Р2-2002-217

О. С. Космачев*

ОБ ИНВАРИАНТАХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ДИРАКА

Направлено в журнал «Physica A»

*E-mail: kos@thsun1.jinr.ru

1 Введение

Вся полнота информации, которая содержится в свободном уравнении Дирака, определяется тем, что γ-матрицы образуют конечную группу, и выбором конкретного вида неприводимых представлений (НП) этой группы. Ивестное обстоятельство, которое в полной мере не изучалось и не используется.

Изначальное [1] определение γ-матриц на основе клифордовых соотношений затрудняет обобщение предложенного уравнения на другие возможные типы уравнений при выполнении аналогичных или измененных физических требований. Причина заключается в том, что простые соотношения Клифорда

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}; \qquad \mu,\nu = 1,2,3,4; \qquad \gamma_\mu^2 = 1 \tag{1}$$

являются недостаточными для определения других типов групп γ-матриц. Кроме того, изучение групповых алгебр, частные примеры которых исследуются ниже, может оказаться весьма полезным при рассмотрении таких открытых проблем, как нетривиальная (т.е. не в виде прямого произведения) формулировка многочастичных состояний в релятивистской физике, согласование внутренних симметрий с лоренц-инвариантностью и других связанных с ними вопросов.

2 Анализ группы γ-матриц Дирака

Примем определение γ-матриц, предложенное в работе [1], которое приводит к уравнению Дирака в виде

$$[i(\gamma_\mu p_\mu) + mc]\psi = 0, \quad \mu = 1,2,3,4 \tag{2}$$

и обозначим

$$a_1 \sim \gamma_3\gamma_2, \qquad a_2 \sim \gamma_1\gamma_3, \qquad a_3 \equiv a_1a_2 \sim \gamma_2\gamma_1. \tag{3}$$

Здесь символ $\sim$ означает соответствие отношений между элементами искомой группы a_1, a_2 и γ-матрицами. При этом $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2$, $\quad a_2a_1a_2^{-1} = a_1^{-1}$.

Это означает, что элементы a_1, a_2 по умножению генерируют группу кватернионов, обозначаемую далее как $Q_2[a_1, a_2]$. Если любую пару элементов из (a_1, a_2, a_3) рассматривать как генераторы группы, а весь набор ее элементов как образующие алгебры с законом умножения, определяемым групповой таблицей, то коммутационные соотношения между образующими алгебры совпадают с коммутационными соотношениями для инфинитезимальных операторов группы 3-мерных вращений [2].

Группе $Q_2[a_1, a_2]$ можно сопоставить сумму всех ее элементов, записанную в мультипликативной форме [2]

$$Q_2[a_1, a_2] = [e + a_1 + a_1^2 + a_1^3][e + a_2] = C_4[a_1][e + a_2], \tag{4}$$

где e – единичный элемент группы, $C_4[a_1]$ – сумма элементов циклической группы 4-го порядка с генератором a_1.
Далее выражения типа (4), представляющие сумму всех элементов группы, записанную в виде произведения ее циклических подгрупп, будем называть циклической структурой (ЦС) данной группы [2]. ЦС представляет собой сумму всех элементов группы и потому является единичным одномерным НП. В ряде случаев, которые рассматриваются ниже, ЦС позволяет достаточно просто получить все НП группы [2].

Введем обозначения $c \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Легко проверить,что c коммутирует со всеми элементами группы $Q_2[a_1, a_2]$ и $c^2 = a_1^2$. Прямым вычислением можно убедиться, что расширение $Q_2[a_1, a_2]$ с помощью c приводит к группе 16-го порядка, ЦС которой имеет вид

$$d_\gamma = d_\gamma[a_1, a_2, c] = Q_2[a_1, a_2][e + c] = C_4[a_1][e + a_2][e + c]. \tag{5}$$

Группа d_γ имеет три генератора (a_1, a_2, c), центр, состоящий из четырех элементов (e, a_1^2, c, ca_1^2), и число сопряженных классов, равное 10. Обозначим

$$b_1 \equiv ca_1 \sim \gamma_1, \qquad b_2 \equiv ca_2 \sim \gamma_2, \qquad b_3 \equiv ca_3 \sim \gamma_3. \tag{6}$$

