

P4-2003-80

В. К. Лукьянов, Е. В. Земляная, Б. Словинский<sup>1,2</sup>

**ПОЛНЫЕ СЕЧЕНИЯ ЯДРО-ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ  
В ПОДХОДЕ ГЛАУБЕРА–СИТЕНКО  
ДЛЯ РЕАЛИСТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ  
ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ**

Направлено в журнал «Ядерная физика»

---

<sup>1</sup>Факультет физики, Варшавский технологический университет,  
Польша

<sup>2</sup>Институт атомной энергии, Отвок-Сверк, Польша

# 1 Введение

В ядерной физике подход Глаубера–Ситенко [1], [2] используется, с учетом ряда модификаций, для изучения процессов ядро-ядерных столкновений при энергиях порядка  $10 \div 100$  МэВ на нуклон падающего ядра. При этом эйкональную фазу можно находить как задавая феноменологический оптический потенциал, так и вычисляя ее в рамках микроскопического подхода, где она выражается через распределения плотности ядер и амплитуду нуклон-нуклонного рассеяния.

Обычно параметры феноменологического потенциала  $U_{opt}(r) = V(r) + iW(r)$  подгоняют, сравнивая расчеты с экспериментальными сечениями упругого рассеяния и полными сечениями реакций. При этом остаются вопросы неоднозначности получаемых параметров [3]. Так, в работе [4] на примере полного сечения реакции, полученного аналитически для потенциала Вудса–Саксона, было показано, что оно определяется в основном двумя комбинациями  $RW_0$  и  $R/a$  из трех параметров потенциала: радиуса  $R$ , диффузности  $a$  и глубины  $W_0$ , и это позволяет задавать последние в широких пределах их возможных значений. Что же касается микроскопического подхода, то он, в принципе, не включает свободных параметров, и в нем вычисляются не потенциалы рассеяния, а сами эйкональные фазы. Это позволяет делать предсказательные расчеты, в том числе и полных сечений реакций с участием радиоактивных ядер, что важно, например, для решения задач трансмутации радиоактивных отходов [5], [6].

Начиная с ранней работы [7], микроподход использовался для расчета протон-ядерных сечений, а позднее, базируясь на теории многократного рассеяния нуклонов ядрами [1], [2], он был обобщен и на ядро-ядерное рассеяние [8], [9]. Его активно применяли в анализе полных сечений взаимодействия пучков легких ядер с ядами, что позволило, в частности, открыть у  ${}^6\text{He}$ ,  ${}^9\text{Li}$  нейтронное гало, а у  ${}^{11}\text{Be}$  - протонное, установить ядра, переобогащенные нейтронами или протонами (см., например, [10], а также обзоры [11], [12]). Большое внимание уделялось и изучению механизма рассеяния ядер, а именно учету отклонения истинной траектории от прямолинейной [13], [14], роли высших поправок к эйкональной фазе [15], проявлению эффектов кластеризации ядер [16] и другим.

Для большинства таких работ характерно использование гауссовых функций (G-функций) для ядерных плотностей, так как с ними можно провести разделение переменных в многомерных интегралах для эйкональных фаз и получить ответ в аналитической форме. Это главное, почему они и их модификации используются в расчетах сечений даже для рассеяния тяжелых ионов, хотя, конечно, физические соображения требуют в этом случае брать за основу функции протяженной формы. В ядерной физике чаще всего используются ферми-функции (F-функция)  $u_F(r) = [1 + \exp(r - R/a)]^{-1}$ , которые являются наиболее реалистическими для описания распределений плотностей и потенциалов ядер среднего и тяжелого веса. К сожалению, с F-функциями затруднены аналитические расчеты, например, невозможно разделить переменные в тех же многомерных интегралах для фаз. И тем не менее, они все больше входят в обиход не только численных, но и аналитических расчетов. В задачах рассеяния тяжелых ионов их применение особенно необходимо для описания формы потенциалов и плотностей на периферии, которая в этих процессах в основном и формирует дифференциальные сечения рассеяния и полные сечения реакций. По отношению к микроподходам это ставит задачу развивать аналитические методы расчета сечений с использованием реалистических форм распределения плотностей так, чтобы для каждого ядра непосредственно входили его индивидуальные параметры, известные из других экспериментов. Тогда можно будет уверенно предсказывать сечения для различных комбинаций сталкивающихся ядер и таким образом изучать истинный механизм их взаимодействия. Это и является целью настоящей работы.

В разделе 2 приведен ряд модификаций исходной формулы микроподхода для фазы рассеяния, что важно как для понимания механизма ядро-ядерного рассеяния, так и для расчетов без допущений, имеющих место в ряде работ. В разделе 3 даны явные выражения для так называемых функций профиля ядерных плотностей, задаваемых в виде гауссовой, однородной и симметризованной (SF) ферми-функций. Показано, как 4-мерный интеграл свертки для фазы сводится к одномерному, если плотность падающего (легкого) ядра задана в виде гауссовой функции, а ядра-мишени - в виде SF-функции. В случае произвольного вида плотностей его можно представить в виде одномерного интеграла от фурье-бесселевых образов их профилей. Дан явный вид такого образа для профиля ядерной SF-плотности. Сделаны выводы о применимости так называемых модифицированных гауссовских функций плотности. В разделе 4 исследуются вопросы использования ядерных плотностей, полученных из формфакторов ядер в электрон-ядерном рассеянии, влияние выбора радиуса NN-сил и искажения траектории рассеяния, роли ядерной среды. В разделе 5 дано сравнение с экспериментальными данными и сделаны выводы.

## 2 Основные формулы микроподхода

В эйкональном подходе дифференциальное сечение рассеяния имеет вид

$$f(q) = ik \int_0^{\infty} db b J_0(qb) \left( 1 - e^{i\Phi_N(b) + i\Phi_c(b)} \right), \quad (2.1)$$

где  $q = 2k \sin(\vartheta/2)$  есть переданный импульс,  $\vartheta$  – угол рассеяния, а  $\Phi_{N(c)}$  – ядерная(кулоновская) фаза рассеяния. Полное сечение реакции есть

$$\sigma_R = 2\pi \int_0^{\infty} db b (1 - T(b)), \quad (2.2)$$

где проникаемость

$$T(b) = e^{-\chi(b)} \quad (2.3)$$

означает вероятность падающему ядру проходить без взаимодействия через ядро-мишень при заданном прицельном параметре  $b$ . В эйкональном приближении [1], [2]

$$\chi(b) = 2Im\Phi_N(b). \quad (2.4)$$

В микроподходе соответствующие фазы определяются как

$$\Phi_N(b) = \frac{\bar{\sigma}_{NN}}{2} (i + \alpha_{NN}) \mathcal{I}(b), \quad (2.5)$$

$$\chi(b) = \bar{\sigma}_{NN} \mathcal{I}(b), \quad (2.6)$$

где  $\bar{\sigma}_{NN}$  есть усредненное по изоспинам полное сечение нуклон-нуклонного рассеяния, а  $\alpha_{NN}$  – отношение реальной к мнимой части нуклон-нуклонной амплитуды рассеяния вперед. Со ссылкой на работу [8] запишем интеграл конволюции в следующем виде:

$$\mathcal{I}(b) = \int d^2 s_p d^2 s_t \rho_p^o(s_p) \rho_t^o(s_t) f(\xi), \quad \vec{\xi} = \vec{b} - \vec{s}_p + \vec{s}_t. \quad (2.7)$$

Здесь векторы  $\vec{s}$ ,  $\vec{\xi}$  лежат в плоскости прицельного параметра  $b$ , перпендикулярной оси  $oz$  вдоль импульса  $\vec{k}_i$  падающего ядра<sup>1</sup>, а  $\rho^o(s)$  есть так называемые толщины (профили)

<sup>1</sup> В работе [17] аналогичное выражение получено в модели взаимодействующих трубок потоков нуклонов сталкивающихся ядер.

функций распределения плотностей центров масс нуклонов ("точечных нуклонов") налетающего ядра (с атомным весом  $A_p$ ) и ядра-мишени  $A_t$  <sup>2</sup>. Эти плотности  $\rho^o(r)$  отличаются от  $\rho(r)$  – распределений плотности материи в ядрах, состоящих из реальных, "одетых" нуклонов. Одним из неудобств является необходимость каждый раз находить точечные плотности  $\rho^o(r)$  на базе известных "экспериментальных" ядерных плотностей  $\rho(r)$ . Именно для последних имеется большой набор табличных данных, полученных из анализа формфакторов электрон-ядерного рассеяния <sup>3</sup>, и наша цель – развить подход таким образом, чтобы при расчете сечений по возможности использовать табличные  $\rho(r)$  и не вводить свободных параметров. Сами толщины определяются как

$$\rho(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \rho(\sqrt{s^2 + z^2}). \quad (2.8)$$

Функция  $f(\xi)$  определяет форму амплитуды нуклон-нуклонного взаимодействия

$$f(\xi) = (\sqrt{\pi}a_N)^{-2} e^{-\xi^2/a_N^2}, \quad a_N^2 = \frac{2}{3} r_{Nrms}^2. \quad (2.9)$$

Здесь  $r_{Nrms}^2$  – среднеквадратичный радиус NN-взаимодействия, а  $a_N^2 = 2\beta$  выражается через параметр наклона  $\beta$  амплитуды рассеяния нуклонов<sup>4</sup> в форме  $\exp(-q^2\beta/2)$ . Значения  $\beta$  при энергии порядка 1 ГэВ находятся в пределах  $0.21 \div 0.23$  фм<sup>-2</sup> [18], чему соответствует  $r_{Nrms}^2 = 0.63 \div 0.69$  фм<sup>2</sup>. В нашем случае нуклон-нуклонные силы действуют в ядерной среде. Чтобы учесть ее влияние, под интеграл вводят корректирующий фактор  $f_m$ . Позднее мы затронем этот вопрос более подробно.

Интеграл конволюции (2.7) близок по виду к 6-мерному интегралу "двойного фолдинга" в расчетах ядро-ядерного потенциала [19]. В обоих случаях приходится искать способы разделения переменных в подынтегральных функциях. В разделе 3 будет показано, что интеграл вида (2.7) можно вычислить явно, если обе плотности заданы в виде гауссовых функций, либо свести его к одномерному, когда одна из плотностей является гауссовой.

<sup>2</sup> Через  $\vec{s}$  и  $\vec{r}$  обозначены векторы в 2- и 3-мерных пространствах, причем в нашем случае  $r^2 = s^2 + z^2$ . Соответственно,  $\rho(r)$  и  $\rho^o(r)$  есть распределения плотности, а  $\rho(s)$  и  $\rho^o(s)$  – их профили.

<sup>3</sup> Вообще говоря, фигурирующие здесь плотности  $\rho(r)$  зависят от координат в системе центра масс соответствующего ядра. Однако при анализе экспериментальных формфакторов из них обычно не выделяют фактор движения центра масс  $\exp(q^2\langle r^2 \rangle/6A)$ , где  $\langle r^2 \rangle$  и  $A$  есть среднеквадратичный радиус и массовый номер ядра. Поэтому табличные  $\rho(r)$  дают распределения ядерного заряда (или) материи в поле фиксированного потенциала. При малых  $q$  и больших  $A$  плотности в обеих системах совпадают.

