

11-2002-83

На правах рукописи

УДК 681.3.06

51-72:539.172.17

519.615.5

НИКОНОВ
Эдуард Германович

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
СВОЙСТВ РАВНОВЕСНОЙ ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ
И ДИНАМИКИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ СТОЛКНОВЕНИЙ
ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ**

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Тверь 2002

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий
Объединённого института ядерных исследований

Научный консультант

Доктор физико-математических наук, профессор

В. Д. Тонеев

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор

В.П.Цветков

Доктор физико-математических наук, профессор

Л.А.Севастьянов

Доктор физико-математических наук, профессор

В.К.Лукьянов

Ведущая организация:

Институт математического моделирования РАН, г. Москва

Защита диссертации состоится “_____” _____ 2002 г. в _____
на заседании диссертационного совета Д 212.263.04 в Тверском госу-
дарственном университете.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке
Тверского государственного университета.

Автореферат разослан “_____” _____ 2002 г.

Учёный секретарь совета
доктор технических наук, профессор



В.Н.Михно

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Одним из важнейших направлений в теоретической ядерной физике является исследование ядерной материи на основе статистических моделей, описывающих равновесное сильно нагретое и сжатое ядерное вещество, образующееся в столкновениях тяжелых ионов. Так как анализ моделей на основе точных решений соответствующих уравнений возможен лишь в простейших случаях, возникает необходимость в разработке алгоритмов и создании специализированных комплексов программ для численного моделирования свойств вещества в условиях релятивистских ядерных столкновений.

Статистические модели сильно нагретой и сжатой материи используются в рамках гидродинамических моделей столкновений ядер, что позволяет исследовать коллективные движения ядерного вещества, связанные с разогревом и сжатием ядерных жидкостей, торможением взаимопроникающих потоков нуклонов, расширением сильно нагретой и сжатой материи и т.п., в диапазоне энергий столкновения $1 \div 200$ ГэВ/нуклон. Данные модели могут быть использованы для теоретического предсказания таких эффектов, как образование кварк-глюонной плазмы, что является особенно актуальным в связи с запуском экспериментальной установки "Ускоритель релятивистских тяжелых ионов на встречных пучках" (RHIC) в Брукхейвенской национальной лаборатории (BNL), США, и планирующимся запуском ускорителя "Большого адронного ускорителя на встречных пучках" (LHC) в Европейской организации ядерных исследований (CERN), Женева, Швейцария.

Очевидно, что исследование сложных математических моделей соответствующих физических явлений и процессов предполагает интенсивное использование сложных программных комплексов, которые предоставляют возможность исследователю активно вмешиваться в процесс вычислений, оперативно изменять параметры вычислительных процессов, получать графическое представление результатов моделирования на всех этапах вычислительного эксперимента.

Изложенные обстоятельства обуславливают актуальность проблемы, относящейся к области компьютерного моделирования сложных физических процессов и состоящей в совершенствовании методов математического моделирования, разработке алгоритмов и создании на

их основе программных комплексов с указанными выше свойствами.

Целью диссертационной работы является решение фундаментальной научной проблемы - создание интерактивного комплекса программ для численного моделирования свойств сильно нагретой и сжатой ядерной материи, образующейся в условиях столкновений тяжелых атомных ядер при высоких энергиях, в рамках статистической модели с фазовым переходом деконфайнмента, с использованием гидродинамического подхода; обеспечение эффективного управления процессом моделирования на основе включения в программный комплекс системы трехмерной визуализации и оцифровки графической информации, которые позволяют, в конечном итоге, проводить полно масштабный вычислительный эксперимент. Достижение цели диссертационной работы осуществляется решением следующих задач.

- Создание математической модели, описывающей свойства сильно нагретой и сжатой материи, образующейся в столкновениях атомных ядер при высоких энергиях.
- Разработка алгоритмов и создание программ для численного решения уравнений статистической модели смешанной фазы, описывающей свойства ядерной материи, образующейся в релятивистских столкновениях тяжелых атомных ядер.
- Разработка новых и развитие существующих алгоритмов и программ для численного решения уравнений математических моделей ядерных столкновений, основанных на гидродинамическом подходе.
- Разработка и создание комплекса программ для интерактивного математического моделирования столкновений тяжелых атомных ядер при высоких энергиях.
- Создание программ для расчета наблюдаемых характеристик ядро – ядерных столкновений, позволяющих производить сравнительный анализ результатов моделирования с экспериментальными данными.
- Проведение вычислительных экспериментов для сравнения созданной математической модели с другими моделями ядерного

вещества. Сравнение с расчетами по другим методикам и имеющимися экспериментальными данными.

- Проведение численных исследований для теоретического предсказания новых свойств ядерного вещества в релятивистских столкновениях тяжелых ионов.

Научная новизна и значимость

- Впервые предложена математическая модель сильно нагретого и сжатого ядерного вещества, образующегося в релятивистских столкновениях тяжелых ионов, основанная на статистической модели с фазовым переходом деконфайнмента, разработаны алгоритмы для численного решения соответствующих уравнений итерационным методом Ньютона.
- Впервые сформулирована математическая модель для описания ультрарелятивистских ядерных столкновений, основанная на одножидкостной модели Бьеркена, с учетом различных моделей ядерного вещества.
- Впервые для численного моделирования использовалась разработанная автором математическая модель ультрарелятивистских ядерных столкновений с использованием математической модели сильно нагретого и сжатого ядерного вещества. Получены характеристики различных ядро-ядерных столкновений и осуществлено их сравнение с имеющимися экспериментальными данными. Предсказаны физические условия для образования кварк-глюонной плазмы в релятивистских столкновениях тяжелых ионов.
- Создан интерактивный комплекс программ для проведения вычислительных экспериментов по исследованию релятивистских столкновений тяжелых ионов в широком диапазоне энергий столкновения, с использованием различных моделей ядерного вещества.

Практическая ценность

С помощью разработанного в диссертации комплекса программ получен ряд результатов, имеющих самостоятельный физический интерес.

Данный комплекс программ используется для проведения вычислительных экспериментов в области физики тяжелых ионов в диапазоне энергий столкновения $1 \div 200$ ГэВ/нуклон, для проверки теоретических моделей ядерного вещества, образующегося в релятивистских столкновениях тяжелых ионов, анализа экспериментальных данных и планирования будущих физических экспериментов.

Апробация результатов работы

Различные составные части диссертационной работы докладывались на 12 международных конференциях "III Symposium on charge particles accelerators. JINR, Dubna, October 13-15, 1992", "International Conference on Programming and Mathematical Methods for Solving Physical Problems, Dubna Russia, June 14-19, 1993", "Second International Conference of Difference Equations and Applications. Advances in Difference Equations. Veszprem, Hungary, August 7-11, 1995", "12th International Workshop on High-Energy Physics (HADRON 96), Novy Svet, Ukraine, 9-16 June 1996", "9th International Conference 'Computational Modeling and Computing in Physics' September 16-21, 1996, Dubna, Russia", "International Conference on Nuclear Data for Science and Technology, Trieste, Italy, May 19-24, 1997", "International Workshop 'Hirschegg'97: QCD Phase Transitions", GSI, Darmstadt, 1997", "Quark Matter'97: 48th Yamada Conference & 13th International Conference On Ultra-Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions", Tsukuba, Japan, December, 1997, "First International Conference on Modern Trends In Computational Physics, Dubna, June 15-20, 1998", "Les Houches 1998, Nuclear matter in different phases and transitions", "Second International Conference on Modern Trends In Computational Physics, Dubna, July 2000", теоретических семинарах Центра по исследованию тяжелых ионов (GSI, Дармштадт, Германия), научных семинарах Лаборатории информационных технологий и Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Публикации

Основное содержание диссертации отражено в 25 публикациях [1-25] в виде статей в журналах ЖВМиМФ, Мат. моделирование, Ядерная Физика, Кр.Сообщ. ОИЯИ, Heavy Ion Phys., Nucl. Phys., J.Phys., докладов в трудах международных конференций, препринтов и сообщений ОИЯИ и Центра исследований тяжелых ионов (GSI), Дармштадт, Германия.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и двух приложений. Объём диссертации — 221 страница. Список литературы включает 197 наименований.

Личный вклад автора

Автор диссертации, работая в коллективе соавторов, объединяющем сотрудников Лаборатории информационных технологий и Лаборатории теоретической физики ОИЯИ, самостоятельно разработал все алгоритмы и программы, представленные в диссертации, кроме программы для исследования столкновений тяжелых ионов, основанной на двухжидкостном гидродинамическом подходе [31,32], которую существенно модифицировал с учетом различных моделей ядерного вещества. Он внес определяющий вклад в разработку представленных математических моделей и численное решение конкретных физических задач. Автор принимал непосредственное участие в анализе физических результатов.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность работы, сформулирована её основная цель. Описаны задачи, решение которых приводит к достижению основной цели диссертации. Приводится краткий обзор истории развития и современного состояния в области математического моделирования свойств вещества, образующегося в столкновениях тяжелых атомных ядер при высоких энергиях. Кратко изложено содержание разделов диссертации.