Полагая элементы группы d_γ образующими элементами алгебры, строим НП и в результате получаем следующие коммутаторы

$$\begin{array}{lll}
[a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\
[b_1, b_2] = -2a_3, & [b_2, b_3] = -2a_1, & [b_3, b_1] = -2a_2, \\
[a_1 b_1] = 0, & [a_2, b_2] = 0, & [a_3, b_3] = 0, \\
[a_1, b_2] = 2b_3 & [a_1, b_3] = -2b_2, & \\
[a_2, b_3] = 2b_1, & [a_2, b_1] = -2b_3, & \\
[a_3, b_1] = 2b_2, & [a_3, b_2] = -2b_1. &
\end{array} \tag{7}$$

С точностью до общего нормировочного множителя 2 они совпадают с коммутаторами инфинитезимальных матриц собственных преобразований Лоренца. Но именно с таким общим коэффициентом получаются коммутаторы соответствующих γ-матриц. Из вывода этих соотношений [3] следует, что $b_1 \sim \gamma_1, b_2 \sim \gamma_2, b_3 \sim \gamma_3$ в данном представлении имеют смысл операторов инфинитезимальных преобразований Лоренца вдоль пространственных осей $1, 2, 3$ соответственно.

Если рассматривать d_γ как группу, а не как подгруппу, и построить ее НП, то среди 16 матриц появятся хорошо известные спиновые матрицы Паули. Эти три матрицы могут быть приняты в качестве генераторов вместо a_1, a_2, c и приведут к тому же выражению (5) и к тем же коммутационным соотношениям (7). Это означает, что использование σ-матриц Паули для описания спина равносильно привнесению лоренц-инвариантности в расчетную схему. По этой причине, в частности, известное уравнение Паули, строго говоря, не может считаться "нерелятивистским пределом уравнения Дирака". Оно представляет собой эклектическое объединение галилей- и лоренц-инвариантности на квантовом уровне.

Последующее расширение d_γ с помощью дополнительного генератора b_4 приводит к группе γ-матриц Дирака. ЦС при этом может быть записана в виде

$$D_\gamma[II] = d_\gamma[a_1, a_2, c][e + b_4], \tag{8}$$

где b_4 является групповым эквивалентом γ_4 и $b_4^2 = e$.

В представлении Дирака группа $D_\gamma[II]$ имеет порядок 32, в ней 20 элементов четвертого порядка и 12 элементов второго порядка. То есть таких элементов, для которых соответственно 4 и 2 являются минимальными показателямим степени, делающими их равными единичному элементу. Число сопряженных классов равно 17. Поэтому имеется 16 одномерных НП и одно четырехмерное. Конкретной реализацией 4-мерного НП являются 4-мерные γ-матрицы. При этом 16 одномерных НП связаны с 16 компонентами известных пяти величин — скаляра, вектора, антисимметричного тензора, аксиального вектора и псевдоскаляра. Детали построения всех НП на основе ЦС описаны в [2].

Для последующего анализа воспользуемся известной теоремой о трех типах матричных групп [4]. Теорема утверждает: если $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_\rho\}$ является неприводимой матричной группой, то

$$\mathbf{In} = \frac{\mathbf{1}}{\rho}\sum_{\mathbf{i=1}}^{\rho}\chi(\gamma_{\mathbf{i}}^{\mathbf{2}}) = \begin{cases} 1 \\ -1 \\ 0 \end{cases}. \tag{9}$$

Здесь ρ - порядок группы, $\chi(\gamma_i^2)$ - след квадрата i-й матрицы из данной матричной группы.

По определению, если группа относится к первому типу ($\mathbf{In} = \mathbf{1}$), то она эквивалентна группе реальных матриц. В таком случае она эквивалентна также группе ортогональных матриц. Если группа относится ко второму типу ($\mathbf{In} = -\mathbf{1}$), то она эквивалентна своей комплексно-сопряженной группе (так, что существует S такая, что $\gamma_i^* = S^{-1}\gamma_i S$), но не реальной группе. Здесь $*$ - символ комплексного сопряжения. Третий тип ($\mathbf{In} = \mathbf{0}$) характеризуется тем, что группа не эквивалентна комплексно-сопряженной, то есть не существует S такой, что $\gamma_i^* = S^{-1}\gamma_i S$.