<sup>4</sup> Амплитуда есть  $f_N(q) = f_N(0)f(q)$ , где  $f_N(0) = (k_N/4\pi)\sigma_{NN}(i + \alpha_{NN})$ , а  $k_N$  – относительный импульс сталкивающихся нуклонов. Для  $f(q) = \exp(-q^2 a_N^2/4)$  преобразование Фурье–Бесселя  $f(\xi) = (2\pi)^{-2} \int \exp(-i\vec{q}\vec{\xi}) f(q) d^2 q$  дает выражение (2.9), а в приближении нулевого радиуса ( $a_N = 0$ ), когда  $f(q) = 1$ , оно сводится к дельта-функции в 2-мерном пространстве, т.е.  $f(\xi) = \delta^{(2)}(\xi)$ .

Вместе с тем существует стандартный прием приведения таких интегралов к одномерным за счет перехода к импульсному представлению. Для этого в (2.7) делаем двумерные фурье-бессель преобразования подынтегральных функций

$$u(s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-i\vec{k}\vec{s}} \tilde{u}(k) d^2k = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(ks) \tilde{u}(k) k dk, \quad (2.10)$$

где

$$\tilde{u}(k) = \int e^{i\vec{k}\vec{s}} u(s) d^2s = 2\pi \int_0^\infty J_0(ks) u(s) s ds. \quad (2.11)$$

Тогда (2.7) принимает вид

$$\mathcal{I}(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k dk J_0(kb) \tilde{\rho}_p^\circ(k) \tilde{\rho}_i^\circ(k) \tilde{f}(k), \quad (2.12)$$

где

$$\tilde{f}(k) = \exp(-k^2 r_{Nrms}^2/6). \quad (2.13)$$

Далее, используя для профиля ядерной плотности свертку

$$\rho_i(s) = \int d^2s_N \rho_N(s_N) \rho_i^\circ(|\vec{s} - \vec{s}_N|), \quad (2.14)$$

где  $\rho_N(s_N)$  - толщина плотности нуклона, с помощью (2.10) получаем

$$\tilde{\rho}_i(k) = \tilde{\rho}_N(k) \tilde{\rho}_i^\circ(k). \quad (2.15)$$

Для гауссовой плотности нуклона со среднеквадратичным радиусом  $r_{0rms}^2$  имеем

$$\tilde{\rho}_N(k) = \exp\left(-\frac{k^2 r_{0rms}^2}{6}\right). \quad (2.16)$$

Тогда из (2.12) следует

$$\mathcal{I}(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k dk J_0(kb) \tilde{\rho}_p^\circ(k) \tilde{\rho}_i^\circ(k) \exp\left(-\frac{k^2 \tau^2}{6}\right), \quad (2.17)$$

$$\tau^2 = r_{Nrms}^2 - r_{0rms}^2. \quad (2.18)$$

Если считать, что значения  $r_{Nrms}^2$  и  $r_{0rms}^2$  совпадают, то  $\tau^2 = 0$ , а значит

$$\mathcal{I}(b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} k dk J_0(kb) \tilde{\rho}_p^{\circ}(k) \tilde{\rho}_t(k) \quad (2.19)$$

и, соответственно, в координатном представлении

$$\mathcal{I}(b) = \int_0^{\infty} d^2s \rho_p^{\circ}(\zeta) \rho_t(s), \quad \vec{\zeta} = \vec{b} - \vec{s}. \quad (2.20)$$

Таким образом мы получили выражения для интегралов конволюции в виде (2.17), (2.19), (2.20), где вместо функций профиля "точечной" плотности ядра-мишени входят функции толщины распределения плотности ядерной материи  $\rho_t(s)$  (или  $\tilde{\rho}_t(k)$ ). Именно такие плотности обычно получают из анализа формфакторов ядер и приводят в таблицах, причем для ядер среднего и тяжелого веса их принято параметризовать в виде ферми-функций. В принципе, соотношениями (2.15), (2.16) можно воспользоваться также и для падающего ядра, то есть взять  $\tilde{\rho}_p^{\circ} = \tilde{\rho}_p / \tilde{\rho}_N$ . Но тогда под интегралами (2.17), (2.19) появится растущая гауссова функция, и если для профилей обеих плотностей брать реалистические функции с экспоненциальной асимптотикой, то интегралы будут расходиться в верхнем пределе. Можно, конечно, поступить формально, то есть либо "обрезать" интегрирование в точке начала роста подынтегральной функции, либо заменить гауссов формфактор нуклона  $\tilde{\rho}_N(k)$  (2.16) дипольной формулой (см. ниже (4.2)). С другой стороны, если для профиля плотности одного из ядер тоже брать гауссову функцию, то расходимость не возникает.

Наконец заметим, что нередко в расчетах фаз используют приближение нулевого радиуса ( $r_{Nrms}^2 = 0$ ), что приводит к интегралу конволюции (2.12) с  $\tilde{f}(k)=1$ , или, в координатном представлении, к выражению, аналогичному (2.20), где вместо  $\rho_t(s)$  будет стоять  $\rho_t^{\circ}(s)$ . Еще более грубое приближение, это когда там точечные плотности  $\rho^{\circ}$  заменяют ядерными  $\rho$ . Теперь видно, что такие приближения не являются необходимыми, а сами по себе они искажают истинный механизм ядро-ядерного рассеяния.

### 3 Фазы для реалистических плотностей ядер

Уже отмечалось, что для получения аналитических выражений фаз и сечений во многих работах используются гауссовы (G-функции) распределения плотностей и их профилей

$$\rho_G(r) = \rho_G(0) e^{-r^2/a_G^2}, \quad \rho_G(0) = A/(\sqrt{\pi}a_G)^3, \quad (3.1)$$

$$\rho_G(s) = (\sqrt{\pi}a_G) \rho_G(0) e^{-s^2/a_G^2}, \quad a_G^2 = \frac{2}{3}R_{rms}^2, \quad (3.2)$$

где единственный параметр  $a_G$  определяется среднеквадратичным радиусом ядра  $R_{rms}^5$ .

Приведем также функции однородного распределения плотности и ее профиля

$$\rho_u(r) = \rho_u(0) \Theta(R_u - r), \quad \rho_u(0) = 3A/4\pi R_u^3, \quad (3.3)$$

$$\rho_u(s) = \rho_u(0) \sqrt{R_u^2 - s^2} \Theta(R_u - s), \quad R_u^2 = \frac{5}{3} R_{rms}^2, \quad (3.4)$$

которые иногда используются для ядер среднего и тяжелого веса.

Можно приблизиться к правильному ходу реалистической плотности, а обычно это ферми-функция (F-функция), если ее аппроксимировать суммой гауссовых функций с подгоняемыми весовыми коэффициентами и параметрами  $a_G$ . Так поступали в работе [20], а в [21] такую подгонку делали непосредственно к профилю ферми-функции. К сожалению, эту процедуру приходится повторять при каждом новом наборе параметров  $R$  и  $a$  исходной F-функции. Можно, однако, использовать тот факт, что для тяжелых ионов сечения рассеяния и полные сечения реакций в первую очередь определяются поведением фаз на периферии столкновения. По-видимому, впервые это было учтено в работе [22], где ферми-распределение  $\rho_F(r)$  моделировалось только в области его "хвоста" с помощью *одной* гауссовой функции. Позднее, в [23] таким способом моделировалась не ферми-плотность, а ее профиль  $\rho_F(s)$ . Для этого к последней в двух точках на периферии "пришивали" профиль гауссовой функции (3.2), и таким образом находили *два* параметра  $a_G$  и  $\rho_G^0(0)$  модифицированной гауссовой  $\tilde{G}$ -функции

$$\rho_G(s) = (\sqrt{\pi} a_G) \rho_G(0) e^{-s^2/a_G^2}. \quad (3.5)$$

Эта функция не нормирована, ибо ее параметры уже не связаны друг с другом, как в (3.1). В общем случае при сшивании в двух точках  $s_1$  и  $s_2$  профиля  $\rho_G(s)$  с любого вида гладкой протяженной функцией  $\rho(s)$  получаем два определяющих ее параметра

$$\rho_G(0) = (\sqrt{\pi} a_G)^{-1} \rho(s_1) \exp(s_1^2/a_G^2), \quad (3.6)$$

$$a_G = \left[ \frac{s_2^2 - s_1^2}{\ln \rho(s_1) - \ln \rho(s_2)} \right]^{1/2}. \quad (3.7)$$

В работе [23] это сшивание  $\tilde{G}$ -профилей с профилями точечных ядерных ферми-распределений  $\rho_F^0(s)$  проводилось в точках  $s_1 = c$  и  $s_2 = c + 4d$  ( $c$  и  $d$  – радиус и диффузность  $\rho_F^0(r)$ -плотности), а предварительно сами  $\rho_F^0(s)$ -профили находились численным интегрированием в (2.8). При этом параметр диффузности для всех ядер

<sup>5</sup> Там, где надо брать точечные распределения  $\rho_G^0(r)$ , параметр  $a_G^2 = \frac{2}{3} \mathcal{R}_{rms}^2$  можно определить через среднеквадратичный радиус распределения в ядре точечных нуклонов  $\mathcal{R}_{rms}^2 = R_{rms}^2 - r_{0rms}^2$ .



принимался одинаковым  $d = 0.53$  фм, а параметр радиуса  $c$  находился по известным данным о среднеквадратичных зарядовых радиусах ядер  $R_{rms}^2$  и нуклона  $r_{0rms}^2$  с помощью формулы

$$\mathcal{R}_{rms}^2 = R_{rms}^2 - r_{0rms}^2 = \frac{3}{5}c^2 \left[ 1 + \frac{7}{3} \left( \frac{\pi d}{c} \right)^2 \right]. \quad (3.8)$$

Вообще говоря, точность такого шивания каждый раз требует проверки, ибо ядерные ферми-плотности  $\rho_F(r)$  имеют разные диффузности  $a$  для разных ядер. Кроме того, значения параметров  $\bar{G}$ -функций зависят также от выбора точек шивания.

