Р5-2001-252

В.К.Мельников

О СТРУКТУРЕ УРАВНЕНИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА

Направлено в оргкомитет международной конференции «NEEDS'2001», Кембридж, Великобритания, 24–31 июля 2001 г.

I. Введение

В настоящей работе речь идет о структуре нелинейных эволюционных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \cdots, \frac{\partial^{k_0} u}{\partial x^{k_0}}), \tag{1}$$

которые допускают исследование с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Шредингера

$$L = \partial^2 + u, \ \partial = \frac{\partial}{\partial x}, \tag{2}$$

с потенциалом $u = u(x,t)$, удовлетворяющим уравнению (1). При этом мы будем предполагать, что правая часть уравнения (1) является достаточно гладкой функцией независимых переменных x, t, решения u и его производных $u_k = \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$ по x до некоторого конечного порядка $k_0 \geq 0$. В дальнейшем мы будем часто, не оговаривая это особо, обозначать само решение символом u_0, считая его производной нулевого порядка. Кроме того, мы будем предполагать, что для любых достаточно гладких и достаточно быстро убывающих при $x \to \pm\infty$ начальных условий уравнение (1) имеет единственное решение, обладающее аналогичными свойствами, т.е. имеющее достаточную гладкость и убывающее достаточно быстро при $x \to \pm\infty$.

Определенный выше класс нелинейных эволюционных уравнений мы будем называть классом локальных уравнений. Очевидно, что для исследования произвольно взятого уравнения из этого класса мы сможем воспользоваться теорией рассеяния для оператора Шредингера с быстро убывающим при $x \to \pm\infty$ потенциалом $u(x)$, если порождаемая быстро убывающими при $x \to \pm\infty$ решениями этого уравнения эволюция S-матрицы оператора L описывается уравнением вида

$$\frac{\partial S(\eta)}{\partial t} = H\left(S(\eta),\ S'(\eta),\ \ldots,\ S^{(m)}(\eta),\ \eta\right), \tag{3}$$

где параметр η связан соотношением $\eta^2 = -\lambda$ со спектральным параметром λ оператора L, а штрихами обозначены производные по параметру η до некоторого конечного порядка $m \geq 0$. При этом мы будем предполагать, что элементы матрицы H зависят гладким образом от элементов матриц $S^{(\mu)}(\eta) = \dfrac{\partial^\mu S(\eta)}{\partial \eta^\mu}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, m$. Более точно, мы будем предполагать, что производные от элементов матрицы H по элементам матриц $S^{(\mu)}(\eta)$, $\mu = 0, 1, \ldots, m$, являются непрерывными функциями всех своих аргументов при любом вещественном значении параметра $\eta \neq 0$. Оказалось, что это требование является довольно сильным и полностью определяет структуру уравнения (1). Именно, удалось доказать, что не существует нелинейных эволюционных уравнений, принадлежащих определенному выше классу локальных уравнений, чьи быстро убывающие при $x \to \pm\infty$ решения порождают эволюцию S-матрицы, удовлетворяющую уравнению (3) с $m > 1$. Далее, при $m = 1$ любое нелинейное эволюционное уравнение из класса локальных уравнений допускает операторное представление вида

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = cL, \tag{4}$$

где A – дифференциальный по x оператор, а величина c может зависеть только от времени t. Наконец, при $m = 0$ любое нелинейное эволюционное уравнение из рассматриваемого нами класса обладает представлением Лакса [1]

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A, L] = 0. \tag{5}$$

Таким образом, только быстро убывающие решения уравнений КдВ-иерархии порождают эволюцию S-матрицы оператора L вида (2), описываемую системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Более того, в результате замены оператора A на оператор $A - \frac{c}{2}x\partial$ операторное соотношение (4) принимает вид

$$\frac{\partial L}{\partial t} + [A,\ L] = c\left(u + \frac{1}{2}x\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{6}$$

Это означает, что любое уравнение, порождаемое с помощью операторного соотношения (4), является уравнением КдВ-иерархии с выписанной выше правой частью. Эволюционное уравнение для S-матрицы является в этом случае уравнением с частными производными. Однако оно интегрируется в конечном виде, и, таким образом, решение задачи Коши для любого из уравнений (6) является не намного более сложной проблемой, чем решение аналогичной задачи для любого из уравнений (5). Отметим, что уравнение (6) является частным случаем рассмотренного в книге [2] класса нелинейных эволюционных уравнений. Из результатов настоящей работы следует, что все остальные рассмотренные в этой книге уравнения являются нелокальными. Все эти результаты получаются следующим образом.

II. Вспомогательные результаты

Как известно, в случае быстро убывающего при $x \to \pm\infty$ потенциала $u = u\,(x)$ уравнение

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \left(u + \eta^2\right)e = 0 \tag{7}$$

при любом вещественном η имеет решения e_- и e_+, обладающие асимптотиками

$$\begin{aligned} &e_-(x,\ \eta) \sim \exp\left(-i\eta x\right), \quad \text{если } x \to -\infty,\\ &e_+(x,\ \eta) \sim \exp\left(i\eta x\right), \qquad \text{если } x \to \infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Между этими решениями существует связь

$$e_+(x,\ \eta) = a(\eta)e_-(x,\ -\eta) + b(\eta)e_-(x,\ \eta), \tag{9}$$

где величины $a(\eta)$ и $b(\eta)$ обладают представлением

$$\begin{aligned} a(\eta) &= \frac{1}{2i\eta}\left[e_-(x,\ \eta)\frac{\partial e_+(x,\ \eta)}{\partial x} - \frac{\partial e_-(x,\ \eta)}{\partial x}e_+(x,\ \eta)\right],\\ b(\eta) &= \frac{1}{2i\eta}\left[e_+(x,\ \eta)\frac{\partial e_-(x,\ -\eta)}{\partial x} - \frac{\partial e_+(x,\ \eta)}{\partial x}e_-(x,\ -\eta)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