Для группы γ-матриц Дирака структурный инвариант (9) получается равным $\mathbf{In} = -\mathbf{1}$. Далее, исходя из этого определения, такой тип групп будет обозначаться $D_\gamma(II)$. Подчеркнем, что величина инварианта не зависит от конкретного выбора представления для γ-матриц и определяется только соотношением между числом элементов четвертого и второго порядка в группе D_γ, т.е. является некоторой структурной характеристикой группы.

Выражение (8) допускает иную запись ЦС благодаря другому выбору генераторов группы γ-матриц. Вместо генераторов $\{a_1, a_2, c, b_4\}$ можно выбрать $\{a_1, a_2, b_2, b_3\}$. Здесь $b_2 \sim \gamma_3\gamma_4$, $b_3 \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_4$. Отсюда вытекают следующие соотношения между генераторами группы.

$$\begin{array}{lll} a_2a_1a_2^{-1} = a_1^{-1}, & a_1a_2a_1^{-1} = a_2^{-1}, & b_3b_2b_3^{-1} = b_2^{-1}, \\ b_2a_1b_2^{-1} = a_1^{-1}, & b_2a_2b_2^{-1} = a_2^{-1}, & b_2b_3b_2^{-1} = b_3^{-1}, \\ b_3a_1b_3^{-1} = a_1^{-1}, & b_3a_2b_3^{-1} = a_2^{-1}. & \end{array} \tag{10}$$

В результате ЦС принимает вид

$$D_\gamma[a_1, a_2, b_2, b_3] = Q_2[a_1, a_2][e + b_2][e + b_3]. \tag{11}$$

Так же, как и в случае (8), данное выражение представляет собой сумму всех элементов группы, но записанную в виде других сомножителей. Прямой проверкой можно убедиться, что выражения

$$b_\gamma[a_1, a_2, b_2] = Q_2[a_1, a_2][e + b_2] \tag{12}$$

и

$$b_\gamma[a_1, a_2, b_3] = Q_2[a_1, a_2][e + b_3] \tag{13}$$

представляют собой ЦС двух подгрупп 16-го порядка. Как следует из определяющих соотношений (10), группы изоморфны между собой, но неизоморфны группе d_γ. Обозначим

$$b'_1 \equiv c'a_1 \sim -\gamma_1\gamma_4, \qquad b'_2 \equiv c'a_2 \sim -\gamma_2\gamma_4, \qquad b'_3 \equiv c'a_3 \sim -\gamma_3\gamma_4, \tag{14}$$

где $c' = a_3 b_2$.

Если на элементах группы $b_\gamma[a_1, a_2, b_2] = Q_2[a_1, a_2][e + b_2]$ определить алгебру аналогично случаю d_γ, то получим коммутационные соотношения, весьма похожие на (7):

$$\begin{array}{lll} [a_1, a_2] = 2a_3, & [a_2, a_3] = 2a_1, & [a_3, a_1] = 2a_2, \\ [b'_1, b'_2] = 2a_3, & [b'_2, b'_3] = 2a_1, & [b'_3, b'_1] = 2a_2, \\ [a_1 b'_1] = 0, & [a_2, b'_2] = 0, & [a_3, b'_3] = 0, \\ [a_1, b'_2] = 2b'_3 & [a_1, b'_3] = -2b'_2, & \\ [a_2, b'_3] = 2b'_1, & [a_2, b'_1] = -2b'_3, & \\ [a_3, b'_1] = 2b'_2, & [a_3, b'_2] = -2b'_1. & \end{array} \tag{15}$$

Они практически совпадают, отличаясь только знаками всех трех коммутаторов, стоящих во второй (сверху) строчке. Никаким неособенным преобразованием это расхождение не устраняется, так как группы d_γ и b_γ неизоморфны. Для последующего важно отметить, что оба типа этих подгрупп содержатся в группе $D_\gamma(II)$.

