eta}_\eta, \quad i=1,2, \quad (23)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_\xi &= \frac{\eta^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, & \tilde{\eta}_\xi &= -\frac{2\eta\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, \\ \tilde{\xi}_\eta &= -\frac{2\eta\xi}{(\xi^2 + \eta^2)^2}, & \tilde{\eta}_\eta &= \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 + \eta^2)^2},\end{aligned}\quad (24)$$

$$\begin{cases} \frac{\eta_2^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \eta_2^2)^2} w_{2\xi} - \frac{2\xi\eta_2}{(\xi^2 + \eta_2^2)^2} w_{2\eta} = \omega_{2\xi}, \\ -\frac{2\eta_2\xi}{(\xi^2 + \eta_2^2)^2} w_{2\xi} + \frac{\xi^2 - \eta_2^2}{(\xi^2 + \eta_2^2)^2} w_{2\eta} = \omega_{2\eta}, \end{cases}\quad (25)$$

$$\begin{cases} \frac{\eta_2^2\mu^2 - \xi^2}{(\xi^2 + \eta_2^2\mu^2)^2} w_{1\xi} - \frac{2\xi\eta_2\mu}{(\xi^2 + \eta_2^2\mu^2)^2} w_{1\eta} = \omega_{1\xi}, \\ -\frac{2\xi\eta_2\mu}{(\xi^2 + \eta_2^2\mu^2)^2} w_{1\xi} + \frac{\xi^2 - \eta_2^2\mu^2}{(\xi^2 + \eta_2^2\mu^2)^2} w_{1\eta} = \omega_{1\eta}. \end{cases}\quad (26)$$

Перепишем системы (25) и (26) в виде

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 = c_1, \\ \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 = c_2, \end{cases}\quad (27)$$

и

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_1 \bar{x}_1 + \bar{\beta}_1 \bar{x}_2 = \bar{c}_1, \\ \bar{\alpha}_2 \bar{x}_1 + \bar{\beta}_2 \bar{x}_2 = \bar{c}_2, \end{cases}\quad (28)$$

где $x_1 = w_{2\xi}$, $x_2 = w_{2\eta}$, $\bar{x}_1 = w_{1\xi}$, $\bar{x}_2 = w_{1\eta}$, а $\alpha_i, \bar{\alpha}_i$, $i = 1, 2$ - соответствующие им коэффициенты.

Решая системы (27) и (28) относительно (x_1, x_2) и (\bar{x}_1, \bar{x}_2) соответственно и учитывая, что $\alpha_1 = -\beta_2, \alpha_2 = \beta_1$, $\bar{\alpha}_1 = -\bar{\beta}_2, \bar{\alpha}_2 = \bar{\beta}_1$, и $c_1 = \bar{c}_1$, $c_2 = \bar{c}_2$, получим

$$\frac{\bar{x}_2}{x_2} = \frac{\beta_2^2 + \beta_1^2}{\bar{\beta}_2^2 + \bar{\beta}_1^2} \frac{c_1 \bar{\beta}_1 + c_2 \bar{\beta}_2}{c_1 \beta_1 + c_2 \beta_2}.\quad (29)$$

Переходя к пределу для соотношения $\frac{\bar{x}_2}{x_2}$, получаем

$$\lim_{\xi_2 \rightarrow +\infty} \frac{\bar{x}_2}{x_2} = 1.\quad (30)$$

Аналогичный результат имеем и для соотношения $\frac{\bar{x}_1}{x_1}$.

Здесь возможны следующие варианты:

- $|\nabla w_1|, |\nabla w_2|$ - ограниченные величины в $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Gamma}_1$ и в $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Gamma}_2$ соответственно;
- $|\nabla w_1|, |\nabla w_2|$ - не ограниченные величины в $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Gamma}_1$ и в $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Gamma}_2$ соответственно;
- $|\nabla w_1|$ - ограничен в $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Gamma}_1$, а $|\nabla w_2|$ - не ограничен в $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Gamma}_2$;
- $|\nabla w_1|$ - не ограничен в $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Gamma}_1$, а $|\nabla w_2|$ - ограничен в $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Gamma}_2$.

В первом случае, по лемме 2, будет следовать принадлежность функций w_1 и w_2 к пространству W_2^2 , т.е. решения могут быть представлены разложениями вида [1]

$$w_i(t, \varphi) = C_i t^{\lambda_i} \sin \lambda_i \varphi + R_i, \quad \lambda_i \geq 1, \quad (31)$$

где $R_i \in W_2^2$, $i = 1, 2$.