и при любом вещественном $\eta \neq 0$ удовлетворяют условиям

$$a(-\eta) = \bar{a}(\eta), \quad b(-\eta) = \bar{b}(\eta), \quad |a(\eta)|^2 - |b(\eta)|^2 = 1. \tag{11}$$

Здесь и всюду в дальнейшем черта обозначает комплексное сопряжение.

Определенные выше величины $a(\eta)$ и $b(\eta)$ обладают рядом замечательных свойств. В частности, при любом $\mu \geq 0$ и любом вещественном η справедливы равенства

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\partial^\mu}{\partial \eta^\mu}[2i\eta a(\eta)] &= \frac{\partial^\mu \Phi(x,\,\eta)}{\partial \eta^\mu}, \\ \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\partial^\mu}{\partial \eta^\mu}[2i\eta b(\eta)] &= -\frac{\partial^\mu \Psi(x,\,\eta)}{\partial \eta^\mu}, \end{aligned} \tag{12}$$

где функции Φ и Ψ имеют вид

$$\Phi(x,\,\eta) = e_-(x,\,\eta)e_+(x,\,\eta), \quad \Psi(x,\,\eta) = e_-(x,\,-\eta)e_+(x,\,\eta) \tag{13}$$

и согласно (7) удовлетворяют уравнению

$$\mathfrak{L}\Theta = 0, \quad \mathfrak{L} = \partial^3 + 4(u+\eta^2)\partial + 2\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{14}$$

Отсюда следует, что при любом $\mu > 0$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\frac{\partial^\mu \Phi}{\partial \eta^\mu} &= -8\mu\eta \frac{\partial^\mu \Phi}{\partial x \partial \eta^{\mu-1}} - 4\mu(\mu-1)\frac{\partial^{\mu-1}\Phi}{\partial x \partial \eta^{\mu-2}}, \\ \mathfrak{L}\frac{\partial^\mu \Psi}{\partial \eta^\mu} &= -8\mu\eta \frac{\partial^\mu \Psi}{\partial x \partial \eta^{\mu-1}} - 4\mu(\mu-1)\frac{\partial^{\mu-1}\Psi}{\partial x \partial \eta^{\mu-2}}. \end{aligned}$$

Это означает, что при любом $\mu \geq 0$ имеют место равенства

$$(L_+^\mu \cdot \mathfrak{L})\frac{\partial^\mu \Phi}{\partial \eta^\mu} = (\mathfrak{L} \cdot L_-^\mu)\frac{\partial^\mu \Phi}{\partial \eta^\mu} = 0, \;\; (L_+^\mu \cdot \mathfrak{L})\frac{\partial^\mu \Psi}{\partial \eta^\mu} = (\mathfrak{L} \cdot L_-^\mu)\frac{\partial^\mu \Psi}{\partial \eta^\mu} = 0,$$

где

$$\begin{aligned} L_+ &= \frac{1}{4}\,\mathfrak{L} \cdot \partial^{-1} = \frac{1}{4}\,\partial^2 + u + \eta^2 + \frac{1}{2}\,\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \partial^{-1}, \\ L_- &= \frac{1}{4}\,\partial^{-1} \cdot \mathfrak{L} = \frac{1}{4}\,\partial^2 + u + \eta^2 - \frac{1}{2}\,\partial^{-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, в силу (12) получаем, что определенные с помощью формул

$$A_\mu(x,\,\eta) = \frac{\delta}{\delta u(x)}\frac{\partial^\mu a(\eta)}{\partial \eta^\mu}, \quad B_\mu(x,\,\eta) = \frac{\delta}{\delta u(x)}\frac{\partial^\mu b(\eta)}{\partial \eta^\mu} \tag{16}$$

величины A_μ и B_μ при любом $\mu > 0$ удовлетворяют условиям

$$(L_+^\mu \cdot \mathfrak{L})A_\mu = (\mathfrak{L} \cdot L_-^\mu)A_\mu = (L_+^\mu \cdot \mathfrak{L})B_\mu = (\mathfrak{L} \cdot L_-^\mu)B_\mu = 0. \tag{17}$$

В соответствии с общеизвестными связями между величинами $a(\eta)$, $b(\eta)$, с одной стороны, и элементами S-матрицы, с другой стороны, из уравнения (3) следует, что эволюция величин $a(\eta)$ и $b(\eta)$ описывается уравнениями вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(\eta)}{\partial t} &= P(a(\eta),\, a(-\eta),\, b(\eta),\, b(-\eta), \ldots,\, \eta), \\ \frac{\partial b(\eta)}{\partial t} &= Q(a(\eta),\, a(-\eta),\, b(\eta),\, b(-\eta), \ldots,\, \eta), \end{aligned} \tag{18}$$