Начиная с работы [24], сначала в расчетах ядерных формфакторов в  $eA$ -рассеянии, а затем и в других задачах ядерной физики стала использоваться симметризованная SF-функция

$$u_{SF}(r) = \frac{\sinh R/a}{\cosh R/a + \cosh r/a} = \frac{1}{1 + \exp \frac{r-R}{a}} - \frac{1}{1 + \exp \frac{r+R}{a}}. \quad (3.9)$$

Она обладает рядом преимуществ перед F-функцией, в том числе и при проведении аналитических расчетов [25], [26]. Ее универсальность в приложениях состоит в том, что она хорошо моделирует распределения плотности ядер от легких до тяжелых [27]. Из (3.9) видно, что для ядер среднего и тяжелого веса ( $R \gg a$ ) эта функция практически совпадает с обычной ферми-функцией  $u_F(r) = 1/(1 + \exp[(r - R)/a])$ . Поэтому для нее можно использовать также табличные данные ферми-распределений как ядерных плотностей [28], так и плотностей точечных нуклонов [29]. Для нашей задачи важно то, что именно для SF-функции удалось найти ее профиль в явном виде [30] и таким образом существенно облегчить всю дальнейшую работу. Так, SF-распределение плотности и его профиль имеют вид

$$\rho_{SF}(r) = \rho_{SF}(0) \frac{\sinh R/a}{\cosh R/a + \cosh r/a}, \quad \rho_{SF}(0) = \frac{3A}{4\pi R^3} \left[ 1 + \left( \frac{\pi a}{R} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (3.10)$$

$$\rho_{SF}(s) = 2R \rho_{SF}(0) \frac{\sinh R/a}{\cosh R/a + \cosh s/a} P(s). \quad (3.11)$$

Здесь главная зависимость профиля от  $s$  определяется SF-функцией с теми же параметрами, что и у плотности  $\rho_{SF}(r)$ . Корректирующая функция  $P(s)$  дана в [30] и определяется через вспомогательную функцию  $x(s)$ . Для последней выполняется условие  $x(s) \ll 1$ , что позволяет упростить  $P(s)$ , так что

$$P(s) \simeq P_a(s) = \frac{a}{R} [\ln 4 - \ln x(s)], \quad (3.12)$$

$$x(s) = \frac{2}{\kappa} \frac{\cosh s/a}{\cosh s/a + \cosh R/a} \left\{ 1 + \frac{\kappa - 1}{\cosh s/a} \right\}, \quad (3.13)$$

а  $\kappa$  выражается через радиус  $R$  и диффузность  $a$  исходной плотности

$$\kappa = e^\delta, \quad \delta = 1.10315 + 0.34597(R/a) - 0.00446(R/a)^2. \quad (3.14)$$

Числовые коэффициенты в (3.14) были найдены в [30] подгонкой профиля (3.11) к численным значениям профильного интеграла (2.7) от функции  $\rho_{SF}(r)$  (3.10) в области изменения параметров  $5 \leq R/a \leq 20$ . В центре ядра  $P_a(0) = 1$ , в точке радиуса  $P_a(R) \simeq 2.4(a/R) + 0.232$ , а на большом удалении  $P_a(\infty) = (a/R)[\ln 2 + \delta] \simeq 2(a/R) + 0.232$ . Таким образом, в области основного вклада на периферии от  $s = R$  до  $\infty$  она изменяется весьма незначительно, на величину  $\simeq 0.4(a/R)$ . Это часто позволяет в профиле плотности (3.11) брать  $P_a(s)$  только в одной точке, например, при  $s = R$ , или в точке  $s = s_{1/3} = R + a \ln 2$ , где сама плотность падает в три раза <sup>6</sup>. Тогда при условии  $\cosh R/a \gg \kappa$  имеем

$$P_a(R) = \frac{a}{R} [\ln 4\kappa] = \frac{a}{R} \left[ 2.48945 + 0.34597 \frac{R}{a} - 0.00446 \left( \frac{R}{a} \right)^2 \right], \quad (3.15)$$

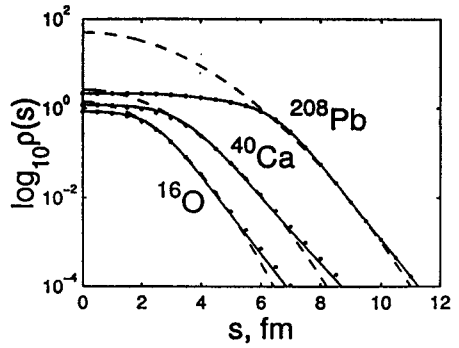
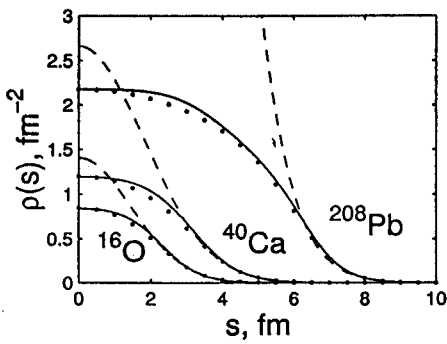
и соответственно

$$\rho_{SF}(s) \simeq 2R \rho_{SF}(0) \frac{\sinh R/a}{\cosh R/a + \cosh s/a} P_a(R). \quad (3.16)$$

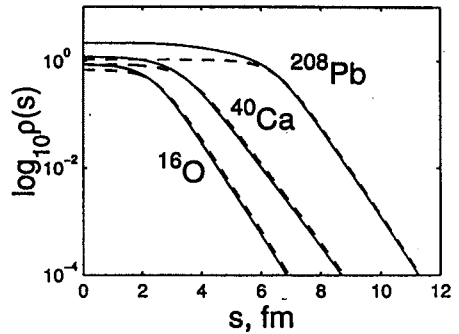
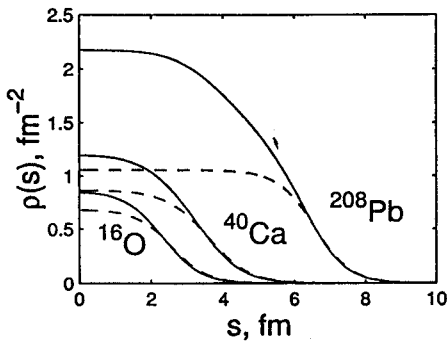
На рис.1 показаны функции профиля SF-плотности для трех ядер  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$ ,  $^{208}\text{Pb}$ , рассчитанные численно по формуле (2.8) (точки), и соответствующие им  $\bar{G}$ -профили (пунктир), пришитые согласно (3.6), (3.7) при  $R$  и  $R + 4a$ . Сплошные кривые - расчет  $\rho_{SF}(s)$  по аналитической формуле (3.11). Параметры SF-плотностей взяты из [27] и приведены здесь в табл.1. Видно, что имеет место сильное расхождение  $\bar{G}$ -профилей с исходными профилями SF-плотности во внутренней области (например, почти на два порядка величины для  $^{208}\text{Pb}$ ), а также в области, где сама плотность падает примерно на два порядка и ниже. Профили ступенчатой и гауссовой форм распределения плотности будут еще сильнее отличаться от профилей ферми-функций.

На рис.2 показаны  $\rho_{SF}(s)$  для тех же ядер, но рассчитанные по аналитическим формулам, сплошные - по (3.11) с точной корректирующей функцией  $P(s)$ , пунктир - по

<sup>6</sup>В работе [19] установлено, что поведение ядро-ядерных сечений рассеяния определяется в основном областью перекрытия плотностей на их периферии при  $s \geq s_{1/3}$ .



**Рис.1.** Функции толщины SF-плотности. Точки – численное интегрирование по формуле (2.8), пунктир – ”пришитые” к ним  $\bar{G}$ -профили. Сплошные кривые – расчет толщины SF-плотности по аналитической формуле (3.11). Параметры плотностей взяты из табл.1.



**Рис.2.** Сравнение функций толщины SF-плотностей, рассчитанных по аналитической формуле (3.11) с точной корректирующей функцией  $P(s)$  (сплошные кривые), и с приближенной  $P(s=R)$  по формуле (3.16). Параметры те же, что и на рис.1

(3.16) с приближенной  $P_a(s = R)$ . Оказывается, что использование корректирующей функции в точке радиуса практически не меняет поведения функции профиля в области периферии. Небольшая разница, не более чем в два раза для  $^{208}\text{Pb}$ , появляется только во внутренней области, что намного меньше показанного на рис.1 при использовании  $\bar{G}(s)$ -функций.

**Таблица 1.** *Параметры симметризованных ферми-распределений ядерной плотности  $\rho_{SF}(r, R, a)^7$*

Ядро	$R$ , фм	$a$ , фм	$R_{rms}$ , фм	Ссылка
$^{12}\text{C}$	2.214	0.488	2.496	[27]
$^{16}\text{O}$	2.562	0.497	2.711	[27]
$^{20}\text{Ne}$	2.74	0.572	3.004	[28]
$^{24}\text{Mg}$	2.934	0.569	3.105	[27]
$^{27}\text{Al}$	3.07	0.519	3.06	[28]
$^{28}\text{Si}$	3.085	0.563	3.175	[27]
$^{32}\text{S}$	3.255	0.601	3.370	[27]
$^{40}\text{Ca}$	3.556	0.578	3.493	[27]
$^{66}\text{Zn}$	4.340	0.559	3.952	[28]
$^{89}\text{Y}$	4.86	0.542	4.27	[28]
$^{208}\text{Pb}$	6.557	0.515	5.427	[27]

Таким образом, в дальнейшем мы имеем возможность выбирать профили  $\rho(s)$  явного аналитического вида для гауссовской, ступенчатой и симметризованной ферми-функций. Ниже они будут использоваться в расчетах микроскопических эйкональных фаз  $\chi(b)$  и полных сечений реакций.

Сначала приведем выражение интеграла конволюции (2.20), когда для профиля плотности падающего ядра  $\rho_p^\circ(\zeta)$  берется гауссова функция (3.5). Подставляя в него

$$\rho_{G,p}^\circ(|\vec{b} - \vec{s}|) = (\sqrt{\pi} a_{G,p}^\circ) \rho_p^\circ(0) \exp\left[-\frac{1}{a_{G,p}^{\circ 2}} (b^2 - 2bs \cos \varphi + s^2)\right] \quad (3.17)$$

<sup>7</sup> Параметры, взятые из [28], даны там для ферми-распределений  $\rho_F(r, R, a)$ , однако последние близки к  $\rho_{SF}(r, R, a)$  для указанных трех ядер.

и интегрируя по  $\varphi$  в пределах  $0 \div 2\pi$  [31] (см. Приложение), получаем

$$\mathcal{I}_{\bar{G},t}(b) = 2\pi(\sqrt{\pi}a_{\bar{G},p}^{\circ})\rho_{\bar{G},p}^{\circ}(0) \exp\left(-\frac{b^2}{a_{\bar{G},p}^{\circ 2}}\right) \int_0^{\infty} s ds \rho_t(s) \exp\left(-\frac{s^2}{a_{\bar{G},p}^{\circ 2}}\right) I_0\left(\frac{2bs}{a_{\bar{G},p}^{\circ 2}}\right), \quad (3.18)$$

где  $I_0(x)$  - функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента.

Далее, в более общем случае, когда значения *rms*-радиусов нуклона и NN-взаимодействия различаются, удобно использовать интеграл конволюции (2.7) с профилями точечных плотностей для обоих ядер. Тогда (см. Приложение) при гауссовой  $\bar{G}$ -функции профиля падающего ядра (3.5) интеграл конволюции равен

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\bar{G},N,t}(b) = 2\pi \frac{a_{\bar{G},p}^{\circ 2}}{a_{\bar{G},p}^{\circ 2} + a_N^2} (\sqrt{\pi}a_{\bar{G},p}^{\circ})\rho_{\bar{G},p}^{\circ}(0) \exp\left(-\frac{b^2}{a_{\bar{G},p}^{\circ 2} + a_N^2}\right) \times \\ \times \int_0^{\infty} s ds \rho_t^{\circ}(s) \exp\left(-\frac{s^2}{a_{\bar{G},p}^{\circ 2} + a_N^2}\right) I_0\left(\frac{2bs}{a_{\bar{G},p}^{\circ 2} + a_N^2}\right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Если сюда подставить гауссову функцию профиля для ядра-мишени, то интеграл в (3.19) берется явно [31], и получается

$$\mathcal{I}_{\bar{G},N,\bar{G}}(b) = \frac{1}{\pi} \frac{(\sqrt{\pi}a_{\bar{G},p}^{\circ})^3 (\sqrt{\pi}a_{\bar{G},t}^{\circ})^3}{a_{\bar{G},p}^{\circ 2} + a_{\bar{G},t}^{\circ 2} + a_N^2} \rho_{\bar{G},p}^{\circ}(0)\rho_{\bar{G},t}^{\circ}(0) \exp\left(-\frac{b^2}{a_{\bar{G},p}^{\circ 2} + a_{\bar{G},t}^{\circ 2} + a_N^2}\right). \quad (3.20)$$

Этот результат известен, начиная с работы [22], и часто воспроизводится во многих последующих работах. Заметим, что при выборе нормированных гауссовых функций (3.1) надо в (3.18) - (3.20) заменить  $\bar{G} = G$  и  $(\sqrt{\pi}a_i^{\circ})^3 \rho_{\bar{G},i}^{\circ}(0) = A_i$ .