Глава 1 "Математические модели ядерного вещества" посвящена различным моделям ядерного вещества, образующегося в релятивистских столкновениях тяжелых ионов. Традиционно для описания свойств равновесной сильно нагретой и сжатой материи, образуя-

щейся в релятивистских столкновениях тяжелых ионов, используется двухфазная модель, физическая формулировка которой заключается в следующем. В зависимости от значения величин T и n_B равновесная ядерная материя может находиться в одной из трех областей фазовой плоскости (T, n_B) . Здесь **H** - релятивистский адронный газ, **QGP** -

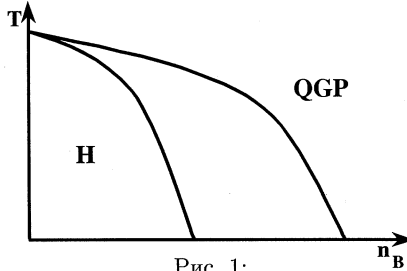


Рис. 1:

фаза кварк-глюонной плазмы. Между границами фаз находится, так называемая смешанная фаза, при помощи которой осуществляется согласование термодинамических величин на границах.

Деконфайнмент реализуется как фазовый переход первого рода при соблюдении условий равновесия Гиббса, которые формулируются следующим образом. Условие теплового равновесия означает равенство температур в двух фазах $T^Q = T^H$, условие механического равновесия - равенство давлений $p^Q = p^H$, условия химического равновесия - равенство химических потенциалов $\mu_B^Q = \mu_B^H$, $\mu_S^Q = \mu_S^H$.

Исходя из физической модели можно получить **математическую формулировку уравнений двухфазной модели (§ 1)**, которая заключается в следующем. В **адронной фазе** для плотности числа частиц сорта j справедливо следующее выражение

$$\begin{aligned}
 n_j(T, \mu_j) &\equiv n_j(T, \mu_B, \mu_S) = v n_j^{id}(T, \mu_B, \mu_S) \\
 &= \frac{v g_j}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 f_j(k, T, \mu_B, \mu_S), \quad (1)
 \end{aligned}$$

где

$$f_j(k, T, \mu_B, \mu_S) = \left[\exp \left(\frac{\sqrt{k^2 + m_j^2} - b_j \mu_B - s_j \mu_S}{T} \right) \pm 1 \right]^{-1} \quad (2)$$

функция распределения импульса, а g_j – число спин–изоспиновых степеней свободы. Для фермионов – (+), для бозонов – (–). Здесь

$$\mu_j = b_j \mu_B + s_j \mu_S \quad (3)$$

- химический потенциал,

$$v \equiv v(T, \mu_B, \mu_S) = 1/[1 + \sum_j v_{0j} n_j^{id}(T, \mu_B, \mu_S)] \quad (4)$$

- исключенный объем.

$$n_B^H = \sum_{j \in h} b_j n_j(T, \mu_B, \mu_S), \quad (5)$$

$$n_S^H = \sum_{j \in h} s_j n_j(T, \mu_B, \mu_S) \quad (6)$$

- барионный заряд и странность в адронной фазе.

$$\begin{aligned} \varepsilon_j(T, \mu_B, \mu_S) &= v \varepsilon_j^{id}(T, \mu_B, \mu_S) \\ &= \frac{v g_j}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \sqrt{k^2 + m_j^2} f_j(k, T, \mu_B, \mu_S), \end{aligned} \quad (7)$$

- плотность энергии.

$$p^H(T, \mu_B, \mu_S) = \sum_{j \in h} p_j(T, \mu_B, \mu_S), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} p_j(T, \mu_B, \mu_S) &= v p_j^{id}(T, \mu_B, \mu_S) \\ &= \frac{v g_j}{6\pi^2} \int_0^\infty dk \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_j^2}} f_j(k, T, \mu_B, \mu_S). \end{aligned} \quad (9)$$

- давление в не самосогласованном случае,

$$p^H(T, \mu_B, \mu_S) = \sum_{j \in h} p_j^{id}(T, \tilde{\mu}_j) \quad (10)$$

$$\tilde{\mu}_j = b_j \mu_B + s_j \mu_S - v_{0j} p^H(T, \mu_B, \mu_S). \quad (11)$$

- давление и химический потенциал в самосогласованном случае.

QGP фаза описывается как газ невзаимодействующих точно подобных кварков, антикварков и глюонов.

$$p^Q(T, \mu_B, \mu_S) = p_g(T) + \sum_{j \in q} p_j^{id}(T, \mu_B, \mu_S) - B, \quad (12)$$

- кварковое давление.

$$p_g(T) = \frac{g_g \pi^2}{90} T^4 \quad (g_g = 16) \quad (13)$$

- глюонное давление, B - мешковая константа, которая обеспечивает конфайнмент кварков внутри мешка.

$$\varepsilon^Q(T, \mu_B, \mu_S) = \varepsilon_g(T) + \sum_{j \in q} \varepsilon_j^{id}(T, \mu_B, \mu_S) + B, \quad (14)$$

- плотность энергии плазмы.

$$\varepsilon_g(T) = 3 p_g(T) = \frac{g_g \pi^2}{30} T^4 \quad (15)$$

- вклад глюонов.

Здесь

$$\varepsilon_j(T, \mu_B, \mu_S) = \varepsilon_j^{id}(T, \mu_B, \mu_S)$$

$$n_B^Q = \sum_{j \in q} b_j n_j^{id}(T, \mu_B, \mu_S), \quad (16)$$

$$n_S^Q = \sum_{j \in q} s_j n_j^{id}(T, \mu_B, \mu_S). \quad (17)$$

- барионный заряд и странность в QGP фазе.

В **смешанной фазе** давление, плотности барионного и странного зарядов, удовлетворяют уравнениям, являющимися следствиями условий равновесия Гиббса.

$$p^H(T, \mu_B, \mu_S) = p^Q(T, \mu_B, \mu_S), \quad (18)$$

$$n_B = \alpha n_B^Q(T, \mu_B, \mu_S) + (1 - \alpha) n_B^H(T, \mu_B, \mu_S), \quad (19)$$

$$0 = \alpha n_S^Q(T, \mu_B, \mu_S) + (1 - \alpha) n_S^H(T, \mu_B, \mu_S), \quad (20)$$

где $\alpha = V_q/V$.

$\alpha = 0$ - граница адронной фазы.

$\alpha = 1$ - граница QGP фазы.

В § 2 приводится физическое обоснование и математическая формулировка модели смешанной фазы без учета странных частиц [4, 6, 13, 20, 22], а в § 3 – с учетом частиц с ненулевым значением странности. Данная модель реалистично описывает фазовый переход ядерной материи из адронного состояния в фазу несвязанных кварков и глюонов (кварк-глюонную плазму) и хорошо согласуется с предсказаниями квантовой хромодинамики.

В этой модели роль "обобщенной смешанной фазы", играет смешанное состояние ядерной материи, в котором фаза несвязанных кварков и глюонов сосуществует с фазой адронов без какого-либо пространственного расслоения. При этом среднее расстояние между адронами и кварками (глюонами) может быть величиной того же порядка, что и среднее расстояние между адронами. Поэтому здесь, учет взаимодействия адронов с несвязанными кварками (глюонами) играет определяющую роль.

Физическая формулировка модели смешанной фазы (СФ) основана на эффективном гамильтониане, используемом для нахождения свободной энергии смешанной фазы [26,27,4,6].

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_s \int \psi_g^+(x, s) \left(\sqrt{-\nabla^2} + U_g(\{\rho\}) \right) \psi_g(x, s) dx + \\
 & + \sum_q \sum_s \int \psi_q^+(x, s) \left(\sqrt{-\nabla^2 + m_q^2} + U_q(\{\rho\}) \right) \psi_q(x, s) dx + \\
 & + \sum_{nj} \sum_s \int \psi_{nj}^+(x, s) \left(\sqrt{-\nabla^2 + m_{nj}^2} + U_{nj}(\{\rho\}) \right) \psi_{nj}(x, s) dx - \\
 & - C(\{\rho\}) V,
 \end{aligned} \tag{21}$$

где $\psi_\alpha(x, s)$ обозначает полевой оператор частиц α -сорта: $\alpha = g$ соответствует несвязанным глюонам; $\alpha = q$ отвечает несвязанным кваркам q -типа ($q = u, \bar{u}, d, \bar{d}, \dots$); $\alpha = nj$ относится к n -кварковым (глюонным) адронам j -сорта. Индекс s соответствует квантовым степеням свободы (спин, изоспин, цвет). Масса квази-частиц α -вида обозначается как m_α , а $U_\alpha(\{\rho\})$ – это среднее поле,

действующее со стороны системы на квазичастицы α -сорта. Под $\{\rho\}$ подразумевается совокупность плотностей ρ_α всех квазичастиц. Величина $C(\{\rho\})$ зависит только от совокупной плотности квазичастиц, а V — объем системы.

