

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P5-2001-28

В.В.Пупышев\*

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРЕХ ЧАСТИЦ  
С  $S$ -ВОЛНОВЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ  
ЦЕНТРОБЕЖНОГО ТИПА

Направлено в журнал «Ядерная физика»

---

\*E-mail: [pupyshev@thsun1.jinr.ru](mailto:pupyshev@thsun1.jinr.ru)

2000

# 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно [1]–[3], уравнения Фаддеева [4]

$$(H_0 - E) \Psi_i = -V_i \Psi, \quad \Psi = \sum_{k=1}^3 \Psi_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1)$$

для системы трех частиц  $p_1, p_2$  и  $p_3$  с произвольными массами  $m_1, m_2$  и  $m_3$ , нулевым полным угловым моментом и  $S$ -волновыми взаимодействиями

$$V_i(\mathbf{x}_i) = c_i I_i^0 / x_i^2, \quad I_i^0 \equiv |Y_{00}(\hat{x}_i)\langle Y_{00}(\hat{x}_i) |, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

имеют точные решения

$$\Psi_i(\mathbf{r}_i; p^2) = r^{-2} Z_p(z) F_i(\Omega_i; p^2), \quad \mathbf{r}_i = (r, \Omega_i), \quad z \equiv r\sqrt{E}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

при любой полной энергии  $E$ , но при вполне определенных константах  $c_1, c_2, c_3$  и  $p^2$ . В таких решениях  $p^2$  – постоянная разделения гипerrадуса  $r \equiv \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$  и гиперуглов  $\Omega_i = (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i)$  [5], функция  $Z_p$  подчинена уравнению Бесселя [6]:

$$(z^2 \partial_z^2 + z \partial_z + z^2 - p^2) Z_p(z) = 0. \quad (4)$$

Известно [7], что в случае  $m_i = m_1, c_i = c_1 < 0, i = 1, 2, 3$ , исследованном в [1], функции  $F_1, F_2$  и  $F_3$ , не представимы конечными линейными комбинациями базисных гипергармоник [5]:

$$Y_{La}^{00}(\Omega_i) = N_{La} (1 - v_i^2)^{a/2} P_{L/2-a}^{(a+1/2, a+1/2)}(v_i) P_a(u_i), \quad (5)$$

$$N_{La} \equiv \frac{(-1)^a \sqrt{2a+1}}{2^{a+3/2} \pi \Gamma(L/2+3/2)} ((L+2)\Gamma(L/2-a+1)\Gamma(L/2+a+2))^{1/2},$$

$$L = 0, 2, \dots; a = 0, 1, \dots, L/2; \quad v_i \equiv \cos 2\varphi_i, \quad u_i \equiv \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{y}_i}{x_i y_i},$$

и, как показано в [2, 3], являются таковыми:

$$F_i(\Omega_i; p^2) = \sum_{L=0}^t B_L^i Y_{L00}^{00}(\Omega_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad t < \infty, \quad (6)$$

при любых массах частиц, но только при  $p^2 = (t+2)^2$  и вполне определенных условиях на все коэффициенты  $c_k$  и  $B_L^i$ .

Основная задача настоящей работы – анализ свойств всех ( $t < \infty$ ) точных и табуляция простейших ( $t = 4$ ) решений (3) – (6) уравнений Фаддеева (1), (2) и отвечающих им решений  $\Psi$  уравнения Шредингера:

$$(H_0 + V - E) \Psi = 0, \quad V \equiv \sum_{k=1}^3 V_k. \quad (7)$$

Решение поставленной задачи представляется особенно важным ввиду отсутствия в литературе легко вычисляемых эталонных фаддеевских компонент с асимптотиками, качественно похожими на физические при любой энергии  $E$ . Поясним это утверждение.

Уравнения Фаддеева (1) в шестимерном координатном пространстве  $\mathcal{R}^6$  имеют ложные решения [7]. Ложное решение  $(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3)$  является точным, но, по определению, не несет никакой информации о координатной зависимости парных взаимодействий и отвечает тривиальному решению  $\Psi \equiv 0$  уравнения Шредингера (7). Поэтому близость ложных решений, найденных аналитически, и ложных решений, вычисленных интегрированием уравнений Фаддеева, не является критерием точности проверяемого численного алгоритма.

Кроме ложных решений и рассматриваемого нами случая взаимодействий центробежного типа точные решения уравнений Фаддеева и Шредингера в  $\mathcal{R}^6$  известны лишь в случае осцилляторных взаимодействий [7] – [9]. В этом случае существуют только связанные трехчастичные состояния с положительной энергией. Поэтому осцилляторные фаддеевские компоненты могут быть эталонными только при тестах алгоритмов численного решения задачи на трехчастичные связанные состояния с  $E > 0$ . Класс таких задач слишком узок и состоит из задач с парными взаимодействиями запирающего типа:  $V_i(\mathbf{x}_i) \rightarrow \infty, \quad x_i \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3$ .

Если в качестве функции  $Z_p$  выбрать функцию Ханкеля  $H_p^{(1)}(z)$  или модифицированную функцию Бесселя  $K_p(|z|)$ , то в пределе  $r \rightarrow \infty$  точные решения (3) – (6) будут иметь качественно похожие на физические [4] осциллирующие в случае  $E > 0$  или экспоненциально убывающие в случае  $E < 0$  асимптотики. Поэтому такие точные решения и их линейные комбинации представляется возможным использовать и как модельные, и как эталонные при тестировании алгоритмов численного решения уравнений Фаддеева и Шредингера для задачи рассеяния и задачи на связанные трехчастичные состояния.

Ввиду отмеченной универсальности и значимости точных решений как эталонных в разделе 2 предложенный ранее метод их построения [3] расширяется на случаи одной и двух бесконечно больших по модулю констант взаимодействий (2), дополняется альтернативным вариантом – обобщенной задачей на собственные значения – и исследованием разбиений [8, 10]

$$\Psi_i = \Psi_i^u + \Psi_i^s, \quad \Psi = \sum_{k=1}^3 \Psi_k = \sum_{k=1}^3 \Psi_k^u \neq 0, \quad \sum_{k=1}^3 \Psi_k^s \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

точных фаддеевских компонент  $\Psi_i$  на физические, определяющие решение  $\Psi$  уравнения Шредингера (7), и ложные, не дающие никакого вклада в это решение, слагаемые  $\Psi_i^u$  и  $\Psi_i^s$ .

Чтобы практическое применение точных решений оказалось доступным и несложным, в разделе 3 особое внимание уделяется выводу и анализу всех без исключения формул, необходимых для построения эталонных решений, представлению этих формул в наиболее удобном для вычисления виде и, наконец, наглядной табличной и графической иллюстрации строения таких решений. С этой же целью в разделе 4 обсуждаются основные результаты и их физические следствия.

## 2. ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для редукции уравнений Фаддеева (1) к совокупности двух систем линейных уравнений, определяющих допустимые значения констант  $c_1, c_2, c_3$  и всех коэффициентов  $B_L^i$  искомым точным решениям (3) – (6), потребуются три ключевые формулы:

$$\left( \mathbf{L}^2 - L(L+4) \right) Y_{L00}^{00}(\Omega_i) = 0, \quad (8)$$

$$4 \cos^2 \varphi_i Y_{L00}^{00}(\Omega_i) = \sum_{L'=L-(L)}^{L+2} (1 + \delta_{L'L}) Y_{L'00}^{00}(\Omega_i), \quad L_-(L) \equiv \max\{0, L-2\}, \quad (9)$$

$$K(\gamma_{ki}) Y_{L00}^{00}(\Omega_i) \equiv Y_{L00}^{00}(\Omega_k(\Omega_i; \gamma_{ki})) = \sum_{a=0}^{L/2} \langle aa|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L0} Y_{Laa}^{00}(\Omega_i), \quad (10)$$

где  $\mathbf{L}$  и  $K(\gamma_{ki})$  – операторы гипермомента [5] и кинематического преобразования [7, 11], а зависимость коэффициентов Рейнала-Реваи [12] от кинематических углов

$$\gamma_{ki} \equiv g_{ki} \operatorname{arctg}(m_j(m_1 + m_2 + m_3)/m_k m_i)^{1/2}, \quad (11)$$

обладающих по определению свойствами

$$g_{ki} = -g_{ik} = 1, \quad 0 \leq \gamma_{ki} \leq \pi/2, \quad \sum_{(k,i)} \gamma_{ki} = \pi, \quad (12)$$

описывается известными формулами [13]:

$$\langle aa|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L0} = (-1)^a \langle aa|K(\gamma_{ik})|00\rangle_{L0} = \frac{N_{La}(\sin 2\gamma_{ki})^a P_{L/2-a}^{(a+1/2, a+1/2)}(\cos 2\gamma_{ki})}{2^a N_{L0} P_{L/2}^{(1/2, 1/2)}(-1)}. \quad (13)$$

Здесь и далее по определению  $(k, i) = (1, 2), (3, 1), (2, 3)$ .

Подробно опишем случай трех разных частиц, затем как частные рассмотрим случаи двух и трех тождественных бозонов.

Сначала, используя анзац (3) и тот факт, что  $Z_p$  – решение уравнения (4), сведем исходные уравнения Фаддеева (1) в  $\mathcal{R}^6$  к уравнениям фаддеевского типа на пятимерной единичной гиперсфере  $S^5$ :

$$\cos^2 \varphi_i \left( \mathbf{L}^2(\Omega_i) + 4 - p^2 \right) F_i(\Omega_i; p^2) = -c_i I_i^0 \sum_{k=1}^3 F_k(\Omega_k; p^2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Сделаем три важных замечания.

