P2-2003-210

А. Б. Пестов*

СПИН И КРУЧЕНИЕ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

---

*E-mail: pestov@thsun1.jinr.ru

Введение

При создании теории гравитационного поля Эйнштейн предполагал, что гравитационный потенциал входит во все уравнения теоретической физики и поэтому гравитационное поле оказывает непосредственное влияние на все физические процессы. Это положение, известное как принцип универсальности гравитационных взаимодействий, имеет фундаментальное значение для понимания той упорядоченной связи понятий и законов, в рамках которой протекают все физические процессы. Силы гравитации могут быть при этом совершенно несущественны, если ставить вопрос об их измерении, например, в атомных явлениях. Когда Дирак создавал релятивистскую теорию электрона, он не ставил задачи согласовывать свою теорию с общей теорией относительности именно по этой причине. Данный вопрос, имеющий важное концептуальное значение, рассматривался в работах Фока и Иваненко [1] и Вейля [2], из которых стало ясно, что эйнштейновский гравитационный потенциал не входит в уравнение Дирака. Таким образом, в микромире принцип универсальности гравитационных взаимодействий неожиданно встретился с трудностями принципиального характера, не преодоленными до сих пор по причинам, которые будут ясны из последующего рассмотрения.

После открытия спина электрона возникло и продолжает привлекать пристальное внимание актуальное направление исследований, идея которого состоит в том, что спин связан с новым физическим полем, называемым полем кручения. За полем кручения как чисто геометрическим объектом стоит понятие асимметричной связности, которое впервые встречается в работе Эддингтона, но он развил свою идею в 1921 году совсем в другом направлении. Собственно понятие кручения ввел в 1922 году Картан, который выдвинул идею о связи поля кручения с внутренним угловым моментом материи. После открытия спина электрона поле кручения, естественно, стали связывать с фермионами. Различные аспекты теории поля кручения были развиты в огромном числе публикаций. Можно отметить, например, оригинальные статьи Эддингтона и Картана [3-4] и обзоры [5-6]. Но, несмотря на это, физический смысл поля кручения и его возможная связь со спином являются до сих пор открытой проблемой.

Таким образом, со спином связаны две актуальные проблемы. Первая состоит в том, как согласовать теорию Дирака с метрической теорией гравитации, не изменяя фундаментальных положений этой теории. Вторая – это вопрос о существовании нового физического поля, тесно связанного с таким квантово–механическим понятием, как спин. В данной работе дано простое и математически корректное решение обеих проблем. Суть предлагаемого здесь подхода состоит в том, что спинирующая материя взаимодействует с гравитационным полем косвенно, причем связующим звеном между спинорными полями и гравитацией выступает поле кручения, которое подобно электромагнитному полю является потенциальным. Источник поля кручения – циркуляция энергии спинирующей материи. Это означает неприменимость принципа универсальности гравитационных взаимодействий, когда речь идет об электронах. Если это не так, то метрическая теория гравитационного поля неверна и поэтому следует изучать альтернативные ей, так называемые тетрадные, теории гравитации, которые будут обсуждаться ниже в связи с уравнением Дирака.

1. Теория Дирака и поле кручения

Одним из фундаментальных принципов современной теоретической физики является положение о том, что физические законы не зависят ни от выбора системы координат, ни от выбора базиса в изучаемых векторных пространствах. Естественно записывать уравнения в координатном базисе, так как вопрос о том, как записать **те же самые уравнения** в любом другом базисе, является формальной и потому тривиальной задачей. Тем не менее в литературе иногда встречается утверждение, что уравнение Дирака противоречит этому принципу, не может быть записано в координатном базисе и, более того, требует введения двух базисов одновременно (голономного и неголономного). Звучит это так, как если бы для цифровой записи числа требовалось одновременно две системы счисления. Такого рода утверждения возникают от смешения понятий, но не имеют никакого отношения к существу дела. Учитывая это обстоятельство, покажем прежде всего, что оригинальные уравнения Дирака находятся в полном согласии с указанным фундаментальным положением физики и геометрии.

Пусть $\mathbf{C}^4$ есть пространство, элементами которого являются столбцы из четырех комплексных чисел $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Совокупность всех невырожденных линейных преобразований в пространстве $\mathbf{C}^4$ может быть представлена в виде постоянных квадратных невырожденных комплексных матриц (4×4). Множество таких матриц образует группу $GL(4, \mathbf{C})$. Пусть далее γ^μ – числовые матрицы Дирака, удовлетворяющие стандартным соотношениям

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu},$$

где $\eta^{\mu\nu}$ – структурные постоянные группы Пуанкаре $\eta^{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1. -1, -1)$. Матрицы Дирака замечательны тем, что из них, путем взаимного перемножения, можно построить шестнадцать линейно независимых матриц, которые задают базис алгебры Ли группы $GL(4, \mathbf{C})$. Конечно, в алгебре Ли группы $GL(4, \mathbf{C})$ можно выбирать любой базис, однако указанный выделяется тем, что матрицы $S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\gamma^\mu\gamma^\nu$ образуют базис алгебры Ли группы Лоренца, подгруппы группы $GL(4. \mathbf{C})$. Таким образом, дираковский спинор является элементом пространства $\mathbf{C}^4$. По отношению к группе общих преобразований координат ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 являются скалярными полями, определяя тем самым спинорное поле, которое задает неприводимое представление группы $GL(4, \mathbf{C})$ как группы внутренней симметрии, потому что преобразования этой группы и ее подгруппы, группы Лоренца, касаются только функций поля и не затрагивают координат. Спиновая симметрия является внутренней симметрией. По отношению к общим преобразованиям координат спинор ведет себя как набор четырех скалярных полей, поэтому ковариантная производная спинора равна просто частной производной. Покажем, что инвариантность оригинального уравнения Дирака относительно преобразований Лоренца фактически означает установление связи между группой пространственно-временной симметрии, которая реализуется на спинорных полях тривиально, и группой внутренней симметрии, которая реализуется на спинорах с помощью матриц Дирака. При этом группа $GL(4, \mathbf{C})$ является группой ковариантности уравнения Дирака, так же как и группа общих преобразований координат.

