

P4-2002-195

М. Динейхан, С. А. Жаугашева*, С. К. Сахиев*

**О МЕХАНИЗМЕ ФОРМИРОВАНИЯ «АТОМКУЛЕ»
ЛЕГКИХ ЯДЕР**

Направлено в журнал «Письма в ЖЭТФ»

¹Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алма-Ата,
Казахстан

1 Введение

В последнее время ведутся интенсивные экспериментальные и теоретические исследования экзотического атома гелия ($He\bar{P}e^-$), состоящего из электрона и антипротона. Это экзотическое состояние было впервые экспериментально обнаружено в лаборатории КЕК [1] и позднее в эксперименте CERN [2]. Возможности существования такого состояния предсказывалось Кондо [3] в начале 60-х годов. Сегодня такое состояние называется "атомкуле" (atomcule). Определены его энергетический спектр и переходные матричные элементы, а также исследуется двухфотонный переход в эксперименте CERN ASACUSE (подробно см. в [4]).

В теоретических работах, посвященных изучению экзотического атома гелия, с большой точностью, в основном с помощью численных расчетов, определены энергетический спектр и переходные матричные элементы [4, 5]. В настоящее время известно, что в отличие от атомкуле водорода атомкуле гелия является долгоживущим. Возникают естественные вопросы: какие механизмы обеспечивают условия для существования долгоживущего атомкуле гелия, почему атомкуле водорода не является долгоживущим, существуют ли долгоживущие атомкуле других легких ядер, в частности изотопы лития. По нашему мнению, при ответе на эти и другие вопросы существенную роль играют аналитические методы вычисления (приближенные), т.е. аналитическое определение потенциала взаимодействия между антипротоном и ядрами в атомкуле.

Целью данной работы является аналитическое определение потенциала взаимодействия между антипротоном и легкими ядрами, а также вычисление энергетического спектра атомкуле легких ядер в рамках метода осцилляторного представления [6].

2 Гамильтониан взаимодействия

Рассмотрим трехтелную систему с кулоновским взаимодействием.

Пусть m_1, m_2, m_3 – массы, а $Z_1e, -Z_2e, -Z_3e$ – заряды частиц соответственно. Гамильтониан системы записывается стандартным образом:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{m_j} \vec{P}_j^2 - \frac{Z_1 Z_2 e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - \frac{Z_1 Z_3 e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|} + \frac{Z_3 Z_2 e^2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|}. \quad (1)$$

Выбирая систему центра масс \vec{z} и координаты Якоби $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ в виде

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{x} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot \vec{y} + \vec{z}; \\ \vec{r}_2 &= -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{x} + \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot \vec{y} + \vec{z}; \\ \vec{r}_3 &= -\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} \cdot \vec{y} + \vec{z}, \end{aligned} \quad (2)$$

а также проводя некоторые упрощения и переходя к безразмерным переменным, для уравнения Шредингера (УШ) имеем (см. в [6])

$$\left\{ \frac{1}{2} \vec{P}_r^2 + \frac{1}{2} \vec{P}_R^2 - \frac{Z_1 Z_2}{R} - \frac{Z_1 Z_3 \lambda}{|\vec{r} + c_1 \vec{R}|} + \frac{Z_2 Z_3 \lambda}{|\vec{r} - c_2 \vec{R}|} + \frac{U}{2} \right\} \Psi(\vec{R}, \vec{r}) = 0. \quad (3)$$

Здесь кинетическая часть энергии полной системы опущена и введены следующие обозначения:

$$\lambda = c_1 + c_2; \quad c_j = \frac{1}{m_j} \sqrt{\frac{m_1 m_2 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}}, \quad j = 1, 2. \quad (4)$$

Энергетический спектр трехтелной системы параметризован в виде

$$E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot U. \quad (5)$$

Таким образом, безразмерный параметр U определяет энергию системы.

Наша задача состоит в определении из уравнения Шредингера (3) параметра U и волновой функции системы в рамках метода осцилляторного представления (ОП) в двухцентровом приближении [7]. При этом волновая функция (ВФ) системы представляется в виде

$$\Psi(\vec{R}, \vec{r}) = \chi(\vec{R}) \cdot \Phi(R, \vec{r}), \quad (6)$$

где $\Phi(R, \vec{r})$ – волновая функция внутренней системы. В двухцентровом приближении [7] переменная R рассматривается как внешний параметр, т.е. $R = const$ и волновая функция $\Phi(R, \vec{r})$ в цилиндрической системе координат принимает вид

$$\Phi(R, \vec{r}) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \tilde{\Phi}(R; \rho, z) . \quad (7)$$