Во-первых, полученные уравнения (14) подстановкой

$$F_i(\Omega_i; p^2) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \operatorname{cosec} 2\varphi_i U_i(\varphi_i; p^2) \mathcal{Y}_{00}^{00}(\Omega_i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (15)$$

и последующим проектированием на бисферические гармоники  $\mathcal{Y}_{00}^{00} = (4\pi)^{-1}$  можно свести к одномерным интегродифференциальным уравнениям:

$$\left( \partial_{\varphi_i}^2 + p^2 - \frac{c_i}{\cos^2 \varphi_i} \right) U_i(\varphi_i; p^2) = \frac{c_i}{\cos^2 \varphi_i} \sum_{k \neq i} \frac{1}{|\sin 2\gamma_{ki}|} \int_{C_-(\varphi_i; \gamma_{ki})}^{C_+(\varphi_i; \gamma_{ki})} d\varphi_k U_k(\varphi_k; p^2),$$

$$C_-(\varphi_i; \gamma_{ki}) \equiv |\varphi_i - |\gamma_{ki}||, \quad C_+(\varphi_i; \gamma_{ki}) \equiv \min\{\varphi_i + \gamma_{ki}, \pi - \varphi_i - |\gamma_{ki}|\}. \quad (16)$$

Во-вторых, если предположить, что ряды (6) удовлетворяют уравнениям (14), то в силу связей (15) решениями уравнений (16) будут ряды

$$U_i(\varphi_i; p^2) = \sum_{L=0}^t B_L^i \sin 2n\varphi_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad n = L/2 + 1. \quad (17)$$

В-третьих, при том же предположении соответствующее точное решение  $\Psi$  уравнения Шредингера (7) можно будет построить по формулам:

$$\Psi(\mathbf{r}; p^2) = \sum_{k=1}^3 \Psi_k(\mathbf{r}_k; p^2) = r^{-2} Z_p(z) F(\Omega_i; p^2), \quad (18)$$

$$F(\Omega_i; p^2) \equiv F_i(\varphi_i; p^2) + \sum_{k \neq i} F_k(\varphi_k(\varphi_i, u_i; \gamma_{ki}); p^2), \quad (19)$$

$$\varphi_k(\varphi_i, u_i; \gamma_{ki}) = \arccos \left( \cos^2(\gamma_{ki} - \varphi_i) + \frac{1}{2} (u_i - 1) \sin 2\gamma_{ki} \sin 2\varphi_i \right)^{1/2},$$

где функция  $F$ , в отличие от ее компонент  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ , зависит не только от угла  $\varphi_i$ , но и от косинуса  $u_i$  угла между векторами  $\mathbf{x}_i$  и  $\mathbf{y}_i$  и с помощью формул (6) и (10) представляется двукратной суммой

$$F(\Omega_i; p^2) = \sum_{L=0}^t \sum_{a=0}^{L/2} {}^i B_{La} Y_{La}^{00}(\Omega_i), \quad (20)$$

$${}^i B_{La} \equiv \delta_{a0} B_L^i + \sum_{k \neq i} \langle aa | K(\gamma_{ki}) | 00 \rangle_{L0} B_L^k. \quad (21)$$

Теперь, из уравнений (14) подстановкой (6) с  $p^2 = (t+2)^2$ , заменой

$$B_L^i = \frac{X_n^i}{n^2 - m^2}, \quad n = L/2 + 1 = 1, 2, \dots, m-1; \quad X_m^i = B_t^i, \quad m = t/2 + 1, \quad (22)$$

и проектированием на базис (5) с помощью формул (8) – (13) выведем систему матричных уравнений размерности  $m-1$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{I} \mathbf{X}_2 &= 0, \\ \mathbf{I} \mathbf{X}_{n-1} + \mathbf{D}^n \mathbf{X}_n + \mathbf{I} \mathbf{X}_{n+1} &= 0, \quad n = 2, 3, \dots, m-2, \\ \mathbf{I} \mathbf{X}_{m-2} + \mathbf{D}^{m-1} \mathbf{X}_{m-1} &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

и матричное уравнение

$$\mathbf{M}^t \mathbf{X}_m = -\frac{1}{4} \mathbf{I} \mathbf{X}_{m-1}. \quad (24)$$

В этих уравнениях все матрицы и искомые столбцы  $\mathbf{X}_n$  – трехмерные:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n &\equiv (X_n^1, X_n^2, X_n^3)^T, \quad n = 1, 2, \dots, m, \\ D_{ii}^n &= 2 + \frac{c_i}{n^2 - m^2}, \quad D_{ik}^n = (D_{ii}^n - 2) K_n(\gamma_{ki}), \quad n = 1, 2, \dots, m-1; \\ I_{ii} &= 1, I_{ik} = 0; \quad M_{ii}^t = c_i, \quad M_{ik}^t = c_i K_m(\gamma_{ki}), \quad k \neq i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (25)$$

где  $K_n(\gamma_{ki})$  – коэффициенты (13) с нулевым индексом  $a$ :

$$K_n(\gamma_{ki}) \equiv \langle 00 | K(\gamma_{ki}) | 00 \rangle_{L0} = \frac{\sin 2n\gamma_{ki}}{n \sin 2\gamma_{ki}}, \quad L = 2(n-1), \quad n = 1, 2, \dots, m. \quad (26)$$

Запишем систему (23) в эквивалентном виде. Для этого сначала представим ее одним матричным уравнением:

$$\mathbf{A}^t \mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{X} \equiv (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{m-1})^T, \quad (27)$$

с блочно-трехдиагональной матрицей  $\mathbf{A}^t$  размерности  $3(m-1) = 3t/2$ : блоки ее главной диагонали – матрицы  $\mathbf{D}^1, \dots, \mathbf{D}^{m-1}$ , а каждый блок нижней и верхней диагоналей – единичная трехмерная матрица  $\mathbf{I}$ .

Теперь, введя три отношения  $\alpha_k \equiv c_k/c_2$ ,  $k = 1, 2, 3$  и положив  $\mathbf{R}^t \equiv \mathbf{A}^t$  при нулевых  $c_1, c_2$  и  $c_3$ , представим уравнение (27), а значит и исходную систему (23) в искомом эквивалентном виде

$$\mathbf{R}^t \mathbf{X} = c_2 \mathbf{T}^t \mathbf{X}, \quad (28)$$

где  $\mathbf{R}^t$  и  $\mathbf{T}^t$  – блочно-трехдиагональная и блочно-диагональная матрицы: блоки их главных диагоналей – трехмерные матрицы  $\mathbf{R}^n = 2\mathbf{I}$  и  $\mathbf{T}^n$ :

$$T_{ii}^n = \frac{\alpha_i}{m^2 - n^2}, \quad T_{ik}^n = T_{ii}^n K_n(\gamma_{ki}), \quad k \neq i = 1, 2, 3, \quad n = 1, \dots, m-1, \quad (29)$$

а каждый блок нижней и верхней диагоналей матрицы  $\mathbf{R}^t$  – матрица  $\mathbf{I}$ .

Итак, задача построения точного решения (3) – (6), (22) исходных уравнений Фаддеева (1) сведена к вычислению  $3m$  коэффициентов  $X_1^1, \dots, X_m^3$  – элементов столбцов  $\mathbf{X}_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, m$ , – путем последовательного решения уравнения (27) или (28) и уравнения (24).

Поясним, почему нетривиальные решения уравнений (23) и (24), а следовательно, и искомые точные решения уравнений Фаддеева и Шредингера, существуют не при всех значениях масс и констант взаимодействий.

Критерий одновременной нетривиальной совместности систем (23) и (24) – совокупность условий  $\det \mathbf{A}^t = 0$  и  $\det \mathbf{M}^t \neq 0$  – следует из известной в линейной алгебре [14] теоремы существования и единственности решений конечных однородных и неоднородных систем линейных уравнений.

Исследуем условие  $\det \mathbf{M}^t \neq 0$ . Используя формулы (25) и (26), имеем

$$\det \mathbf{M}^t = c_1 c_2 c_3 \left( 1 - \sum_{(k,i)} \left( \frac{\sin 2m\gamma_{ki}}{m \sin 2\gamma_{ki}} \right)^2 + 2 \prod_{(k,i)} \frac{\sin 2m\gamma_{ki}}{m \sin 2\gamma_{ki}} \right), \quad m = t/2 - 1.$$

Отсюда в силу (11) и (12) следует, что

$$\det \mathbf{M}^t = 0, \quad t = 0, 2; \quad \det \mathbf{M}^t \neq 0, \quad t = 4, 6, \dots,$$

при любых массах и  $c_k \neq 0$ ,  $k = 1, 2, 3$ . Поэтому далее полагаем  $t = 4, 6, \dots$

Предлагаемый и наиболее экономный способ анализа условия  $\det \mathbf{A}^t = 0$  и решения системы (23) основан на удобном для операторного накопления методе подстановок [15] и реализуется по следующей схеме.

Сначала все столбцы  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{m-1}$ , начиная со второго, последовательно выражаем через столбец  $\mathbf{X}_1$ :

$$\mathbf{X}_2 = -\mathbf{D}^1 \mathbf{X}_1, \quad \mathbf{X}_3 = (\mathbf{D}^2 \mathbf{D}^1 - \mathbf{I}) \mathbf{X}_1, \dots \quad (30)$$

Затем столбцы  $\mathbf{X}_{m-2}$  и  $\mathbf{X}_{m-1}$  подставляем в последнее уравнение системы (23). Таким способом сводим эту систему конечной, но сколь угодно большой размерности  $m-1$  к одному уравнению  $\mathbf{G}^t \mathbf{X}_1 = 0$  с трехмерной матрицей  $\mathbf{G}^t$ , а условие  $\det \mathbf{A}^t = 0$  заменяем эквивалентным условием  $\det \mathbf{G}^t = 0$ .

Согласно формулам (25), матрица  $\mathbf{A}^t$  зависит от отношений масс частиц посредством кинематических углов (11) и имеет  $3t/2$  строк. Из них  $t/2$  строк содержат параметр  $c_k$  и не содержат двух других параметров  $c_i$  и  $c_j$  взаимодействий (2). Следовательно,  $\det \mathbf{A}^t$ , а значит и  $\det \mathbf{G}^t$ , можно представить полиномом степени  $N \leq t/2$  по целым степеням аргумента  $q$  – одного из параметров  $c_1, c_2, c_3$  – с коэффициентами  $C_n$ , зависящими от двух других параметров и двух отношений масс частиц. Массу одной из частиц можно принять за единицу измерения масс. При нашем выборе  $q = c_2$  и  $m_3 = 1$  анализ условия  $\det \mathbf{G}^t = 0$  сводится к исследованию всех действительных корней  $c_2 = c_2^\nu(c_1; c_3, m_1, m_2)$ ,  $\nu \leq 3t/2$ , степенного уравнения

$$\det \mathbf{G}^t = \sum_{n=0}^{N \leq t/2} C_n(c_1, c_3, m_1, m_2) c_2^n = 0 \quad (31)$$

как функций аргумента  $c_1$  и параметров  $c_3$  и  $m_1, m_2$ .

Пусть при данных и конечных  $c_1, c_3$  и  $m_1, m_2$  найден некоторый ограниченный корень  $c_2^\mu$  этого уравнения. Положим  $c_2 = c_2^\mu$ , тогда три уравнения системы  $\mathbf{G}^t \mathbf{X}_1 = 0$  для элементов  $X_1^1, X_1^2$  и  $X_1^3$  искомого столбца  $\mathbf{X}_1^1$  окажутся линейно зависимыми. Поэтому один из трех элементов можно выбрать произвольным образом, а оставшиеся два элемента выразить через этот элемент. При нашем выборе  $X_1^1 = 1 - m^2$ , согласно формулам (22), всегда  $B_0^1 = 1$ . После того как найден столбец  $\mathbf{X}_1$ , все остальные столбцы  $\mathbf{X}_n$ ,  $n = 2, \dots, m-1$ , последовательно вычисляем по формулам (30). Затем находим столбец  $\mathbf{X}_m$ , решая уравнение (24) с ранее вычисленной правой частью  $-\mathbf{X}_{m-1}/4$ .