При конструировании эффективного гамильтониана необходимо учитывать так называемые условия термодинамической самосогласованности, которые имеют следующий вид.

$$\left\langle \frac{\partial H}{\partial T} \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial H}{\partial \rho_\alpha} \right\rangle = 0 \quad (\forall \alpha), \quad (22)$$

где $\langle A \rangle$ обозначает среднее оператора A по статистическому ансамблю. Эти соотношения использовались для нахождения конкретного вида средних полей.

При построении эффективного гамильтониана смешанной фазы учитывались следующие положения: наличие конфайнмента цветных зарядов и многообразие сценариев деконфайнмента. Первое приводит к тому, что среднее поле, действующее на цветные заряды в смешанной фазе, оказывается обратно пропорциональным некоторой степени плотности кварков и глюонов. Второе свидетельствует в пользу важной роли взаимодействия адронов с несвязанными кварками и глюонами в смешанной фазе. Разумным вариантом учета этого взаимодействия является использование в U_q и U_g полной плотности кварков и глюонов в смешанной фазе — как связанных в адронах, так и свободных.

$$U_g = U_q = \frac{A}{\rho^\gamma}, \quad (23)$$

Среднее поле, действующее со стороны смешанной фазы на n_j -адрон удобно представить в следующем виде:

$$U_{nj} = U_{nj}^{(h)} + U_{nj}^{(pl)}. \quad (24)$$

Здесь $U_{nj}^{(h)}$ — среднее поле адронной компоненты, а $U_{nj}^{(pl)}$ — это добавка, которая обусловлена появлением в системе несвязанных кварков и глюонов. Используя условия термодинамической самосогласованности (22), можно получить следующее соотношение для $U_{nj}^{(pl)}$.

$$U_{nj}^{(pl)} = \frac{n A}{\rho^\gamma} (1 - (1 - w_{pl})^{-\gamma}), \quad (25)$$

где $w_{pl} = \rho_{pl}/\rho$ – концентрация кварк–глюонной плазмы в смешанной фазе.

Величина $U_{nj}^{(h)}$ имеет следующий вид.

$$U_{nj}^{(h)} = n (\tilde{\varphi}_1(\rho - \rho_{pl}) + \tilde{\varphi}_2(\rho - \rho_{pl})), \quad (26)$$

где $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ удовлетворяют соотношениям

$$c_1 \tilde{\varphi}_1 = \rho - \rho_{pl}, \quad -c_2 \tilde{\varphi}_2 - c_3 \tilde{\varphi}_2^3 = \rho - \rho_{pl}, \quad (27)$$

а $\rho - \rho_{pl} = \sum_{nj} n_j \rho_{nj}$. Параметры c_1, c_2, c_3 в(27) определяются свойствами основного состояния ядерной материи ($T = 0$ и $n_B = n_0 \approx 0.17 \text{ фм}^{-3} = 1.28 \times 10^6 \text{ МэВ}^3$): давление равно нулю, энергия связи составляет -16 МэВ и сжимаемость 210 МэВ . Перечисленные условия выполняются, если $c_1 = 5.48 \times 10^{-6} \text{ МэВ}^{-2}$, $c_2 = 5.87 \times 10^4 \text{ МэВ}^2$, $c_3 = 26.9$.

Соотношения (23), (24), (25) и (26) задают конкретные выражения для всех средних полей, действующих на конstituенты смешанной фазы, и определяют взятую с обратным знаком объемную плотность энергии квазичастичного вакуума C . Последняя величина находится с помощью системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_g \frac{\partial U_g}{\partial \rho_g} + \sum_q \rho_q \frac{\partial U_q}{\partial \rho_g} + \sum_{nj} \rho_{nj} \frac{\partial U_{nj}}{\partial \rho_g} &= \frac{\partial C}{\partial \rho_g}; \\ \rho_g \frac{\partial U_g}{\partial \rho_q} + \sum_{q'} \rho_{q'} \frac{\partial U_{q'}}{\partial \rho_q} + \sum_{nj} \rho_{nj} \frac{\partial U_{nj}}{\partial \rho_q} &= \frac{\partial C}{\partial \rho_q}; \\ \rho_g \frac{\partial U_g}{\partial \rho_{nj}} + \sum_q \rho_q \frac{\partial U_q}{\partial \rho_{nj}} + \sum_{mi} \rho_{mi} \frac{\partial U_{mi}}{\partial \rho_{nj}} &= \frac{\partial C}{\partial \rho_{nj}}. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя выражения для средних полей в (28), получим для величины C следующее выражение:

$$\begin{aligned} C &= -\frac{\gamma}{1-\gamma} A \rho^{1-\gamma} (1 - (1 - w_{pl})^{1-\gamma}) + \\ &+ (\rho - \rho_{pl})(\tilde{\varphi}_1(\rho - \rho_{pl}) + \tilde{\varphi}_2(\rho - \rho_{pl})) - \\ &\int_0^{\rho - \rho_{pl}} (\tilde{\varphi}_1(t) + \tilde{\varphi}_2(t)) dt. \end{aligned} \quad (29)$$

Фитирование решеточных данных по квантово-хромодинамической термодинамике, проведенное для $SU(2)$ и $SU(3)$ бескварковых систем, позволило получить следующие значения для параметров модели смешанной фазы γ и A .

$$\gamma = 0.62, \quad A^{1/(3\gamma+1)} = 250 \div 275 \text{ МэВ}. \quad (30)$$

Математическая формулировка модели сводится к системе нелинейных алгебраических уравнений относительно неизвестных ρ , ρ_{pl} , μ_B , μ_S для каждой пары фиксированных значений барионной плотности и температуры (n_B, T) .

$$\rho(T; n_B) = \rho_{pl}(T; n_B) + \sum_{nj} n \rho_{nj}(T; \rho; \rho_{pl}; \mu_B; \mu_S), \quad (31)$$

$$\rho_{pl}(T; n_B) = \rho_g(T) + \sum_a \rho_a(T; \rho; \mu_B; \mu_S), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} n_B = & \sum_a b_a \rho_a(T; \rho; \mu_B; \mu_S) + b_g \rho_g(T) \\ & + \sum_{nj} b_{nj} \rho_{nj}(T; \rho; \rho_{pl}; \mu_B; \mu_S). \end{aligned} \quad (33)$$

$$\sum_a s_a \rho_a(T; \rho; \mu_B; \mu_S) + \sum_{nj} s_{nj} \rho_{nj}(T; \rho; \mu_B; \mu_S) = 0. \quad (34)$$

$$\rho_\alpha = \frac{\xi_\alpha}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\exp \left[\frac{\sqrt{k^2 + m_\alpha^2} + U_\alpha(\rho, \rho_{pl}) - b_\alpha \mu_B + s_\alpha \mu_S}{T} \right] - \nu_\alpha}, \quad (35)$$

$$\nu_\alpha^{(B)} = 1, \nu_\alpha^{(F)} = -1, (\alpha = nj, q, g), U_g = U_q = \frac{A}{\rho^\gamma}$$

$$U_{nj} = n \left\{ x \cdot (\rho - \rho_{pl}) - f(\rho - \rho_{pl}) + \frac{A}{\rho^\gamma} - \frac{A}{(\rho - \rho_{pl})^\gamma} \right\}$$

$$f(t) \equiv \sqrt[3]{\frac{t}{2z} + \sqrt{\frac{t^2}{4z^2} + \frac{y^3}{27z^3}}} + \sqrt[3]{\frac{t}{2z} - \sqrt{\frac{t^2}{4z^2} + \frac{y^3}{27z^3}}}, \quad (36)$$

Параметры x , y и z для функции $f(t)$ определяются свойствами основного состояния ядерной материи при $T = 0$ и $n_B = n_0 \approx 0.17 \Phi_M^3 = 1.28 \times 10^6 \text{ МэВ}^3$: давление P равно нулю, энергия связи на нуклон $\epsilon/n_0 - M_N = -16 \text{ МэВ}$, сжимаемость $K = 9\partial P/\partial n_B = 210 \text{ МэВ}$.

$$p_{31}(n_0) \equiv -\frac{\xi_{31}}{2\pi^2} \int_0^{k_{31}} k^2 \left\{ \sqrt{k^2 + M_{31}^2} - \sqrt{k^2 + M_{31}^2} \right\} dk + \frac{9}{2} x n_0^2 - 3n_0 f(3n_0) + \int_0^{3n_0} f(t) dt = 0. \quad (37)$$

$$\frac{\epsilon_{31}}{n_0} - M_{31} \equiv \frac{\xi_{31}}{2\pi^2 n_0} \int_0^{k_{31}} k^2 \sqrt{k^2 + M_{31}^2} dk + \frac{9}{2} x n_0 - \frac{1}{n_0} \int_0^{3n_0} f(t) dt - M_{31} = -16. \quad (38)$$

$$K \equiv \frac{9\xi_{31}}{\pi^2 n_0} \int_0^{k_{31}} k^2 \sqrt{k^2 + M_{31}^2} dk - \left(\frac{\sqrt{3}\xi_{31}}{2\pi^2 n_0} \right)^{2/3} \cdot k_{31}^2 \sqrt{k_{31}^2 + M_{31}^2} \cdot \frac{5 + 6(M_{31}/k_{31})^2}{1 + (M_{31}/k_{31})^2} - \frac{18}{n_0} \int_0^{3n_0} f(t) dt + 54f(3n_0) - 81n_0 f'(3n_0) = 210. \quad (39)$$

$\xi_{31} = 4$, $M_{31} = 938$, $n_0 = 1.28 \cdot 10^6$, $k_{31} \equiv (6\pi^2 n_0 / \xi_{31})^{1/3}$.