Мы полагаем установленным фактом, что реалистические функции распределения плотности ядер среднего и тяжелого веса - это (симметризованные) ферми-функции, параметры которых, как правило, получают из анализа формфакторов *eA*-рассеяния. Соответствующие им профильные функции даны в явном виде (3.10) или (3.16). Также в явном виде известны функции Бесселя  $I_0(x)$  и  $J_0(x)$ , которые аппроксимируются многочленами [32]. Таким образом все функции в интегралах конволюции (3.18) и (3.19) заданы явно, что весьма практично при численном интегрировании.

В случае, когда распределения плотности обоих ядер задаются в виде (симметризованных) ферми-функций, целесообразно пользоваться интегралами конволюции в импульсном представлении (2.12), (2.17) или (2.19). При этом профили SF-плотностей удобно брать в приближении (3.16). Действительно, подставляя (3.16) в (2.11), запишем

$$\tilde{\rho}_{SF}(k) = 4\pi R \rho_{SF}(0) P_a(R) \mathcal{F}_{SF}(k, a, R), \quad (3.21)$$

где

$$\mathcal{F}_{SF}(k, a, R) \equiv \mathcal{F}_{SF}(k) = \int_0^{\infty} s ds J_0(ks) \frac{\sinh R/a}{\cosh R/a + \cosh s/a}. \quad (3.22)$$

Учитывая периферический характер столкновения ядер, можно предположить, что основной вклад вносит область  $ks \gg 1$ . Тогда (см., например, [33]) имеем

$$\mathcal{F}_{SF}(k) = \frac{\pi a R}{\sinh \pi a k} J_1(kR), \quad (3.23)$$

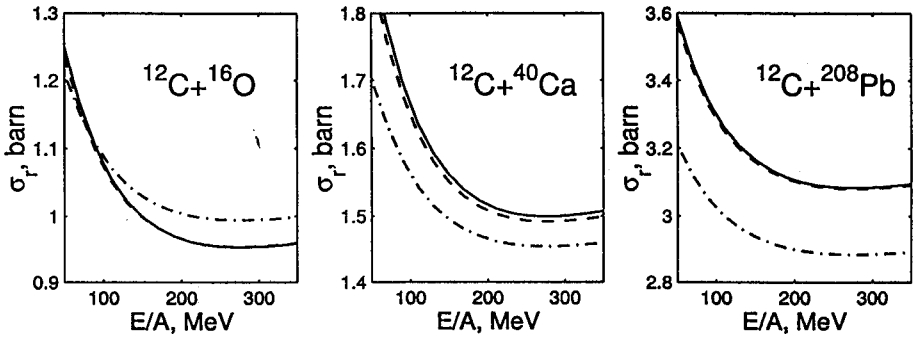
а если учесть вклад поправок высшего порядка, то согласно [25] получается

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{SF}(k) = & \frac{1}{k^2} \frac{\pi a k}{\sinh \pi a k} \left\{ kR J_1(kR) + \frac{1}{2} (T-1) J_0(kR) + \right. \\ & + \frac{1}{8} [(2T+1)(T-1) - (\pi a k)^2] \frac{J_1(kR)}{kR} + \\ & \left. + \frac{1}{16} [3(2T^2+2T+1)(T-1) - 5(\pi a k)^2 T] \frac{J_2(kR)}{(kR)^2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

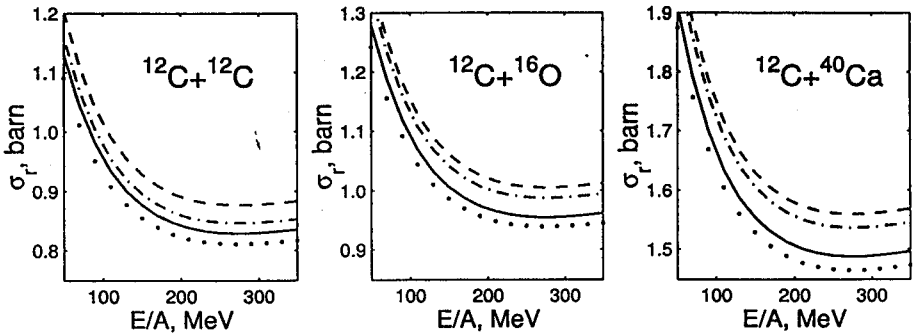
Здесь обозначено

$$T \equiv T(k) = \frac{\pi a k}{\tanh \pi a k}. \quad (3.25)$$

На рис.3 показаны рассчитанные полные сечения реакций столкновения ядер  $^{12}C$  при энергиях от 50 до 350 МэВ/нуклон с ядрами  $^{16}O$ ,  $^{40}Ca$ ,  $^{208}Pb$ , для которых ядерные плотности выбирались в виде SF-функций, модифицированных  $\bar{G}$ -функций и U-функций однородного распределения. При расчете  $\chi$ -фазы использовался интеграл конволюции (3.18). Для падающего ядра  $^{12}C$  была взята  $\bar{G}$ -функция профиля, пришитая в точках  $s_1 = c$  и  $s_2 = c + 4a$  (см. (3.5)-(3.7)) к профилю точечной SF-плотности (параметры в табл.2). Таким же образом сшивались  $\bar{G}$ -функции профиля ядер-мишеней с параметрами  $\rho_{SF}$  из табл.1. Там же даны и  $R_{rms}$  – радиусы, которые брали для расчета радиуса  $R_u$  плотности однородного распределения (3.4). Значения полных сечений нуклон-нуклонного рассеяния  $\sigma_{NN}$  в зависимости от энергии взяты из [23] (см. выше (4.8)-(4.10)). Видно, что для плотности в виде "ступеньки" (штрихпунктир) поведение полного сечения реакции сильно отличается от того, что дает физически обоснованная SF-плотность (сплошные линии). Расчеты с SF- и  $\bar{G}$ -моделями (пунктир) оказываются в удовлетворительном согласии друг с другом. Небольшое превышение сечений для SF-функций при низких энергиях обусловлено протяженным "хвостом" последних. Слабый



**Рис.3.** Полные сечения реакций при разных моделях функций толщины плотности. Для падающего ядра  $^{12}\text{C}$  к его профилю SF-точечной плотности его (параметры в табл.2) подогнан  $\bar{G}$ -профиль. Сплошные кривые – для ядер-мишеней с профилями SF-ядерных плотностей (параметры в табл.1), штрихпунктир – с профилями однородных плотностей (3.4), пунктир –  $\bar{G}$ -модель (3.5)



**Рис.4.** Зависимость расчетов сечений от параметров точечной плотности из данных электрон-ядерного рассеяния. Сплошные кривые – с параметрами из табл.2, пунктирные – расчет параметров по (4.4),(4.5); штрихпунктир – с параметрами из [37]; жирные точки – расчет в импульсном представлении с использованием (3.21) (см. текст)

относительный подъем сечений с  $\bar{G}$ -функциями ядра-мишени при больших энергиях связан с их большей величиной во внутренней области ядра, что приводит к более раннему "включению" поглощения по сравнению с SF-моделью.

Расчеты сечений в импульсном представлении, когда для обоих ядер берутся реалистические  $\rho_{SF}$ -функции с приближенной корректирующей  $P_c(R)$ -функцией (3.15) и, соответственно, приближенными профилями (3.16) и (3.21), приводит (см. рис.4) к небольшой  $\approx 2\%$  разнице между такими расчетами ("жирные" точки) и точными (сплошные кривые).

## 4 Расчеты и обсуждение

### 4.1 Об использовании ядерных плотностей из $\epsilon A$ -рассеяния

В интегралы конволюции (2.7) и (2.12) входят профили плотностей ядер из точечных нуклонов  $\rho^\circ(s)$ , которые интегрируются вместе с профилем формфактора амплитуды  $NN$ -взаимодействия  $f(\xi)$ . Иногда эти интегралы можно привести к виду (2.19), (2.20), где точечной остается только одна из плотностей, а другая является ядерной  $\rho(s)$ . Таким образом, вопрос о нахождении плотности точечных нуклонов полностью не снимается, поэтому рассмотрим, как эти плотности можно получать. Вообще говоря, их можно рассчитывать в рамках ядерных моделей, например, с помощью метода Хартри – Фока. Однако мы изначально ставили задачу использовать в первую очередь данные других экспериментов, например, о зарядовых формфакторах ядер либо извлекаемых из них ядерных плотностях. При этом реалистической формой точечных плотностей, получаемых на этой основе, мы по-прежнему будем считать  $\rho_{(S)F}^\circ(r)$ .

Первый метод [29] основан на выделении из экспериментального формфактора ядра  $F(q)$  формфактора "ядра с точечными протонами"  $F^\circ(q)$  и извлечения из последнего распределения плотности точечных нуклонов. В этом случае, подобно (2.15), формфактор ядра представлялся в виде

$$F(q) = F_P(q) F^\circ(q), \quad (4.1)$$

а для формфактора протона использовалась дипольная формула, которую при малых переданных импульсах можно аппроксимировать гауссовой функцией

$$F_P(q) = \left(1 + \frac{q^2 r_{0rms}^2}{12}\right)^{-2} \simeq \exp(-q^2 r_{0rms}^2/6). \quad (4.2)$$

Далее из формфактора  $F^\circ(q)$  методом модельно-независимого анализа восстанавливалась плотность  $\rho^\circ(r)$  в виде суммы  $\rho_{SF}^\circ(r)$ -функции и ее вариаций в виде конечного числа



производных с подгоняемыми весовыми коэффициентами. Расчеты самого формфактора велись не в борновском, а в высокоэнергетическом приближении [34], [35], которое дает результаты, близкие к получаемым численным решением уравнения Дирака.

**Таблица 2.** *Параметры симметризованных ферми-распределений плотности точечных нуклонов в ядрах  $\rho_{SF}^0(r, c, d)$  [29]*

Ядро	$^{12}\text{C}$	$^{16}\text{O}$	$^{24}\text{Mg}$	$^{28}\text{Si}$	$^{32}\text{S}$	$^{40}\text{Ca}$
$c$ , фм	2.275	2.624	2.984	3.134	3.291	3.593
$d$ , фм	0.393	0.404	0.484	0.477	0.520	0.493

В табл. 2 мы воспроизводим часть этих данных [29], а именно параметры радиуса  $c$  и диффузности  $d$  плотности  $\rho_{SF}^0(r, c, d)$ , исключая радиальные вариации плотности, которые существенны только при очень больших передачах импульса. Отметим, что значение  $rms$ -радиуса протона  $r_{0rms}^2 = 0.658 \text{ фм}^2$ , использованное в анализе [29], близко к  $r_{0rms}^2 = 0.65 \text{ фм}^2$  ядерного нуклона в расчетах потенциала двойного фолдинга [19]. Поэтому полученные в [29] точечные плотности вполне можно относить к распределениям плотности точечных нуклонов  $\rho_{SF}^0(r)$ <sup>8</sup>.