Заметим, что при тех же конечных  $c_1, c_3$  и  $m_1, m_2$ , но другом ограниченном корне  $c_2^\mu$ ,  $\mu \neq \nu$ , все описанные вычисления отвечающих ему столбцов  $\mathbf{X}_n$  придется повторить. В этом состоит единственный недостаток представленного метода, основанного на подстановках. Если выбранное значение  $t$  невелико, а при данных конечных  $c_1, c_3$  и  $m_1, m_2$  все корни  $c_2^\nu$  ограничены, то удобнее решать обобщенную задачу на собственные значения (28), (29) известными методами [15], позволяющими одновременно вычислить все собственные векторы  $\mathbf{X}^\nu$  и собственные значения  $c_2^\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots$ , т.е. корни уравнения (31), но уже как функции  $c_2^\nu(\alpha_1; \alpha_3, m_1, m_2)$  аргумента  $\alpha_1$  и параметров  $\alpha_3$  и  $m_1, m_2$ .

Теперь исследуем только те пределы одной или двух бесконечно больших по модулю констант  $c_1$  и  $c_2$ , в которых при конечных постоянных  $c_3$  и  $m_1, m_2$  решения уравнений (23) и (24) ограничены:  $|X_n^i| < \infty$  при всех возможных  $n$  и  $i$ . Во всех иных пределах ( $|X_n^i| = \infty$  хотя бы для одной пары  $(i, n)$  индексов) гиперсферические разложения (6) искомого компонент  $F_i$  теряют смысл, ибо, благодаря связям (22), имеют хотя бы один бесконечный коэффициент  $B_L^i$ .

Подробнее рассмотрим случай, когда при  $c_1 \rightarrow \infty$  некоторый корень  $c_2^\nu$  имеет конечный предел  $c_2^\nu$ . При меньших  $t$  такой корень и все соответствующие ему неизвестные  $X_n^i$  удается выразить явно простыми функциями аргумента  $c_1$  и всех параметров:  $c_2^\nu = c_2^\nu(c_1; c_3, m_1, m_2)$ ,  $X_n^i(c_1; c_3, m_1, m_2)$ , а затем перейти к пределу  $c_1 = \infty$ . При больших  $t$  такие выражения не существуют, но имеется экономный алгоритм непосредственного вычисления предельных значений корня  $c_2^\nu$  и соответствующих ему коэффициентов  $X_n^i$ . Опишем этот способ.

Каждое матричное уравнение (23) и (24) представим тройкой уравнений для элементов  $X_n^i$  соответствующих столбцов  $\mathbf{X}_n$ . Например, при  $n = 2, 3, \dots, m-2$  имеем

три уравнения

$$X_{n-1}^i + \sum_{k=1}^3 D_{ik}^n X_n^k + X_{n+1}^i = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

По определению (25) матриц  $\mathbf{D}^n$  и  $\mathbf{M}^t$ , только первое ( $i = 1$ ) уравнение каждой такой тройки уравнений содержит константу  $c_1$ . Поделим на нее все такие уравнения и перейдем к пределу  $c_1 = \infty$ . В итоге получим системы уравнений, определяющие предельные значения коэффициентов  $X_n^i$ . В матричной записи эти уравнения имеют тот же вид, что и исходные уравнения (23) и (24), но содержат матрицы  $\mathbf{I}$ ,  $\mathbf{D}^n$  и  $\mathbf{M}^t$ , первые строки ( $i = 1$ ) которых вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} D_{ii}^n &= (n^2 - m^2)^{-1}, \quad D_{ik}^n = D_{ii}^n K_n(\gamma_{ki}), \quad n = 1, \dots, m-1; \\ I_{ii} &= 0, \quad I_{ik} = 0, \quad M_{ii}^t = 1, \quad M_{ik}^t = K_m(\gamma_{ki}), \quad k \neq i, \quad k = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (32)$$

а вторые и третьи строки по-прежнему определяются равенствами (25). Далее, полученную предельную матричную задачу (23), (24), (32) решаем описанным выше способом подстановок. Таким образом, предельные корни и коэффициенты удается легко найти с хорошей точностью без вычисления последовательностей их значений, отвечающих некоторой возрастающей последовательности параметра  $c_1$ , и процедуры экстраполяции этих значений в точку  $c_1 = \infty$ .

Исследуем строения ряда (20) для функции  $F$  при  $c_1 = \infty$  и  $c_2 = c_2^s$ . Для этого первое уравнение ( $i = 1$ ) каждого матричного уравнения предельных систем (23) и (24) с помощью соотношений (22) и (32) сведем к равенству

$$B_L^1 + K_n(\gamma_{21}) B_L^2 + K_n(\gamma_{31}) B_L^3 = 0. \quad (33)$$

Его левая часть по определению (21) – коэффициент  ${}^1 B_{L0}$ , т.е. в исследуемом пределе  ${}^1 B_L = 0$  при всех  $L$ . Поэтому ряд (20) переменных  $\Omega_i$ ,  $i = 1$ , не содержит гипергармоник  $Y_{La0}^{00}$  с  $a = 0$ :

$$F(\Omega_i; p^2) = \sum_{L=2}^t \sum_{a=1}^{L/2} {}^i B_{La} Y_{La0}^{00}(\Omega_i). \quad (34)$$

Так как  $K_1(\gamma_{ki}) = 1$  при любом  $\gamma_{ki}$ , то из равенств (21) и (33) с  $n = 1$  имеем  ${}^i B_0 = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Следовательно, предельные ряды (20) для функций  $F(\Omega_k; p^2)$ ,  $k = 2, 3$ , как и ряд (34), не содержат гипергармоник  $Y_{000}^{00}$ , но, вообще говоря, содержат все остальные гипергармоники с  $L > 0$ :

$$F(\Omega_k; p^2) = \sum_{L=2}^t \sum_{a=0}^{L/2} {}^k B_{La} Y_{La0}^{00}(\Omega_k). \quad (35)$$

Итак, в пределе  $c_1 = \infty$  и  $c_2 = c_2^s$  слагаемые  $B_0^i Y_{000}^{00}$  рядов (6) для компонент  $F_i$  являются ложными: при суммировании этих компонент в гиперугловую часть (34), (35) предельного решения  $\Psi$  уравнения Шредингера такие слагаемые сокращаются.

Анализ других предельных решений принципиально не отличается от данного выше: если  $|c_2^s| \rightarrow \infty$  при  $c_1 \rightarrow c_1^s$  и  $|c_1^s| < \infty$ , то в формулах (32) и (34) полагаем  $i = 2$ , а в рядах (35) –  $k = 1, 3$ ; если же  $|c_2^s| \rightarrow \infty$  при  $|c_1^s| \rightarrow \infty$ , то в этих же формулах –  $i = 1, 2$ , а  $k = 3$ .

Остается описать два частных, но физически важных случая.



Пусть частицы  $p_2$  и  $p_3$  – тождественные бозоны,  $P_{23}$  – оператор их перестановки, а  $I$  – единичный оператор. Тогда  $m_2 = m_3$ ,  $c_2 = c_3$  и, согласно (11), (12),  $\gamma_{12} = \gamma_{31}$ . Чтобы подчинить искомым фаддеевские компоненты (3) – (6) и отвечающую им функцию (18) условиям перестановочной симметрии [4]:

$$\Psi_1 = P_{23}\Psi_1, \quad \Psi_2 = P_{23}\Psi_3, \quad \Psi = P_{23}\Psi = \Psi_1 + (I + P_{23})\Psi_2,$$

положим  $B_L^2 = B_L^3$ ,  $L = 0, 2, \dots, t$ , и, согласно формулам (22),  $-X_n^2 = X_n^3$  при всех  $n$ . Поэтому все столбцы и матрицы уравнений (23) и (24) и блоки матриц уравнения (28) станут двухмерными:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n &\equiv (X_n^1, X_n^2)^T, \quad n = 1, 2, \dots, m; \quad \mathbf{I} = \text{diag}\{1, 1\}; \\ D_{ii}^n &= 2 + \frac{c_i}{n^2 - m^2} (1 + \delta_{i2} K_n(\gamma_{23})), \quad D_{ik}^n = \frac{c_i}{n^2 - m^2} (1 + \delta_{k2}) K_n(\gamma_{12}); \\ M_{ii}^t &= c_i (1 + \delta_{i2} K_m(\gamma_{23})), \quad M_{ik}^t = c_i (1 + \delta_{k2} K_m(\gamma_{ki})), \quad k \neq i = 1, 2, \\ \mathbf{R}^n &= 2\mathbf{I}, \quad T_{ii}^n = \frac{\alpha_i}{m^2 - n^2} (1 + \delta_{i2} K_n(\gamma_{23})), \quad T_{ki}^n = \frac{\alpha_i}{m^2 - n^2} (1 + \delta_{k2}) K_n(\gamma_{12}), \end{aligned} \quad (36)$$

размерности матриц  $\mathbf{A}^t$ ,  $\mathbf{R}^t$  и  $\mathbf{T}^t$  уменьшатся до  $2(m-1) = t$ , а формулы (21) упростятся:

$$\begin{aligned} {}^1B_{La} &= 0, \quad a = 1, 3, \dots, \\ {}^1B_{La} &= \delta_{a0} B_L^1 + 2\langle aa|K(\gamma_{21})|00\rangle_{L0} B_L^2, \quad a = 0, 2, \dots, \\ {}^iB_{La} &= \langle aa|K(\gamma_{12})|00\rangle_{L0} B_L^1 + (\delta_{a0} + \langle aa|K(\gamma_{32})|00\rangle_{L0}) B_L^2, \quad i = 2, 3; a = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Построение точных и предельных решений принципиально ничем не отличается от описанного выше.

Пусть теперь частицы  $p_1, p_2, p_3$  – тождественные бозоны. Тогда  $m_k = m_1$ ,  $c_k = c_2$  и  $|\gamma_{ki}| = \pi/3$  при всех  $k \neq i = 1, 2, 3$ . Условия полной перестановочной симметрии [4]

$$\Psi_i = P_{ki}\Psi_k, \quad \Psi = P_{ki}\Psi = (I + P_{12}P_{23})\Psi_i, \quad k \neq i = 1, 2, 3,$$

выполняются для искомым фаддеевских компонент (3) – (6) и отвечающей им функции (18), если положить  $B_L^k = B_L^1$  и  $X_n^k = X_n^1$  при любых  $k, n$  и  $L$ . Поэтому в уравнениях (23), (24) и (28) все матрицы-блоки – одномерные:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n &= X_n^1, \quad n = 1, 2, \dots, m; \quad \mathbf{I} = 1; \\ \mathbf{D}^n &= 2 + \frac{c_2}{n^2 - m^2} (1 + 2K_n(\pi/3)); \quad \mathbf{M}^t = c_2 (1 + 2K_m(\pi/3)); \\ \mathbf{R}^n &= 2, \quad \mathbf{T}^n = \frac{1}{m^2 - n^2} (1 + 2K_n(\pi/3)), \quad n = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (38)$$

где, как следует из формул (26),

$$K_n(\pi/3) = \begin{cases} 1/n, & n = 3k + 1, \\ -1/n, & n = 3k + 2, \\ 0, & n = 3k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (39)$$

Матрицы  $\mathbf{A}^t$ ,  $\mathbf{R}^t$  и  $\mathbf{T}^t$  с одномерными блоками (38) – трехдиагональные и диагональная матрицы размерности  $t/2$ , в частности

$$A_{nn}^t = \frac{c_2}{n^2 - m^2} (1 + 2K_n(\pi/3)), \quad A_{n, n\pm 1}^t = 1, \quad n = 1, \dots, t/2. \quad (40)$$

Из-за равенств (13) и  $B_n^k = B_n^1$ ,  $k = 2, 3$ , формулы (21) примут вид

$$\begin{aligned} {}^i B_{La} &= 0, \quad a = 1, 3, \dots, \quad i = 1, 2, 3, \\ {}^i B_{La} &= (\delta_{a0} + 2\langle aa | K(\pi/3) | 00 \rangle_{L0}) B_L^i, \quad a = 0, 2, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Имеется две особенности: при любом  $t < \infty$  число корней уравнения (31) равно  $t/2 - 1$ , а компоненты (6) всегда имеют ложные слагаемые.