Суммирование в формулах (31)–(35) проводилось по барионам n , Δ , Λ , Σ^0 , Σ^+ , Σ^- , Ξ^0 , Ξ^+ , Ξ^- , Ω , $N1440$, $N1520$, $\Lambda(1405)$, $\Lambda(1520)$, $\Sigma(1385)$, $\Xi(1530)$, мезонам π , η , ρ , ω , K^0 , K^+ , K^- , K^* , φ , f_2 , f_2' , η' , f_0 , a_0 , K_1 , свободным кваркам u , d , s , соответствующим античастицам и глюонам [33]. Всего 55 частиц. Для глюонов использовались следующие характеристики: $\xi_g = 16$, $m_g = 0$, $\nu_g = 1$, $b_g = 0$, $s_g = 0$.

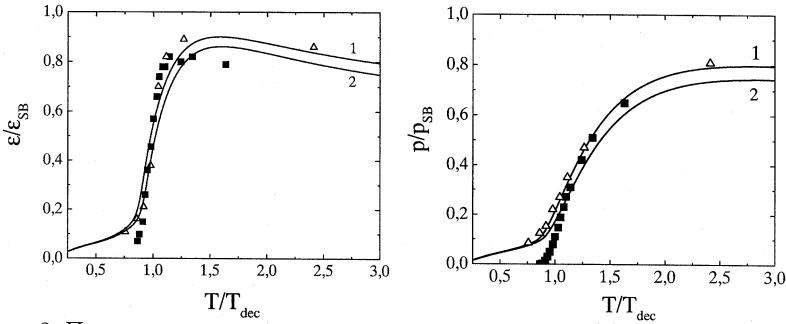


Рис. 2: Приведенная плотность энергии и давление $SU(3)$ системы с двумя легкими кварками при $n_B = 0$.

Сравнительный анализ различных моделей ядерного вещества показал несомненные преимущества разработанной математической модели, основанной на модели смешанной фазы, по сравнению с математическими моделями, основанными на двухфазных моделях ядерного вещества. Кроме того, как видно из рисунка 2, модель смешанной фазы с достаточной степенью точности повторяет качественные закономерности зависимости давления и плотности энергии от температуры, полученные при помощи квантово-хромодинамических расчетов на решетках, особенно в области фазового перехода $[0.8, 1.5] T/T_{dec}$.

Здесь Δ – результаты квантово-хромодинамических расчетов на решетках из работы [28], а \blacksquare – из работы [29].

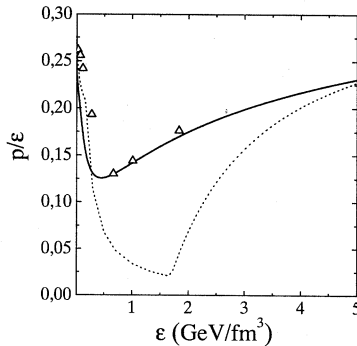


Рис. 3: p/ϵ -представление уравнения состояния $SU(3)$ системы с двумя легкими кварками при $n_B = 0$.

Далее рассмотрен эффект "точки наибольшей мягкости" в модели смешанной фазы. На рис. 3 показана зависимость p/ϵ от ϵ , полученная в результате расчетов с использованием уравнения состояния смешанной фазы и "экспериментальные" точки из квантово-хромодинамических расчетов на решетке. И решеточные данные в схе-

ме Вильсона, и модель смешанной фазы предсказывают наличие минимума у рассматриваемой функции в области деконфайнмента, давая для "точки наибольшей мягкости" оценку $\varepsilon_{SP} \approx 0.5 \text{ ГэВ/фм}^3$. На рис. 3 представлены также данные, полученные в двухфазной модели при $B = 235^4 \text{ МэВ}^4$. Эта величина вакуумного давления приводит к разумному значению $T_{dec} \approx 160 \text{ МэВ}$, но дает сильно завышенный результат $\varepsilon_{SP} \approx 1.5 \text{ ГэВ/фм}^3$, который трудно примирить с решеточным предсказанием, что позволяет сделать вывод о преимуществе модели смешанной фазы по сравнению с двухфазной моделью для описания характеристик ядерной материи, образующейся в релятивистских столкновениях тяжелых ионов.

§ 4 посвящен численным методам и алгоритмам решения уравнений двухфазных моделей и модели смешанной фазы [1,2,10,18,19,21]. Уравнения модели смешанной фазы могут быть представлены в виде следующего функционального уравнения

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (40)$$

$$\mathbf{F} = (\{f_i(\mathbf{x})\}_{i=1}^4)^T, \quad \mathbf{x} = (\{x_i\}_{i=1}^4)^T \equiv \{\rho, \rho_{pl}, \mu_B, \mu_S\},$$

которое решается методом Ньютона

$$\mathbf{x}^{\mathbf{n}+1} = \mathbf{x}^{\mathbf{n}} - \mathbf{z}^{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{\mathbf{n}})\mathbf{z}^{\mathbf{n}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{\mathbf{n}}), \quad \mathbf{F}'(\mathbf{x}^{\mathbf{n}}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^{\mathbf{n}})}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^4.$$

$$\text{if } \|\mathbf{F}(\mathbf{x}^{\mathbf{n}+1})\|_{\infty} \leq \varepsilon^{\text{it}} \wedge \|\mathbf{x}^{\mathbf{n}+1} - \mathbf{x}^{\mathbf{n}}\|_{\infty} \leq \varepsilon^{\text{it}} \Rightarrow \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{\mathbf{n}+1}$$

Интегралы вида

$$\rho_{\alpha} = \frac{\xi_{\alpha}}{2\pi^2} \int_0^{\infty} \frac{k^2 dk}{\exp \left[\frac{\sqrt{k^2 + m_{\alpha}^2} + U_{\alpha} - \mu_{\alpha}}{T} \right] - \nu_{\alpha}} \equiv \frac{\xi_{\alpha}}{2\pi^2} \int_0^{\infty} f_{\alpha}(k) dk$$

вычисляются приближенно по формулам

$$I_{\alpha} \equiv \int_0^{\infty} f_{\alpha}(k) dk = I_{\alpha}^1 + I_{\alpha}^2$$

$$I_\alpha^1 = \int_0^{\mathbf{R}_\alpha} f_\alpha(k) dk \approx \frac{\mathbf{R}_\alpha}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i f_\alpha(k_i \frac{\mathbf{R}_\alpha}{2} + \frac{\mathbf{R}_\alpha}{2}) + E_n,$$

$$E_n = \frac{(n!)^4 (\mathbf{R}_\alpha)^{2n+1}}{(2b+1)[(2n)!]^3} f_\alpha^{(2n)}(k), k \in [0; \mathbf{R}_\alpha]$$

с учетом асимптотики подынтегральной функции на бесконечности

$$I_\alpha^2 = \int_{\mathbf{R}_\alpha}^{\infty} f_\alpha(k) dk \approx \exp(-\frac{\mathbf{R}_\alpha - W_\alpha}{T}) [T(\mathbf{R}_\alpha - W_\alpha)^2 +$$

$$2T(\mathbf{R}_\alpha - W_\alpha)(W_\alpha - T) + T(W_\alpha^2 + 2TW_\alpha + 2T^2)], W_\alpha = U_\alpha + \mu_\alpha]$$

Для численного решения уравнений модели смешанной фазы разработан

Алгоритм вычисления термодинамических величин на основе модели СФ (mixstr)

Input: T^{min}, T^{max} - диапазон температур;

N_T - размерность массива $T[N_T]$;

n_B^{min}, n_B^{max} - диапазон барионных плотностей.

N_B - размерность массива $n_B[N_B]$;

Output: $\rho[N_T, N_B]$ - полная плотность кварков,

$\rho_{pl}[N_T, N_B]$ - плотность несвязанных кварков и глюонов,

$\mu_B[N_T, N_B]$ - барионный химический потенциал,

$\mu_S[N_T, N_B]$ - странный химический потенциал.