3 Группа вещественных γ-матриц

Помимо соотношения (1) для γ-матриц в физической литературе можно найти другие определяющие соотношения. Так, если принять

$$\begin{array}{lll} \gamma_s\gamma_t + \gamma_t\gamma_s = 2\delta_{st}, & \gamma_s^2 = 1 & (s, t = 1, 2, 3), \\ \gamma_s\gamma_4 + \gamma_4\gamma_s = 0, & (s = 1, 2, 3), & \\ \gamma_4^2 = -1, & & \end{array} \tag{16}$$

то получается опять группа 32-го порядка. Как и в предыдущем случае, она имеет 17 сопряженных классов. Значит, согласно теореме Бернсайда, связывающей порядок группы с числом сопряженных классов и с размерностью неприводимых представлений, опять имеется 16 одномерных НП и одно четырехмерное. Изменение определения (16) по сравнению с (1) приводит к иной структуре группы. В частности, в отличие от предыдущего случая в группе содержится 12 элементов четвертого порядка и 20 элементов второго порядка. Уже в силу только этого обстоятельства группы не изоморфны. Действительно, нельзя никаким неособенным преобразованием превратить элемент четвертого порядка в элемент второго порядка. Инвариант (9) в данном случае равен $\mathbf{In} = \mathbf{1}$. Данный тип групп будет обозначаться $D_\gamma(I)$.

Поскольку для $\mu, \nu = 1, 2, 3$ соотношения (1) не изменились, то все построения и выводы, касающиеся подгрупп Q_2 и d_γ, остаются в силе вплоть до записи формул (5), (6) и (7). ЦС в данном случае выглядит аналогично (8):

$$D_\gamma(I) = D_\gamma[a_1, a_2, c, b_4] = Q_2[a_1, a_2][e + c][e + b_4], \tag{17}$$

где $b_4 \sim \gamma_4$ - элемент 4-го порядка, что при матричной реализации НП приводит к $b_4^2 \sim -1$.

Фактически различие определений (1) и (16) состоит только в одном. В первом случае $\gamma_4^2 = 1$, а во втором $\gamma_4^2 = -1$. Всего имеется 5 вариантов различных выборов для квадратов γ-матриц, которые играют роль генераторов группы, при условии сохранения соотношений антикоммутации. Все они приводят только либо к группе $D_\gamma(I)$, либо к $D_\gamma(II)$. Значит данный способ определения групп исчерпал себя.

Из формул (16) следуют такие определяющие соотношения между генераторами группы $D_\gamma(I)$:

$$\begin{array}{lll} a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1}, & a_1 a_2 a_1^{-1} = a_2^{-1}, & b_4 c b_4^{-1} = c^{-1}, \\ c a_1 c^{-1} = a_1, & c a_2 c^{-1} = a_2, & c b_4 c^{-1} = b_4^{-1}, \\ b_4 a_1 b_4^{-1} = a_1^{-1}, & b_4 a_2 b_4^{-1} = a_2^{-1}, & \end{array} \tag{18}$$

где приняты соотношения (3) и, как ранее, $c \sim \gamma_1\gamma_2\gamma_3$. Отсюда вытекает, что (17) содержит 2 подгруппы, изоморфные d_γ,

$$d_\gamma[a_1, a_2, c] = Q_2[a_1, a_2][e + c] \tag{19}$$

и

$$d_\gamma[a_1, a_2, b_4] = Q_2[a_1, a_2][e + b_4]. \tag{20}$$

Сравнивая выражения (11) и (17), можно отметить их некоторую симметрию. Действительно, в случае $D_\gamma(II)$ повторное расширение группы кватернионов Q_2 приводит к двум подгруппам b_γ в выражении для ЦС, а в случае $D_\gamma(I)$ повторное расширение той же группы приводит к двум подгруппам d_γ. Однако при этом имеется существенное различие. Прямой проверкой можно убедиться, что в группе $D_\gamma(I)$ не имеется ни одной подгруппы типа b_γ, тогда как в группе $D_\gamma(II)$ имеются как подгруппы b_γ, так и d_γ.