Здесь φ – азимутальный угол, а m – азимутальное квантовое число. Учитывая (6) и (7), после некоторых упрощений из (3) имеем

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] - \frac{Z_1 Z_3 \lambda}{\sqrt{\rho^2 + 2c_1 R z + c_1^2 R^2}} \right. \\ \left. + \frac{Z_2 Z_3 \lambda}{\sqrt{\rho^2 - 2c_2 R z + c_2^2 R^2}} \right\} \tilde{\Phi}(R; \rho, z) = E_r(R) \tilde{\Phi}(R; \rho, z) , \quad (8)$$

где $E_r(R)$ является собственным значением гамильтониана внутренней системы. Вычисление $E_r(R)$ из (8) детально изложено в работе [8]. Поэтому приводим окончательные результаты для атомкуле легких ядер:

$$E_r(R) = \frac{\omega^2}{8} - Z_1 Z_3 \frac{\lambda \omega}{2} \left[2 \frac{1 - e^{-c_1 R \omega}}{c_1 R \omega} - e^{-c_1 R \omega} \right] \\ + Z_2 Z_3 \frac{\lambda \omega}{2} \left[2 \frac{1 - e^{-c_2 R \omega}}{c_2 R \omega} - e^{-c_2 R \omega} \right] . \quad (9)$$

Здесь ω – частота осциллятора, которая определяется из уравнения

$$\omega - 2\lambda Z_1 Z_3 (1 + c_1 R \omega) e^{-c_1 R \omega} + 2\lambda Z_3 Z_2 (1 + c_2 R \omega) e^{-c_2 R \omega} = 0 . \quad (10)$$

Выражение для $E_r(R)$ при изучении спектра полной системы будем рассматривать как потенциал взаимодействия между антипротоном и ядрами. Из выражений (9) и (10) следует, что для атомкуле водорода, т.е. при $Z_1 = Z_2$ и $m_1 = m_2$, добавочный потенциал взаимодействия равен нулю. Поэтому $(P\tilde{P}e^-)$ – система короткоживущая.

3 Энергетический спектр системы

Учитывая (6) и (7) и проводя усреднение полного гамильтониана (3) по $\Phi(R, \vec{r})$ - волновой функции внутренней системы, после простых преобразований имеем

$$\left[\frac{1}{2} \vec{P}_R^2 - \frac{Z_1 Z_2}{R} + V(R) + \frac{1}{2} U \right] \chi(\vec{R}) = 0, \quad (11)$$

где использовано обозначение

$$V(R) = E_r(R) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial R} \right)^2. \quad (12)$$

Первое слагаемое в (12) $E_r(R)$ - потенциал, созданный электрическим полем заряда Z_3 , а второе слагаемое связано с относительным движением частиц 1 и 2. В работе [8] показано, что вклад второго слагаемого по сравнению с первым является на порядок меньше. Таким образом, определение энергетического спектра и ВФ трехтельной системы с кулоновским взаимодействием сводится к вычислению энергетического спектра двухтельной системы с добавочным потенциалом взаимодействий.

Теперь приступим к определению энергетического спектра системы с помощью метода ОП [6]. Проводим замену переменных следующим образом (см. детали в [6]):

$$R = q^{2\alpha}; \quad \chi(R) \Rightarrow q^{2\alpha} \Psi(q^2), \quad (13)$$

где параметр α связан с асимптотическим поведением ВФ для данного потенциала. Из (11) для модифицированного УШ имеем

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{d-1}{q} \frac{\partial}{\partial q} \right] - 4Z_1 Z_2 \alpha^2 q^{2(\alpha-1)} + 4\alpha^2 q^{2(2\alpha-1)} V(q^{2\alpha}) + 2U\alpha^2 q^{2(2\alpha-1)} \right\} \Psi(q^2) = 0, \quad (14)$$