Initial data: $\rho^0; \rho_{pl}^0; \mu_B^0; \mu_S^0; \varepsilon_{it}; T[N_T]; n_B[N_B]$

1: Вычисление м. Ньютона параметров $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$

$$\begin{cases} P(n_0) = 0 \\ \frac{\varepsilon_{31}}{n_0} - M_{31} = -16 \\ 9 \left(\frac{\partial P}{\partial n} \right) = 210 \end{cases}$$

2: $\rho^{it} \leftarrow \rho^0; \rho_{pl}^{it} \leftarrow \rho_{pl}^0; \mu_B^{it} \leftarrow \mu_B^0; \mu_S^{it} \leftarrow \mu_S^0$

3: **for** $i_T = 1$ **to** N_T **do**

4: **for** $i_{n_B} = 1$ **to** N_B **do**

5: $T \leftarrow T[i_T]; n_B \leftarrow n_B[i_{n_B}]$

6:

$$\begin{cases} \rho_{pl}^{it} + \sum_{nj} n \rho_{nj} - \rho^{it} & = 0 \\ \rho_g(T) + \sum_a \rho_a - \rho_{pl}^{it} & = 0 \\ \sum_a b_a \rho_a + b_g \rho_g(T) + \sum_{nj} b_{nj} \rho_{nj} - n_B & = 0 \\ \sum_a s_a \rho_a + \sum_{nj} s_{nj} \rho_{nj} & = 0 \end{cases}$$

$$\rho_{nj} \equiv \rho_{nj}(T; \rho^{it}; \rho_{pl}^{it}; \mu_B^{it}; \mu_S^{it})$$

$$\rho_a \equiv \rho_a(T; \rho^{it}; \rho_{pl}^{it}; \mu_B^{it}; \mu_S^{it})$$

7: $\rho[i_T, i_{n_B}] \Leftarrow \rho^{it}; \rho_{pl}[i_T, i_{n_B}] \Leftarrow \rho_{pl}^{it};$
 $\mu_B[i_T, i_{n_B}] \Leftarrow \mu_B^{it}; \mu_S[i_T, i_{n_B}] \Leftarrow \mu_S^{it}$

8: **end for**

9: **end for**

Алгоритм реализован в виде программы на Фортране, содержащей 6224 оператора. Вычисления проводились на Linux-кластере GSI, Дармштадт. Среднее время вычисления величин в одной точке (T, n_B) равно 0.2 секунды.

Соответствующий алгоритм для решения уравнений двухфазной модели имеет вид.

Алгоритм вычисления термодинамических величин на основе двухфазной модели (2PSTRCS)

Input: T^{min}, T^{max} - диапазон температур;

N_T - размерность массива $T[N_T]$;

n_B^{min}, n_B^{max} - диапазон барионных плотностей.

N_B - размерность массива $n_B[N_B]$;

Output: $\rho[N_T, N_B]$ - полная плотность кварков,

$\mu_B[N_T, N_B]$ - барионный химический потенциал,

$\mu_S[N_T, N_B]$ - странный химический потенциал.

Initial data: $\rho^0; \mu_B^0; \mu_S^0; \varepsilon_{it}; T[N_T]; n_B[N_B]$

1: Вычисление м. Ньютона границы QGP-фазы $\mu_B^Q(T), \mu_S^Q(T) : \Rightarrow n_B^Q(T)$

$$\begin{cases} P^H(T, \mu_B^Q, \mu_S^Q) = P^Q(T, \mu_B^Q, \mu_S^Q) \\ n_S^Q(T, \mu_B^Q, \mu_S^Q) = 0 \end{cases}$$

2: Вычисление м. Ньютона границы адронной фазы $\mu_B^H(T)$, $\mu_S^H(T)$:
 $\Rightarrow n_B^H(T)$

$$\begin{cases} P^H(T, \mu_B^H, \mu_S^H) = P^Q(T, \mu_B^H, \mu_S^H) \\ n_S^H(T, \mu_B^H, \mu_S^H) = 0 \end{cases}$$

3: **for** $i_T = 1$ **to** N_T **do**

4: $T \leftarrow T[i_T]$

5: **if** $T \leq T_{cr}$ **then**

6: **for** $i_{n_B} = 1$ **to** N_B **do**

7: $n_B \leftarrow n_B[i_{n_B}]$

8: **if** $n_B < n_B^H[T]$ **then**

9: $\rho^{it} \leftarrow \rho^I(\mu_B^I, \mu_S^I)$, $\mu_B^{it} \leftarrow \mu_B^I$, $\mu_S^{it} \leftarrow \mu_S^I$

$$\begin{cases} n^H(T, \mu_B^I, \mu_S^I) = n_B \\ n_S^H(T, \mu_B^I, \mu_S^I) = 0 \end{cases}$$

10: **else if** $n_B^H[T] \leq n_B \leq n_B^Q[T]$ **then**

11: $\rho^{it} \leftarrow \rho^{II}$, $\mu_B^{it} \leftarrow \mu_B^{II}$, $\mu_S^{it} \leftarrow \mu_S^{II}$

$$\begin{cases} P^H(T, \mu_B^{II}, \mu_S^{II}) = P^Q(T, \mu_B^{II}, \mu_S^{II}) \\ (n_B^Q - n_B)n_S^H + (n_B - n_B^H)n_S^Q = 0 \end{cases}$$

12: **else if** $n_B > n_B^Q[T]$ **then**

13: $\rho^{it} \leftarrow \rho^{III}$, $\mu_B^{it} \leftarrow \mu_B^{III}$, $\mu_S^{it} \leftarrow \mu_S^{III}$

$$\begin{cases} n^Q(T, \mu_B^{III}, \mu_S^{III}) = n_B \\ n_S^Q(T, \mu_B^{III}, \mu_S^{III}) = 0 \end{cases}$$

14: **end if**

15: $\rho[i_T, i_{n_B}] \leftarrow \rho^{it}$;

$\mu_B[i_T, i_{n_B}] \leftarrow \mu_B^{it}$;

$\mu_S[i_T, i_{n_B}] \leftarrow \mu_S^{it}$.

16: **end for**

17: **else if** $T > T_{cr}$ **then**

18: **for** $i_{n_B} = 1$ **to** N_B **do**

19: $n_B \leftarrow n_B[i_{n_B}]$

20: $\rho^{it} \leftarrow \rho^{III}$, $\mu_B^{it} \leftarrow \mu_B^{III}$, $\mu_S^{it} \leftarrow \mu_S^{III}$

$$\begin{cases} n^Q(T, \mu_B^{III}, \mu_S^{III}) = n_B \\ n_S^Q(T, \mu_B^{III}, \mu_S^{III}) = 0 \end{cases}$$

```

21:       $\rho[i_T, i_{n_B}] \leftarrow \rho^{it};$ 
         $\mu_B[i_T, i_{n_B}] \leftarrow \mu_B^{it};$ 
         $\mu_S[i_T, i_{n_B}] \leftarrow \mu_S^{it}$ 
22:      end for
23:  end if
24: end for

```

Алгоритм реализован в виде программы на Фортране, содержащей 6805 оператора. Вычисления проводились на Linux-кластере GSI, Дармштадт. Среднее время вычисления величин в одной точке (T, n_B) равно 0.003 секунды.

Для демонстрации преимуществ разработанной модели и соответствующих алгоритмов **MIXSTR, MIXEOS, MIXZEROT** по сравнению с другими моделями, такими как модель идеального газа невзаимодействующих частиц (**HDRNOINT**) и группа моделей двухфазного типа **TWOPH, 2PCOMP, 2PHASE, 2PSTR**, были разработаны алгоритмы и созданы программы на фортране, содержащие 24068 операторов.

Глава 2 "Релятивистские гидродинамические модели ядерных столкновений" посвящена моделям столкновений тяжелых ионов основанных на гидродинамическом подходе.

В § 1 представлена математическая формулировка одножидкостной гидродинамической модели столкновения атомных ядер. § 2 посвящен математической модели ядерных столкновений, основанной на модели Бьеркена, описывающей ультрарелятивистские столкновения тяжелых ионов. Одножидкостная гидродинамическая модель ядерных столкновений сводится к следующей системе уравнений.

$$\partial_i J^i = 0, \quad (41)$$

$$\partial_k T^{ik} = 0, \quad i, k = 0, 1, 2, 3. \quad (42)$$

$$\tilde{P}(n, e) = P. \quad (43)$$

$J^i = nu^i$ - 4-вектор барионного тока, n - плотность числа барионов, $u^i = (\gamma, \gamma \vec{v})$ - гидродинамическая (коллективная) 4-скорость ($u_i u^i = 1$), $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v}^2}$, $\vec{v} = \vec{p}/p_0$, $p_0 = \sqrt{(\vec{p})^2 + m^2}$ Тензор энергии - импульса имеет вид

$$T^{ik} = (e + P)u^i u^k - P g^{ik}, \quad (44)$$

Согласно модели Бьеркена [33] система тяжелых ионов после столкновения, начиная с некоторого момента времени t_0 , равномерно расширяется с сохранением энтропии со скоростью $v_z = z/t$, $t = t_0\tau$ в цилиндре длиной $L = 2R/\gamma_{c.m.}$ и радиусом порядка радиуса сталкивающихся ядер ($R = 5$ фм). Тогда общие уравнения одножидкостной гидродинамики сводятся к следующей системе уравнений.

$$\begin{cases} ds/d\tau = -s/\tau \\ dn/d\tau = -n/\tau \\ s = (e + P)/T \\ \tilde{P}(n, e) = P \\ \tilde{e}(n, T) = e \end{cases} \quad (45)$$

Для решения уравнений модели был разработан

Алгоритм моделирования ультрарелятивистских ядерных столкновений в рамках одножидкостной изоэнтропической гидродинамической модели (Hydro)

Input: t_0 - время начала эволюции;

n_B^0 - начальная барионная плотность;

e_0 - начальная плотность энергии;

$e_{lim} = 0.1 GeV/fm^3$ - предельная плотность энергии;

$\tau_0, \Delta\tau$ - относительные начальное время и временной шаг.