Докажем первое утверждение. В силу формул (39) равенство  $1 + 2K_n(\pi/3) = 0$  верно лишь при  $n = 2$ . Поэтому только один диагональный элемент (40) матрицы  $\mathbf{A}^t$ , а именно  $A_{22} = 2$ , не зависит от  $c_2$ . Следовательно,  $\det \mathbf{A}^t$  и  $\det \mathbf{G}^t$  – полиномы по  $c_2$  степени на единицу меньшей, чем размерность  $t/2$  матрицы  $\mathbf{A}^t$ , т.е.  $t/2 - 1$ , а число их корней  $c_2^\nu$  не превышает  $t/2 - 1$ .

Полагая  $n = 1, 2, \dots, m - 1$ , последовательно вычислим детерминанты  $d_n$  главных миноров порядка  $n$  матрицы  $\mathbf{A}^t$  разложением по элементам их последних строк. Тогда получим цепочку равенств

$$d_1 = D^1, \quad d_2 = D^2 d_1 - 1, \quad d_n = D^n d_{n-1} - d_{n-2}, \quad n = 3, \dots, m - 1; \quad \det \mathbf{A}^t = d_{m-1},$$

согласно которой  $d_{m-2} \neq 0$ , если  $\det \mathbf{A}^t = 0$ . Поэтому только одно уравнение системы (27) для искомых коэффициентов  $X_n^1$  может быть линейной комбинацией всех остальных. Значит все корни  $c_2^\nu$ ,  $\nu \leq t/2 - 1$ , простые.

Только три первых уравнения этой системы содержат неизвестное  $X_2^1$ :

$$\begin{aligned} X_1^1 + \left(2 + \frac{3c_2}{1 - m^2}\right) X_2^1 &= 0, \\ X_1^1 + 2X_2^1 + X_3^1 &= 0, \\ X_2^1 + \left(2 + \frac{c_2}{9 - m^2}\right) X_3^1 + X_4^1 &= 0, \\ X_{n-1}^1 + \left(2 + \frac{c_2(1 + 2K_n(\pi/3))}{n^2 - m^2}\right) X_n^1 + X_{n+1}^1 &= 0, \quad n = 4, \dots, m - 2, \\ X_{m-2}^1 + \left(2 - \frac{c_2(1 + K_{m-1}(\pi/3))}{2m + 1}\right) X_{m-1}^1 &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Выразим его из второго уравнения через  $X_1^1$  и  $X_3^1$ , а затем исключим из первого и третьего уравнений. Тогда для неизвестных  $X_n$  с  $n \neq 2$  получим систему уравнений с матрицей  $\tilde{\mathbf{A}}^t$  размерности  $t/2 - 1$ . Ее первые два уравнения таковы:

$$\begin{aligned} 3 \left( \frac{1}{2} + \frac{c_2}{1 - m^2} \right) X_1^1 - \frac{1}{2} X_3^1 &= 0, \\ -\frac{1}{2} X_1^1 + \left( \frac{3}{2} + \frac{c_2}{9 - m^2} \right) X_3^1 + X_4^1 &= 0, \end{aligned}$$

а все остальные – не подвергнутые преобразованию уравнения исходной системы (42). По построению  $\det \tilde{\mathbf{A}}^t = \det \mathbf{A}^t$ . При любом комплексном или действительном, но отрицательном  $c_2$  матрица  $\tilde{\mathbf{A}}^t$  невырождена, так как имеет доминирующую диагональ [14]:

$$|\tilde{A}_{nn}^t| > \sum_{n' \neq n} |\tilde{A}_{nn'}^t|, \quad n = 1, 2, \dots, t/2 - 1.$$

Поэтому все корни  $c_2^{\pm}$  уравнения (31) действительные и неотрицательные. Так как они простые, то их число равно  $t/2 - 1$ , что и требовалось доказать.

Теперь исследуем коэффициенты (41). Если  $B_L^i \neq 0$ , то  ${}^i B_{La} = 0$  только при  $L = 2$  и  $a = 0$ , потому что только в этом случае, как следует из равенств (13) и (39),  $\langle aa|K(\pi/3)|00\rangle_{L0} = -1/2$ . Значит ряд (20) функции  $F$  не содержит гипергармонику  $Y_{200}^{00}$ , даже если ряды (6) ее компонент  $F_i$  содержат эту гипергармонику. Поэтому при любом  $c_2$  и  $t$  слагаемое  $B_2^i Y_{200}^{00}$  компоненты  $F_i$  – ложное.

#### 4. ЭТАЛОННЫЕ РЕШЕНИЯ

В качестве эталонных решений уравнений Фаддеева (1) представляется логичным использовать точные решения (3), гиперсферические разложения которых содержат минимально возможное число слагаемых. Как было показано, при  $t = 0, 2$  нетривиальных точных решений нет. Поэтому рассмотрим случай  $t = 4$ , когда  $m = t/2 + 1 = 3$ ,  $p^2 = 36$  и имеется три неизвестных столбца  $X_1, X_2$  и  $X_3$ , система (23) состоит из двух уравнений:

$$D^1 X_1 + X_2 = 0, \quad X_1 + D^2 X_2 = 0,$$

эквивалентных уравнениям

$$G^4 X_1 = 0, \quad G^4 = D^2 D^1 - I; \quad X_2 = -D_1 X_1,$$

столбец  $X_3$  определяется уравнением (24), а матрицы  $D^1, D^2$  и  $M^4$  заданы соответствующими рассматриваемому случаю формулами (25), (36), (38).

##### 4.1. Случай трех разных частиц

При  $t = 4$  уравнение (31) – квадратное уравнение

$$\det G^4 = \det (D^2 D^1 - I) = A c_2^2 + B c_2 + C = 0. \quad (43)$$

При любых действительных  $c_1, c_3$  и  $m_1, m_2$  его коэффициенты:

$$\begin{aligned} A &\equiv 15 + 2(t_1^2 - 1)c_1 + 2(t_3^2 - 1)c_3, \\ B &\equiv 2(t_1^2 - 1)c_1^2 + 2(t_3^2 - 1)c_3^2 - 390 - \\ &\quad - 2(16t_1^2 + 5t_1 - 36)c_1 - 2(16t_3^2 + 5t_3 - 36)c_3 + \\ &\quad + \frac{2}{3} \left( 4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) + t_1 + t_2 + t_3 - 12 \right) c_1 c_3 - \\ &\quad - \frac{2}{3} \left( \cos 2(\gamma_{12} - \gamma_{31}) + \cos 2(\gamma_{12} - \gamma_{23}) + \cos 2(\gamma_{31} - \gamma_{23}) \right) c_1 c_3, \\ C &\equiv 15(c_1^2 + c_3^2) + 2 \left( (t_2^2 - 1)(c_1 + c_3) - 16t_2^2 - 5t_2 + 36 \right) c_1 c_3 - \\ &\quad - 390(c_1 + c_3) + 1800, \\ t_1 &\equiv \cos 2\gamma_{12}, \quad t_2 \equiv \cos 2\gamma_{31}, \quad t_3 \equiv \cos 2\gamma_{23}, \end{aligned} \quad (44)$$

– таковы, что дискриминант  $D \equiv B^2 - 4AC$  положителен. Поэтому всегда имеется два различных действительных корня  $c_2^+$  и  $c_2^-$ :

$$c_2^{\pm}(c_1; c_3, m_1, m_2) = -\frac{B}{2A} \left( 1 \pm \text{sign}(c_1^s - c_1) \left( 1 - 4\frac{AC}{B^2} \right)^{1/2} \right). \quad (45)$$

В координатной плоскости  $(c_1, c_2)$  (для примера см. рис.1) график всюду непрерывной функции  $c_2^-$  имеет наклонную асимптоту

$$c_2 = -c_1 - \frac{1}{3} \left( 7 + 4 \frac{2m_1 + 2m_2 + 1}{(m_1 + m_2)^2} \right) c_3 + \frac{1}{2} \left( 37 + 5 \frac{m_1 + m_2 + 1}{m_1 m_2} \right), \quad (46)$$

а график разрывной в нуле  $c_1^s$  коэффициента  $A$  функции  $c_2^\pm$  имеет вертикальную и горизонтальную асимптоты:

$$c_1 = c_1^s \equiv \frac{15 + 2(t_3^2 - 1)c_3}{2(1 - t_1^2)}, \quad c_2 = c_2^s \equiv \frac{15 + 2(t_2^2 - 1)c_3}{2(1 - t_1^2)}. \quad (47)$$

Точка  $(c_1^s, c_2^s)$  их пересечения лежит на прямой

$$c_2 = \frac{1 - t_2^2}{1 - t_3^2} c_1 + \frac{15}{2} \frac{t_2^2 - t_3^2}{(1 - t_1^2)(1 - t_3^2)}. \quad (48)$$

При любых фиксированных  $m_1, m_2$  и  $c_3$  верны неравенства  $c_2^+ < c_2^s$ , если  $c_1 < c_1^s$ , и  $c_2^+ > c_2^s$ , если  $c_1 > c_1^s$ . Поэтому если  $c_3$  возрастает или убывает, то точка  $(c_1^s, c_2^s)$  смещается по этой прямой вниз или, соответственно, вверх. Таким же образом при изменении  $c_3$  смещаются и графики функций  $c_2^\pm$ .