Для формулировки оригинального уравнения Дирака в общековариантной форме и координатном базисе остановимся на геометрических свойствах пространства–времени Минковского, то есть на тех свойствах, которые не зависят от выбора произвольной системы координат. Как хорошо известно, пространство–время Минковского является римановым пространством с метрикой

$$ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$$

лоренцевой сигнатуры, тензор Римана которой равен нулю, $R_{ijkl} = 0$. Предполагается, что метрика и все другие величины отнесены к произвольной системе координат и координатному базису. Для отыскания группы симметрии пространства–времени Минковского нужно найти линейно независимые решения общековариантной системы дифференциальных уравнений

$$P^i\partial_i g_{jk} + g_{ik}\partial_j P^i + g_{ji}\partial_k P^i = 0$$

для векторного поля P^i, называемой уравнениями Киллинга. Решения уравнений Киллинга для метрики Минковского принято обозначать P^i_μ и $M^i_{\mu\nu} = -M^i_{\nu\mu}$, так что латинские индексы являются координатными, а греческие – нумерующими. Те и другие пробегают значения 0, 1 ,2 ,3. Хорошо известно, что генераторы группы Пуанкаре

$$\mathbf{P}_\mu = P^i_\mu\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \mathbf{M}_{\mu\nu} = M^i_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\mathbf{P}_\mu, \mathbf{P}_\nu] = 0, \tag{1}$$

$$[\mathbf{P}_\mu, \mathbf{M}_{\nu\lambda}] = \eta_{\mu\nu}\mathbf{P}_\lambda - \eta_{\mu\lambda}\mathbf{P}_\nu, \tag{2}$$

где $\eta_{\mu\nu}$, как уже отмечалось, – структурные постоянные группы Пуанкаре. Очевидно, что выписанные соотношения являются общековариантными. Применяя эти операторы к скалярным полям, получаем, очевидно, снова скалярные поля.

Покажем, что общековариантное уравнение Дирака имеет вид

$$i\gamma^\mu\mathbf{P}_\mu\psi = \frac{mc}{\hbar}\psi, \tag{3}$$

где ψ – столбец из четырех рассматриваемых комплексных скалярных полей. Так как уравнение (3) ковариантно относительно общих преобразований координат, то можно выбрать любую систему координат. В галилеевской системе координат оно в точности совпадает с оригинальным уравнением Дирака. Уравнение Дирака ковариантно также относительно преобразований подобия числовых матриц Дирака

$$\tilde{\gamma}^\mu = S\gamma^\mu S^{-1},$$

так как нетрудно убедиться, что уравнения Дирака, определяемые матрицами $\tilde{\gamma}^\mu$ и γ^μ, эквивалентны. Очевидно, что указанные преобразования γ^μ задают представление группы $GL(4, \mathbf{C})$ и двузначное (спинорное) представление группы Лоренца, подгруппы группы $GL(4, \mathbf{C})$.

Покажем, что из ковариантности уравнений Дирака относительно преобразований групп пространственно–временной и внутренней симметрии следует их инвариантность относительно преобразований группы Пуанкаре. Из соотношений (1) и (2) следует, что общековариантное уравнение Дирака (3) инвариантно относительно преобразований группы трансляций, но не является инвариантным относительно преобразований Лоренца, индуцируемых генераторами $\mathbf{M}_{\mu\nu}$, оно только ковариантно относительно этих преобразований. Точно так же уравнение Дирака ковариантно относительно преобразований внутренней группы Лоренца, которые определяются матрицами $\mathbf{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)$. Поскольку между матрицами γ_μ и $\mathbf{S}_{\mu\nu}$ имеют место коммутационные соотношения, аналогичные (2),

$$[\gamma_\mu, \mathbf{S}_{\nu\lambda}] = \eta_{\mu\nu}\gamma_\lambda - \eta_{\mu\lambda}\gamma_\nu, \tag{4}$$

то из генераторов указанных групп ковариантности уравнения Дирака можно построить генераторы группы инвариантности этого волнового уравнения, которые имеют согласно (2) и (4) следующий вид:

$$\mathbf{L}_{\mu\nu} = \mathbf{M}_{\mu\nu} + \mathbf{S}_{\mu\nu}.$$

Нетрудно убедиться, что операторы $\mathbf{L}_{\mu\nu}$ коммутируют с оператором Дирака и удовлетворяют коммутационным соотношениям алгебры Ли группы Лоренца. Очевидно, что все свойства симметрии уравнения Дирака не зависят от выбора системы координат на рассматриваемом плоском многообразии. Понятно, что все соотношения могут быть записаны также в любом неголономном базисе.