где d - размерность вспомогательного пространства [6]

$$d = 2 + 2\alpha + 4\alpha l. \quad (15)$$

В результате замены переменных мы получили модифицированное УШ в d - мерном вспомогательном пространстве R^d . Из (14) и (15) следует, что орбитальное квантовое число ℓ поглощено размерностью пространства d . Данный прием позволяет определить все интересующие нас характеристики, т.е. энергетический спектр и ВФ, решая модифицированное УШ только для основного состояния в d - мерном вспомогательном пространстве R^d . В рамках ОП для различных потенциалов [9] неоднократно проверялось, что поправка первого порядка, связанная с гамильтонианом взаимодействия, тождественно равна нулю, а поправка второго порядка меньше одного процента. Поэтому мы ограничимся рассмотрением только нулевого приближения. В этом приближении параметр U равен

$$U = \max_{\alpha} \left(\kappa \cdot \frac{2\Omega\Gamma(2\alpha + 2\alpha\ell)}{\Gamma(3\alpha + 2\alpha\ell)} - \frac{\Omega^2}{4\alpha^2} \frac{\Gamma(2 + \alpha + 2\alpha\ell)}{\Gamma(3\alpha + 2\alpha\ell)} - \frac{\Omega^{3+2\ell}}{4\alpha} \int_0^{\infty} \frac{dt \cdot t^{1+2\ell}}{\Gamma(3\alpha + 2\alpha\ell)} \exp\{-(\Omega t)^{1/\alpha}\} \bar{V}(t) \right), \quad (16)$$

где Ω - частота осциллятора и определяется из уравнения

$$\Omega - 4\alpha^2\kappa \cdot \frac{\Gamma(2\alpha + 2\alpha\ell)}{\Gamma(2 + \alpha + 2\alpha\ell)} + \frac{\Omega^{3+2\ell}}{2} \int_0^{\infty} \frac{dt \cdot t^{1+2\ell}}{\Gamma(3\alpha + 2\alpha\ell)} \times \exp\{-(\Omega t)^{1/\alpha}\} [3\alpha + 2\alpha\ell - (\Omega t)^{1/\alpha}] \bar{V}(t) = 0. \quad (17)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \kappa &= Z_1 Z_2 + \lambda \left(\frac{Z_1 Z_3}{c_1} - \frac{Z_2 Z_3}{c_2} \right); \\ \bar{V}(t) &= \omega^2 \cdot t + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 + \frac{4\lambda Z_1 Z_3}{c_1} \cdot (2 + c_1 t \omega) e^{-c_1 t \omega} \\ &\quad - \frac{4\lambda Z_2 Z_3}{c_2} \cdot (2 + c_2 t \omega) e^{-c_2 t \omega}, \end{aligned} \quad (18)$$

а параметр ω определяется из уравнения как функция от t

$$\omega - 2\lambda Z_1 Z_3 (1 + c_1 t \omega) e^{-c_1 t \omega} + 2\lambda Z_3 Z_2 (1 + c_2 t \omega) e^{-c_2 t \omega} = 0. \quad (19)$$

Учитывая (16)-(19) из (5), определяем энергетический спектр трехтельной кулоновской системы с орбитальным возбуждением. При вычислении энергетического спектра атомкуле гелия и иона лития используем следующие значения параметров для массы:

$$m_p = 1836.15m_e, \quad m_{^3\text{He}} = 5495.881m_e, \quad m_{^4\text{He}} = 7294.295m_e, \\ m_{^s\text{Li}} = 10961.9121m_e, \quad m_{^7\text{Li}} = 12786.4085m_e$$

и для зарядов:

$$Z_p = -1, \quad Z_{\text{He}} = 2, \quad Z_{\text{Li}} = 3, \quad Z_e = -1.$$

Полученные численные результаты представлены в таблицах 1 и 2. В табл. 1 также приведены результаты численных расчетов, которые получены в работах [4, 5]. Из таблицы 1 видно, что наши результаты хорошо согласуются с существующими результатами численных расчетов. В таблице 2 представлены энергетические спектры атомкуле иона лития, вычисленные в рамках ОП. Отметим, что энергетические уровни атомкуле иона лития ни вычислениями, ни экспериментально не исследованы.

4 Механизм формирования атомкуле легких ядер

Согласно (11) полный потенциал взаимодействия между антипротоном и ядром равен

$$V_{\text{tot}}(R) = -\frac{Z_1 Z_2}{R} + E_r(R) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dR} \right)^2. \quad (20)$$

Из выражений (9) и (10) следует, что если заряды Z_1 и Z_2 или массы m_1 и m_2 отличаются по величине (модулю), то между антипротоном и ядрам проявляется добавочный потенциал взаимодействия. Полученный потенциал зависит не только от заряда, но и от изотопической структуры связанного состояния. Поэтому для атомкуле водорода добавочный потенциал

Таблица 1.
 Энергетический уровень атомкуле гелия
 (в атомных единицах)