где точками обозначены производные от величин $a(\eta)$, $a(-\eta)$, $b(\eta)$ и $b(-\eta)$ по параметру η не выше m-го порядка, а сами функции P и Q имеют непрерывные первые производные по переменным

$$a^{(\mu)}(\eta) = \frac{\partial^\mu a(\eta)}{\partial \eta^\mu}, \quad a^{(\mu)}(-\eta) = \frac{\partial^\mu a(-\eta)}{\partial \eta^\mu}, \quad b^{(\mu)}(\eta) = \frac{\partial^\mu b(\eta)}{\partial \eta^\mu}, \quad b^{(\mu)}(-\eta) = \frac{\partial^\mu b(-\eta)}{\partial \eta^\mu}$$

с $\mu = 0, 1, \cdots, m$. Это обстоятельство позволяет нам рассмотреть величины F и G вида

$$F(x,\eta) = \frac{\delta P(\eta)}{\delta u(x)}, \quad G(x,\eta) = \frac{\delta Q(\eta)}{\delta u(x)}. \tag{19}$$

С учетом сказанного выше на основе (16) и (17) получаем, что определенные посредством (19) величины F и G удовлетворяют условиям

$$(L_+^m \cdot \mathfrak{L})F = (\mathfrak{L} \cdot L_-^m)F = (L_+^m \cdot \mathfrak{L})G = (\mathfrak{L} \cdot L_-^m)G = 0. \tag{20}$$

Эти условия, очевидно, являются простым следствием того факта, что правые части уравнений (18) являются гладкими функциями своих аргументов. Однако роль этих условий во всем последующем изложении чрезвычайно велика, что позволяет нам назвать их главными условиями.

III. Основное соотношение

Как известно, производные по времени от величин $a(\eta)$ и $b(\eta)$ вида (10) допускают представление

$$\frac{\partial a(\eta)}{\partial t} = I(\eta), \quad \frac{\partial b(\eta)}{\partial t} = J(\eta),$$

где

$$I(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta a(\eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z)dz, \quad J(\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta b(\eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z)dz.$$

При этом $\hat{h}(x)$ понимается как значение правой части уравнения (1) на рассматриваемом решении $u = u(x,\, t)$ этого уравнения. По аналогии с (19) определим величины $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ с помощью равенств

$$\mathcal{F} = \frac{\delta I(\eta)}{\delta u(x)}, \quad \mathcal{G} = \frac{\delta J(\eta)}{\delta u(x)}. \tag{21}$$

Нетрудно видеть, что определенные так величины $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ допускают представление

$$\mathcal{F} = \Gamma + K, \quad \mathcal{G} = \Delta + M,$$

где

$$\Gamma = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\delta a(\eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z) dz, \quad \Delta = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\delta b(\eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z) dz,$$

а величины K и M на основе (12) имеют вид

$$K = \frac{1}{2i\eta} \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\hat{h}_k(x) \Phi(x,\, \eta) \right),$$

$$M = -\frac{1}{2i\eta} \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left(\hat{h}_k(x) \Psi(x,\, \eta) \right).$$

При этом величины $\hat{h}_k(x)$ равны значениям производных $h_k = \dfrac{\partial h}{\partial u_k}$ на рассматриваемом решении $u = u(x,\, t)$ уравнения (1), а $u_k = \dfrac{\partial^k u}{\partial x^k}$, $\quad k = 0, 1, \ldots, k_0$.

В соответствии с равенствами (10) вторые вариационные производные от величин $a(\eta)$ и $b(\eta)$ удовлетворяют условиям

$$\frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\delta a(\eta)}{\delta u(z)} = \frac{\delta}{\delta u(z)} \frac{\delta a(\eta)}{\delta u(x)}, \qquad \frac{\delta}{\delta u(x)} \frac{\delta b(\eta)}{\delta u(z)} = \frac{\delta}{\delta u(z)} \frac{\delta b(\eta)}{\delta u(x)}. \tag{22}$$

Эти условия аналогичны хорошо известному из анализа соотношению для вторых смешанных производных от функции, зависящей от двух переменных, и, по-видимому, являются его простым следствием. Во всяком случае, для элементов S-матрицы аналогичные равенства также верны. С учетом (12) и (22) получаем, что определенные выше величины Γ и Δ могут быть записаны в виде

$$\Gamma = \frac{1}{2i\eta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta \Phi(x,\, \eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z) dz = \frac{1}{2i\eta} \frac{\partial \Phi(x,\, \eta)}{\partial t},$$

$$\Delta = -\frac{1}{2i\eta} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta \Psi(x,\, \eta)}{\delta u(z)} \hat{h}(z) dz = -\frac{1}{2i\eta} \frac{\partial \Psi(x,\, \eta)}{\partial t}.$$

Далее, положим

$$\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{k_0} (-1)^k \partial^k \cdot \hat{h}_k(x). \tag{23}$$

Согласно определению величин K и M справедливы равенства

$$K = \frac{1}{2i\eta} \mathcal{A} \Phi(x,\, \eta), \quad M = -\frac{1}{2i\eta} \mathcal{A} \Psi(x,\, \eta).$$

Таким образом, получаем, что определенные посредством (21) величины $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ допускают представление

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2i\eta}\mathcal{T}\Phi(x,\,\eta), \quad \mathcal{G} = -\frac{1}{2i\eta}\mathcal{T}\Psi(x,\,\eta), \tag{24}$$