Вывод состоит в том, что инвариантность оригинальных уравнений Дирака относительно преобразований Лоренца фактически означает установление связи между группой пространственно–временной симметрии, которая реализуется на спинорных полях как на скалярах, и группой внутренней симметрии, которая реализуется на спинорах с помощью матриц Дирака. Группа $GL(4, \mathbf{C})$ является группой ковариантности уравнений Дирака, так же как и группа общих преобразований координат.

Простейшее обобщение общековариантного уравнения Дирака (3) состоит в том, чтобы не накладывать на квадруплет векторных полей P^i_μ никаких ограничений, кроме требования их линейной независимости. Полученные обобщенные уравнения Дирака по форме ничем не отличаются от уравнений (3), однако при этом теряется связь между пространственно–временной и внутренней симметрией. Принимая это условие, мы оставляем уравнение Дирака ковариантным относительно преобразований группы внутренней симметрии, но попытаемся изменить статус пространственной–временной симметрии, рив теорию так, чтобы группа пространственно–временной симметрии (группа диффеоморфизмов) стала группой инвариантности теории.

Задача состоит, следовательно, в том, чтобы для полей ψ и P^i_μ вывести систему дифференциальных уравнений, инвариантную относительно преобразований группы диффеоморфизмов. Идею физической интерпретации поля P^i_μ можно выдвинуть, основываясь на обсуждавшемся выше свойстве гравитационных полей или исходя из других соображений общего характера, которые рассмотрены в следующем разделе. Если верен принцип универсальности гравитационных взаимодействий, то следует принять, что гравитационный потенциал представляют векторные поля P^i_μ, которые в уравнение Дирака могут входить в указанной выше форме, а в уравнения других полей они входят в форме ассоциированного с ними метрического тензора

$$\tilde{g}_{ij} = \eta_{\mu\nu} P^\mu_i P^\nu_j,$$

где P^μ_i четверка ковекторных полей, такая, что

$$P^i_\mu P^\mu_j = \delta^i_j, \quad P^i_\mu P^\nu_i = \delta^\nu_\mu. \tag{5}$$

Приняв этот постулат, который является альтернативным к исходной идее Эйнштейна, остается решить вопрос об уравнениях для компонент гравитационного потенциала P^i_μ. В литературе есть два различных подхода к этому вопросу. Первый основан на требовании, чтобы лагранжиан для нового гравитационного потенциала по форме совпадал с лагранжианом Эйнштейна–Гильберта, то есть в выражение для скалярной кривизны Риччи вместо римановой метрики подставляем определенную выше, ассоциированную с новым гравитационным потенциалом метрику и постулируем, что полученный таким образом скаляр является функцией Лагранжа для рассматриваемого поля. Этот постулат приводит тогда к требованию, чтобы вся теория была инвариантна относительно локальных преобразований Лоренца, то есть преобразований вида

$$\tilde{P}^i_\mu = L^i_k P^k_\mu,$$

где L^i_k – тензорное поле типа (1.1) такое, что

$$L^i_k L^j_l \tilde{g}_{ij} = \tilde{g}_{kl}.$$

Данное условие приводит к небольшой модификации рассмотренных выше общековариантных уравнений Дирака, связанной с именами Фока–Иваненко и Вейля. Для более близких ссылок укажем, например, [7-8]. Второй подход, который возник значительно позднее, отличается от первого тем, что для нового гравитационного потенциала постулируется другая общековариантная функция Лагранжа, что возможно, если отказаться от требования инвариантности относительно локальных преобразований Лоренца. Во втором подходе общековариантное уравнение Дирака совпадает с уравнением (3) (см., например, [9-10] и ссылки в указанных работах).

Для ясности подчеркнем еще раз, что существует три успешных альтернативных теории гравитационного поля. В первой, созданной Эйнштейном, потенциал гравитационного поля является метрическим, причем метрика рассматривается как первичное понятие. Проблема включения уравнения Дирака в рамки такой теории не решена. Во второй и третьей теориях потенциал гравитационного поля представляет квадруплет линейно независимых векторных полей. Введение ассоциированной с этим потенциалом метрики является техническим приемом, удобным для вывода уравнений поля. Последние две теории отличаются только уравнениями для гравитационного потенциала, который называется тетрадным, и формой уравнения Дирака. Обе теории находятся в полном соответствии с фундаментальным физическим принципом, сформулированным в начале раздела, однако на деталях этих теорий и возникшей в связи с ними некоторой терминологической путанице мы здесь останавливаться не будем, ограничимся только данным комментарием, так как наша задача – сформулировать теорию взаимодействия спинорных и гравитационных полей в рамках эйнштейновской теории гравитации.

Таким образом, в настоящей работе принимается, что эйнштейновский гравитационный потенциал есть первичное понятие, поэтому квадруплет линейно независимых векторных полей является новым полем, которое, очевидно, должно быть включено в рамки эйнштейновской теории гравитации как один из возможных источников гравитационного поля со своим собственным тензором энергии–импульса. Далее мы непосредственно рассмотрим эту возможность, ставящую под сомнение принцип универсальности гравитационных взаимодействий применительно к спинорным полям, но, с точки зрения общей теории относительности, это является неизбежным следствием, теоретическим предсказанием, для проверки которого предлагается провести эксперимент.