${}^4\text{He}$	α	$-E_{our}$	$-E_{num}$	${}^3\text{He}$	$-E_{our}$	$-E_{num}$
$\ell = 31$	1.020	3.505	3.50763495		3.343	3.34883211
32	1.025	3.350	3.3537754		3.187	3.207673
33	1.030	3.205	3.2162444		3.046	3.082114
34	1.035	3.078	3.09346687		2.918	2.970
35	1.040	2.955	2.98402099		2.801	
36	1.045	2.843			2.695	
37	1.050	2.742			2.598	
38	1.055	2.6495			2.509	

Таблица 2.
 Энергетический уровень атомкуле иона лития
 (в атомных единицах)

${}^7\text{Li}$	α	$-E_{our}$	${}^6\text{Li}$	$-E_{our}$
$\ell = 31$	1.025	9.4170		9.0454
32	1.030	9.0596		8.6483
33	1.035	8.7389		8.3619
34	1.040	8.4506		8.0861
35	1.045	8.1909		7.8376
36	1.050	7.9566		7.6134
37	1.055	7.7448		7.4107
38	1.060	7.5556		7.2301

равен нулю, а для атомкуле гелия он не равен нулю и состояние становится устойчивым. Таким образом, устойчивость и условие жизни системы зависят от различия заряда и масс антипротона и ядра.

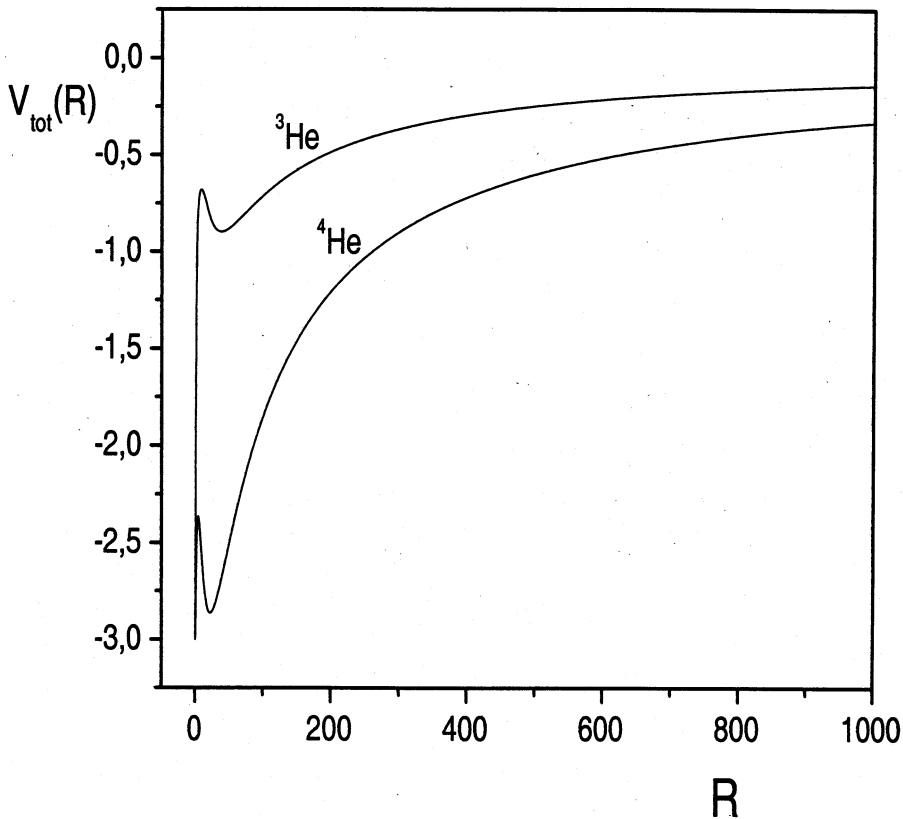
На рисунке представлена зависимость полного потенциала (20) от радиуса R для изотопов гелия. Из рисунка видно, что в результате добавочного потенциала взаимодействия для антипротона появляется ловушка (trap). Когда частицы находятся в ловушке, система, как правило, становится более устойчивой. Потенциал ловушки имеет минимум и высоту, поэтому совокупность спектров связанных состояний является устойчивой, в частности для атомкуле гелия. Также из рисунка видно, что с возрастанием массы ядра положение минимума потенциала ловушка понижается, т.е. если масса ядра возрастает бесконечно, то минимум потенциала также понижается бесконечно. В этом пределе наша экзотическая система становится как атом, для которого низколежащие энергетические уровни являются более устойчивыми. Обычно низколежащие уровни атома гелия являются стабильными. Положения минимума потенциала ловушка определяются соотношением массы антипротона и ядра.