где эволюционный оператор $\mathcal{T}$ имеет вид

$$\mathcal{T} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}. \tag{25}$$

В силу определения величин F и G, с одной стороны, и величин $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$, с другой стороны, нетрудно убедиться в справедливости равенств $F = \mathcal{F}$ и $G = \mathcal{G}$. На их основе с учетом (20) и (24) получаем равенства

$$\big(L_+^m \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}\big)\Phi = \big(\mathcal{L} \cdot L_-^m \cdot \mathcal{T}\big)\Phi = \big(L_+^m \cdot \mathcal{L} \cdot \mathcal{T}\big)\Psi = \big(\mathcal{L} \cdot L_-^m \cdot \mathcal{T}\big)\Psi = 0. \tag{26}$$

Поскольку функции $\Psi = \Psi(x,\,\eta)$, $\quad \Phi = \Phi(x,\,\eta)$ и $\overline{\Psi} = \Psi(x,\,-\eta)$ вида (13) при любом вещественном $\eta \neq 0$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (14), то из равенства (26) следует, что определенный в соответствии с (23) и (25) эволюционный оператор $\mathcal{T}$ переводит любое решение Θ уравнения (14) в решение $\dot{\Theta} = \mathcal{T}\Theta$ уравнения

$$\big(L_+^m \cdot \mathcal{L}\big)\dot{\Theta} = \big(\mathcal{L} \cdot L_-^m\big)\dot{\Theta} = 0, \quad \dot{\Theta} = \mathcal{T}\Theta. \tag{27}$$

Возьмем теперь дифференциальный по x оператор $\mathcal{B}$, такой, что оператор Ω вида

$$\Omega = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + [\mathcal{A},\,\mathcal{L}] - \mathcal{B} \cdot \mathcal{L} \tag{28}$$

имеет порядок не выше второго. Очевидно, что этим требованием операторы $\mathcal{B}$ и Ω определяются однозначно. Далее из определения этих операторов следует, что их коэффициенты зависят полиномиально от параметра $\lambda = -\eta^2$. Наконец, в силу (27) для любого решения Θ уравнения (14) выполняется равенство $\big(L_+^m \cdot \Omega\big)\Theta = 0$, т.е. оператор Ω переводит любое решение Θ уравнения (14) в решение $\Theta' = \Omega\Theta$ уравнения

$$L_+^m \Theta' = 0, \qquad \Theta' = \Omega\Theta. \tag{29}$$

Очевидно, что это уравнение в действительности представляет собой некоторое условие на оператор Ω вида (28), т.е. в конечном счете условие на определенный посредством (23) оператор $\mathcal{A}$. В случае $m = 0$ отсюда сразу следует, что $\Omega = 0$, т.е. в случае, когда порождаемая решениями уравнения (1) эволюция S-матрицы оператора Шредингера L вида (2) описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, имеет место операторное соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + [\mathcal{A},\,\mathcal{L}] = \mathcal{B} \cdot \mathcal{L}. \tag{30}$$

Из этого соотношения легко следует справедливость соотношения (5) в том смысле, что для любого оператора $\mathcal{A}$ вида (23) найдется дифференциальный по x оператор A, такой, что порождаемые соотношениями (5) и (30) нелинейные эволюционные уравнения совпадают. Это значит, что если эволюция S-матрицы оператора Шредингера, порождаемая решениями уравнения (1), описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений, то само уравнение (1) является одним из уравнений КдВ–иерархии.

Таким образом, равенство (29) позволило нам получить исчерпывающую характеристику уравнения (1) в случае $m = 0$. Более того, оно дает столь же полную характеристику уравнения (1) и при любом $m > 0$. С этой целью возьмем определенные согласно (13) функции Φ и Ψ и с их помощью образуем вектор–строку Θ и матрицу Вронского W соответственно вида

$$\Theta = (\Psi,\, \Phi,\, \overline{\Psi}), \quad W = \begin{vmatrix} \Psi & \Phi & \overline{\Psi} \\ \dfrac{\partial \Psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \overline{\Psi}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \overline{\Psi}}{\partial x^2} \end{vmatrix}. \tag{31}$$

Далее, положим

$$\Omega = \omega_0 + \omega_1 \partial + \omega_2 \partial^2, \quad \omega = (\omega_0,\, \omega_1,\, \omega_2). \tag{32}$$

На основе (13)–(15), (31) и (32) равенство (29) означает, что существуют не зависящие от x квадратные матрицы $C_1, \cdots, C_m$ третьего порядка, такие, что выполняется равенство

$$\omega W = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial^{\mu} \Theta}{\partial x \partial \eta^{\mu-1}} C_{\mu}. \tag{33}$$

Очевидно, что элементы матриц C_μ, $\mu = 1, \ldots, m$, являются функциями параметра $\eta \in (-\infty, \infty)$ и функционалами на пространстве быстро убывающих потенциалов. Далее, в силу (19),(24) и (28) справедлива цепочка равенств

$$\omega W = \Omega \Theta = -(\mathfrak{L} \cdot \mathfrak{T})\Theta = 2i\eta \mathfrak{L}\big(G,\, -F,\, -\overline{G}\big),$$

которая в соответствии с (9) позволяет весьма просто выразить элементы матриц $C_1, \cdots, C_m$ через первые производные от правых частей P и Q уравнений (18). С учетом сделанного нами в самом начале предположения о гладкости правой части уравнения (3) (и соответственно правых частей уравнений (18)) это значит, что при любом вещественном значении параметра $\eta \neq 0$ элементы матрицы C_μ, $\mu = 1, \ldots, m$, являются непрерывными функциями параметра η и непрерывными функционалами на пространстве быстро убывающих потенциалов. Это обстоятельство будет нами существенно использовано в дальнейшем при анализе соотношения (33), которое из-за его важной роли будет впредь именоваться основным соотношением.