Все 4 генератора в выражении (17) представляют собой элементы 4-го порядка. Поэтому для построения НП необходимо, следуя методике, изложенной в [2], умножить каждый генератор на значение простых корней четвертой степени из единицы: $r_1 = exp(2\pi i k_1/4)$, $r_2 = exp(2\pi i k_2/4)$, $r_3 = exp(2\pi i k_3/4)$, $r_4 = exp(2\pi i k_4/4)$. Считая k_1, k_2, k_3, k_4 независимо пробегающими значения $1, 2, 3, 4$ и учитывая определяющие соотношения (18), получаем 32 равенства - т.е. операторный аналог регулярного представления. Здесь не равны нулю те равенства, где все k_1, k_2, k_3, k_4 одновременно либо четные, либо нечетные. В случае четных k получаем 16 одномерных НП. При нечетных получаем 4 эквивалентных 4-мерных НП. Одно из них имеет вид

$$\mathbf{R(a_1)} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R(a_2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R(c)} = \begin{pmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{R(b_4)} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, с учетом (3), $\mathbf{R(c)} = \gamma_1\gamma_2\gamma_3$ и $\mathbf{R(b_4)} = \gamma_4$, получаем выражения для γ-матриц

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Согласно утверждению теоремы, упомянутой выше, если $\mathbf{In} = \mathbf{1}$, то группа эквивалентна группе реальных матриц. Видно, что γ_3 и $\mathbf{R}(\mathbf{b_4}) = \gamma_4$ чисто мнимые. Составим матрицу

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(\gamma_3 + i\gamma_4). \tag{21}$$

Очевидно $\Gamma = \Gamma^{-1}$. Преобразование подобия

$$\begin{array}{ll} \Gamma\gamma_1\Gamma^{-1} = -\gamma_1 = \gamma_1', & \Gamma\gamma_2\Gamma^{-1} = -\gamma_2 = \gamma_2', \\ \Gamma\gamma_3\Gamma^{-1} = i\gamma_4 = \gamma_3', & \Gamma\gamma_4\Gamma^{-1} = -i\gamma_3 = \gamma_4' \end{array} \tag{22}$$

переводит все 4 генератора в реальные матрицы:

$$\gamma_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом все определяющие соотношения (18) выполняются для штрихованного набора γ-матриц также, и потому остается неизменной физическая интерпретация алгебраических объектов.

В силу известных аргументов данный тип представления может быть назван представлением Майораны [5], т.е. представлением, описывающим нейтральные массивные частицы. Важно отметить, что никаким неособенным преобразованием данный тип представления не может быть получен из предыдущего, так как с матрицами γ_μ связывается вполне определенная физическая интерпретация. Необходима структурная перестройка группы γ-матриц, без которой неособенные преобразования не достигают цели.

4 Спинорная группа γ-матриц

После анализа двух предыдущих групп возникает естественный вопрос о возможности существования группы с $\mathbf{In} = \mathbf{0}$. Как уже отмечалось выше, все допустимые варианты сохранения клифордовых антикоммутационных соотношений типа (1) и (16) приводят только к двум возможностям $D_\gamma(II)$ и $D_\gamma(I)$. Сравнение циклических структур (11) и (17) наводит на мысль о таком варианте, когда ЦС содержала бы одновременно как d_γ, так и b_γ в противоположность структурам (11) и (17). Такой вариант оказался возможен. Формальная запись ЦС имеет вид

$$D_\gamma(III) = D_\gamma[a_1, a_2, c_1, b_5] = Q_2[a_1, a_2][e + c_1][e + b_5], \tag{23}$$

Здесь, как ранее, $Q_2[a_1, a_2]$ - подгруппа кватернионов с генераторами a_1, a_2. Кроме того, имеется две подгруппы 16-го порядка $d_\gamma[a_1, a_2, c_1] = Q_2[a_1, a_2][e + c_1]$ и $b_\gamma[a_1, a_2, b_5] = Q_2[a_1, a_2][e + b_5]$. Все 4 генератора a_1, a_2, c_1, b_5 имеют порядок 4. При этом с необходимостью элемент c_1 становится элементом центра не только подгруппы $d_\gamma[a_1, a_2, c_1]$, но и всей группы $D_\gamma(III)$. Тогда с учетом определений Q_2, d_γ и b_γ получаем следующий набор определяющих соотношений

$$\begin{array}{lll} a_2 a_1 a_2^{-1} = a_1^{-1}, & a_1 a_2 a_1^{-1} = a_2^{-1}, & b_5 c_1 b_5^{-1} = c_1, \\ c_1 a_1 c_1^{-1} = a_1, & c_1 a_2 c_1^{-1} = a_2, & c_1 b_5 c_1^{-1} = b_5, \\ b_5 a_1 b_5^{-1} = a_1^{-1}, & b_5 a_2 b_5^{-1} = a_2^{-1}. & \end{array} \tag{24}$$