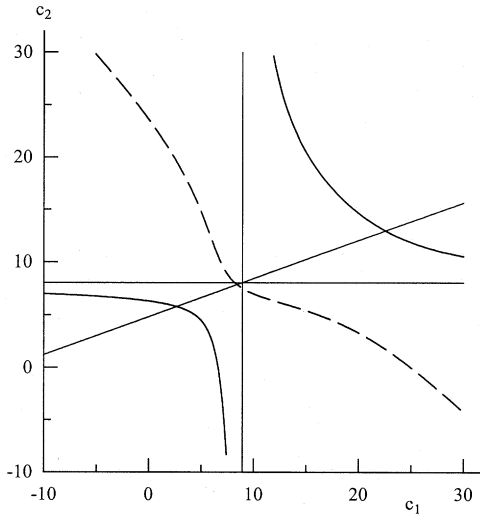


Рис. 1. Корни (45) при  $c_3 = -2$ ,  $m_1 = 2$  и  $m_2 = 4$ : сплошные кривые –  $c_2^\pm$ , пунктир –  $c_2^-$ . Тонкие сплошные линии – асимптоты (47) и наклонная прямая (48)

В частном случае  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 20$ ,  $c_1 = -2$ ,  $c_3 = -40$ , корни  $c_2^\pm$ , вычисленные по формулам (44) и (45), таковы:  $c_2^+ \approx 14.7647$ ,  $c_2^- \approx 90.3522$ ; отвечающие им значения коэффициентов  $B_L^{i\pm}$  рядов (6) и (17) собраны в табл. 1, а компоненты  $U_i^\pm(\varphi_i; 36)$  изображены на рис. 2 и 3 как функции угла  $\varphi \equiv \varphi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Таблица и рисунки иллюстрируют существование двух типов точных решений уравнений (16). При небольших значениях  $c_2 = c_2^+ \ll |c_3|$  существуют решения первого типа ( $U_1^+, U_2^+, U_3^+$ ). В разложениях (17) всех их компонент  $U_i^+$  доминирует ( $B_L^{i+} \ll B_i^{i+}, i = 1, 2, 3; L = 0, 2$ ) базисная функция  $\sin 2n\varphi_i$  с максимально возможным при данном  $t = 4$  значением  $n = 3$  (см. столбцы 2-4 табл. 1 и рис. 2). Решения ( $U_1^+, U_2^+, U_3^+$ ) порождают решение  $\Psi^+$  уравнения Шредингера (7), близкое к решению отвечающего ему свободного ( $c_k = 0, k = 1, 2, 3$ ) уравнения. Действительно, пренебрегая коэффициентами  $B_L^{i+}, L = 0, 2$ , по формулам (6), (18), (20) и (21) получаем

$$\Psi^+(\mathbf{r}_i; 36) \approx r^{-2} Z_6(z) \sum_{a=0,1,2}^i B_{4a}^+ Y_{4aa}^{00}(\Omega_i).$$

Таблица 1. Коэффициенты  $B_L^{i\pm}$ , отвечающие корням  $c_2^+ = 14.7647$  и  $c_2^- = 90.3522$  в случае  $m_1 = 10, m_2 = 20, c_1 = -2$  и  $c_3 = -40$

$L$	$B_n^{1+}$	$B_L^{2+}$	$B_L^{3+}$	$B_n^{1-}$	$B_L^{2-}$	$B_L^{3-}$
0	1.000000	-12.96196	7.038856	1.000000	-24.02648	17.83859
2	-1.230759	26.94059	16.86049	-1.124846	-16.86264	-15.58043
4	338.9026	190.3271	-445.3111	-3.942418	-6.419471	10.03177

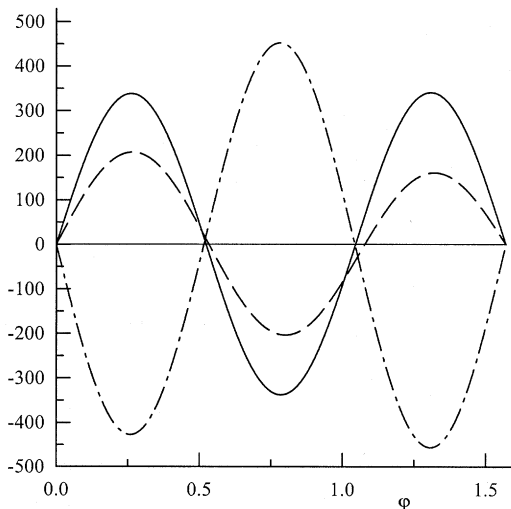


Рис. 2. Компоненты (17) при  $m_1 = 10, m_2 = 20, c_1 = -2, c_2 = c_2^+ = 14.7647$  и  $c_3 = -40$ : сплошная кривая  $-U_1^+(\varphi; 36)$ , пунктир  $-U_2^+(\varphi; 36)$ , штрихпунктир  $-U_3^+(\varphi; 36)$

Решения второго типа ( $U_1^-, U_2^-, U_3^-$ ) существуют при больших по модулю значениях  $c_2 = c_2^-$  и  $c_3$  по сравнению с  $|c_1|$ . В рядах (17) таких решений коэффициенты перед функциями  $\sin 2n\varphi_i$ ,  $n = 1, 2, 3$ , сравнимы по порядку величины ( $|B_L^{i-}| \sim |B_4^{i-}|$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $L = 0, 2$ ), но компонента  $U_1^-$  подавлена ( $|U_1^-| \ll |U_k^-|$ ,  $k = 2, 3$ ) по сравнению с другими (см. столбцы 5 - 7 табл. 1 и рис. 3).

Решению ( $U_1^-, U_2^-, U_3^-$ ) отвечает решение  $\Psi^-$  уравнения Шредингера, обладающее другим физическим свойством: функция  $|\Psi^-|^2$  выталкивается из области конфигурационного пространства  $\mathcal{R}^6$ , где полное взаимодействие  $V$  отталкивающее и локализуется в той области, где это взаимодействие притягивающее. Это свойство – следствие особой угловой зависимости компонент  $U_1^-, U_2^-$  и  $U_3^-$ . Ее иллюстрирует рис 3. Компонента  $U_2^-$  пары сильно отталкивающихся ( $c_2 = c_2^- \approx 90$ ) частиц  $p_1$  и  $p_3$  локализована в области  $\varphi_2 < \pi/4$ , далекой от окрестности точки их соударения  $\varphi_2 = \pi/2$ , и, наоборот, компонента  $U_3^-$  пары сильно притягивающихся ( $c_3 = -40$ ) частиц  $p_1$  и  $p_2$  локализована вблизи точки парного удара  $\varphi_3 = \pi/2$ . Оставшаяся компонента  $U_1^-$  из-за слабого притяжения ( $c_1 = -2$ ) в паре частиц  $p_2$  и  $p_3$  имеет три сравнимых по модулю локальных экстремума, равномерно распределенных по всему отрезку  $0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$ .

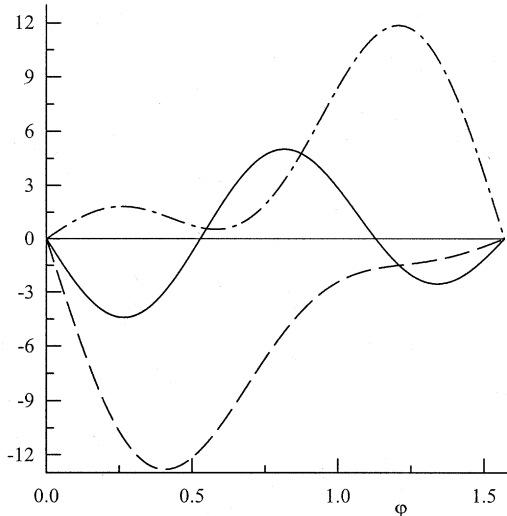


Рис. 3. Компоненты (17) при  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 20$ ,  $c_1 = -2$ ,  $c_2 = c_2^- = 90.3522$  и  $c_3 = -40$ : сплошная кривая –  $U_1^-(\varphi; 36)$ , пунктир –  $U_2^-(\varphi; 36)/3$ , штрихпунктир –  $U_3^-(\varphi; 36)/3$

В предельном случае  $|c_1| = \infty$  и  $c_2 = c_2^+ = c_2^s$  решаем аналитически уравнения (23) и (24) с матрицами-блоками (32). Затем, используя связи (22), получаем удобные для последовательного вычисления предельных коэффициентов  $B_L^i$  формулы:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 15 + c_3 \left( 2t_2^2 + t_3 - \cos 2(\gamma_{12} - \gamma_{31}) - 1 \right), \\
 B_0^1 &= 1, \\
 B_0^2 &= \frac{1}{f_1} \left( 2c_3(1 - t_2^2) - 15 \right), \quad B_2^2 = -\frac{16}{5} B_0^2, \\
 B_0^3 &= -1 - B_0^2, \quad B_2^3 = -\frac{16}{5} B_2^2, \quad B_2^1 = -(t_1 B_2^2 + t_2 B_2^3); \\
 g_1 &= 2 \sin 2\gamma_{31} + \sin 2(\gamma_{12} - \gamma_{23}) + \sin(4\gamma_{23} - 2\gamma_{31}), \\
 B_4^2 &= \frac{12}{f_1(1 - t_3^2)} \left( 2t_2^2 - 2t_3 - \cos 2(\gamma_{12} - \gamma_{31}) + 1 \right), \\
 B_4^3 &= \frac{24}{f_1 g_1} \left( \sin(4\gamma_{12} - 2\gamma_{31}) + 2 \sin 2(\gamma_{12} - \gamma_{31}) - \right. \\
 &\quad \left. - 3 \sin 2\gamma_{12} - \sin 6\gamma_{12} - \sin 3\gamma_{31} \right), \\
 B_4^1 &= -K_3(\gamma_{12}) B_4^2 - K_3(\gamma_{31}) B_4^3.
 \end{aligned} \tag{49}$$

В этом пределе компоненты (6) имеют ложные слагаемые  $B_0^i Y_{000}^{00}(\Omega_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , а ряд (20) в представлении  $\Omega_i$ ,  $i = 1$ , выглядит наиболее просто, согласно формуле (34):

$$F(\Omega_i; 36) = \sum_{L=2}^4 \sum_{a=1}^{L/2} {}^i B_{La} Y_{La a}^{00}(\Omega_i) \neq 0. \tag{50}$$

Аналогичным способом, в случае  $c_1 = c_1^s$  и  $c_2 = c_2^+ = \pm\infty$  получаем:

$$\begin{aligned}
 f_2 &= 15 + 2c_3(t_3^2 - 1), \\
 B_0^1 &= 1, \\
 B_2^1 &= -\frac{16}{5}, \quad B_0^3 = \frac{c_3}{f_2} (t_2 - \cos 2(\gamma_{12} - \gamma_{31})), \\
 B_0^2 &= -1 - B_0^3, \quad B_2^3 = -\frac{16}{5} B_0^3, \quad B_2^2 = \frac{16}{5} (t_1 + t_2 B_0^3); \\
 g_2 &= \sin 2(\gamma_{31} - \gamma_{12}) + \sin(2\gamma_{23} - 4\gamma_{31}) - 2 \sin 2\gamma_{23}, \\
 B_4^1 &= \frac{12}{f_2(t_2^2 - 1)} \left( 2t_3^2 - 2t_2 - \cos 2(\gamma_{12} - \gamma_{23}) \right), \\
 B_4^3 &= \frac{24}{f_2 g_2} \left( 2 \sin 2(\gamma_{12} - \gamma_{31}) + \sin(4\gamma_{12} - 2\gamma_{23}) - \right. \\
 &\quad \left. - 3 \sin 2\gamma_{12} - \sin 6\gamma_{12} - \sin 2\gamma_{23} \right), \\
 B_4^2 &= -K_3(\gamma_{12}) B_4^1 - K_3(\gamma_{23}) B_4^3.
 \end{aligned} \tag{51}$$

В этом случае ложные слагаемые – те же ( $B_0^i Y_{000}^{00}$ ), а функцию  $F(\Omega_2; 36)$  можно найти по формуле (50) с  $i = 2$ .