Другой метод получения точечных плотностей из данных о ядерных плотностях был предложен в работе [36]. Суть состоит в сравнении  $r^n$ -моментов, рассчитанных с помощью формулы фолдинга для ядерной плотности

$$\int d^3r r^n \rho_{SF}(r, R, a) = \int d^3r d^3r' r^n \frac{\exp(-r'^2/a_0^2)}{(\sqrt{\pi}a_0)^3} \rho_{SF}^0(|\vec{r}' - \vec{r}|, c, d), \quad a_0^2 = \frac{2}{3}r_{0rms}^2. \quad (4.3)$$

Используя приближенные методы работы с ферми-функциями (см., например, [26], [33]) и удерживая в интегралах члены разложения порядка  $(\pi a/R)^2$  и  $r_{0rms}^2/9c^2$ , левую и правую части (4.3) можно представить в одинаковой форме явного вида. Из их сравнения следует [36]

<sup>8</sup> Предполагая связь нейтронной и протонной плотностей ядра как  $\rho_N^0(r) = (N/Z)\rho_Z^0(r)$  и задавая  $rms$ -радиусы ядерной плотности  $R_{rms}^2$ , точечного распределения  $\mathcal{R}_{rms}^2$ , а также протона  $\langle r^2 \rangle_P = 0.76 \text{ фм}^2$  и нейтрона  $\langle r^2 \rangle_N = -0.11 \text{ фм}^2$  (см. [19]), находим из соотношения  $R_{rms}^2 = \mathcal{R}_{rms}^2 + \langle r^2 \rangle_P + \langle r^2 \rangle_N = \mathcal{R}_{rms}^2 + \langle r^2 \rangle$ , что  $rms$ -радиус нуклона  $\langle r^2 \rangle = \langle r^2 \rangle_P + \langle r^2 \rangle_N = 0.65 \text{ фм}^2$ .

$$c = R \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{r_{0rms}}{R} \right)^2 \right], \quad (4.4)$$

$$d = a \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r_{0rms}}{\pi a} \right)^2 \right]. \quad (4.5)$$

Если воспользоваться параметрами ядерной плотности  $\rho_{SF}(r, R, a)$  из табл.1 и принять  $r_{0rms}^2 = 0.658 \text{ фм}^2$ , то расчеты по формулам (4.4) и (4.5) дают по сравнению с данными табл.2 немного заниженные (менее 1%) параметры радиуса  $c$  точечной плотности и завышенные (с разницей не более 10%) параметры диффузности  $d$ . Чтобы выяснить, насколько важна точность их определения в расчетах полных сечений, обратимся к рис.4. В этом случае в интеграле свертки (2.12) для обоих ядер взяты SF-точечные плотности. Сплошными кривыми показаны результаты с параметрами  $c$  и  $d$  из табл.2. Пунктирные кривые - это когда параметры  $c$  и  $d$  рассчитаны по формулам (4.4), (4.5) на основе данных  $R$  и  $a$  из табл.1. Они оказались равными (в фм), соответственно, для  $^{12}\text{C}$ : 2.313, 0.42; для  $^{16}\text{O}$ : 2.648, 0.43; и для  $^{40}\text{Ca}$ : 3.62, 0.52. Штрихпунктиром показаны параметры точечных плотностей из работы [37] ( $^{12}\text{C}$ : 2.1545, 0.425;  $^{16}\text{O}$ : 2.525, 0.45;  $^{40}\text{Ca}$ : 3.60, 0.523). Там они использовались при расчете реальной части ядроядерных потенциалов двойного фолдинга, что позволило объяснить данные упругого рассеяния ядер при энергиях порядка 10 МэВ/нуклон. Во всех случаях мы выбирали радиус NN-взаимодействия  $r_{Nrms}^2 = 0.658 \text{ фм}^2$ . Видно, что разница между сечениями находится в пределах  $\approx 6 \div 10\%$ , причем наибольшая имеет место для  $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ . Мы считаем, что наиболее оправдан метод получения плотности точечных нуклонов из анализа формфакторов ядер  $F^o(q)$ , и составление таблиц таких плотностей представляется насущной задачей.

## 4.2 О выборе радиуса NN-взаимодействия

В разделе 2 было показано, что при равных радиусах нуклона и нуклон-нуклонного взаимодействия  $r_{0rms}^2 = r_{Nrms}^2$  интеграл конволюции упрощается и сводится к (2.20) с перекрытием только профильных функций распределения ядерной плотности ядрамишени и точечной плотности падающего ядра. Однако, что касается параметра формы NN-взаимодействия  $a_N^2 = (2/3)r_{Nrms}^2$ , то из данных рассеяния свободных нуклонов можно получить  $r_{Nrms}^2$  в пределах  $0.63 \div 0.69 \text{ фм}^2$ . В то же время  $rms$ -радиус нуклона  $r_{0rms}^2$  в дипольной формуле (4.2) считался равным  $0.658 \text{ фм}^2$  [29], а в расчетах ядроядерных потенциалов двойного фолдинга [19] его брали равным  $0.650 \text{ фм}^2$ . С этими значениями радиусов мы провели расчеты полных сечений реакций (рис.5). Интеграл свертки взят в виде (3.19). Параметры точечных плотностей  $c$  и  $d$  ядер  $^{12}\text{C}$ ,  $^{16}\text{O}$ ,  $^{40}\text{Ca}$  даны в табл.2, а для ядра  $^{208}\text{Pb}$  они рассчитывались по формулам (4.4),(4.5). Для падающего ядра  $^{12}\text{C}$  к SF-профилю пришивался  $\bar{G}$ -профиль, как и на рис.3. Из рис.5

видно, что в каждом из рассмотренных примеров сечения практически совпадают, особенно когда мишенью является тяжелое ядро. Таким образом, изучение полных сечений ядро-ядерных реакций пока не позволяет ставить вопрос о возможностях его использования для определения разницы в  $rms$ -радиусах нуклона и NN-взаимодействия. Более того, надо иметь в виду, что параметр  $a_N$  амплитуды NN-рассеяния в ядерной среде может отличаться, вообще говоря, от своего значения в случае рассеяния свободных нуклонов.

### 4.3 Влияние искажения траектории

В кулоновском поле отталкивания траектория падающего ядра отклоняется от центра рассеяния, что, естественно, приводит к уменьшению полного сечения реакции. Для полных сечений этот эффект был учтен в работе [38] заменой в фазе  $\chi(b)$  прицельного параметра  $b$  на расстояние минимального сближения ядер  $b_c$  в кулоновском поле

$$b \rightarrow b_c = \bar{a} + \sqrt{\bar{a}^2 + b^2}, \quad (4.6)$$

где  $\bar{a} = Z_p Z_t e^2 / 2E_{c.m.}$  есть полурасстояние максимального сближения в поле  $Z_p Z_t e^2 / r$  при  $b = 0$ . Процедуру замены  $b$  на  $b_c$  в ядерной части фазы  $\Phi_N(b)$  стали использовать также в расчетах дифференциальных сечений упругого рассеяния [13], и в общем она себя вполне оправдала (см., например, [39]). В принципе, на периферии столкновения можно также учесть вклад реальной части  $V(r)$  притягивающего ядерного потенциала, что приблизит кулоновскую траекторию к ядру-мишени. Если главной областью упругих столкновений считать  $b \geq R_s = R_p + R_t + (a_p + a_t) \ln 2$ , где плотности ядер перекрываются менее чем на 1/3 от своих значений в центре [19], то влияние в этой области "хвоста" ядерного потенциала можно качественно учесть заменой

$$b \rightarrow \tilde{b}_c = \tilde{a} + \sqrt{\tilde{a}^2 + b^2}, \quad (4.7)$$

где  $\tilde{a} = (Z_p Z_t e^2 - R_s |V(R_s)|) / 2E_{c.m.}$ . Более рафинированный способ включения ядерного искажения был дан в [40] и применялся в ряде работ (см., например, [14]). Однако если сам оптический потенциал  $V_{opt}(r)$  находит численной подгонкой к данным дифференциальных сечений упругого рассеяния, то использование его реальной части для учета искажения траектории в расчетах полных сечений реакций  $\sigma_R$  практически теряет смысл. Действительно, в таких случаях данные о  $\sigma_R$ , если они имеются, обычно тоже включаются в процедуру подгонки. И наоборот, если таковые отсутствуют, то их вычисляют на основе полученной  $S_1$ -матрицы. Часто на эти "вычисленные"  $\sigma_R$  ссылаются как на "экспериментальные данные" о полных сечениях. Таким образом, использование реальной части подгоночного оптического потенциала для учета искажения траектории имеет смысл, пожалуй, только для построения эйконольных фаз искаженных волн в расчетах неупругого рассеяния и реакций передач нуклонов в рамках теории прямых

реакций. Другое дело, когда реальная часть потенциала ядро-ядерного рассеяния сама рассчитывается, например, методом фолдинга. Тогда и дифференциальные, и полные сечения имеет смысл рассчитать в подходе Глаубера – Ситенко с учетом искажения траектории как кулоновским, так и ядерным полем.

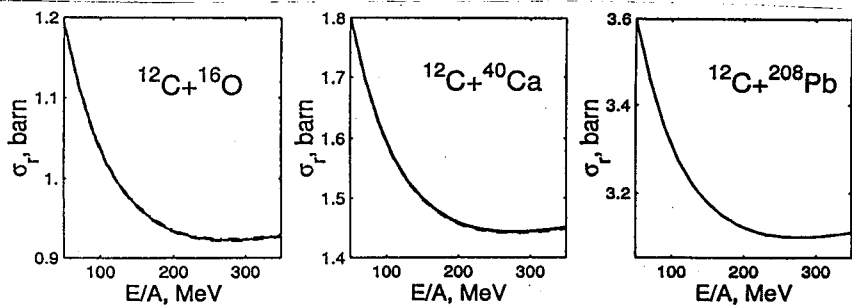
На рис.6 приводятся расчеты по формуле (3.18) полных сечений реакций  $^{13}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$  и  $^{16}\text{O} + ^{28}\text{Si}$  без учета искажения траекторий (сплошные кривые), с учетом только кулоновского искажения методом (4.6) (пунктир), а также кулоновского и ядерного искажения методом (4.7) (штрихпунктир). В этом последнем случае надо задавать параметры реальной части оптических потенциалов ядро-ядерного рассеяния, и для  $^{13}\text{C} + ^{208}\text{Pb}$  мы брали их из [41] (потенциал С при 390 МэВ), а для  $^{16}\text{O} + ^{28}\text{Si}$  из [42] (потенциал E-18 при 215.2 МэВ). При расчете фаз мы использовали для  $^{13}\text{C}$  параметры точечной плотности ядра  $^{12}\text{C}$  и брали их, а также параметры плотности  $^{16}\text{O}$  из табл.2. Для  $^{208}\text{Pb}$  и  $^{28}\text{Si}$  такие параметры рассчитывались с помощью формул (4.4), (4.5) на основе значений  $R$  и  $a$  из табл.1. Как и ожидается, учет кулоновского искажения приводит к заметным, порядка 10%, поправкам в расчетах полных сечений реакций на тяжелых ядрах при энергиях 100 МэВ на нуклон и ниже, что выходит за пределы экспериментальных ошибок. По мере роста энергии столкновения эти поправки уменьшаются, а для более легких ядер-мишеней (правая часть рис.6) составляют примерно 2%, так что их можно не учитывать. Вклад ядерного искажения мал по сравнению с кулоновским для  $^{208}\text{Pb}$  и сопоставим с кулоновским для реакции на  $^{28}\text{Si}$ , хотя в обоих случаях этот эффект мал по сравнению с кулоновским. Кроме того, надо иметь в виду, что реальная часть ядерного потенциала убывает с ростом энергии, но это в оценке не учитывалось.