Output: $t[*]$ - массив моментов времени,

$T[*]$ - температура,

$\mu_B[*]$ - барионный химический потенциал,

$\mu_S[*]$ - странный химический потенциал,

$e[*]$ - плотность энергии системы,

$p[*]$ - давление.

Initial data:

1: $T_0 \Leftarrow : e(T, n_B^0) = e_0$ (MIXSTR, 2PSTRCS etc.)

2: $\mu_B^0 \Leftarrow \mu_B(T_0, n_B^0),$

$\mu_S^0 \Leftarrow \mu_S(T_0, n_B^0),$

$P_0 \Leftarrow P(T_0, n_B^0),$

$s_0 \Leftarrow s(T_0, n_B^0)$ (MIXSTR, 2PSTRCS etc.)

3: $\tau = \tau_0.$

4: **while** $e[\tau] \geq e_0$ **do**

5: $\tau = \tau + \Delta\tau$

- 6: $n_B[\tau] = n_B^0/\tau$
- 7: $s[\tau] = s_0/\tau$
- 8: $T[\tau] \leftarrow : s(T[\tau], n_B[\tau]) = s(\tau)$ (MIXSTR, 2PSTRCS etc.)
- 9: $\mu_B[\tau] \leftarrow \mu_B(T[\tau], n_B[\tau]),$
 $\mu_S[\tau] \leftarrow \mu_S(T[\tau], n_B[\tau]),$
 $P[\tau] \leftarrow P(T[\tau], n_B[\tau]),$
 $e[\tau] \leftarrow e(T[\tau], n_B[\tau])$ (MIXSTR, 2PSTRCS etc.)

10: end while

Алгоритм реализован в виде программы на Фортране, содержащей 1995 операторов.

При помощи данной программы проведены исследования различных моделей структуры ядерного вещества, образующегося в релятивистских столкновениях тяжелых ионов [5,9,12,14,23]. Результаты сравнения приведены на рис. 4. Одиночные точки обозначают экспериментальные данные.

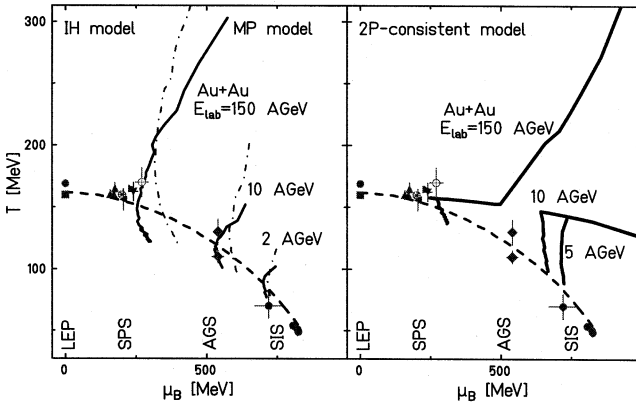


Рис. 4: Значками обозначены параметры химического замораживания полученные в результате анализа наблюдаемых адронных множественностей. Динамические траектории в случае центрального удара в реакции $Au + Au$ при различных энергиях столкновения E_{lab} для различных моделей ядерного вещества обозначены непрерывными и штрих-пунктирными линиями. Гладкая кривая, обозначенная прерывистой линией, рассчитана в рамках модели идеального адронного газа при $\langle E_{had} \rangle / \langle N_{had} \rangle = 1 \text{ GeV}$.

В § 5 рассмотрена двухжидкостная гидродинамическая модель, которая является развитием одножидкостной гидродинамической модели ядерных столкновений, математическая формулировка и числен-

ные методы решения уравнений которой описаны в § 3 и § 4.

В рамках двухжидкостной гидродинамики столкновения тяжелых ионов рассматриваются как взаимодействие двух жидкостей, состоящих из барионов снаряда и мишени. При этом в отличие от обычной гидродинамики не предполагается мгновенного установления локального термодинамического равновесия, а вводится трение между жидкостями которое приводит к их постепенному взаимному торможению и разогреву. Впервые двухжидкостная модель столкновения тяжелых ионов была сформулирована в работах [31, 32] и развита в работе [8]. Математическая формулировка двухжидкостной модели ядерных столкновений сводится к системе уравнений (46)-(55).

$$\partial N_p \partial t + (\nabla \mathbf{v}_p) N_p = 0, \quad (46)$$

$$\partial \mathbf{M}_p \partial t + (\nabla \mathbf{v}_p) \mathbf{M}_p = -\nabla P_p - n_p n_t [D_P(\gamma_p \mathbf{v}_p \varphi_t - \gamma_t \mathbf{v}_t \varphi_p) + D_E(\gamma_p \mathbf{v}_p \varphi_t + \gamma_t \mathbf{v}_t \varphi_p)], \quad (47)$$

$$\partial E_p \partial t + (\nabla \mathbf{v}_p) E_p = -\nabla(\mathbf{v}_p) P_p - n_p n_t [D_P(\gamma_p \varphi_t - \gamma_t \varphi_p) + D_E(\gamma_p \varphi_t + \gamma_t \varphi_p)], \quad (48)$$

$$N = \gamma n, \quad (49)$$

$$E = \gamma^2 (e + P) - P, \quad (50)$$

$$\mathbf{M} = \gamma^2 (e + P) \mathbf{v}, \quad (51)$$

$$P = P(n, e), \quad (52)$$

$$N_{tot} = N_p + N_t, \quad (53)$$

$$\mathbf{M}_{tot} = \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_t, \quad (54)$$

$$E_{tot} = E_p + E_t. \quad (55)$$

В § 6 приводится формулировка численной схемы решения уравнений двухжидкостной гидродинамической модели ядерных столкновений. Данная схема разработана на основе численной схемы решения уравнений одножидкостной модели с учетом взаимодействия между жидкостями.

В § 7 описан программный комплекс для гидродинамического моделирования ядерных столкновений. Данный программный комплекс

предназначен для моделирования ядерных столкновений при релятивистских энергиях ($E_{lab} \approx 1 \div 200$ GeV/нуклон). Блок-схема программы гидродинамического моделирования ядерных столкновений приведена на рисунке 5.

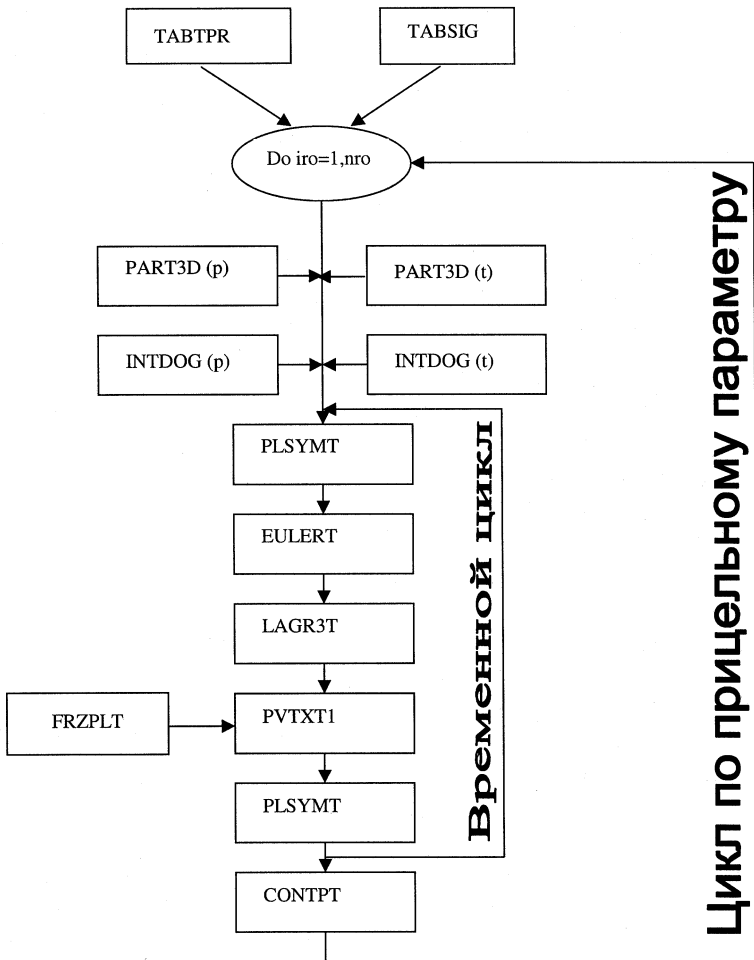


Рис. 5: Блок-схема программы гидродинамического моделирования ядерных столкновений.