Для примера в табл. 2 приведены значения коэффициентов (49) и (51) в случае  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 20$  и  $c_3 = -40$ . Как видно из нее, в обоих рассмотренных пределах  $|B_L^i| \ll |B_4^i|$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;  $L = 0, 2$ , поэтому оба предельных решения ( $U_1, U_2, U_3$ ) – решения первого типа.

**Таблица 2. Коэффициенты  $B_L^i$  при  $t = 4$ ,  $m_1 = 10$ ,  $m_2 = 20$ ,  $c_3 = -40$  и  $|c_1| = \infty$ ,  $c_2 = c_2^s = 21.5154$  или  $|c_1| = c_1^s = 35.7374$ ,  $|c_2| = \infty$**

$n$	$ c_1  = \infty, c_2 = c_2^s$			$c_1 = c_1^s,  c_2  = \infty$		
	$B_L^1$	$B_L^2$	$B_L^3$	$B_L^1$	$B_L^2$	$B_L^3$
0	1.000000	-0.594640	-0.405398	1.000000	-1.783493	0.783449
2	-0.136155	1.902848	1.297151	-3.200000	0.137848	-2.507177
4	14.02088	8.101168	-18.65622	-27.74264	-14.32074	35.71708

В оставшихся предельных случаях, когда согласно (46)  $c_2^- \rightarrow \mp\infty$  при  $c_1 \rightarrow \pm\infty$ , ситуация иная: если  $B_0^{1\pm} = 1$ , то  $B_1^{\pm} = -1$  и  $B_L^{i\pm} = 0$  при всех остальных  $i$  и  $L$ . Поэтому предельные решения уравнений (14) одинаковые:

$$F_i^{\pm} = (-1)^{1+i} Y_{000}^{00}, \quad i = 1, 2; \quad F_3^{\pm} \equiv 0$$

и ложные, так как их сумма (19) тривиальная:  $F \equiv 0$ .

После того как найдены все коэффициенты  $B_L^i$  и построены компоненты  $F_i$  как ряды (6), функцию  $F$  проще всего вычислять по формулам (19). Для ее вычисления как суммы (20) придется сначала найти гипергармоники:

$$\begin{aligned} Y_{000}^{00}(\Omega_i) &= \frac{1}{\pi^{3/2}}, & Y_{200}^{00}(\Omega_i) &= \frac{2}{\pi^{3/2}} v_i, & Y_{211}^{00}(\Omega_i) &= -\frac{2}{\pi^{3/2}} \sqrt{1-v_i} u_i, & (52) \\ Y_{400}^{00}(\Omega_i) &= \frac{1}{\pi^{3/2}} (4v_i^2 - 1), & Y_{411}^{00}(\Omega_i) &= -\frac{2\sqrt{6}}{\pi^{3/2}} \sqrt{1-v_i^2} v_i u_i, \\ Y_{422}^{00}(\Omega_i) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}} (1-v_i^2) (3u_i^2 - 1) \end{aligned}$$

– и все коэффициенты (21). Для этого потребуются коэффициенты

$$\begin{aligned} \langle 00|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{00} &= 1, & \langle 00|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{20} &= \cos 2\gamma_{ki}, \\ \langle 11|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{20} &= -\sin 2\gamma_{ki}, & \langle 00|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{40} &= \frac{1}{3} (1 + 2 \cos 4\gamma_{ki}), \\ \langle 11|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{40} &= \frac{\sqrt{3}}{6} \sin 4\gamma_{ki}, & \langle 22|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{40} &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin^2 2\gamma_{ki}. \end{aligned}$$

#### 4.2. Случай двух тождественных частиц

Так как теперь  $m_2 = m_3 = 1$  и  $c_2 = c_3$ , то уравнение (31) сводится к квадратному уравнению (43) с более простыми коэффициентами:

$$\begin{aligned} A &\equiv 12t_1^2, & B &\equiv 4 \left( (2t_1^2 - t_1 + 2)c_1 - 24t_1^2 - 15 \right), & (53) \\ C &\equiv 3(c_1^2 - 6)(c_1 - 20), & t_1 &\equiv -(1 + m_1)^{-1}, \end{aligned}$$

а искомые корни  $c_2 = c_2^{\pm}(c_1; m_1)$  зависят от одного аргумента  $c_1$  и одного параметра  $m_1$ . Если  $m_1 < \infty$ , то  $A < 0$  и  $D = B^2 - 4AC > 0$  при любом  $c_1$ , и поэтому существуют два разных действительных и непрерывных по аргументу  $c_1$  корня:

$$\begin{aligned} c_2^{\pm}(c_1; m_1) &= \frac{1}{6t_1^2} \left( (t_1 - 2t_1^2 - 2)c_1 + 24t_1^2 + 15 \right) \pm & (54) \\ &\pm \frac{1}{6t_1^2} [4(t_1^4 - t_1^3 - t_1 + 1)c_1^2 + 6(8t_1^3 - 16t_1^4 + 13t_1^2 + 5t_1 - 10)c_1 + \\ &+ 9(64t_1^4 - 40t_1^2 + 25)]^{1/2}. \end{aligned}$$



При  $c_1 \rightarrow \pm\infty$  эти корни не ограничены:

$$c_2^+(c_1; m_1) = a^+c_1 + b^+ + O(c_1^{-1}), \quad c_2^-(c_1; m_1) = a^-c_1 + b^- + O(c_1^{-1}), \quad (55)$$

$$a^\pm \equiv \frac{1}{6t_1^2} \left( t_1 - 2t_1^2 - 2 \pm 2(1-t_1)\sqrt{t_1^2 + t_1 + 1} \right),$$

$$b^\pm \equiv \frac{1}{2t_1^2} \left( 8t_1^2 + 5 \pm \frac{16t_1^3 + 8t_1^2 - 5t_1 - 10}{2\sqrt{t_1^2 + t_1 + 1}} \right).$$

Поэтому их графики (см. для примера рис. 4) имеют наклонные асимптоты:

$$c_2 = a^+c_1 + b^+, \quad c_2 = a^-c_1 + b^-. \quad (56)$$

Только при  $m_1 = 3/5$  дискриминант  $D$  – полный квадрат аргумента  $c_1$  и поэтому функции  $c_2^\pm$  совпадают со своими асимптотами:

$$c_2^+(c_1; 3/5) = 6(20 - c_1)/25, \quad c_2^-(c_1; 3/5) = 8(6 - c_1)/16. \quad (57)$$

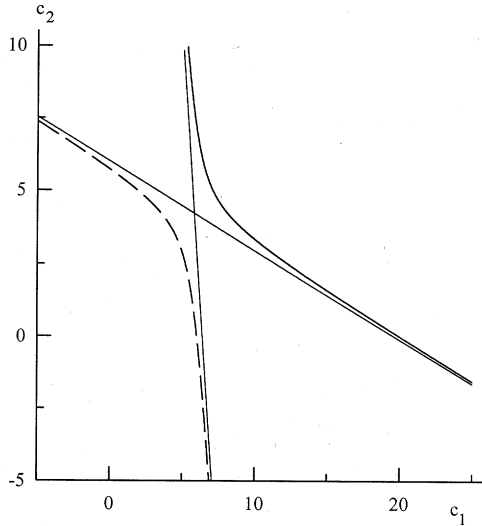


Рис. 4. Корни (54) при  $m_1 = 2$ : сплошная кривая –  $c_2^+$ , пунктир –  $c_2^-$ .

Тонкие сплошные линии – асимптоты (56)

Случай  $m_1 = \infty$  – особый. В этом случае  $A = 0$ , и поэтому имеется только один, причем терпящий разрыв в точке  $c_1 = c_1^s = 15/2$ , корень:

$$c_2(c_1; \infty) = \frac{3}{4} \frac{(c_1 - 6)(c_1 - 20)}{15 - 2c_1}. \quad (58)$$

Найденное семейство (54) – (58) всех корней уравнения (43), (53) обладает двумя особыми свойствами:  $c^+(20; m_1) = c^-(6; m_1) = 0$  при всех  $m_1$ , но значения  $c_2^\pm$  при  $c_1 = 0$  зависят от  $m_1$ :

$$c_2^\pm(0; m_1) = \frac{5}{2}m_1^2 + 5m_1 + \frac{13}{2} \pm \frac{1}{2} \left( 25m_1^4 + 100m_1^3 + 110m_1^2 + 20m_1 + 49 \right)^{1/2}.$$

Поэтому с ростом  $m_1$  от 0 до  $\infty$  ордината точки пересечения графика корня  $c_2^+$  или  $c_2^-$  и оси ординат увеличивается от 10 до  $\infty$  и, соответственно, от 3 до 6, а точка пересечения (20, 0) или (6, 0) с осью абсцисс остается неподвижной (см. рис. 5).