#### 4.4 Роль ядерной среды

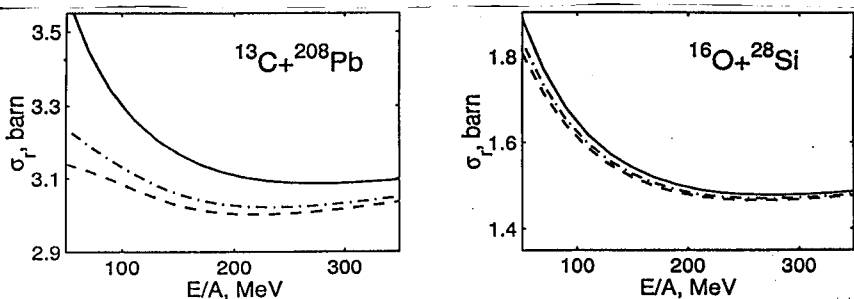
В подходе Глаубера – Ситенко фигурируют амплитуда и сечение рассеяния свободных нуклонов. Мнимая часть амплитуды нуклон-нуклонного рассеяния вперед пропорциональна полному сечению  $\sigma_{NN}(\varepsilon_{lab})$ , и именно оно определяет основную зависимость ядерного сечения от энергии столкновения  $E_{lab} = \varepsilon_{lab} A_p$ . Зависимость самого сечения  $\sigma_{NN}(\varepsilon_{lab})$  от энергии падающего нуклона обычно представляется в виде многочлена, параметры которого подгоняются к данным сечения рассеяния свободных нуклонов. Мы берем такую параметризацию в интервале энергий  $\varepsilon_{lab} = 10 \text{ МэВ} \div 1 \text{ ГэВ}$  из работы [23]. В более общем случае, чтобы учесть влияние ядерной среды, это сечение домножается на фактор  $f_m$ , так что можно записать

$$\sigma_{np} = (-70.67 - 18.18 \beta^{-1} + 25.26 \beta^{-2} + 113.85 \beta) \times f_m(np), \quad (4.8)$$

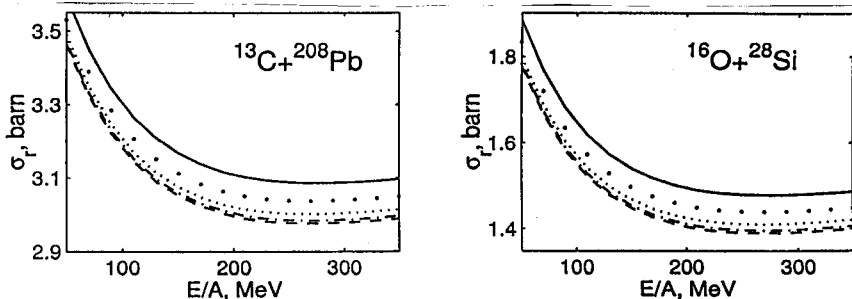
$$\sigma_{pp} = \sigma_{nn} = (13.73 - 15.04 \beta^{-1} + 8.76 \beta^{-2} + 68.67 \beta^4) \times f_m(nn), \quad (4.9)$$



**Рис.5.** Влияние выбора радиуса NN-взаимодействия на полные сечения ядро-ядерных реакций:  $r_{Nrms}^2 = 0.658 \text{ фм}^2$  (сплошные кривые),  $0.630 \text{ фм}^2$  (пунктир),  $0.69 \text{ фм}^2$  (штрихпунктир). Параметры  $s$  и  $d$  ядер  $^{16}\text{O}$  и  $^{40}\text{Ca}$  из табл.2, а ядра  $^{208}\text{Pb}$  по формулам (4.4), (4.5) на основе  $R$  и  $a$  из табл.1. Для  $^{12}\text{C}$   $\bar{G}$ -профиль тот же, что и на рис.3



**Рис.6.** Роль искажения траектории в расчете полных сечений реакций. Сплошные кривые – сечения без учета искажений; пунктир – учет только кулоновского искажения; штрихпунктир – учет кулоновского и ядерного искажения. О выборе параметров см. в тексте



**Рис.7.** Роль ядерной среды в расчете полных сечений реакций. Сплошные кривые – без учета фактора влияния среды ( $\bar{\rho}=0$ ); жирные точки – при плотности в области перекрытия  $1/20\rho_0$  плотности каждого из ядер в его центре  $\rho_0 = \rho_p(0) + \rho_t(0)$ ; точки – при плотности с перекрытием  $1/6\rho_0$ ; штрихпунктир – с перекрытием  $1/3\rho_0$ ; пунктир – при перекрытии плотностей в центрах ядер  $\rho_0$ .

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left( \frac{931.5}{\varepsilon_{lab} + 931.5} \right)^2}, \quad (4.10)$$

Здесь  $\beta$  есть отношение скорости падающего нуклона к скорости света, энергия нуклона  $\varepsilon_{lab}$  задается в МэВ, сечения в  $mb$ . Для свободных нуклонов надо брать  $f_m(np) = f_m(nn) = 1$ , что и делалось нами до сих пор в расчетах усредненного по изоспинам сечения NN-рассеяния [23]

$$\bar{\sigma}_{NN} = \frac{Z_p Z_t \sigma_{pp} + N_p N_t \sigma_{nn} + (Z_p N_t + N_p Z_t) \sigma_{np}}{A_p A_t}, \quad (4.11)$$

которое входит в фазу (2.5). Поскольку, однако, нуклоны находятся в ядерной среде, то с помощью множителей  $f_m(np)$  и  $f_m(nn)$  вводится корректировка зависимости сечений  $\sigma_{NN}$  в (4.8), (4.9) от энергии, а также учитывается их зависимость от плотности ядерной материи. Проблема влияния ядерной среды на нуклон-нуклонное взаимодействие исследовалась во многих работах. Так, в [43] на основе подхода Дирака – Бракнера для ядерной материи были проведены численные расчеты полных сечений NN-взаимодействий, а их параметризация дана в работе [44], где приведены следующие корректирующие факторы:

$$f_m(np) = \frac{1 + 20.88 \varepsilon_{lab}^{0.04} \rho^{2.02}}{1 + 35.86 \rho^{1.90}}, \quad (4.12)$$

$$f_m(nn) = \frac{1 + 7.772 \varepsilon_{lab}^{0.06} \rho^{1.48}}{1 + 18.01 \rho^{1.46}}. \quad (4.13)$$

Здесь энергия задается в МэВ, а плотность в  $\text{fm}^{-3}$ . Видно, что в частном случае свободных нуклонов, когда  $\rho = 0$ , имеем  $f_m(np) = f_m(nn) = 1$ , а по мере роста плотности эти факторы, а значит и эффективные сечения, убывают<sup>9</sup>. Вычислить интегралы конволюции с корректирующими факторами в вышеприведенном виде с учетом зависимости плотности от  $r$  сложно, и мы ограничимся лишь качественными оценками. На рис.7 показаны такие расчеты, когда значения плотностей ядер в (4.12)-(4.13) считаются постоянными  $\rho = \bar{\rho} = \bar{\rho}_p + \bar{\rho}_t$  для любой области нахождения пары взаимодействующих нуклонов. Тогда, обозначив через  $\rho_o = \rho_p(0) + \rho_t(0)$  суммарную плотность в центрах сталкивающихся ядер, приведем расчеты сечений для свободных нуклонов при  $\bar{\rho}=0$  (сплошные кривые), а также при  $\bar{\rho}=(1/20)\rho_o$  ("жирные" точки),  $(1/6)\rho_o$  (точки),  $(1/3)\rho_o$  (штрихпунктир),  $\rho_o$  (пунктир). Видно, что включение фактора среды может

<sup>9</sup> В микроподходах, где на базе двойного фолдинга строятся ядро-ядерные потенциалы, возникают аналогичные вопросы учета зависимости NN-потенциалов от энергии и плотности ядер. Однако в подходе Глаубера – Ситенко есть то преимущество, что главная зависимость от энергии уже учтена при параметризации  $\sigma_{NN}$  свободного рассеяния.

уменьшить полное сечение реакции на  $4 \div 7\%$ , при этом зависимость от плотности материи оказывается сильно нелинейной.

## 5 Выводы, сравнение с экспериментом

1. Показано, что исходное выражение для эйкональной фазы в рамках микроподхода можно представить в удобном виде, где одна из двух функций профиля плотности точечных нуклонов ядер преобразуется в профиль ядерной плотности, получаемой из независимых экспериментов, например, данных о ядерных формфакторах. В итоге, при расчете ядро-ядерных сечений можно не вводить свободных параметров, а опираться только на известные ядерные данные.

2. Основу подхода составляет расчет эйкональных фаз рассеяния. Удастся добиться их существенных упрощений, а именно свести для них исходные четырехмерные интегралы к одномерным. И здесь, в отличие от существующей практики расчета фаз с вынужденным выбором наиболее простых ядерных плотностей в форме гауссовых функций, мы демонстрируем широкие возможности работать с реалистическими распределениями плотностей в виде (симметризованных) ферми-функций, параметры которых для большинства ядер можно найти в существующих таблицах. При этом в одномерных интегралах для эйкональных фаз все функции оказываются заданными в явном виде, что делает расчеты весьма простыми.

3. Представлены два метода получения параметров  $c$  и  $d$  точечной плотности ядер  $\rho_{SF}^{\circ}(r, c, d)$ , один - из данных по формфакторам ядер, другой - перерасчет на основе параметров ядерной плотности  $\rho_{SF}(r, R, a)$ . Различия между этими методами, как оказывается, могут приводить к разнице в рассчитываемых сечениях, превышающей характерные ошибки их экспериментальных измерений. Мы считаем, что более обоснованным методом является получение параметров  $\rho_{SF}^{\circ}(r)$  из формфакторов ядер после выделения из них формфактора нуклона и, если необходимо, фактора движения центра масс ядра, как это сделано, например, в [29].

4. В ходе методических расчетов показано, что радиусы нуклон-нуклонного взаимодействия  $r_N^2$  и самого нуклона  $r_{0rms}^2$  можно считать равными. Их небольшие отличия друг от друга находятся в пределах точности их определения, что практически не изменяет результаты расчета полных сечений ядро-ядерных реакций. В то же время при  $r_N^2 = r_{0rms}^2$  появляется возможность пользоваться весьма простыми выражениями (2.19), (2.20) для интеграла конволюции, когда он сводится сначала к свертке только двух функций толщины плотности, ядерной и точечной, а потом преобразуется в простой одномерный интеграл.