2. Геометрия на многообразии и потенциалы полей кривизны и кручения

Хорошо известно, что эйнштейновский гравитационный потенциал имеет геометрическую интерпретацию: он задает элемент длины в псевдоримановом пространстве. В 1917 году Леви–Чивита показал, как на произвольном римановом многообразии можно внутренним образом ввести понятие параллельного переноса. Это открыло новые широкие возможности для обобщений, которые имеют прямое отношение к решению поставленной задачи.

Рассмотрим понятие параллельного переноса в общем виде. Пусть компоненты векторного поля в точке с координатами x^i равны V^i. Уравнение локального параллельного переноса вектора V^i в соседнюю точку $x^i + dx^i$ имеет вид

$$dV^i = -L^i_{jk} V^k dx^j, \tag{6}$$

где L^i_{jk} - некоторые функции координат, которые называются компонентами или символами Кристоффеля линейной (аффинной) связности L. Уравнением (6) полностью описывается процесс параллельного переноса векторов на многообразии. При параллельном переносе вектора вдоль бесконечно малого замкнутого контура его компоненты изменяются на величину

$$\Delta V^k = -B^k_{ijl} V^l dx^i \delta x^j.$$

где

$$B^k_{ijl} = \partial_i L^k_{jl} - \partial_j L^k_{il} + L^k_{im} L^m_{jl} - L^k_{jm} L^m_{il}. \tag{7}$$

Эта величина является тензорным полем типа (1,3), которое называется тензором Римана линейной связности L^i_{jk}.

Из (6) следует, что при переходе к другой системе координат

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x), \quad x^i = x^i(\bar{x})$$

компоненты линейной связности преобразуются по закону

$$\bar{L}^i_{jk} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\left(L^l_{mn} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\right). \tag{8}$$

Оказывается, что относительно группы общих преобразований координат поле L (линейная связность) является приводимой величиной. Действительно, положим

$$L^i_{jk} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} + L^i_{kj}) + \frac{1}{2}(L^i_{jk} - L^i_{kj}).$$

Из (8) следует. что симметричная часть линейной связности, то есть поле

$$\{^{i}_{jk}\} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} + L^i_{kj}),$$

преобразуется так же, как поле L^i_{jk}, а антисимметричная часть линейной связности

$$H^i_{jk} = \frac{1}{2}(L^i_{jk} - L^i_{kj}), \tag{9}$$

называемая полем кручения, преобразуется, как тензорное поле типа (1,2). Таким образом, симметричная и антисимметричная части линейной связности преобразуются независимо, не перемешиваясь. Отсюда следует. что они являются независимыми величинами. Таким образом, существует два поля, которые имеют геометрическую интерпретацию и которые мы будем называть полями кривизны и кручения. Динамические уравнения для этих полей будем выводить, рассматривая их как напряженности по отношению к потенциалам. Аналитическую связь между напряженностями и потенциалами установим, следуя тесной аналогии с теорией электромагнитного поля.

Симметричная часть линейной связности является напряженностью по отношению к метрике, так как с помощью частного дифференцирования и алгебраических операций можно установить аналитическую связь между этими двумя величинами согласно формуле

$$\{^{i}_{jk}\} = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_j g_{kl} + \partial_j g_{kl} - \partial_l g_{jk}), \tag{10}$$

где g^{il} – компоненты контравариантного тензорного поля. которые строятся как алгебраические дополнения элементов матрицы (g_{ij}). Выражение. стоящее справа, впервые было найдено Кристоффелем. Формулу (10) полезно сравнить с формулой

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i.$$

которая показывает аналитическую связь между напряженностью и векторным потенциалом электромагнитного поля. Таким образом. поле кривизны имеет тензорный потенциал g_{ij}, который является величиной. неприводимой относительно общих преобразований координат.

Поскольку электромагнитное и гравитационное поля являются потенциальными. то естественно предположить. что и поле кручения также потенциально в указанном выше смысле. Нетрудно указать и потенциал поля кручения, который фактически был введен при рассмотрении уравнения Дирака. В дальнейшем потенциалом поля кручения будем называть линейно независимые векторные поля P^i_μ, которые входят в общековариантные уравнения Дирака. По принятому здесь соглашению, греческие индексы являются нумерующими, а латинские – координатными. Те и другие пробегают значения 0, 1, 2, 3. При заменах координат все рассматриваемые векторные поля преобразуются одинаковым образом:

$$\bar{P}^i_\mu = P^k_\mu \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3.$$

Если дана четверка линейно независимых векторных полей, то всегда существует четверка ковекторных полей P^μ_i такая, что

$$P^i_\mu P^\mu_j = \delta^i_j, \quad P^i_\mu P^\nu_i = \delta^\nu_\mu. \tag{11}$$

Аналитическая связь между напряженностью поля кручения и его потенциалом имеет вид

$$H^i_{jk} = P^i_\mu (\partial_j P^\mu_k - \partial_k P^\mu_j), \tag{12}$$

что наглядно показывает потенциальный характер поля кручения. Вывод из проведенного геометрического рассмотрения состоит в том, что четверка линейно независимых векторных полей есть потенциал поля кручения, нового физического поля, имеющего геометрическую интерпретацию. Понятно, что поля кривизны и кручения образуют единое целое в рамках геометрического понятия параллельного переноса. Выведем теперь геометрический лагранжиан для потенциалов полей кривизны и кручения. С этой целью найдем выражение для тензора Римана (7) как функции потенциалов полей кривизны и кручения.