Из (30) получаем что $C_1 = C_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$. Таким образом, при обратном отображении будет нарушаться однозначность отображения.

Во втором случае в области $\tilde{\Omega}_1$ определим функцию $\varepsilon(p)$:

$$\varepsilon(p) = w_1(p) - w_2(p); \quad (32)$$

такая функция будет непрерывна. Запишем градиент от (32) на границе $\tilde{\Gamma}_-$

$$\nabla \varepsilon(p) = \bar{e}_{\tilde{\xi}} [w_{1\tilde{\xi}}(p) - w_{2\tilde{\xi}}(p)] + \bar{e}_{\tilde{\eta}} [w_{1\tilde{\eta}}(p) - w_{2\tilde{\eta}}(p)], p \in \tilde{\Gamma}_- \quad (33)$$

Рассмотрим, например, компоненту $\bar{e}_{\tilde{\xi}}$ и покажем, что она стремится к нулю при $t \rightarrow 0$

$$\left[w_{1\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1) - w_{2\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1) \right] = \frac{1}{w_{2\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1)} \left[\frac{w_{1\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1)}{w_{2\tilde{\xi}}(\tilde{\xi}_1, \tilde{\eta}_1)} - 1 \right] \quad (34)$$

в силу того, что границы $\tilde{\Gamma}_+$ и $\tilde{\Gamma}_-$ входят в точку \tilde{Q} под одним и тем же углом ($\alpha = 0$), получаем, что

$$\lim_{p \rightarrow \tilde{Q}} w_{2\tilde{\xi}}(p) \Big|_{\tilde{\Gamma}_-} = \lim_{p \rightarrow \tilde{Q}} w_{2\tilde{\xi}}(p) \Big|_{\tilde{\Gamma}_+}. \quad (35)$$

Следовательно,

$$\lim_{p \rightarrow \tilde{Q}} \frac{w_{1\tilde{\xi}}(p)}{w_{2\tilde{\xi}}(p)} \Big|_{\tilde{\Gamma}_-} = \lim_{p \rightarrow \tilde{Q}} \frac{w_{1\tilde{\xi}}(p)}{w_{2\tilde{\xi}}(p)} \Big|_{\tilde{\Gamma}_+} = \lim_{p \rightarrow \tilde{Q}} \frac{\bar{x}_1}{x_1} = 1. \quad (36)$$

Таким образом, из (34) получаем

$$\lim_{p \rightarrow \tilde{Q}} [w_{1\bar{\xi}}(p) - w_{2\bar{\xi}}(p)] = 0, \quad (37)$$

где точка $p \in \tilde{\Gamma}_-$.

Аналогичный результат получается и для компоненты \bar{e}_{η_1} .

Функция $g(p) = \varepsilon_{\bar{\xi}}(p)$ является непрерывной на $\tilde{\Gamma}_-$ и обладает непрерывной производной, за исключением, может быть, точки \tilde{Q} , т.е. $g_{\bar{\xi}}(p) = \varepsilon_{\bar{\xi}\bar{\xi}}(p)$. Т.е. функция $g(p)$ удовлетворяет условиям леммы 2, и следовательно

$$\int_{\dot{S}_8(\tilde{Q}) \cap \tilde{\Omega}_1} [g_{\bar{\xi}}(p)]^2 d\omega_p < Const. \quad (38)$$

Т.е. $\varepsilon \in W_2^2(\dot{S}_8(\tilde{Q}) \cap \tilde{\Omega}_1)$. Для функции $\varepsilon(p)$ можно записать краевую задачу

$$\begin{cases} L_a \varepsilon(p) = F(p), & p \in \tilde{\Omega}_1, \\ \varepsilon|_{\tilde{\Gamma}_-} = \Psi, \end{cases} \quad (39)$$

где $F \in L_2(\dot{S}_8(\tilde{Q}) \cap \tilde{\Omega}_1)$, $L_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2-\bar{a}(t)}{t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{a}(t)}{t^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$, $\bar{a}(1/r') = 1 + r'^2 f(r')$.

В силу [2,3] получаем, что для $\varepsilon(p)$ справедливо разложение в окрестности точки \tilde{Q}

$$\varepsilon(t, \varphi) = Ct^\lambda \sin \lambda \varphi + R, \quad \lambda \geq 1, \quad (40)$$

из которого следует, что $\frac{|\nabla \varepsilon|}{|\nabla w_i|} \ll 1$, $i = 1, 2$ в окрестности точки \tilde{Q} (см. рис. 7).

Следовательно, при обратном отображении будет нарушена взаимоднозначность, т.к. $\nabla w_1 = \nabla w_2 + \nabla \varepsilon$.