Порядок группы $D_\gamma(III)$ по-прежнему равен 32. Данная группа, как и обе предыдущие, устроены так, что квадраты любых элементов 4-го порядка совпадают. Обозначим этот элемент (k).

$$(a_1)^2 = (a_2)^2 = (c_1)^2 = (b_5)^2 = (k), (k)^2 = e. \tag{25}$$

Существенно изменилась структура группы. Если в двух предыдущих случаях центры групп состояли из двух элементов ($e \sim I, k \sim -I$), то теперь центр содержит 8 элементов. Именно,

$$e, k, c_1, c_1^{-1}, a_3 b_5, a_3 b_5^{-1}, a_3 b_5 c_1, a_3 b_5 c_1^{-1}. \tag{26}$$

Число сопряженных классов становится равным 20, а утверждение теоремы Бернсайда принимает вид

$$32 = 16 \cdot 1^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^2.$$

Это означает, что имеется, как прежде, 16 одномерных неприводимых представлений и 4 неэквивалентных двумерных. Прямым вычислением можно убедиться, что группа $D_\gamma(III)$ содержит 16 элементов четвертого порядка и 16 второго порядка, т.е. после построения НП получаем $\mathbf{In} = \mathbf{0}$.

Процедура построения НП носит стандартный характер [2]. ЦС (23) приводит к такому положению, когда в матричном представлении не разделены эквивалентные НП, т.е. получаются приводимые матрицы четвертого порядка. Чтобы обойти эту трудность, можно воспользоваться особенностью структуры b_γ. Из определяющих соотношений (24) следует что, если вместо генератора a_2 выбрать $a_3 = a_1 a_2$, то вместо третьей строчки сверху будем иметь

$$b_5 a_1 b_5^{-1} = a_1^{-1}, \qquad b_5 a_3 b_5^{-1} = a_3.$$

ЦС (23) при такой замене не меняет форму, т.к. a_1, a_2, a_3 входят в Q_2 совершенно симметрично

$$D_\gamma(III) = D_\gamma[a_1, a_3, c_1, b_5] = Q_2[a_1, a_3][e + c_1][e + b_5], \tag{27}$$

Далее умножая каждый из генераторов a_1, a_3, c_1, b_5 на значения примитивных корней $\sqrt[4]{1}$ и считая, что они изменяются независимо ($k_1, k_2, k_3, k_4 = 1, 2, 3, 4$), получаем операторный аналог регулярного представления, т.е. 32 равенства. Теперь при умножении каждого из равенств с нечетными k_1, k_2, k_3, k_4 слева на любой из генератов происходит замыкание только на два равенства, общих для всех четырех генераторов, то есть мы получаем двумерные НП.

В силу построения элементы $\gamma_1 \sim a_1 c_1, \gamma_2 \sim a_2 c_1, \gamma_3 \sim a_1 a_2 c_1$ имеют смысл операторов инфинитезимальных преобразований Лоренца вдоль осей $1, 2, 3$. Как прежде, они удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\gamma_s \gamma_t + \gamma_t \gamma_s = 2\delta_{st}, \quad \gamma_s^2 = 1 \quad (s, t = 1, 2, 3). \tag{28}$$