Нетрудно убедиться, что

$$B^l_{ijk} = R^l_{ijk} + \nabla_i H^l_{jk} - \nabla_j H^l_{ik} + H^l_{im} H^m_{jk} - H^l_{jm} H^m_{ik}. \tag{13}$$

где

$$R^l_{ijk} = \partial_i \left\{ {l \atop jk} \right\} - \partial_j \left\{ {l \atop ik} \right\} + \left\{ {l \atop im} \right\} \left\{ {m \atop jk} \right\} - \left\{ {l \atop jm} \right\} \left\{ {m \atop ik} \right\} \tag{14}$$

хорошо известный тензор кривизны, а ∇_i – ковариантная производная по отношению к связности Кристоффеля (10)

$$\nabla_i H^l_{jk} = \partial_i H^l_{jk} + \left\{ {l \atop im} \right\} H^m_{jk} - \left\{ {m \atop ij} \right\} H^l_{mk} - \left\{ {m \atop ik} \right\} H^l_{jm}.$$

Из (13) сверткой находим тензор второго ранга

$$B_{jk} = B^i_{ijk} = R_{jk} + \nabla_i H^i_{jk} - \nabla_j H^i_{ik} + H^i_{im} H^m_{jk} - H^i_{jm} H^m_{ik}, \tag{15}$$

где R_{jk} – тензор Риччи. Из (15) находим следующее выражение для скалярной кривизны:

$$B = g^{jk}B_{jk} = R + g^{jk}H^l_{jm}H^m_{jl} - \nabla_j H^j,$$

где R – скалярная кривизна Риччи, а $H^j = g^{jk}H^i_{ik}$. Отсюда следует, что лагранжиан полей кривизны и кручения является скалярной кривизной ($L = \frac{1}{2}B$) пространства аффинной связности, символы Кристоффеля которой равны

$$L^i_{jk} = \{^{\ i}_{jk}\} + H^i_{jk}, \tag{16}$$

где первое слагаемое дается выражением (10), а второе – соотношением (12). Обычно при рассмотрении полей кручения постулируется, что аффинная связность является метрической, то есть рассматриваются пространства Римана–Картана, которые характеризуются аффинной связностью вида

$$L^i_{jk} = \{^{\ i}_{jk}\} + H^i_{jk} + g^{il}H^m_{lj}g_{mk} + g^{il}H^m_{lj}g_{mk}.$$

Такая связность является неудовлетворительной по следующим причинам. Во первых, уравнения геодезических для этой связности не могут быть выведены из вариационного принципа. Во – вторых, если мы примем, что скалярная кривизна связности Римана–Картана является лагранжианом полей кривизны и кручения, то из этого лагранжиана не следует никаких динамических уравнений для поля кручения. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать аффинное пространство со связностью (16) как геометрический базис теории полей кривизны и кручения. Согласно (12) тензор H^i_{jk} является напряженностью поля кручения.

Лагранжиан собственно поля кручения дается формулой

$$L_t = \frac{1}{2}g^{jk}H^l_{jm}H^m_{kl}. \tag{17}$$

Как видно из (12), лагранжиан поля кручения, подобно лагранжиану электромагнитного поля, не содержит производных от компонент потенциала гравитационного поля. Прежде чем вывести уравнения поля кручения, отметим одно интересное обстоятельство.

Стандартный лагранжиан гравитационного поля $L_g = \frac{1}{2}R$ содержит вторые производные от компонент гравитационного потенциала. Это приводит к известным трудностям [11]. Покажем, что с помощью поля кручения этот лагранжиан может быть редуцирован общековариантным способом к лагранжиану, который не содержит вторых производных от g_{ij}.

Введем в рассмотрение бинарное тензорное поле
$$B^i_{jk} = P^i_\mu \nabla_j P^\mu_k = \Gamma^i_{jk} - \left\{{}^{\,i}_{jk}\right\}, \tag{18}$$
где
$$\Gamma^i_{jk} = P^i_\mu \partial_j P^\mu_k \tag{19}$$
– каноническая связность, называемая также связностью абсолютного параллелизма, поскольку тензор Римана этой связности тождественно равен нулю. Полагая
$$\Gamma^i_{jk} = \left\{{}^{\,i}_{jk}\right\} + \Gamma^i_{jk} - \left\{{}^{\,i}_{jk}\right\} = \left\{{}^{\,i}_{jk}\right\} + B^i_{jk},$$
находим аналогично (13), (15):
$$0 = R_{jk} + \nabla_i B^i_{jk} - \nabla_j B^i_{ik} + B^i_{im} B^m_{jk} - B^i_{jm} B^m_{ik}.$$
Отсюда следует, что
$$R + \nabla_i (g^{jk} B^i_{jk} - g^{ik} B^l_{lk}) = g^{jk} (B^i_{jm} B^m_{ik} - B^i_{im} B^m_{jk}).$$
Таким образом, канонический лагранжиан гравитационного поля отличается от лагранжиана
$$L_q = \frac{1}{2} g^{jk} (B^i_{jm} B^m_{ik} - B^i_{im} B^m_{jk})$$
на полную дивергенцию. Возникший общековариантный лагранжиан гравитационного поля обязан своим существованием полю кручения и так как он не содержит вторых производных от метрики, то может оказаться эффективным в квантовой теории гравитационного поля.