IV. Анализ основного соотношения при m $>$ 1

Согласно сказанному выше левая часть вытекающего из (33) соотношения

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial^{\mu} \Theta}{\partial x \partial \eta^{\mu-1}} C_{\mu} W^{-1} \tag{34}$$

зависит полиномиально от спектрального параметра $\lambda = -\eta^2$, в то время как его правая часть, вообще говоря, таковой не является. Необходимое условие, при выполнении которого зависимость правой части соотношения (34)от спектрального параметра становится полиномиальной, имеет вид

$$C_1 = c_1\mathbf{1},\ C_2 = \cdots = C_m = 0, \tag{35}$$

где скалярная величина c_1 зависит полиномиально от η^2, а $\mathbf{1}$ – единичная матрица третьего порядка. Для доказательства этого утверждения мы рассмотрим асимптотику правой части соотношения (34) при $x \to \pm\infty$. С этой целью введем следующие величины:

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_\mu = (\exp(2i\eta x),\ 0,\ \varepsilon_\mu \exp(-2i\eta x)),\ \varepsilon_\mu = (-1)^\mu, \\ &\mathcal{E} = diag(\exp(2i\eta x),\ 1,\ \exp(-2i\eta x)), \end{aligned} \tag{36}$$

$$\Lambda = diag(1,\ 2i\eta,\ -4\eta^2),\ \ \Pi = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \tag{37}$$

$$U_- = \begin{vmatrix} a(\eta) & 0 & 0 \\ b(\eta) & a(\eta) & b(-\eta) \\ 0 & b(\eta) & a(-\eta) \end{vmatrix},\ U_+ = \begin{vmatrix} a(-\eta) & -b(-\eta) & 0 \\ -b(\eta) & a(\eta) & -b(-\eta) \\ 0 & 0 & a(\eta) \end{vmatrix}, \tag{38}$$

$$\begin{aligned} &C_- = U_- C_m U_-^{-1},\ \ D_- = U_- C_{m-1} U_-^{-1}, \\ &C_+ = U_+ C_m U_+^{-1},\ \ D_+ = U_+ C_{m-1} U_+^{-1}. \end{aligned} \tag{39}$$

Тогда с помощью (8) и (9) нетрудно убедиться, что при $x \to \pm\infty$ выполняются следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} &\omega \sim \left[(2i)^m \eta x^{m-1} E_m^- + (2i)^{m-1} x^{m-2} R_m^- + \cdots\right]\Pi^{-1}\Lambda^{-1},\ \text{ если } x \to -\infty, \\ &\omega \sim \left[(2i)^m \eta x^{m-1} E_m^+ + (2i)^{m-1} x^{m-2} R_m^+ + \cdots\right]\Pi^{-1}\Lambda^{-1},\ \text{ если } x \to \infty. \end{aligned} \tag{40}$$

Здесь точками обозначены слагаемые,имеющие по x порядок не выше $(m-3)$–го, если $m > 2$, а при $m = 2$ обозначенные точками слагаемые стремятся к нулю соответственно либо при $x \to -\infty$, либо при $x \to \infty$. Кроме того, справедливы равенства

$$\begin{aligned} &R_m^- = \mathcal{E}_{m-1}\left[(m-1)(\mathbf{1} + \eta\frac{\partial U_-}{\partial\eta}U_-^{-1})C_- + \eta D_-\right]\mathcal{E}^{-1}, \\ &R_m^+ = \mathcal{E}_{m-1}\left[(m-1)(\mathbf{1} + \eta\frac{\partial U_+}{\partial\eta}U_+^{-1})C_+ + \eta D_+\right]\mathcal{E}^{-1}, \end{aligned} \tag{41}$$

$$E_m^- = \mathcal{E}_m C_- \mathcal{E}^{-1}, \;\; E_m^+ = \mathcal{E}_m C_+ \mathcal{E}^{-1}. \tag{42}$$

Компоненты определенных посредством (42) векторов E_m^- и E_m^+ в силу (36) содержат экспоненциальные множители. Условия их отсутствия, очевидно, имеют вид

$$c_{12}^- = c_{13}^- = c_{31}^- = c_{32}^- = 0, \;\; c_{12}^+ = c_{13}^+ = c_{31}^+ = c_{32}^+ = 0, \tag{43}$$

где $c_{r,s}^-$ и $c_{r,s}^+$ – соответствующие элементы матриц C_- и C_+ вида (39), $r, s = 1, 2, 3$. На основе(11), (38) и (39) из условий $c_{12}^- = c_{13}^- = 0$ следуют равенства $c_{12} = c_{13} = 0$, а из условий $c_{31}^+ = c_{32}^+ = 0$ следуют равенства $c_{31} = c_{32} = 0$, где $c_{r,s}$ – элементы матрицы C_m, r, $s = 1$, 2, 3. В соответствии с этими равенствами из условий $c_{12}^+ = c_{13}^+ = c_{31}^- = c_{32}^- = 0$ следуют соотношения