Теперь оценим, какие энергетические уровни являются устойчивыми. Для этого рассмотрим предельный случай $R \ll 1$. В этом пределе из (9) и (10) имеем

$$E_r(R) = -\frac{\omega_0^2}{8} + \frac{\omega_0\omega_1}{12}R^2 - \frac{\omega_0\omega_2}{16}R^3, \quad (21)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} \omega_0 &= 2\lambda Z_3(Z_1 - Z_2); \\ \omega_1 &= \lambda Z_3\omega_0^2(Z_1c_1^2 - Z_2c_2^2); \\ \omega_2 &= \frac{2}{3}\lambda Z_3\omega_0^3(Z_1c_1^3 - Z_2c_2^3). \end{aligned} \quad (22)$$



*Полный потенциал взаимодействия
между ядрами гелия и антипротоном*

Из (21) определяем значения R - соответствующего минимума потенциала ловушка:

$$R_0 = \frac{8}{9} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (23)$$

Определим значение потенциальной энергии соответствующего минимума:

$$E_r(R_0) = -\frac{\omega_0^2}{8} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{\omega_0 \omega_1^3}{\omega_2^2}. \quad (24)$$

Рассмотрим конкретный случай изотопа ${}^3\text{He}$. В этом случае из (24) имеем

$$E_r(R_0) = -\frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{1}{7} \left(\frac{14}{15}\right)^4\right] \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{m_e}{m_p}. \quad (25)$$

Если уровень энергии в этой системе единиц параметризуем стандартным образом:

$$E = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad (26)$$

то для n - главного квантового числа получаем

$$n = \sqrt{\frac{7}{8} \cdot \frac{m_p}{m_e}}. \quad (27)$$

Таким образом, только высоковозбужденные состояния могут находиться в ловушке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Iwasaki, S. N. Nakamura, et al., Phys. Lett. **67**, p.1246 (1991);
T. Yamazaki, et al., Nature, **361**, p.238(1993).
- [2] H. A. Torii, B. S. Hayano, et al., Phys. Rev. A **59**, p.223(1999).
- [3] G. T. Condo, Phys. Lett., **9**, p.65(1964).
- [4] V. I. Korobov, Nucl. Phys. A **56**, p.75(2001), and references therein.

- [5] V. I. Korobov, and I. Shimamura, Phys. Rev., **A 56**, p.4587(1997).
- [6] М. Динейхан, Г. В. Ефимов, ЭЧАЯ, **26**, с.651(1995);
M. Dineykhan, G.V. Efimov, G. Ganbold and S.N. Nedelko, *Oscillator representation in quantum physics*, Lecture Notes in Physics, **m 26**, Springer-Verlag, Berlin(1995).
- [7] И. В. Комаров, Л.И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сферодальные и кулоновские сферодальные функции*, Наука, Москва (1976);
С. И. Веницкий, Л. И. Пономарев, ЭЧАЯ, **13**, с.1336(1982).
- [8] М. Динейхан, С. А. Жаугашева, Р. Г. Назмитдинов, ЖЭТФ, **119**, с.1210(2001).
- [9] M. Dineykhan, G. V. Efimov, Rep. Math. Phys., **36**, p.287(1995); ЯФ, **59**, с.862(1996);
M. Dineykhan, Zeitschrift für Phys., **D 41**, p.77(1997);
M. Dineykhan, R. G. Nazmitdinov, Yad. Fiz. **62**, p.143(1999).

Получено 16 августа 2002 г.

Динейхан М., Жаугашева С. А., Сахиев С. К.
О механизме формирования «атомкуле» легких ядер

P4-2002-195

В рамках метода осцилляторного представления аналитически определен потенциал взаимодействия между антипротоном и ядром. Потенциал асимметричен как по электрическим зарядам, так и по массам антипротона и ядра. Показано, что именно асимметричность потенциала обеспечивает условие стабильности атомкуле легких ядер.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод авторов

Dineykhon M., Zhaugasheva C. A., Sakhyev S. K.
On the Formation Mechanism of the Atomcule of Light Nuclei

P4-2002-195

In the framework of the oscillator representation method the interaction potential between the antiproton and the nucleus is analytically derived. This potential is antisymmetrical with respect to the charge and masses of the constituent particles. It is shown that the antisymmetry of the potential determines the stability of the atomcule of light nuclei.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002

Редактор *М. И. Зарубина*
Макет *Н. А. Киселевой*

ЛР № 020579 от 23.06.97.

Подписано в печать 23.08.2002.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,68. Уч.-изд. л. 0,75. Тираж 360 экз. Заказ № 53488.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.