3. Уравнения поля кручения

Введем тензор F^{ij}_k, метрически сопряженный тензору напряженности поля кручения H^i_{jk}, полагая
$$F^{ij}_k = g^{il} H^j_{lk} - g^{jl} H^i_{lk} = H^{ij}_k - H^{ji}_k.$$
Написанное соотношение допускает обращение, поскольку из него следует, что
$$H^i_{jk} = \frac{1}{2} (g^{il} F^{mn}_l g_{jm} g_{kn} + g_{jl} F^{il}_k - g_{kl} F^{il}_j).$$
Так как
$$H^i_{jk} = P^i_\mu (\partial_j P^\mu_k - \partial_k P^\mu_j) = P^i_\mu (\nabla_j P^\mu_k - \nabla_k P^\mu_j).$$

то, варьируя лагранжиан поля кручения (17), получаем последовательно

$$\delta L_t = F_l^{jk}\delta(P_\mu^l\nabla_j P_k^\mu) = F_l^{jk}(\nabla_j P_k^\mu)\delta P_\mu^l + F_l^{jk}P_\mu^l\nabla_j\delta P_l^\mu. \tag{20}$$

Согласно (11)

$$\delta P_k^\nu = -P_l^\nu P_k^\mu \delta P_\mu^l.$$

Поэтому второе слагаемое в правой части соотношения (20) можно представить в виде

$$\nabla_j(F_l^{jk}P_\mu^l\delta P_l^\mu) + P_k^\mu(\nabla_j F_l^{jk} + F_m^{jk}P_l^\nu\nabla_j P_\nu^m)\delta P_\mu^l. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что вариационный принцип приводит к следующим уравнениям для компонент потенциала поля кручения:

$$P_k^\mu\nabla_j F_l^{jk} + F_l^{jk}\nabla_j P_k^\mu + F_m^{jk}P_k^\mu P_l^\nu\nabla_j P_\nu^m = 0. \tag{22}$$

Представим уравнения поля кручения в более симметричной форме так, чтобы они не содержали ковариантных производных от компонент потенциала этого поля. Согласно (11) и (18)

$$P_l^\nu\nabla_j P_\nu^m = -P_\nu^m\nabla_j P_l^\nu = -B_{jl}^m, \quad \nabla_j P_k^\mu = B_{jk}^m P_m^\mu.$$

Таким образом, уравнения поля кручения без источников имеют вид

$$\nabla_j F_l^{jk} + B_{jm}^k F_l^{jm} - B_{jl}^m F_m^{jk} = 0. \tag{23}$$

Отметим еще одну форму динамических уравнений поля кручения. Обозначим $\overset{0}{\nabla}_i$ ковариантную производную относительно канонической связности (19). Так как

$$\nabla_j F_l^{jk} = \overset{0}{\nabla}_j F_l^{jk} - B_{ji}^j F_l^{ik} - B_{jm}^k F_l^{jm} + B_{jl}^m F_m^{jk},$$

то уравнения (23) запишутся в виде

$$(\overset{0}{\nabla}_j - B_j)F_l^{jk} = 0, \tag{24}$$

где B_i обозначен след бинарного тензорного поля (18), $B_i = B_{ki}^k$.

4. Уравнения взаимодействующих полей

В этом разделе выведены уравнения поля кручения во взаимодействии с другими физическими полями и доказана их совместность.

Согласно (3) лагранжиан Дирака при наличии поля кручения и электромагнитного поля имеет вид

$$L_D = \frac{i}{2}P^i_\mu\Big(\bar\psi\gamma^\mu D_i\psi - (D_i\bar\psi)\gamma^\mu\psi\Big) - m\bar\psi\psi, \tag{25}$$

где P^i_μ – компоненты потенциала поля кручения,

$$D_i\psi = (\partial_i - ieA_i)\psi, \quad D_i\bar\psi = (\partial_i + ieA_i)\bar\psi.$$

Лагранжиан Дирака инвариантен относительно подстановок

$$\psi \Rightarrow e^{i\lambda}\psi, \quad \bar\psi \Rightarrow e^{-i\lambda}\bar\psi, \quad A_i \Rightarrow A_i + \partial_i\lambda.$$

Действие для спинорного поля имеет вид

$$A = \int L_D\, p\, d^4x,$$

где $p = \mathrm{Det}(P^\mu_i)$. Так как

$$P^i_\mu\partial_j P^\mu_i = \frac{1}{p}\partial_j p,$$

то уравнения Дирака, описывающие поведение электронов в поле кручения, имеют вид

$$iP^i_\mu\gamma^\mu(D_i - \frac{1}{2}H_i)\psi = m\psi, \tag{26}$$

$$iP^i_\mu(D_i - \frac{1}{2}H_i)\bar\psi\gamma^\mu = -m\bar\psi, \tag{27}$$

где H_i обозначен след тензора напряженности поля кручения $H_i = H^k_{ki}$.

Положим

$$W^\mu_i = \frac{i}{2}(\bar\psi\gamma^\mu D_i\psi - (D_i\bar\psi)\gamma^\mu\psi).$$

Тогда $L_D = P^i_\mu W^\mu_i - m\bar\psi\psi$ и, следовательно, из действия

$$A = \int L_D\, p\, d^4x + \int L_t\sqrt{g}d^4x, \quad g = -\mathrm{Det}(g_{ij}),$$

наряду с уравнениями Дирака (26), (27) возникают уравнения

$$\nabla_j F^{jk}_l + B^k_{jm}F^{jm}_l - B^m_{jl}F^{jk}_m + W^{\cdot k}_l = 0. \tag{28}$$

где

$$W^{\cdot k}_l = \epsilon P^k_\mu W^{\cdot\mu}_l, \quad \epsilon = p/\sqrt{g}.$$

Уравнения (28) обобщают уравнения (23) и вместе с уравнениями Дирака (26) и (27) описывают взаимодействие спинорных полей с полями кручения.