$$b(\eta)c_{21} = 0, \;\; b(-\eta)(c_{11} - c_{22}) = 0,$$

$$b(-\eta)c_{23} = 0, \;\; b(\eta)(c_{22} - c_{33}) = 0.$$

Это значит, что равенства

$$c_{21} = c_{23} = 0, \;\; c_{11} = c_{22} = c_{33} \tag{44}$$

выполняются при любом вещественном значении параметра $\eta \neq 0$, для которого $b(\eta) \neq 0$. Воспользуемся теперь следующим соображением. В рассматриваемом нами пространстве быстро убывающих потенциалов имеется всюду плотное множество финитных потенциалов. Согласно сделанному нами ранее утверждению о свойствах матриц C_μ, $\mu = 1, \ldots, m$, равенства (44) будут выполняться для любого финитного потенциала, а следовательно, и для любого быстро убывающего потенциала. Таким образом, с учетом (36) и (39) получаем равенства

$$C_m = c_m \mathbf{1}, \;\; E_m^- = E_m^+ = c_m(1, \, 0, \, \varepsilon_m), \tag{45}$$

где c_m – скалярная величина. Далее, полагая

$$X_m^- = \mathcal{E}_{m-1} V_- \mathcal{E}^{-1}, \;\; X_m^+ = \mathcal{E}_{m-1} V_+ \mathcal{E}^{-1}, \tag{46}$$

где

$$V_- = (m-1)c_m \frac{\partial U_-}{\partial \eta} U_-^{-1} + D_-, \;\; V_+ = (m-1)c_m \frac{\partial U_+}{\partial \eta} U_+^{-1} + D_+, \tag{47}$$

мы сможем переписать равенства (41) в следующем виде:

$$R_m^- - \eta X_m^- = R_m^+ - \eta X_m^+ = (m-1)c_m(1, \, 0, \, -\varepsilon_m). \tag{48}$$

Сравнивая формулы (46) с формулами (42), нетрудно понять, что выражения для компонент векторов X_m^- и X_m^+ не будут содержать экспоненциальных множителей, если определенные посредством (47) матрицы V_- и V_+ удовлетворяют аналогичным (43) условиям. Элементарный анализ этих условий показывает, что матрица C_{m-1} должна быть диагональной с диагональными элементами D_1, D_2, D_3, удовлетворяющими условиям

$$D_1 = D_2 + (m-1)c_m \left(\frac{a'(-\eta)}{a(-\eta)} - \frac{b'(-\eta)}{b(-\eta)} \right),$$

$$D_3 = D_2 + (m-1)c_m\left(\frac{a'(-\eta)}{a(-\eta)} + \frac{b'(\eta)}{b(\eta)}\right),$$

где штрихами обозначено дифференцирование по аргументу, т.е. по параметру η или $-\eta$ соответственно. Далее, положим

$$\varphi(\eta) = Im[\ln a(\eta)] = \arg a(\eta), \;\; \psi(\eta) = Im[\ln b(\eta)] = \arg b(\eta).$$

В этой ситуации определенные с помощью (46) и (47) векторы X_m^- и X_m^+ допускают представление

$$X_m^- = (\sigma_m^-,\, 0,\, -\tau_m^-), \;\; X_m^+ = (\sigma_m^+,\, 0,\, -\tau_m^+), \tag{49}$$

где

$$\sigma_m^- = D_2 + (m-1)c_m\left\{2i[\varphi'(\eta) - \psi'(\eta)] + \frac{b'(\eta)}{b(\eta)}\right\},$$

$$\varepsilon_m\tau_m^- = D_2 + (m-1)c_m\frac{b'(\eta)}{b(\eta)}, \;\; \sigma_m^+ = D_2 - (m-1)c_m\frac{b'(-\eta)}{b(-\eta)}, \tag{50}$$

$$\varepsilon_m\tau_m^+ = D_2 + (m-1)c_m\left\{2i[\varphi'(\eta) + \psi'(\eta)] - \frac{b'(-\eta)}{b(-\eta)}\right\}.$$

Таким образом, на основе(37), (40), (45), (48) и (49) получаем асимптотики

$$\omega \sim (2ix)^{m-1}c_mE_m + (2ix)^{m-2}\big(\eta^{-1}(m-1)c_mE_{m-1} + Q_-\big) + \cdots, \text{ если } x \to -\infty,$$

$$\omega \sim (2ix)^{m-1}c_mE_m + (2ix)^{m-2}\big(\eta^{-1}(m-1)c_mE_{m-1} + Q_+\big) + \cdots, \text{ если } x \to \infty, \tag{51}$$

где

$$E_\mu = \left(0,\, \frac{1-\varepsilon_\mu}{2},\, \frac{1+\varepsilon_\mu}{4i\eta}\right), \;\; \mu = m-1,\, m,$$

$$Q_- = \left(0,\, \frac{\sigma_m^- + \tau_m^-}{2},\, \frac{\sigma_m^- - \tau_m^-}{4i\eta}\right), \;\; Q_+ = \left(0,\, \frac{\sigma_m^+ + \tau_m^+}{2},\, \frac{\sigma_m^+ - \tau_m^+}{4i\eta}\right).$$

Из равенств (50) следует справедливость соотношений

$$\sigma_m^- - \varepsilon_m\tau_m^- = 2i(m-1)c_m[\varphi'(\eta) - \psi'(\eta)],$$

$$\sigma_m^+ - \varepsilon_m\tau_m^+ = -2i(m-1)c_m[\varphi'(\eta) + \psi'(\eta)].$$