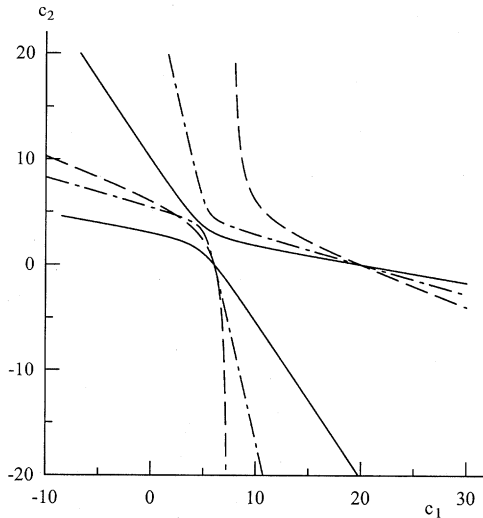


Рис. 5. Корни  $c_2^\pm(c_1; m_1)$ : при  $m_1 = 0$  – сплошная кривая, при  $m_1 = \infty$  – пунктир и при  $m_1 = 1.2$  – штрихпунктир

Корням (54) или (57) соответствуют коэффициенты  $B_0^{1\pm} = 1$  и

$$\begin{aligned} B_0^{2\pm} &= -\frac{c_2^\pm}{2f^\pm} \left( c_1 - 10 + 2t_1(t_1 c_2^\pm - 2) \right), \\ B_2^{1\pm} &= -\frac{4}{5f^\pm} \left( 10(6 - c_2^\pm) + t_1(c_1 + 2t_1(c_2^\pm - 8))c_2^\pm \right), \\ B_2^{2\pm} &= -\frac{2c_2^\pm}{5f^\pm} \left( 10 - c_1 - 2t_1(c_2^\pm - 8) \right), \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned}
 B_4^{1\pm} &= \frac{15}{8g^\pm} \left( (8t_1^2(t_1^2 - 1) + 3)c_2^\pm B_2^{1\pm} + (1 - 4t_1^2)c_1 B_2^{2\pm} \right), \\
 B_4^{2\pm} &= \frac{15}{16g^\pm} \left( (1 - 4t_1^2)c_2^\pm B_2^{1\pm} + 3c_1 B_2^{2\pm} \right); \\
 f^\pm &\equiv (c_1 - 10)(c_2^\pm - 6) + 2t_1^2 c_2^\pm (c_2^\pm - 8), \quad g^\pm \equiv (1 - t_1^2)^2 c_1 c_2^\pm.
 \end{aligned}$$

В частном случае  $m_1 = 2$  и  $c_1 = -2$ , согласно формулам (54),

$$c_2^\pm = (205 \pm \sqrt{27769})/6, \quad \text{т.е. } c_2^+ \approx 61.9400, \quad c_2^- \approx 6.93328,$$

соответствующие коэффициенты (59) собраны в табл. 3, а компоненты  $U_i^\pm(\varphi)$ ,  $\varphi = \varphi_i$ ,  $i = 1, 2$ , вычисленные как суммы (17), изображены на рис. 6 и 7.

**Таблица 3. Коэффициенты  $B_L^{\pm}$ , отвечающие корням  $c_2^+ = 61.9400$  и  $c_2^- = 6.93328$  уравнения (43), (53) в случае  $m_1 = 2$  и  $c_1 = -2$**

$L$	$B_L^{1+}$	$B_L^{2+}$	$B_L^{1-}$	$B_L^{2-}$
0	1.000000	-1.347928	1.000000	-4.221037
2	-2.521657	-16.69492	-0.223170	3.991469
4	6.256621	-0.128311	1.408249	2.295875

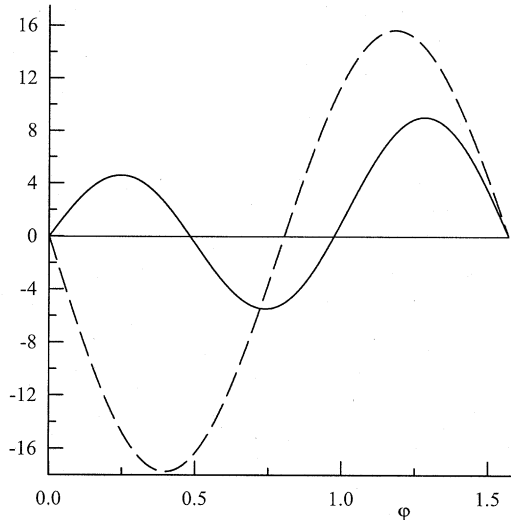


Рис. 6. Компоненты (17) в случае  $m_1 = 2$ ,  $c_1 = -2$  и  $c_2 = c_2^+ = 61.9400$ : сплошная кривая –  $U_1^+(\varphi; 36)$ , пунктир –  $U_2^+(\varphi; 36)$

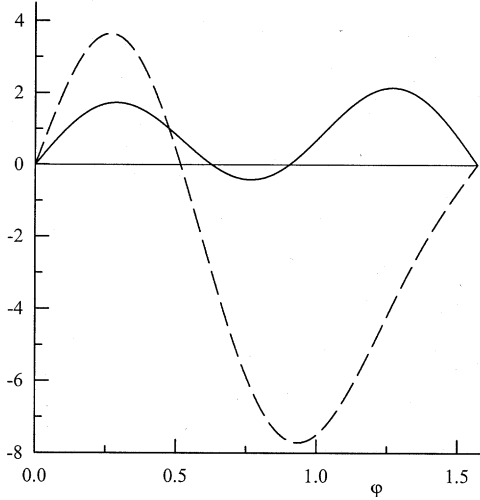


Рис. 7. Компоненты (17) в случае  $m_1 = 2$ ,  $c_1 = -2$  и  $c_2 = c_2^- = 6.93328$ :  
сплошная кривая  $-U_1^-(\varphi; 36)$ , пунктир  $-U_2^-(\varphi; 36)$

Если в формулах (59) заменить корни  $c_2^\pm$  их асимптотиками (55) и перейти к пределам  $c_1 \rightarrow \pm\infty$ , то получатся коэффициенты рядов (6) двух предельных точных решений ( $F_1^\pm, F_2^\pm$ ) уравнений (14):

$$\begin{aligned} B_0^{1\pm} &= 1, & B_2^{1\pm} &= -\frac{1}{2}, & B_4^{1\pm} &= B_4^{2\pm} = 0, \\ B_0^{2+} &= -\frac{8}{5} \frac{4t_1^3 - 3t_1^2 + 3t_1 - 4 \pm \delta(4t_1^2 - 5t_1 + 4)}{8t_1^3 + 3t_1^2 - 2 \pm \delta(8t_1^2 - 4t_1 + 2)}, \\ B_0^{2-} &= -\frac{8}{5} \frac{4t_1^3 - 3t_1^2 + 3t_1 - 4 \mp \delta(4t_1^2 - 5t_1 + 4)}{8t_1^3 + 3t_1^2 - 2 \mp \delta(8t_1^2 - 4t_1 + 2)}, \\ B_2^{2\pm} &= -\frac{1}{2t_1} B_0^{2\pm}; & \delta &\equiv \sqrt{t_1^2 + t_1 + 1}. \end{aligned}$$

Эти решения – ложные. Действительно, в рядах (20) отвечающих им функций  $F^\pm$  все коэффициенты (37) нулевые, и поэтому  $F^\pm \equiv 0$ .

#### 4.3. Случай трех тождественных частиц

Теперь  $m_k = 1$  и  $c_k = c_2$  при всех  $k = 1, 2, 3$ . Поэтому уравнение (43) имеет вид  $c_2 - 4 = 0$ . Его корню  $c_2 = 4$  отвечают коэффициенты  $B_0^1 = 1$ ,  $B_2^1 = -4/5$ ,  $B_4^1 = -1$ , изображенная на рис 8. компонента (17)

$$U_1(\varphi; 36) = \sin 2\varphi - \frac{8}{5} \cos 2\varphi - \frac{1}{3}(1 + 2 \cos 4\varphi) \quad (60)$$

и ряд (20) с коэффициентами (41)

$$F(\Omega_i; 36) = 3Y_{000}^{00}(\Omega_i) - Y_{400}^{00}(\Omega_i) - \sqrt{2}Y_{422}^{00}(\Omega_i).$$

Обсуждаемые ниже особенности поведения корней  $c_2'$  и строения компонент  $F_i$  при  $t > 4$  установлены численным анализом обобщенной задачи на собственные значения (28), (29) с матрицами-блоками (38).

В случае  $t = 6$  существуют два собственных значения

$$c_2^\pm = 9 \pm \sqrt{11}, \quad \text{т.е. } c_2^+ \approx 12.1366, \quad c_2^- \approx 5.68337,$$

две соответствующие и изображенные на рис. 8 компоненты (17):

$$U_1^\pm(\varphi; 64) = \sin 2\varphi - \frac{\sin 4\varphi}{4(c_2^\pm - 10)} + \frac{5}{21 - 2c_2^\pm} \left( 3 \sin 6\varphi + \frac{14}{c_2^\pm} \sin 8\varphi \right) \quad (61)$$

– и две функции (20):

$$F^\pm(\Omega_i; 64) = 3 Y_{000}^{00}(\Omega_i) + \frac{15}{21 - 2c_2^\pm} \left( Y_{400}^{00}(\Omega_i) + \sqrt{2} Y_{422}^{00}(\Omega_i) \right) + \frac{115}{c_2^\pm(21 - 2c_2^\pm)} \left( Y_{600}^{00}(\Omega_i) - Y_{622}^{00}(\Omega_i) \right).$$

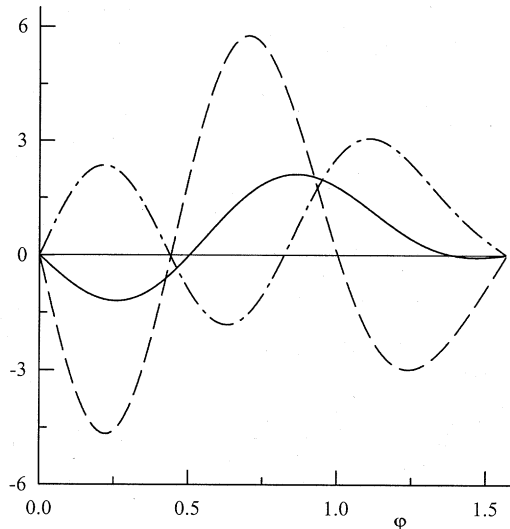


Рис. 8. Компоненты (60) и (61): сплошная линия –  $U_1(\varphi; 36)$ , пунктир –  $U_1^+(\varphi; 64)$  и штрихпунктир –  $U_1^-(\varphi; 64)$

Для вычисления функций  $F^\pm(\Omega_i; 64)$  потребуются гипергармоники (52) и

$$Y_{600}^{00}(\Omega_i) = \frac{4}{\pi^{3/2}} v_i (2v_i^2 - 1), \quad Y_{622}^{00}(\Omega_i) = \frac{4}{\pi^{3/2}} v_i (1 - v_i) (3v_i^2 - 1).$$

В табл. 4 собраны все собственные значения  $c_2^\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, t/2 - 1$ , задачи (28) и соответствующие им значения коэффициентов  $B_L^{1\nu}$ ,  $L = 0, 2, \dots, t$ , в случаях  $t = 8, 10, 12, 14$ . Видна следующая закономерность: при наименьшем корне  $c_2^1$  в ряду (6) для компоненты  $F_1^\nu(\varphi_1; (t+2)^2)$  амплитуды  $B_L^{1\nu}$  гипергармоник  $Y_{L00}^{00}$  возрастают с ростом  $L$ , и доминирующей оказывается гипергармоника  $Y_{t00}^{00}$  с максимально возможным  $L = t$ , при наибольшем корне  $c_2^{t/2}$  в таком ряду доминируют гипергармоники со средними значениями гипермомента:  $L = t/4 - 1/2$ .