Из уравнений (28) вытекает интересное следствие. Сворачивая по индексам k и l, получаем, что след тензора напряженности поля кручения удовлетворяет уравнению

$$\nabla_i H^i = m\bar{\psi}\psi, \tag{29}$$

где $H^i = g^{ik}H_k$. Отсюда заключаем, что при $m = 0$ взаимодействие фермионных полей с полями кручения характеризуется новой сохраняющейся величиной, которая связана с инвариантностью действия относительно преобразований

$$P_i^\mu \to aP_i^\mu, \quad \psi \to a^{-\frac{1}{2}}\psi,$$

где a – безразмерная постоянная.

Пусть

$$L_{em} = -\frac{1}{4}F_{ij}F^{ij}$$

– стандартный лагранжиан электромагнитного поля. Из действия для полей Дирака и Максвелла

$$A = \int L_{em}\sqrt{g}d^4x + \int L_D\, p\, d^4x$$

появляются следующие уравнения электромагнитного поля:

$$\nabla_i F^{ij} + eJ^i = 0, \quad J^i = \epsilon P_\mu^i \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{30}$$

Лагранжиан, описывающий взаимодействие поля кручения и электромагнитного поля с гравитационным, имеет вид

$$L_s = \frac{1}{2}R + \frac{1}{2}H_{il}^k H_{jk}^l g^{ij} - \frac{1}{4}F_{ij}F^{ij} = L_g + L_t + L_{em}. \tag{31}$$

Варьируя действие

$$A = \int L_s\sqrt{g}d^4x$$

по g^{ij}, получаем уравнения Эйнштейна

$$G_{ij} = g_{ij}L_t - H_{il}^k H_{jk}^l + F_{ik}F_{jl}g^{kl} + g_{ij}L_{em}. \tag{32}$$

Отсюда находим выражение для метрического тензора энергии-импульса поля кручения

$$T_{ij} = g_{ij}L_t - H_{il}^k H_{jk}^l, \tag{33}$$

след которого не равен нулю. Таким образом, все основные динамические уравнения, которые описывают взаимодействия поля кручения с другими физическими полями, выведены.

Исследуем теперь важный вопрос о совместности установленных динамических уравнений. С этой целью выведем тождества для лагранжианов теории. Для лагранжиана Дирака можно вывести следующее тождество:

$$\partial_j L_D = D_j \bar{\psi} \frac{\delta L_D}{\delta \bar{\psi}} - \frac{\delta L_D}{\delta \psi} D_j \bar{\psi} + \frac{1}{\epsilon}(\nabla_i W^i_j - B^i_{jk} W^k_i + eF_{ji} J^i). \qquad (34)$$

Отсюда следует, что на решениях уравнений Дирака выполняются следующие уравнения:

$$\nabla_i W^i_j - B^i_{jk} W^k_i + eF_{ji} J^i = 0, \qquad (35)$$

которые определяют закон циркуляции энергии спинорного поля при наличии поля кручения, электромагнитного и гравитационного полей. Тензор W^i_j является, очевидно, тензором энергии–импульса спинирующей материи. Как видно, он не симметричен. Таким образом, асимметрия тензора энергии-импульса является неотъемлемым свойством спинорных полей. Обсуждение этого интересного вопроса в литературе и дальнейшие ссылки можно найти в обзоре [5].

Тождество для лагранжиана поля кручения имеет следующий вид:

$$\partial_j L_t = \nabla_i S^i_j - B^i_{jk} S^k_i + \nabla^i (H^k_{il} H^l_{jk}). \qquad (36)$$

где

$$S^i_j = \nabla_k F^{ki}_j + B^i_{kl} F^{kl}_j - B^l_{kj} F^{ki}_l = P^i_\mu \frac{\delta L_t}{\delta P^j_\mu}.$$

Некоторые важные моменты, относящиеся к выводу тождества (36), отмечаются в приложении. Из уравнений Эйнштейна (32) и тождества (36) следует, что

$$\nabla^i G_{ij} = \nabla_i S^i_j - B^i_{jk} S^k_i + F_{jk} \nabla_i F^{ik}.$$

Правая часть последнего уравнения должна равняться нулю, так как для тензора Эйнштейна $\nabla^i G_{ij} = 0$ тождественно. С помощью уравнений (28), (30) и (35) легко убедиться, что это действительно так. Таким образом, система уравнений теории динамического кручения является совместной.

Заключение

В заключение предложим опыт для проверки сформулированной и, добавим, существующих теорий. В 1967 году Фейрбенк и Виттеборн провели опыты по взвешиванию электронов в гравитационном поле Земли [12]. Результаты экспериментов указали на нулевой результат. Приведем в переводе аннотацию к статье экспериментаторов. "Чтобы измерить вертикальную компоненту силы тяжести, действующую на электроны в вакуумной медной трубке, использована методика свободного падения. Было показано, что эта сила меньше чем 0,09 mg, где m – инерционная масса электрона и g равно 980см/сек^2. Это поддерживает дискуссионную точку зрения, что гравитация индуцирует электрическое поле за пределами поверхности металла, которое по величине и направлению является таким, что компенсирует силу тяжести, действующую на электроны".