В соответствии с асимптотиками (51) это значит, что величина c_m является полиномом от η, удовлетворяющим условию $c_m(-\eta) = (-1)^{m-1}c_m(\eta)$, а величины $c_m(\eta)\varphi'(\eta)$ и $c_m\psi'(\eta)$ зависят полиномиально от параметра η при любом выборе потенциала $u(x)$ в операторе Шредингера, что возможно только при $c_m = 0$. Таким образом, можно считать справедливость условий (35) доказанной. Отсюда сразу следует, что в рассматриваемом нами классе уравнений отсутствуют уравнения, чьи быстро убывающие при $x \to \pm\infty$ решения порождают эволюцию S–матрицы, описываемую уравнением (3) с $m > 1$. Более того, согласно результатам этого раздела в случае $m = 1$ компоненты ω_0 и ω_2 вектора ω вида (32) равны тождественно нулю, а ω_1 не зависит от x и полиномиально зависит от параметра η^2.

V. Анализ операторного соотношения (28) при $\mathsf{m} = 1$

Как было установлено ранее, при $m = 1$ соотношение (28) имеет вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + [\mathcal{A},\, \mathcal{L}] - \mathcal{B} \cdot \mathcal{L} = \omega_1 \partial, \tag{52}$$

где оператор $\mathcal{B}$ и величина ω_1 зависят полиномиально от параметра $\lambda = -\eta^2$. Нетрудно видеть, что степень ω_1 не превосходит двух. Действительно, положим

$$\mathcal{B} = \sum_{s=0}^{r-1} \mathcal{B}_s \lambda^{r-s-1}, \quad \omega_1 = 4 \sum_{s=0}^{r} \rho_s \lambda^{r-s}.$$

Пусть, далее, $\mathcal{L}_0$ равно значению $\mathcal{L}$ при $\eta = 0$. Тогда из соотношения (52) при $r > 2$ вытекают условия

$$\mathcal{B}_0 = \rho_0, \;\; 4(\mathcal{B}_1 - \rho_1)\partial = \mathcal{B}_0 \cdot \mathcal{L}_0,$$

которые могут быть удовлетворены только при $\rho_0 = 0$. С учетом этого обстоятельства произведем в соотношении (52) замену

$$\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} - \frac{1}{2}\rho_1 x \partial, \;\; \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} + \lambda\rho_0 + \frac{3}{2}\rho_1.$$

В результате получим, что соотношение (52) эквивалентно равенствам

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial t} + [\mathcal{A},\, \mathcal{L}_0] - \mathcal{B} \cdot \mathcal{L}_0 = 4\rho_2 \partial + \rho_1(\partial \cdot U + U \cdot \partial), \\ &\mathcal{B}\partial = [\mathcal{A},\, \partial] + \tfrac{1}{4}\rho_0 \mathcal{L}_0, \end{aligned} \tag{53}$$

где

$$U = 2u + x\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{54}$$

Положим теперь в этих равенствах

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}\partial + \alpha,$$

где $\mathcal{P}$ – дифференциальный оператор, а α – оператор нулевого порядка, т.е. оператор умножения на функцию. В результате убеждаемся, что равенства (53) эквивалентны условиям

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{2}\rho_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \;\; \mathcal{B} = \rho_0 l + [\mathcal{P},\, \partial],$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial t} + \partial \cdot \mathcal{P} \cdot \mathcal{L}_0 - \mathcal{L}_0 \cdot \mathcal{P}\partial + [\alpha,\, \mathcal{L}_0] = 4\rho_2\partial + \rho_1(\partial \cdot U + U\partial) + \rho_0 l \cdot \mathcal{L}_0, \tag{55}$$

где

$$l = \frac{1}{4}\partial^2 + u. \tag{56}$$

Выделим теперь из равенства (55) его кососимметричную часть. Очевидно, что она может быть записана в следующем виде:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \mathcal{L} \cdot Y - \widetilde{Y} \cdot \mathcal{L} = 4\rho_2\partial + \rho_1(\partial \cdot U + U\partial) + 2\rho_0\lambda(\partial \cdot l + l\partial), \tag{57}$$

где знак тильда $\sim$ означает переход от произвольного оператора O к ему симметричному оператору $\widetilde{O}$, а

$$Y = \mathcal{P}_s \partial + \frac{1}{2}\rho_0 l, \;\; \mathcal{P}_s = \frac{1}{2}(\mathcal{P} + \widetilde{\mathcal{P}}). \tag{58}$$

Представим теперь оператор Y в виде

$$Y = q \cdot \mathcal{L} + p, \tag{59}$$

где оператор q выбран так, чтобы порядок оператора p не превосходил двух. С помощью равенств (56)–(59) нетрудно убедиться, что в этой ситуации оператор q должен быть симметричным, вследствие чего само соотношение (57) принимает вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} - \mathcal{L} \cdot p - \tilde{p} \cdot \mathcal{L} = 4\rho_2 \partial + \rho_1(\partial \cdot U + U\partial) + 2\rho_0 \lambda(\partial \cdot l + l\partial). \tag{60}$$

Из структуры этого соотношения следует, что порядок оператора p не превосходит единицы. В силу этого обстоятельства положим $p = \beta\partial + \gamma$. В результате убедимся в справедливости равенства

$$\mathcal{L} \cdot p + \tilde{p} \cdot \mathcal{L} = \sum_{r=0}^{3} p_r \partial^{3-r}, \tag{61}$$