5. Во многих случаях необходимо учитывать кулоновское искажение траектории с помощью формальной замены в фазе  $\chi(b)$  прицельного параметра  $b$  на  $b_c$  согласно (4.6). Учет дополнительно к этому еще и ядерного поля не представляется конструктивным,

ибо параметры самого ядерного потенциала надо находить численной подгонкой к экспериментальным данным с учетом тех же полных сечений.

6. Вопрос о необходимости вводить фактор  $f_m$ , корректирующий зависимость NN-сечений от плотности ядерной среды, остается для нас пока открытым. Оценки показывают, что в области промежуточных энергий он не приводит к существенным поправкам к расчетам полных сечений. Кроме того, использование приведенных в [44] факторов  $f_m(np)$  и  $f_m(nn)$  затруднено в обычно практикуемых расчетах. С этим столкнулись, например, в более простой задаче анализа данных рА-рассеяния [45]. К тому же, в обеих этих работах в качестве базовых плотностей ядер выбирались гауссовы функции, а замена их на реалистические может изменить выводы о виде самих  $f_m$ . Например, успешное согласие расчетов с данными полных сечений реакций рА,  $\alpha A$  и  $^{12}C + ^{12}C$  при промежуточных энергиях было получено в [46] с реалистическими плотностями  $\rho_F(r)$  и фактором  $f_m$ , отличающимся по виду от приведенного выше <sup>10</sup>.

7. Расчеты показывают, что в случае сравнительно легких падающих ядер целесообразнее пользоваться интегралом конволюции (3.18), где в качестве функции толщины  $\rho_p^\circ(s)$  точечной плотности падающего ядра можно использовать модифицированную гауссову  $\bar{G}$ -функцию. Последняя определяется с помощью (3.6) и (3.7) через параметры реалистической SF-функции, взятыми, например, из табл.2. В случае более тяжелых падающих ядер целесообразнее пользоваться интегралом конволюции (2.19), куда можно подставлять известные в явном виде фурье-бесселевы профили реалистических SF-плотностей (3.23)- (3.24) для обоих ядер. Во всех расчетах в первую очередь следует учитывать кулоновское искажение траектории.

8. Отметим, что в имеющейся литературе не акцентируется внимание на вопросе о правильном использовании исходной расчетной формулы для интеграла конволюции. Из предыдущего было видно, что при явном учете конечного радиуса NN-взаимодействия ( $a_N^2 \neq 0$ ) в него входят обе плотности для точечных нуклонов ядра. При равенстве гмс-радиусов нуклона и NN-взаимодействия в этом интеграле исчезает нуклон-нуклонный фактор  $f(\xi)$ , но при этом одна из точечных плотностей преобразуется в распределение плотности ядерной материи. Вместе с тем, отсутствие в таком интеграле фактора  $f(\xi)$  вовсе не означает, что использовалось приближение "нулевого радиуса" NN-взаимодействия. Путаница возникает, когда говорят о приближении нулевого радиуса, то есть в самом деле полагают  $a_N^2 = (2/3)r_{Nrms}^2 = 0$  в исходном интеграле (2.7), но при этом для обеих плотностей берут табличные данные, то есть используют ядерные плотности вместо точечных.

На рис.8а,б приведены сравнения наших расчетов с экспериментальными данными, собранными в работе [48]. Параметры распределений SF-плотностей взяты из табл.1.

<sup>10</sup> В расчетах реальной части ядро-ядерного потенциала двойного фолдинга влияние ядерной среды на NN-потенциал параметризуется более простыми зависимостями  $f_m$  в виде степенной и экспоненциальной функций от плотности  $\rho(r)$  (см., например, [47]).



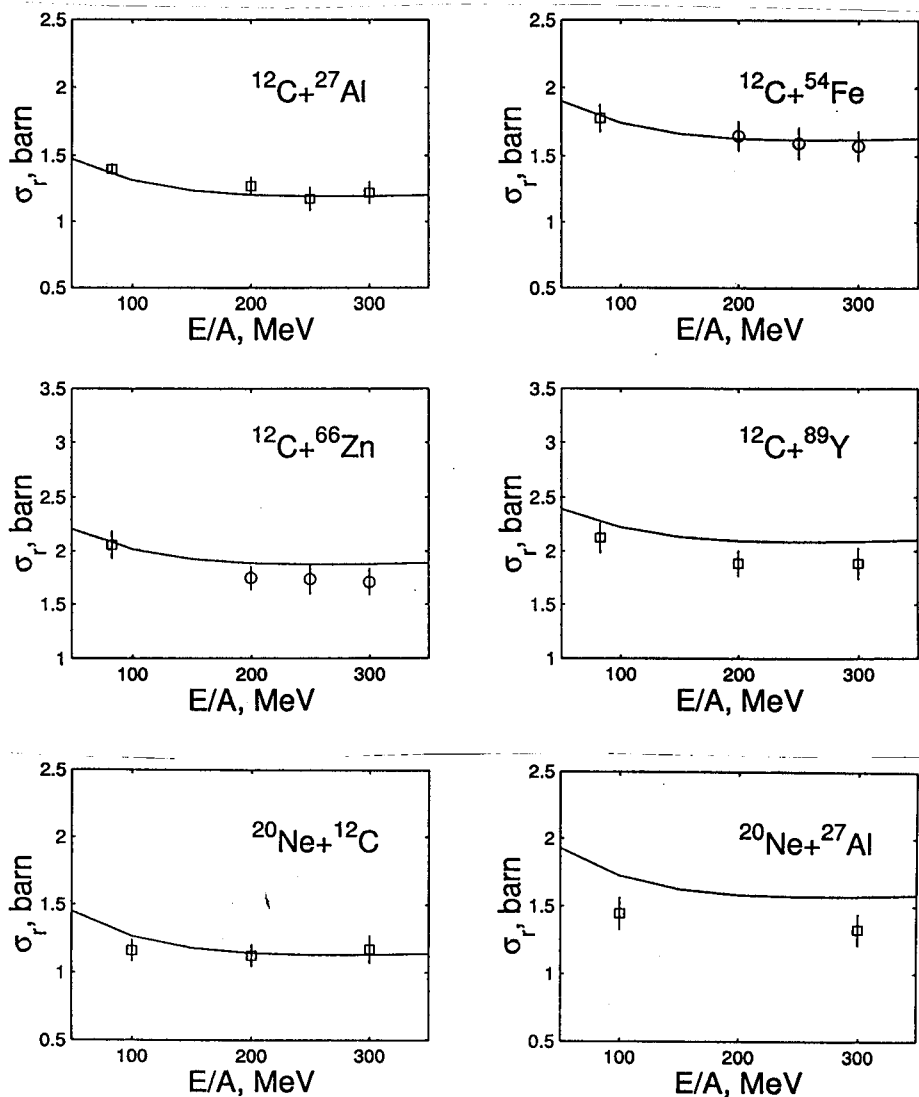


Рис.8. Сравнение расчетов сечений с экспериментальными данными из [48]. Для параметров плотностей ядер использованы известные данные из экспериментов по  $\epsilon A$ -рассеянию (см. текст). Учтено кулоновское искажение траектории

Для падающего ядра  $^{12}\text{C}$  параметры  $c$  и  $d$  плотности  $\rho_{SF}^0$  даны в табл.2, а для ядра  $^{20}\text{Ne}$  они рассчитаны с помощью (4.4), (4.5) по данным из табл.1. Интеграл конволюции использован в форме (3.18). Учитывалось только кулоновское искажение траектории. Таким образом, свободных параметров не вводилось. Можно видеть, что во всех случаях, кроме  $^{12}\text{C} + ^{89}\text{Y}$  и  $^{20}\text{Ne} + ^{27}\text{Al}$ , имеет место хорошее согласие с экспериментальными данными. Расхождения в отмеченных случаях могут быть связаны с тем, что параметры плотности нечетных ядер  $^{89}\text{Y}$  и  $^{27}\text{Al}$  определялись из  $eA$ -формфакторов (ссылки см. в [28]) по формулам для бесспиновых ядер. Если учесть в расчетах фактор среды  $f_m$ , то указанные расхождения можно устранить. Однако мы считаем необходимым сначала уточнить данные о плотностях данных ядер. Можно также отметить, что приведенные в [48] расчеты с гауссовыми функциями [22], воспроизводящими "хвосты" распределений плотностей, дают завышенные значения сечений, выходящие за пределы экспериментальных ошибок в реакциях, указанных на рис.8а,б. Возможно, это связано с использованием ядерных плотностей вместо точечных, как уже указывалось выше. С другой стороны, расчеты в работе [49] с однородными распределениями плотности для ядер-мишеней и гауссовыми для падающих ядер дают заниженные значения сечений реакций  $^{20}\text{Ne} + ^{12}\text{C}$  и  $^{12}\text{C} + ^{27}\text{Al}$ , несмотря на то, что в ней, видимо, тоже использовались не точечные, а ядерные rms-радиусы для определения радиуса "ступеньки"  $R_u$  в (3.3). Тогда этот результат согласуется с тем, что было показано на рис.3.

В заключение авторы признательны фонду Программы "Инфельд – Боголюбов" за поддержку, а Е.В.З. благодарит РФФИ (грант 0301-006-57).

## А Приложение

### Интеграл конволюции при конечном радиусе NN-взаимодействия

Покажем, как свести 4-мерный интеграл перекрытия (2.7) к одномерному, если функции толщины плотности падающего ядра и эффективная NN-амплитуда имеют гауссову форму. При этом профиль-функция плотности ядра-мишени может иметь любую форму. Для этого, сообразуясь с расположением на плоскости прицельного параметра координат центров ядер, пары взаимодействующих нуклонов и связывающих их векторов (см. схему на рис.9), представим интеграл перекрытия в следующем виде

$$\mathcal{I}_{G,N,t}(b) = \frac{(\sqrt{\pi}a_{G,p}^0)\rho_{G,p}^0(0)}{(\sqrt{\pi}a_N)^2} \int_0^\infty s_t ds_t \rho_i^0(s_t) \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^\infty d\eta d\zeta \exp\left(-\frac{s_p^2}{a_{G,p}^0}\right) \exp\left(-\frac{\xi^2}{a_N^2}\right). \quad (\text{A.1})$$