Глава 3 посвящена вычислению наблюдаемых и визуализации результатов моделирования.

В § 1 описана программа для оцифровки графической информации

[3,25], которая необходима для получения числовых значений физических величин в том случае, когда данные о характеристиках физических процессов доступны лишь в виде графиков. Приведен обзор существующих систем оцифровки графической информации.

- Golden Software, Inc. (www.goldensoftware.com) - **Didger** (\$ 329);
- OriginLab Corporation (www.originlab.com) - **Origin** \$ 595 + AddOn
- **Graph Digitizer**
- **Grafula**

Анализ существующих систем выявил недостатки, связанные как с дороговизной соответствующих программных продуктов, так и с недостаточной функциональностью, в частности с отсутствием компенсации искажений, вносимых процессом сканирования графика, и невозможностью оцифровывать ошибки экспериментальных данных. В результате был разработан оригинальный алгоритм для оцифровки графической информации, лишенный перечисленных недостатков.

Алгоритм восстановления координат имеет следующий вид.

$$\begin{aligned}
 X' &= (X + Y \times \tan \alpha) \times \cos \alpha \\
 Y' &= (-X \times \tan \alpha + Y) \times \cos \alpha \\
 X'' &= X' - Y' \times \tan \beta \\
 Y'' &= Y' \\
 x &= x_0 + M_x \times X'' \\
 y &= y_0 + M_y \times Y''
 \end{aligned}$$

где масштабное преобразование по осям

$$M_x = \frac{x_N - x_0}{X'_N}, \quad M_y = \frac{y_N - y_0}{Y'_N}$$

или, в случае логарифмической шкалы,

$$M_y^{lg} = \frac{1}{Y'_N} \times \lg \frac{y^N}{y_0}, \quad y = y_0 \times 10^{Y'' \times M_y^{lg}}$$

Алгоритм реализован в виде программы на C++, содержащей 1938 строк, в среде Borland C++ 5.0 под Windows 98/NT. Относительная

точность измерения точки — 0.3% для графика размером 50×50 мм, отсканированном с разрешением 300 dpi. Анализ точности измерений проводился при помощи решетки Готье (стеклянная пластина 230×80 мм с сетью ортогональных прямых линий с шагом 5 мм. Положение узлов решетки в плоскости пластины определено с точностью 5 мкм.). Кроме того, разработана система архивации и поиска оцифрованной информации с использованием системы управления базами данных (СУБД) MySQL 3.22 фирмы TSX, являющейся условно-бесплатной для UNIX-систем. Клиентская и серверная часть системы архивации и поиска написана на языках Perl5, Javascript, и настроена на работу с web-сервером Apache 1.3.x. Данная система тестировалась в операционных системах UNIX (Linux RedHat и FreeBSD).

§ 2 посвящен описанию алгоритмов и комплекса программ для расчета наблюдаемых величин, таких как, быстротные распределения плотностей частиц, прямого и эллиптического потоков и т.п. [8,17] Здесь приводятся результаты гидродинамического моделирования ядерных столкновений, которые позволяют оценить, насколько хорошо могут быть описаны экспериментальные данные в случае использования того или иного уравнения состояния. Как видно из рисунков 6, использование уравнения состояния модели смешанной фазы с достаточной степенью точности воспроизводит экспериментальные быстротные спектры таких величин, как распределение плотности числа частиц, поперечного импульса и т.д. В **Приложении 1** приведены в виде гра-

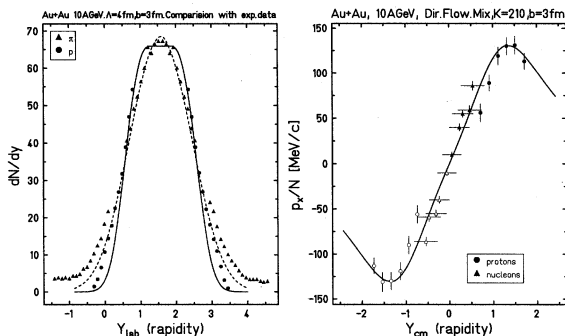


Рис. 6: На рисунках приведено сравнение результатов моделирования с экспериментальными данными для быстротных спектров плотности числа частиц dN/dy и поперечного импульса p_x/N .

фиков результаты расчетов и сравнение наблюдаемых характеристик с экспериментальными данными для различных моделей ядерного ве-

щества.

В § 3 описана программная структура виртуального пульта управления процессом моделирования [15,16,24] на основе программного комплекса для визуализации результатов вычислений. Данный виртуальный пульт позволяет управлять ходом вычислительного эксперимента в программной среде, близкой к аналогичному программному обеспечению, используемому для управления реальным физическим экспериментом [7]. Программа для визуализации написана на Delphi 5.0 под Windows NT/2000, состоит из 1835 строк. Примеры компьютерной графики, демонстрирующие временную эволюцию различных характеристик ядер, таких как, плотность числа частиц, температура, доля кварк-глюонной плазмы (рис. 7), приведены в Приложении 2.

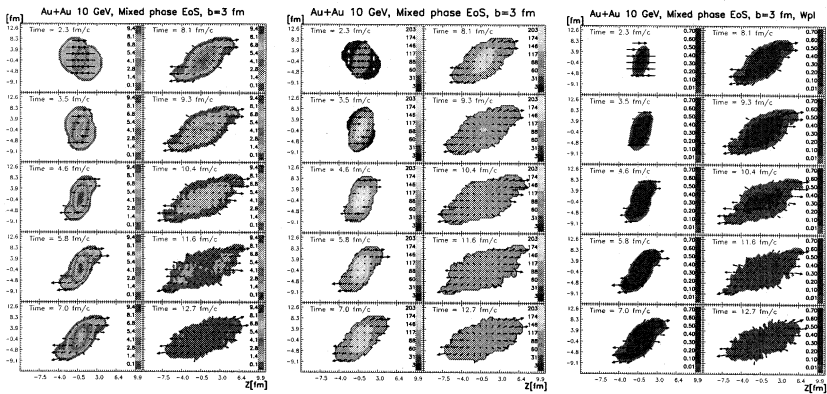


Рис. 7:

На рисунках 7 приведены результаты моделирования эволюции во времени плотности числа частиц, температуры и доли кварк-глюонной плазмы. Значения вышеупомянутых величин изображены в плоскости реакции в случае столкновения двух ядер золота $Au + Au$ с энергией 10 ГэВ на нуклон.

В Заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертации.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. Математическая модель ядерной материи, основанная на статистической модели с фазовым переходом деконфайнмента и формулируемая в виде системы нелинейных алгебраических уравне-

ний со сложными зависимостями неизвестных от параметров. Алгоритм и программная реализация численного решения уравнений модели, основанный на итерационном методе Ньютона. Алгоритм и программная реализация численного решения уравнений традиционной двухфазной модели, обеспечивающий сравнение результатов численных расчетов характеристик ядерной материи, полученных с использованием двух типов математических моделей.

2. Математическая модель ультрарелятивистских ядерных столкновений, основанная на одножидкостной однородной модели Бьеркена и формулируемая в виде системы уравнений, которая наряду с точно интегрируемыми эволюционными дифференциальными уравнениями содержит нелинейные уравнения со сложной алгебраической структурой. Неизвестные данной системы связаны между собой нелинейными интегральными соотношениями. Алгоритм и программная реализация численного решения системы уравнений модели ультрарелятивистских ядерных столкновений. Комплекс программ для численного исследования релятивистских столкновений тяжелых ионов в рамках двухжидкостной гидродинамической модели, который существенно модифицирован с учетом различных моделей структуры ядерного вещества.
3. Алгоритмы и комплекс программ для интерактивного численного моделирования столкновений тяжелых атомных ядер при высоких энергиях с учетом новой модели структуры равновесного сильно нагретого и сжатого ядерного вещества, который наряду с вычислительными модулями для численного моделирования взаимодействия тяжелых атомных ядер в условиях релятивистских столкновений содержит специальные модули для трехмерной визуализации результатов моделирования, оцифровки графической информации и расчета наблюдаемых величин, необходимых для эффективного управления процессом вычислений и сравнения с экспериментальными данными.
4. Результаты сравнительного анализа численных расчетов с использованием модели смешанной фазы, квантово - хромодинамических расчетов на решетках и имеющихся экспериментальных данных, которые показывают, что предложенная математическая