где

$$\begin{aligned} &p_0 = 2(\beta' + \gamma), \;\; p_1 = 3(\beta'' + \gamma'), \\ &p_2 = \beta''' + 3\gamma'' + 8(u - \lambda)\gamma - 4u'\beta, \\ &p_3 = \gamma''' + 4(u - \lambda)\gamma' + 2u'(2\gamma - \beta') - 2u''\beta. \end{aligned} \tag{62}$$

Здесь и ниже штрихами обозначено дифференцирование по x. На основе (54), (56), (61) и (62) нетрудно убедиться, что соотношение (60) эквивалентно условиям

$$p_0 + \lambda\rho_0 = 0, \;\; p_1 = 0$$

и полученному с учетом этих условий уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + 2B\partial + \frac{\partial B}{\partial x} = 4(\lambda^2 \rho_0 + \rho_2)\partial + \rho_1(\partial \cdot U + U\partial), \tag{63}$$

где

$$B = \beta''' + 4(u - \lambda)\beta' + 2u'\beta = \mathcal{L}\beta.$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты определенного посредством (56), (58) и (59) оператора p зависят полиномиально от параметра λ. Исходя из этого, положим

$$\beta = \sum_{\nu=0}^{n} \beta_\nu \lambda^{n-\nu} - \frac{1}{2}\lambda\rho_0 x - \frac{1}{4}\rho_0 \chi,$$

где выбор величины χ подчинен условию $\chi' = U$. В этой ситуации соотношение (63) эквивалентно требованиям

$$\beta_0{}' = 0, \;\; 4\beta'_{\nu+1} = \beta_\nu{}''' + 4u\beta_\nu{}' + 2u'\beta_\nu, \;\; \nu = 0, 1, \cdots, n,$$

и нелинейному эволюционному уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\beta'_{n+1} = \rho_2 + \frac{1}{2}\rho_1 U + \frac{1}{4}\rho_0 u'v + \frac{1}{8}\rho_0 X,$$

где величина U определена с помощью (54), $v' = u$, а величина X задается равенством

$$X = (u''' + 6uu')x + 4(u'' + 2u^2).$$

Это уравнение будет удовлетворять исходным предположениям о рассматриваемом классе уравнений только при $\rho_0 = \rho_2 = 0$. Таким образом, окончательно получаем, что самое общее уравнение, получаемое с помощью соотношения (52), при $\rho_1 = c$ имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 2\beta'_{n+1} = c(u + \frac{1}{2}xu'). \tag{64}$$

Как известно, левая часть этого уравнения является одним из уравнений КдВ – иерархии, т.е. уравнения (6) и (64) совпадают. Это значит, что все утверждения, сделанные нами в самом начале, доказаны.

VI. Заключение

В заключение необходимо сделать несколько замечаний. Прежде всего операторное соотношение (4) имеет ясный геометрический смысл. С его помощью нетрудно убедиться, что оператор $\mathcal{M}$ вида

$$\mathcal{M} = \frac{\partial}{\partial t} + A + \frac{c}{2}\eta\frac{\partial}{\partial \eta}$$

переводит любое решение e уравнения (7) в решение этого же уравнения. Однако точки дискретного спектра оператора Шредингера становятся зависящими от времени, если величина c не равна тождественно нулю как функция t. В результате такие величины, как момент и энергия системы, также становятся функциями времени, впрочем, легко вычислимыми.

Будет нелишним также отметить, что основные идеи, используемые в этой работе, являются довольно общими и применимы для исследования уравнений, интегрируемых с помощью других операторов.

Список литературы

[1] P.D. Lax – Integrals of nonlinear equation of evolution and solitary waves, Commun. Pure and Appl. Math., 1968, v. XXI, №5, pp. 467–490.

[2] F. Calogero and A. Degasperis – *Spectral Transform and Solitons.* North–Holland Publishing Company, Amsterdam, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 ноября 2001 года.

Мельников В.К. P5-2001-252

О структуре уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Шредингера

Предложен новый подход для нахождения нелинейных эволюционных уравнений, интегрируемых с помощью метода обратной задачи рассеяния. Отправной точкой в этом подходе является рассмотрение эволюционных уравнений для данных рассеяния, порождаемых быстро убывающими при $x \to \pm\infty$ решениями произвольно взятого нелинейного эволюционного уравнения. С помощью этого подхода в работе найдены все нелинейные эволюционные уравнения, интегрирование которых сводится к исследованию эволюционных уравнений для данных рассеяния в форме дифференциальных уравнений (как обыкновенных, так и с частными производными). При этом сами эволюционные уравнения для данных рассеяния в результате оказались линейными и, более того, интегрируемыми в конечном виде.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2001

Перевод Г.Г.Сандуковской

Mel'nikov V.K. P5-2001-252

On the Structure of Equations Solvable by the Inverse Scattering Method for the Schrödinger Operator

The new approach to deriving nonlinear evolution equations solvable by the inverse scattering method is proposed. The starting point of this approach is the consideration of the evolution equations for the scattering data generated by the solutions, rapidly decreasing as $x \to \pm\infty$, of an arbitrary taken nonlinear evolution equation. Using this approach, all nonlinear evolution equations have been found the integration of which reduces to the investigation of the evolution equations for the scattering data in the form of differential equations (both ordinary and with partial derivatives). In this case, the evolution equations for the scattering data themselves turned out to be linear and, moreover, solvable in the finite form.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2001

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 07.12.2001
Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. л. 1,5
Тираж 325. Заказ 52997. Цена 1 р. 50 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
Дубна Московской области