В третьем случае в силу ограниченности $|\nabla w_i|$ в $\tilde{\Omega}_1 \cup \tilde{\Gamma}_-$ следует ограниченность $|\nabla w_1|$ на $\tilde{\Gamma}_-$, следовательно, (из (30)), $|\nabla w_2|$ на границе $\tilde{\Gamma}_+$ ограничен. Отсюда по лемме 2 функция

$w_2 \in W_2^2(\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Gamma}_+)$, что в силу [2,3] означает ограниченность $|\nabla w_2|$ в $\tilde{\Omega}_2 \cup \tilde{\Gamma}_2$.

Следовательно, третий случай сводится к первому. Аналогично показывается невозможность четвертого варианта, который сводится ко второму. Т.е. третий и четвертый случаи невозможны, возможны только первый и второй.

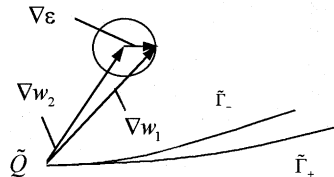


Рис. 7

Таким образом, получаем, что из двух возможных вариантов ни один не дает решение $u(p)$ краевой задачи (3), удовлетворяющее условиям (7), что и доказывает наше утверждение.

Следствие.

Можно показать, что из доказанного утверждения следует непрерывность в точке $Q \in \Gamma_{\pm}$ величины $\forall u_2(p)$ при $p \in \Gamma_+$ и непрерывность $\forall u_1(p)$ при $p \in \Gamma_-$.

Литература

1. И.В. Фрязинов. ЖВМиМФ, 1978, том 18, N5, сс. 1171-1185.
2. Л.А. Оганесян, В.Я. Ривкинд, Л.А. Руховец. Труды семинара «Дифференциальные уравнения и их применение», 1974, ч. 2, выпуск 8, Вильнюс.
3. В.А. Кондратьев. Труды Московского математического общества, 1967, т.16, сс. 209-292.
4. Стрэнг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М., Мир, 1977.
5. В.В. Шайдулов. Вычислительные методы в прикладной математике, Наука, Новосибирск 1982, сс. 173-188.
6. Р. Курант. Уравнения с частными производными, М.: Мир, 1964, т.2.
7. Е.П. Жидков, Е.Е. Перепелкин. Краевая задача для уравнения эллиптического типа в области с углом. P5-2000-52, ОИЯИ, Дубна, 2000.
8. E.P. Zhidkov, E.E. Perepelkin. An analytical approach for quasi-linear equation in second order. СМАМ, 2001, v.1, N3.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 октября 2001 года.

Жидков Е.П., Перепелкин Е.Е.
Исследование поведения решения задачи магнитостатики
в окрестности угловой точки ферромагнетика

P5-2001-229

В работе исследовалась нелинейная краевая задача в «области с углом». Постановка задачи возникла при поиске распределения магнитного поля. Для решения краевой задачи обычно используются численные методы, поэтому важно было изучить вопрос о свойствах гладкости решения в окрестности «угловой точки».

При рассмотрении работ, посвященных данной тематике, выяснилось, что для нелинейных задач этот вопрос мало изучен в отличие от линейных краевых задач.

В наших предыдущих работах был исследован «квазилинейный» случай задачи магнитостатики и описан метод нахождения частных решений нелинейного дифференциального уравнения, учитываемого при постановке задачи магнитостатики.

Здесь же мы рассматриваем случай нелинейной краевой задачи магнитостатики и приводим доказательство утверждения об ограниченности магнитного поля в окрестности «угловой точки».

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2001

Перевод авторов

Zhidkov E.P., Perepelkin E.E.
Study of Solution Behaviour of Non-Linear Boundary-Value Magnetostatic
Problem around Ferromagnetic's Corner Point

P5-2001-229

A non-linear boundary value problem was studied in a corner domain. This problem arose from seeking for the distribution of magnetic field. Numerical methods are usually used to solve such a problem, therefore it was important to study the solutions smoothness around a corner point.

Non-linear problems in this aspect are not studied enough. However, similar investigations were performed for linear problems.

In one of our previous papers we considered a quasi-linear magnetostatic problem, and later we described a method for finding particular solutions of non-linear divergent-type differential equation, which was a part of the magnetostatic problem.

In this paper we consider a case of non-linear boundary-value magnetostatic problem and give the proof of the theorem about finite magnetic field around a corner point.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2001

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 28.11.2001
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. л. 0,79
Тираж 325. Заказ 52976. Цена 79 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области