Как видно, объяснение полученного нулевого результата, данное экспериментаторами, состоит в том, что гравитация наводит в экспериментальной установке электрическое поле, которое и компенсирует силу гравитации. Такое истолкование результатов опытов привело к дискуссии, детали которой можно найти в обзорах [13-14]. Для нас важно то, что при данной интерпретации результатов опытов позитроны в такой установке должны падать с ускорением, равным 2g. Фейрбенк планировал провести также опыты с позитронами, однако сначала этот замысел встретил технические трудности. После того как современные технологии открыли новые возможности, подготовка к проведению запланированного эксперимента с позитронами возобновилась. К сожалению, по некоторым причинам, полный опыт остался на уровне подготовки.

Предположим, что сформулированная выше теория верна. Тогда "нулевой" результат уже проведенных экспериментов объясняется тем, что сила, с которой Земля притягивает электрон, обусловлена не инертной массой электрона, а тем полем кручения, которое он генерирует. Оценку, полученную экспериментаторами, можно отнести тогда к силе притяжения, которая обусловлена именно полем кручения. Отсюда следует, что позитроны должны падать в гравитационном поле Земли с тем же ускорением, что и электроны. Это прямое предсказание сформулированной теории. Если сформулированная теория неверна, то позитроны должны будут падать с ускорением 2g, которое заметно отличается от нулевого. Таким образом, для проверки теории нужно провести полный опыт Фейрбенка, то есть измерить силу тяжести, действующую на электроны и позитроны в гравитационном поле Земли. Важность предлагаемого опыта не вызывает сомнений, так как он прямо затрагивает наиболее важные аспекты концептуальной схемы всей современной физики.

Приложение

Укажем на нетривиальные моменты в доказательстве тождества (33). Имеем

$$\partial_j L_t = F_l^{ik}(\nabla_j P_\mu^l)\nabla_i P_k^\mu + F_l^{ik} P_\mu^l \nabla_j \nabla_i P_k^\mu .$$

С помощью тождества Риччи

$$\nabla_j \nabla_i P_k^\mu = \nabla_i \nabla_j P_k^\mu - R_{jik}^l P_l^\mu$$

второе слагаемое в правой части первого соотношения преобразуется к виду

$$\nabla_i (F_l^{ik} P_\mu^l \nabla_j P_k^\mu) - (\nabla_i (F_l^{ik} P_\mu^l)) \nabla_j P_k^\mu - F_l^{ik} R_{jik}^l .$$

Для дальнейших преобразований нужно использовать тождество

$$F_l^{ik} R_{jik}^l = \nabla_i \nabla_k F_j^{ik}$$

и соотношения (11) и (18).

Список литературы

[1] Fock V.A., *Zs.f. Phys.* **57** (1929) 261.

[2] Weyl H., *Zs.f. Phys.* **56** (1929) 330.

[3] Eddington A.S., *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A99** (1921) 104.

[4] Cartan E., *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **174** (1922) 593.

[5] Hehl F.W., Heyde P., Kerlick G., Nester J., *Rev. of Mod. Phys.* **48** (1976) 393.

[6] Shapiro I.L., *Phys. Rep.* **357** (2002) 113.

[7] Birrel N.D. and Davies P.C.W., *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, 1982).

[8] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972).

[9] Hayashi K., Shirafuji T., *Phys. Rev.* **D19** (1979) 3524.

[10] Nashed G.L., *Phys. Rev.* **D66** (2002) 064015.

[11] Gibbons C.W., Hawking S.W., *Phys. Rev.* **D15** (1977) 2752.

[12] Witterborn F. C. and Fairbank W. M., *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1049.

[13] Nieto M.M. and Goldman T., *Phys. Rep.* **205** (1991) 222.

[14] Darling T.W., Rossi F., Opat G.I. and Moorhead G. F., *Rev. of Mod. Phys.* **64** (1992) 237.

Получено 20 ноября 2003 г.

Пестов А. Б. P2-2003-210
Спин и кручение в теории гравитации

Показано, что взаимодействие между спинорными и гравитационными полями осуществляется посредством полей кручения. Подобно электромагнитному и гравитационному полям, поле кручения является потенциальным. Выведены уравнения, которые описывают взаимодействия полей кручения с известными физическими полями, и доказана их совместность. Для проверки теории предложен достаточно простой опыт. Дан геометрический вывод общековариантного лагранжиана гравитационного поля, который определяется полем кручения и содержит только первые производные от метрического тензора.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2003

Перевод автора

Pestov I. B. P2-2003-210
Spin and Torsion in Gravity Theory

It is shown that the spinor field interacts with the gravitational field through the torsion field. It is established that the torsion field, like the electromagnetic and gravitational ones, is a potential field. The equations are derived which describe the interactions of the torsion field with the known physical fields. A rather simple experiment is proposed to examine a theory. A new general covariant form of the gravity Lagrangian (which is due to the torsion field and contains only first derivatives) is exhibited.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2003

Редактор *О. Г. Андреева*
Макет *Е. В. Сабаевой*

Подписано в печать 09.12.2003.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,31. Уч.-изд. л. 1,37. Тираж 415 экз. Заказ № 54217.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/