**Таблица 4.**  
**Корни  $c_2^\nu$  уравнения (31) и отвечающие им коэффициенты  $B_L^1$**   
**при  $t = 8, 10, 12, 14$**

$t$	$c_2^\nu$	$B_2^{1\nu}$	$B_4^{1\nu}$	$B_6^{1\nu}$	$B_8^{1\nu}$	$B_{10}^{1\nu}$	$B_{12}^{1\nu}$	$B_{14}^{1\nu}$
8	5.19375	-1.54375	2.55234	-4.00000	-11.5523			
	12.0000	-0.57143	0.00000	1.33333	1.66667			
	30.8062	2.11518	-7.05234	-4.00000	-1.94766			
10	5.83831	-1.64016	2.59149	-3.61627	3.91018	7.36706		
	16.9905	-0.59464	0.11323	0.74190	-1.25685	-0.81371		
	39.4006	1.50631	-4.86681	1.14251	13.9297	3.88895		
	59.1039	3.35349	-9.24531	-7.72494	-11.4764	-2.13590		
12	6.06294	-1.72913	2.69056	-3.67033	4.21833	-5.07798	-8.46850	
	18.9525	-0.86983	0.75712	-0.21448	-0.92610	3.15382	1.68255	
	28.2394	-0.25070	-0.63591	1.33930	-0.25940	-2.78006	-0.99539	
	73.9381	2.79588	-7.49072	-2.43657	7.92538	3.96780	0.54260	
	106.807	4.98713	-12.4210	-16.8906	-45.6014	-13.5438	-1.28215	
14	5.81556	-1.80922	2.80194	-3.82010	4.59742	-5.68542	7.06801	24.3072
	17.0506	-1.24747	1.57629	-1.49307	0.47312	1.41442	-4.90285	-5.75092
	31.8512	-0.50744	-0.03831	0.69668	-0.80740	0.50382	1.28813	0.80885
	53.8113	0.59056	-2.43396	2.11098	2.60527	-7.87223	-5.62504	-2.09065
	108.377	3.31888	-8.38664	-3.86512	5.23021	4.20258	1.07618	0.19859
	170.427	6.42135	-15.1557	-27.1061	-89.5814	-31.1362	-4.60983	-0.54097

По этой причине компоненты  $U_1^\nu$ , заданные рядами (17) и отвечающие трем возрастающим корням  $c_2^\nu$ ,  $\nu = 1, t/4 - 1/2, t/2 - 1$ , имеют радикально разную угловую зависимость. Чтобы проиллюстрировать эту особенность, графики таких компонент в случае  $t = 14$  изображены на одном и том же рис. 9, но в разном масштабе.

Как видно из рис. 9, с ростом величины  $c_2 = c_2^\nu$ , т.е. отталкивания во всех парах трех бозонов, компоненты  $U_1^\nu$ , нормированные одним и тем же условием  $B_0^{1\nu} = 1$ , монотонно выталкиваются из полукрестности точки парного удара ( $\varphi = \pi/2$ ), а амплитуды их осцилляций увеличиваются. Следовательно, при усилении отталкивания соответствующее решение  $\Psi^\nu$  уравнения Шредингера имеет физически правдоподобное поведение: функция  $|\Psi^\nu|^2$  локализуется в области небольших значений угла  $\varphi$ , где отталкивание слабее. Таким образом, при любой энергии предпочтительной становится положение всех трех бозонов на одной прямой:  $\varphi = 0$ .

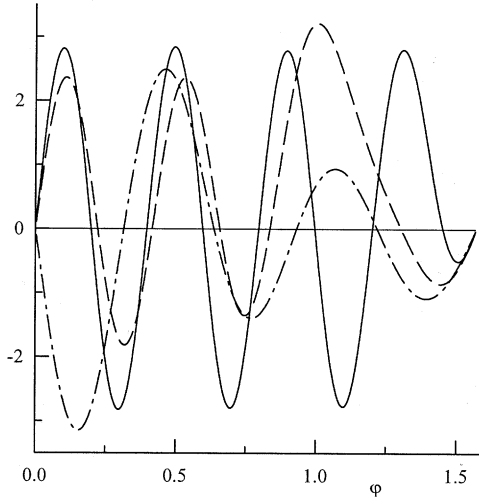


Рис. 9. Компоненты (17) при  $t = 14$  и константе  $c_2$ , равной корню  $c_2^1, c_2^3$  или  $c_2^6$ :  
 сплошная линия –  $0.1U_1(\varphi; 256)$  при  $c_2 = 5.81556$ , пунктир –  $U_1(\varphi; 256)$   
 при  $c_2 = 31.8512$  и штрихпунктир –  $0.02U_1(\varphi; 256)$  при  $c_2 = 170.427$

Как видно из табл. 5, корни  $c_2^\nu$ ,  $\nu = 1, 2, \dots, 6$ , в пределе больших  $t$  сходятся к константам 6, 20, 42, 72, 110, 156. В этом пределе компоненты  $F_i^\nu$ , отвечающие таким корням, не ограничены:

$$F_i^\nu(\Omega_i; (t+2)^2) \sim B_i^{1\nu} Y_{400}^{00}(\Omega_i), \quad B_i^{1\nu} \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, 3.$$

Таблица 5. Шесть корней  $c_2^\nu$  уравнения (31) при больших значениях  $t$

$t$	$c_2^1$	$c_2^2$	$c_2^3$	$c_2^4$	$c_2^5$	$c_2^6$
20	5.935565	18.74101	37.50166	61.59553	82.29548	148.1364
60	6.001726	20.03094	42.14829	72.26215	109.7422	154.2965
120	6.000245	20.00468	42.02705	72.08644	110.1759	156.2028
180	6.000075	20.00147	42.00885	72.03087	110.0755	156.1377
400	6.000000	20.00000	42.00004	72.00033	110.0016	156.0056

Из сравнения всех перечисленных выше значений корней, следует, важный вывод: минимально возможное значение констант взаимодействий (2), при которых для трех тождественных бозонов существуют точные решения, равно 4 и реализуется при  $t = 4$ .

## 5. ОБСУЖДЕНИЕ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Для обсуждения сначала рассмотрим выделенную парную подсистему  $(p_2, p_3)$  исследованной трехчастичной системы  $(p_1, p_2, p_3)$ .

Как известно [16], все физически допускаемые волновые функции  $\psi(x_1; e)$  такой подсистемы слабосингулярны в точке  $x_1 = 0$ :  $x_1\psi \rightarrow 0, x_1 \rightarrow 0$ ; при  $c_2 > -1/4$  существуют только состояния рассеяния с положительной энергией  $e$ , а в случае  $c_2 < -1/4$  имеются и связанные состояния, причем основное состояние отвечает энергии  $e = -\infty$ . В этом состоянии частицы  $p_2, p_3$  находятся в бесконечно малой окрестности их центра масс ( $x_1 = 0$ ), поэтому говорят, что происходит "падение" частиц в точку  $x_1 = 0$ . Условие "падения" – неравенство  $c_2 < -1/4$ .

В отличие от случая двух частиц, достаточные условия существования всех физически допускаемых решений задачи трех частиц с взаимодействиями центробежного типа неизвестны [4]. Этот пробел в некоторой степени восполняет доказанный в разделе 2 критерий существования: задача трех частиц (1) с нулевым полным угловым моментом и  $S$ -волновыми взаимодействиями центробежного типа (2) имеет точное решение, представимое в виде произведения (3) общего решения уравнения Бесселя (4) и конечной линейной комбинации (6) гипергармоник (5), тогда и только тогда, когда  $t \geq 4$ ,  $p^2 = (t + 2)^2$  и при данных отношениях  $\alpha_1 = c_1/c_2$  и  $\alpha_3 = c_3/c_2$  существует хотя бы одно решение  $(c_2, X)$  обобщенной проблемы собственных значений (28).

Наиболее значимый результат раздела 2 гласит: в пределе двух бесконечно больших по модулю констант взаимодействий эталонные точные решения ( $t = 4$ ) уравнений Фаддеева переходят в ложные, а в пределе одной большой по модулю константы, как, например, в случае  $c_2 = c_2^- \rightarrow -\infty$ ,  $c_1 = c_1^s$ , в исключительно интересные с физической точки зрения решения. Действительно, такие решения регулярны всюду на  $S^5$ , в частности в точке парного удара  $x_1 = 0$ . Кроме того, хотя условие "падения" ( $c_2 < -1/4$ ) частиц  $p_2$  и  $p_3$  в эту точку в отсутствие частицы  $p_1$  выполняется, такого падения в трехчастичной системе не происходит из-за взаимодействий  $V_1$  и  $V_3$  частиц  $p_2$  и  $p_3$  с частицей  $p_1$ .

Так как все гипергармоники (5) регулярны на  $S^5$ , то сингулярные решения уравнений Фаддеева, описывающие "падение" частиц в точки парных ударов, должны иметь бесконечные гиперсферические ряды. Исследование таких точных решений и вывод трехчастичных условий "падения" – цель следующей работы.



## Литература

1. *Y. Avishai.* // J. Math. Phys. 1975. V.16. P.1491.
2. *V.V. Pupyshov.* // Phys. Lett. 1989. V.A140. P.151.
3. *В.В. Пупышев.* // Препринт Р5-2000-296. ОИЯИ. Дубна, 2000.
4. *С.П. Меркурьев, Л.Д. Фаддеев.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
5. *Р.И. Джибути, Н.Б. Крупеникова.* Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
6. *М. Абрамовиц, И. Стиган.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
7. *В.В. Пупышев.* // ЭЧАЯ. 1999. Т.30. С.1562.
8. *В.В. Пупышев.* // Препринт Р4-2000-136. ОИЯИ. Дубна, 2000.
9. *Мошинский М.* Гармонический осциллятор в современной физике от атомов до кварков. М.: Мир, 1972.
10. *В.В. Пупышев.* // ТМФ. 2000. Т.125. С.253.
11. *В.В. Пупышев.* // ЯФ. 1999. Т.62. С.1955.
12. *J. Raynal, J. Revaï.* // Nuovo Cimento. 1970. V.A68. P.612.
13. *Сморodinский Я.А., Эфрос В.Д.* // ЯФ. 1973. Т.17. С.210.
14. *P. Lancaster.* Theory of Matrices. New York-London: Academic Press, 1969.
15. *В.В. Воеводин.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
16. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел  
21 февраля 2001 года

Пупышев В.В.

P5-2001-28

Точные решения задачи трех частиц  
с  $S$ -волновыми взаимодействиями центробежного типа

В случае нулевого полного углового момента трех частиц построены и исследованы простейшие точные решения уравнений Шредингера и Фаддеева с  $S$ -волновыми парными взаимодействиями, обратно пропорциональными квадратам расстояний.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2001

Перевод автора

Pupyshev V.V.

P5-2001-28

Exact Solutions of the Three-Body Problem  
with  $S$ -Wave Interactions of Centrifugal Type

The simplest and exact solutions of the Schrödinger and Faddeev equations with  $S$ -wave interactions of centrifugal type are constructed and studied in the case of zero total angular momentum of three particles.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2001

Редактор М.И.Зарубина. Макет Н.А.Киселевой

Подписано в печать 16.03.2001

Формат 60 × 90/16. Офсетная печать. Уч.-изд. листов 2,56

Тираж 325. Заказ 52555. Цена 3 р. 17 к.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
Дубна Московской области