Из данного построения, как и из двух предыдущих, очевидно, что соответствующий выбор $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ обеспечивает лоренц-инвариантность в формулировке (7). Что касается четвертого генератора γ_4, то смысл и назначение его заключается в том, чтобы обеспечивать существование 5 величин (S, V, T, A, P). Или, что то же самое, 16 одномерных НП. Эту роль может играть b_5 или, как видно из таблицы умножения группы, произведение b_5 на любой другой элемент подгруппы $d_\gamma[a_1, a_3, c_1]$. В зависимости от выбора γ_4 мы будем иметь различные варианты продолжения соотношений (28). Так если $\gamma_4 \sim b_5$, то:

$$
\begin{aligned}
&\gamma_s\gamma_4 + \gamma_4\gamma_s = 0, \qquad (s, = 1,2),\\
&\gamma_3\gamma_4 - \gamma_4\gamma_3 = 0,\\
&\gamma_4^2 = -1,
\end{aligned} \tag{29}
$$

Если выбрать любой элемент центра (26), содержащий b_5, то получим в дополнение к (28)

$$
\begin{aligned}
&\gamma_s\gamma_4 - \gamma_4\gamma_s = 0 \qquad (s = 1,2,3),\\
&\gamma_4^2 = 1.
\end{aligned} \tag{30}
$$

Можно проверить, что никакой выбор четырех элементов группы $D_\gamma(III)$ в качестве генераторов не обеспечивает выполнение соотношений (1) или (16) в полном объеме. То есть не имеется среди элементов группы такого элемента ($\sim \gamma_4$), чтобы он антикоммутировал с тремя другими генераторами группы. Это равносильно тому, что для выполнения лоренц-инвариантности необходимо положить $m = 0$. Вместе с тем наличие трех антикоммутаторов (28) и двухкомпонентных спиноров дает основание говорить о совпадении полученного формализма с формализмом описания безмассовых нейтрино, представленным в известной работе [6]. Выявление полного совпадения или частичного расхождения потребует дополнительного изучения данного вопроса.

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность проф. А.Н. Сисакяну за предоставленную возможность обсудить изложенные вопросы на его семинаре.

Литература

[1] Dirac P.A.M. *The quantum theory of the electron.*- Proc.Roy.Soc. A vol.117, 610 (1928). Перевод: П.А.М.Дирак. К созданию квантовой теории поля. М:Наука, 1990, сс 113-128.

[2] Космачев О.С. Сообщение ОИЯИ, Р2-97-175, Дубна 1997.

[3] Наймарк М.А. Линейные представления группы Лоренца. М: ФМ, 1958, с.88.

[4] Lomont J.S. Applications of finite groups. New York, London. Academic Press, 1959, p.51.

[5] Majorana E. *Symmetrical Theory of the Electron and the Positron.*- Il Nuovo Cimento vol 14, 171, (1937).

[6] Lee T.D., Yang C.N. *Parity Nonconservation and a Two-Component Theory of the Neutrino.*- Phys. Rev. v.105, 1671 (1957).

Получено 24 сентября 2002 г.

Космачев О. С. P2-2002-217
Об инвариантах уравнений типа Дирака

Рассмотрены три типа уравнений Дирака, которые не сводятся одно к другому с помощью неособенных преобразований. Уравнения отличаются значениями структурных инвариантов. Развитая ранее методика (метод циклической структуры) позволяет построить неприводимые представления для указанных типов уравнений, рассмотреть структуру каждого уравнения в целом и каждого неприводимого представления в отдельности. Построение выполняется в терминах инфинитезимальных операторов группы Лоренца и ее подгруппы — группы трехмерных вращений. Это позволяет дать физическую интерпретацию алгебраических составляющих для трех типов уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2002

Перевод авторов

Kosmachev O. S. P2-2002-217
On Invariants of Dirac Type Equation

Three Dirac-like equations, which cannot be reduced one to another by means of nonsingular transformations, are considered. The equations differ in the structural invariants. The previously developed procedure (cyclic structure method) allows one to construct irreducible representations for these equations, to examine the structure of each equation as a whole and each irreducible representation separately. The construction is realized in terms of infinitesimal operators of the Lorentz group and its subgroup — the 3-dimensional rotation group. This allows one to obtain physical interpretation of algebraic constituents for the three types of equations.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2002

Редактор *М. И. Зарубина*
Макет *Н. А. Киселевой*

Подписано в печать 07.10.2002.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 0,83. Тираж 425 экз. Заказ № 53552.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.