модель, в основном, воспроизводит все особенности термодинамической структуры равновесного сильно нагретого и сжатого ядерного вещества по таким принципиальным параметрам, как тип фазового перехода, точка наименьшей мягкости и т.п.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах:

1. Е.П.Жидков, Э.Г.Никонов, Б.Н.Хоромский. Решение проблемы собственных значений для одного класса гиперсингулярных квазипотенциальных интегральных уравнений. // Мат. моделирование, т.1, №11, 1989, с.77-92.
2. Е.П.Жидков, Э.Г.Никонов, Б.Н.Хоромский. Асимптотические оценки погрешности аппроксимации методом Галеркина для одного класса квазипотенциальных уравнений. // ЖВМ и МФ, т.30, №6, 1990, с.826-837.
3. А.П.Иерусалимов, Е.А.Иерусалимов, Ж.Ж.Мусульманбеков, Э.Г.Никонов, В.С.Рихвицкий. Система оцифровки графиков (СОГ). // Краткие сообщения ОИЯИ, №6[86], с.97-101.
4. Э.Г.Никонов, В.Д.Тонеев, А.А.Шаненко. Модель смешанной фазы и эффект "точки наибольшей мягкости". // Ядерная физика, 1999, т.62, с.1301-1321; Phys.Atom.Nucl.1999, v.62, p.1226-1246.
5. E.G.Nikonov, A.A.Shanenko, V.D.Toneev. Properties of Hot and Dense Nuclear Matter. // Heavy Ion Physics, v.4, 1996, p.333-344.
6. E.G.Nikonov, A.A.Shanenko, V. D.Toneev. A mixed phase model and the 'softest point' effect. // Heavy Ion Physics, 1998. V.8. p.89-122.
7. H.Wiemen ... E.G.Nikonov et al. Recent Developments on the STAR Detector System at RHIC. // Quark Matter'97: Proc.48th Yamada Conf.& 13th Int. Conf. On Ultra-Relativistic Nucleus-Nucleus Collisions, Tsukuba, Japan. Dec.,1997. // Nucl.Phys., 1998, V.A638,p.559-564.
8. Yu.B. Ivanov, E.G. Nikonov, W. Noerenberg, A.A. Shanenko, V.D. Toneev. Directed flow of baryons from high-energy heavy ion collisions. // Heavy Ion Physics, 2002, v.15, 14pp.;e-Print Archive: nucl-th/0011004; GSI-2000-39, GSI Darmstadt, 2000, 10pp.

9. V.D. Toneev, J. J. Cleymans, E.G. Nikonov, K. Redlich, A.A. Shanenko. Dynamical interpretation of chemical freezeout in heavy ion collisions. // J.Phys., G27, p.827-832, 2001; e-Print Archive: nucl-th / 0011029.
10. E.P.Zhidkov, E.G.Nikonov, A.V.Sidorov, N.B.Skachkov, B.N.Khoromskiy. Numerical solution of integral equations, describing mass spectrum of vector mesons. //JINR E11-88-494, Dubna, 1988, 10pp.
11. E.P.Zhidkov, R.S.Egikian, L.A.Merkulov, E.G.Nikonov and I.P.Yudin. Optimization of algorithms for calculations of the magnetic field of ironless magnetic systems. // Transactions of III Symposium on charge particles accelerators. JINR, Dubna, October 13-15 1992, vol.1, JINR. D9-92-463. Dubna, 1992, p.150-159.
12. V.D. Toneev, E.G. Nikonov, A.A. Shanenko. Quark-hadron interactions in nuclear matter: deconfinement signals. // GSI-98-30, May 1998, 14pp.
13. V.D. Toneev, E.G. Nikonov, A.A. Shanenko, Statistical Mixed Phase Model: QCD Deconfinement Transition. In: GSI Scientific Report 1998, GSI 99-1, 1999, p.74.
14. V.D. Toneev, J. Cleymans, E.G. Nikonov, K. Redlich, A.A. Shanenko. Dynamical interpretation of chemical freezeout parameters. // GSI-99-15, April 1999, 14pp.; e-Print Archive: nucl-th/9904048.
15. М.Грушецки, А.Я.Манафов, Э.Г.Никонов. Дружественный интерфейс пользователя для документирования схем и управления параметрами в сложных физических экспериментах. // ОИЯИ Р13-2000-173, Дубна, 2000, 35с.
16. М.А.Назаренко, Э.Г.Никонов, А.В.Старцев. Использование Objectivity/DB для создания объектно-ориентированной базы данных по субмодулям TILE-калориметра проекта ATLAS. // ОИЯИ Р10-2000-315, Дубна, 2000, 12с.
17. Yu.B. Ivanov, E.G. Nikonov, W. Nörenberg, A.A. Shanenko and V.D. Toneev. Directed Flow of Baryons in Heavy-Ion Collisions. In: GSI Scientific Report 2000, GSI 01-1, 2001, p.74.

18. E.P.Zhidkov, T.M.Makarenko, E.G.Nikonov, N.B.Skachkov, B.N.Khoromskiy. Numerical methods for solving relativistic equations describing bound states of a double-particle system. // Programming and mathematical Technique in Physics. WorldScientific publishing Co.Pte. Ltd. 1994, p.210-215.
19. E.G.Nikonov. Fast algorithm for matrix-vector multiplication of discrete biharmonic Poincare-Steklov operator. // Proceedings of Second International Conference of Difference Equations and Applications. Advances in Difference Equations. Veszprem, Hungary, August 7-11, 1995, p.459-467.
20. E.G. Nikonov, A.A. Shanenko, V.D. Toneev. Mixed phase thermodynamics near the point of QCD phase transition. // "Novy Svet 1996, Hadrons-96" p.292-304. Transactions of 12th International Workshop on High-energy Physics (HADRONs 96), Novy Svet, Ukraine, 9-16 Jun 1996.
21. E.G.Nikonov, B.N.Khoromskiy. Fast multilevel iterative solver for harmonic boundary value problem on polygonal domain. // Proceedings of the 9th International Conference "Computational Modelling and computing in Physics" September 16-21,1996, Dubna, Russia, p.172-178.
22. E.G.Nikonov, A.A.Shanenko, V.D.Toneev. QCD Phase Transition within Mixed Phase Model. //Proceedings of the International Workshop "Hirschegg'97: QCD Phase Transitions", edited by H. Feldmeier, J. Knoll, W. No-renberg, J. Wambach (GSI, Darmstadt, 1997) p.105-112.
23. V.D. Toneev, E.G. Nikonov, A.A. Shanenko. Quark-hadron interactions in nuclear matter: deconfinement signals. // "Les Houches 1998, Nuclear matter in different phases and transitions" p.309-319.
24. M.Gruszecki, A.Ya.Manafov. E.G.Nikonov. Design Analysis of Algorithm and Architecture of Virtual Control Panel for Large Experimental Devices in High and Low Energy Physics. // Modern Trends In Comp.Phys: Second Intern. Conf.: Book of Abstracts, Dubna, July 2000. - Dubna, 2000, p.81.

25. A.P.Jerusalimov, E.A.Jeruslimov, G.S.Lomachenkova, G.Musulmanbekov, E.G.Nikonov and V.S.Rikhvitskiy. System of graphic digitization. // Modern Trends In Comp.Phys: Second Intern. Conf.: Book of Abstracts, Dubna, July 2000. - Dubna, 2000, p.82.

Цитированные работы:

26. А.А.Шаненко, Е.П.Юкалова, В.И.Юкалов. Деконфайнмент гетерогенной смеси кварк-глюонной плазмы и адронов. //ЯФ, 1993, т.56, №3, с.151-173.
27. A.A.Shanenko, E.P.Yukalova and V.I.Yukalov. Statistical model of quark hadron matter. // Nuovo Cim. A, 1993, v.106, p.1269-1281.
28. K.Redlich, H.Satz. Critical behavior near deconfinement. Phys. Rev., 1986, v.D33, p.3747-3752.
29. C.Bernard et al. The $N(T) = 6$ equation of state for two flavor QCD. //Nucl. Phys. B (Proc. Suppl), 1996, v.47, p.503-510.
30. J.D.Bjorken. Highly relativistic nucleus-nucleus collisions: The central rapidity region. //Phys. Rev., 1983, v.D27, p.140-151.
31. F.H.Harlow, A.A.Amsden, J.R.Nix. Relativistic fluid dynamics calculations with particle-in-cell technique. //J.Comp.Phys., 1976, v.20, No. 2, p.119-129.
32. И.Н.Мишустин, В.Н.Русских, Л.М.Сатаров. Гидродинамическая модель столкновений релятивистских ядер. //ЯФ, 1988. Т.54, вып. 2, с.429-522.
33. D.E.Groom et al. The Review of Paricles Physics.// The European Physical Journal, 2000, v.C15.

Получено 19 апреля 2002 г.

Макет *Н. А. Киселевой*

ЛР № 020579 от 23.06.97.

Подписано в печать 19.04.2002.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,06. Уч.-изд. л. 1,8. Тираж 100 экз. Заказ № 53247.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.