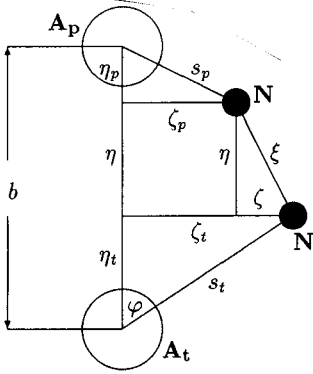


Рис.9. Профильная плоскость с координатами центров ядер и их нуклонов

Здесь, согласно схеме на рис.9, имеем соотношения

$$s_p^2 = \eta_p^2 + \zeta_p^2 = (b - \eta)^2 - 2(b - \eta)s_t \cos \varphi + s_t^2 - 2s_t \zeta \sin \varphi + \zeta^2, \quad (\text{A.2})$$

$$\xi^2 = \eta^2 + \zeta^2, \quad (\text{A.3})$$

используя которые, представим (A.1) в виде

$$\mathcal{I}_{G,N,t}(b) = \frac{(\sqrt{\pi} a_{G,p}^{\circ}) \rho_{G,p}^{\circ}(0)}{(\sqrt{\pi} a_N)^2} \int_0^{\infty} s_t ds_t \rho_t^{\circ}(s_t) \exp\left(-\frac{s_t^2}{a_{G,p}^{\circ 2}}\right) \int_0^{2\pi} d\varphi \bar{\mathcal{I}}_1 \bar{\mathcal{I}}_2, \quad (\text{A.4})$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{I}}_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \exp\left(-\frac{(b - \eta)^2}{a_{G,p}^{\circ 2}} + \frac{2(b - \eta)}{a_{G,p}^{\circ 2}} s_t \cos \varphi - \frac{\eta^2}{a_N^2}\right) = \\ &= \alpha \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{b^2}{a_{G,p}^{\circ 2} + a_N^2} + \alpha^2 \frac{s_t^2}{a_{G,p}^{\circ 4}} \cos^2 \varphi - \frac{2s_t b}{a_{G,p}^{\circ 2} + a_N^2} \cos \varphi\right), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{\mathcal{I}}_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \exp\left(-\frac{\zeta^2}{a_{G,p}^{\circ 2}} - \frac{\zeta^2}{a_N^2} + \frac{2s_t \sin \varphi}{a_{G,p}^{\circ 2}} \zeta\right) = \alpha \sqrt{\pi} \exp\left(\alpha^2 \frac{s_t^2}{a_{G,p}^{\circ 4}} \sin^2 \varphi\right), \quad (\text{A.6})$$

$$\alpha^2 = \frac{a_{G,p}^{\circ 2} a_N^2}{a_{G,p}^{\circ 2} + a_N^2}. \quad (\text{A.7})$$

Подставляя (A.5)-(A.7) в (A.4) и интегрируя затем по  $\varphi$ , используя определение [31]

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{x \cos \varphi}, \quad (\text{A.8})$$

приходим к явному выражению для  $\mathcal{I}_{G,N,i}(b)$  в виде одномерного интеграла (3.19). Например, в частном случае однородного распределения плотности ядра-мишени с функцией толщины (3.4) он принимает вид [49]

$$\mathcal{I}_{G,N,i}(b) = 2\pi \frac{a_{G,p}^{\circ 2}}{a_{G,p}^{\circ 2} + a_N^2} (\sqrt{\pi} a_{G,p}^{\circ}) \rho_{G,p}^{\circ}(0) \rho_u^{\circ}(0) \exp\left(-\frac{b^2}{a_{G,p}^{\circ 2} + a_N^2}\right) \times \\ \times \int_0^{R_u} s ds \sqrt{R_u^2 - s^2} \exp\left(-\frac{s^2}{a_{G,p}^{\circ 2} + a_N^2}\right) I_0\left(\frac{2bs}{a_{G,p}^{\circ 2} + a_N^2}\right). \quad (\text{A.9})$$

## Список литературы

- [1] R.J.Glauber, in *Lectures on Theor. Phys.*, **1** (Interscience, New York, 1959).
- [2] A.G.Sitenko, *Ukr.Fiz.J.*, **4** (1959) 152;
- [3] G.D.Satchler, *Direct nuclear reactions*, Clarendon, Oxford, 1983.
- [4] В.К.Лукьянов, Б.Словинский, Е.В.Земляная, *ЯФ* **64** (2001) 1349.
- [5] J.-S.Wan a.o., *Transmutation of radioactive waste by means of relativistic heavy ions*, *Kerntechnik*, **63** (1998) 167.
- [6] L.W.Townsend, J.W.Wilson, *Rad.Res.*, **106** (1986) 283.
- [7] S.Fernbach, R.Serber, T.B.Taylor, *Phys.Rev.*, **75** (1949) 1352.
- [8] W.Czyz, L.S.Maximon, *Ann.of Phys.* **52** (1969) 59.
- [9] J.Formanek, *Nucl.Phys.* **B12** (1969) 441.
- [10] I.Tanihata, *J.Phys.G*, **22** (1996) 157.
- [11] С.А.Бертулани, Л.Ф.Кано, М.С.Хуссейн, *Phys.Report*, **226** (1993) 281.
- [12] О.М.Князьков, И.Н.Кухтина, С.А.Фаянс, *ЭЧАЯ* **30** (1999) 870.
- [13] A.Vitturi, and F.Zardi, *Phys.Rev.*, **C36** (1987) 1404.
- [14] Moon Hoe Cha, *Phys.Rev.*, **C46** (1992) 1026.
- [15] С.Е.Агуиар, F.Zardi, A.Vitturi, *Phys.Rev.*, **C56** (1997) 1511.
- [16] J.A.Tostevin, R.C.Johnson, J.S.Al-Khalili, *Nucl.Phys.*, **A630** (1998) 340c.
- [17] G.F.Bertsch, В.А.Волков, Н.Сасава, *Phys.Rev.*, **C39** (1989) 1154.
- [18] Г.Д.Алхазов, В.В.Анисович, П.Э.Волковицкий, *Дифракционное взаимодействие адронов с ядрами при высоких энергиях*, Ленинград, "Наука", 1991.
- [19] G.R.Satchler and W.G.Love, *Phys.Rep.*, **55** no.3 (1979) 183.
- [20] O.D.Dalkarov, V.A.Karmanov, *Nucl.Phys.A* bf 445 (1985) 579.
- [21] H.M.Fayyad, T.H.Rihan, A.M.Awin, *Phys.Rev.* **C53** (1996) 2334.
- [22] P.J.Karol, *Phys.Rev. C*, **11** (1975) 1203;

- [23] S.Charagi and G.Gupta, Phys.Rev., **C41** (1990) 1610.
- [24] Ю.Н.Елдышев, В.К.Лукьянов, Ю.С.Поль, ЯФ, **16** (1972) 506.
- [25] D.W.L.Sprung, J.Martorell, J.Phys.A, **30** (1997) 6525; *ibid.***31** (1998) 8973.
- [26] M.Группеос, С.Кутрулос, В.Лукьянов, А.Шебеко, J.Phys.G, **24** (1998) 1998.
- [27] В.В.Буров, Д.Н.Кадрев, В.К.Лукьянов, Ю.С.Поль, ЯФ, **61** (1998) 525.
- [28] De Vries H., de Jager C.W., de Vries C., Atomic Data and Nucl. Data Tables,**36** (1987) 495.
- [29] В.В.Буров, В.К.Лукьянов, Преприят ОИЯИ **Р4-11098**, Дубна, 1977.
- [30] В.К.Лукьянов, Е.В. Земляная, J.Phys.G., **26** (2000) 357.
- [31] И.С.Градштейн и И.М.Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм и произведений*, 1962 (Москва, ГИ Физ-мат. литературы).
- [32] М.Абрамовиц и И.Стигац, *Справочник по специальным функциям*, 1979, (Москва, "Наука").
- [33] М.Е.Группеос, С.Г.Кутрулос, В.К.Лукьянов, А.В.Шебеко, ЭЧАЯ, **32**, вып.6 (2001) 1494.
- [34] И.Ж.Петков, В.К.Лукьянов, Ю.С.Поль, ЯФ, **4** (1966) 57.
- [35] В.К.Лукьянов, И.Ж.Петков, Ю.С.Поль, ЯФ, **9** (1969) 349.
- [36] S.Földt, A.Ingemarssen, J.Phys.G., **9** (1983) 261.
- [37] M.El-Azab Farid, G.R.Sachler, Nucl.Phys.A bf 438 (1985) 525.
- [38] R.M.DeVries, and J.C.Peng, Phys.Rev., **C22** (1980) 1055.
- [39] В.К.Лукьянов, Е.В. Земляная, Int.J.Mod.Phys.E., **10** no.3 (2001) 169.
- [40] D.M. Brink, and G.R.Satchler, J.Phys.G., **7** (1981) 43.
- [41] M.Buenerd et al., Nucl.Phys.A bf 424 (1984) 313.
- [42] G.R.Sachler, Nucl.Phys.A bf 279 (1977) 493.
- [43] G.Q.Li and R Machleidt, Phys.Rev., **C48** (1993) 1702; **C49** (1994) 566.
- [44] Cai Xiangzhou, Feng Jun, Shen Wenqing, Ma Yugang, Wang Jiansong, and Ye Wei, Phys.Rev., **C58** (1998) 572.
- [45] A.de Vismes, P.Roussel-Chomaz, and R.Carstoiu, Phys.Rev., **C62** (2000) 064612-1.
- [46] R.K.Tripathi, J.W.Wilson, F.A.Cucinotta, Nucl.Instr.& Meth.Phys.Res., **B 145** (1998) 277.
- [47] Dao T.Khoa, G.R.Satchler, and W.von Oertzen, Phys.Rev., **C56** (1997) 954.
- [48] S.Kox et al, Phys.Rev., **C35** (1987) 1678.
- [49] A.Y.Abul-Magd, M.Talib Ali-Alhinai, Nuovo Cim., **A110** (1997) 1281.

Получено 23 апреля 2003 г.

Лукьянов В. К., Земляная Е. В., Словинский Б.  
Полные сечения ядро-ядерных реакций  
в подходе Глаубера–Ситенко  
для реалистических распределений ядерной материи

P4-2003-80

На основе полученного ранее явного выражения функции профиля (толщины) реалистического распределения нуклонов в виде симметризованной ферми-функции рассчитаны микроскопические эйкональные фазы ядро-ядерных столкновений и полные сечения реакций. При этом если плотность падающего ядра аппроксимировать гауссовой функцией, а для ядра-мишени брать любого вида профиль плотности, то фаза сводится к одномерному интегралу. Рассмотрены вопросы, связанные с выбором параметров плотности «точечных» нуклонов в ядрах, возможностью замены реалистических плотностей их гауссовыми аппроксимантами в области поверхности ядер, зависимостью сечения от радиуса нуклон-нуклонного взаимодействия и плотности ядерной среды, ролью искажения траектории в расчете фазы. Сделаны выводы о физике процесса, дано сравнение с экспериментальными данными сечений, рассчитанных в данном подходе без использования свободных параметров.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2003

### Перевод авторов

Lukyanov V. K., Zemlyanaya E. V., Slowinski B.  
Nucleus-Nucleus Reaction Cross-Sections Calculated  
for the Realistic Nuclear Matter Distributions  
within the Glauber–Sitenko Approach

P4-2003-80

Based on the thickness (profile) function, previously obtained for the realistic Fermi-type distribution of nucleons in nuclei, calculations are made of the microscopic eikonal phases of the nucleus-nucleus scattering and the total reaction cross-sections. In so doing, the phase is deduced to the one-dimensional integral provided that the Gaussian density distribution for the projectile nucleus and the arbitrary shape of the thickness density for the target nucleus are used. The problems of obtaining parameters of the «point» nucleon density are considered. A possibility to approximate the realistic densities by the «surface-matched» Gaussian functions and dependence of cross-sections on the nucleon-nucleon interaction radius are discussed. The in-medium effects and a role of the trajectory distortion are studied. Conclusions are made on physics of the process, and comparisons with experimental data are made with cross-sections calculated by using the developed method where no free parameters are introduced.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2003

**Редактор *М. И. Зарубина*  
Макет *Н. А. Киселевой***

**Подписано в печать 26.05.2003.**

**Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.**

**Усл. печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 2,4. Тираж 350 экз. Заказ № 53913.**

**Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.**

**E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)**

**[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)**