

P11-2003-223

Е. В. Земляная, И. В. Барашенков

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
МНОГОСОЛИТОННЫХ КОМПЛЕКСОВ
В НЕЛИНЕЙНОМ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА
С ДИССИПАЦИЕЙ И НАКАЧКОЙ**

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

Введение

Связанные состояния солитонов и солитоноподобных импульсов вызывают большой интерес в нелинейной оптике [1-3], гидродинамике [4, 5] и теории возбужденных сред [6]. *Устойчивые* связанные состояния могут представлять собой аттракторы в нелинейной диссипативной системе, конкурирующие с отдельными солитонами. (В нелинейной оптике, например, возникновение устойчивых связанных состояний солитонов ведет к потере информации в линиях передачи и элементах оптической памяти.) *Неустойчивые* солитонные комплексы могут проявляться как долгоживущие промежуточные состояния при переходе к режиму пространственно-временного хаоса.

В настоящей работе рассматриваются многосолитонные комплексы в рамках нелинейного уравнения Шрёдингера с накачкой и диссипацией. Уравнение с параметрической накачкой имеет вид

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi - \Psi = h\bar{\Psi} - i\gamma\Psi; \quad (1)$$

в случае прямой (внешней) накачки уравнение модифицируется следующим образом:

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi - \Psi = -h - i\gamma\Psi. \quad (2)$$

В обоих случаях γ – коэффициент диссипации, h – амплитуда накачки, а $\bar{\Psi}$ в уравнении (1) означает комплексное сопряжение Ψ .

Оба уравнения имеют целый ряд физических приложений. Так, система (1) описывает эффект фазового усиления в оптических волокнах [7]; нелинейный фарадеевский резонанс на поверхности жидкости [5, 8, 9]; конвекцию в бинарных смесях [10] и жидких кристаллах [11]. Уравнение (2), в свою очередь, используется при описании магнетиков во вращающемся магнитном поле [12], в теории джозефсоновских контактов [13], а также при анализе распространения СВЧ-волны в плазме [14].

В настоящей работе представлена схема численного анализа многосолитонных решений уравнений (1), (2) и обсуждаются полученные с ее помощью результаты.

1. Постановка задачи

Мы будем рассматривать стационарные решения уравнений (1) и (2), которые удовлетворяют соответственно уравнению

$$\Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi - \Psi = h\bar{\Psi} - i\gamma\Psi \quad (3)$$

с граничными условиями

$$\Psi(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty \quad (4)$$

и уравнению

$$\Psi_{xx} + 2|\Psi|^2\Psi - \Psi = -h - i\gamma\Psi \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\Psi_x(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow \infty. \quad (6)$$

Отметим, что односолитонные решения уравнения (3) известны в явном виде [15]:

$$\Psi_{\pm}(x) = A_{\pm}e^{-i\theta_{\pm}}\text{sech}(A_{\pm}x), \quad (7)$$

где

$$A_{\pm} = \sqrt{1 + h \cos 2\theta_{\pm}}; \quad \cos 2\theta_{\pm} = \pm \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{h^2}}.$$

В уравнении (5) односолитонные стационарные решения известны только численно [16].

Анализ устойчивости и бифуркаций решений стационарных задач (3),(4) и (5),(6) проводится на основе численного решения вспомогательной задачи на собственные значения для линеаризованного оператора, в потенциал которого входят найденные численно или полученные аналитически стационарные решения исходного нелинейного уравнения. Такой метод более экономичен по сравнению с прямым численным решением зависящих от времени уравнений (1) и (2) в тех случаях, когда требуется их исследование в широком диапазоне параметров. Кроме того, в этом подходе удается найти не только устойчивые,

но и неустойчивые решения, без которых описание фазового пространства остается неполным.

При выборе малого возмущения в форме $(\delta u, \delta v)^T = e^{\lambda t} y(x)$ (здесь $u + iv \equiv \Psi(x)e^{i\theta}$ в случае параметрической накачки и $u + iv \equiv \Psi(x)$ в случае внешней накачки) вспомогательная линеаризованная задача имеет вид

$$\mathcal{H}y = \mu \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y, \quad (8)$$

где $\mu = \lambda + \gamma$. Оператор \mathcal{H} для случаев параметрической и внешней накачки определяется соответственно выражениями

$$\mathcal{H} = -\partial_x^2 + \begin{pmatrix} A_+^2 - 6u^2 - 2v^2 & \gamma - 4uv \\ \gamma - 4uv & A_-^2 - 6v^2 - 2u^2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

и

$$\mathcal{H} = -\partial_x^2 + \begin{pmatrix} 1 - 6u^2 - 2v^2 & \gamma - 4uv \\ \gamma - 4uv & 1 - 6v^2 - 2u^2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Критерием устойчивости стационарных решений в обоих случаях является требование

$$\text{Re} \lambda \leq 0 \quad (11)$$

для всех значений λ .

Численное исследование многосолитонных комплексов предъявляет более высокие требования к точности и сходимости вычислительных схем по сравнению с анализом односолитонных решений. Наличие точек поворота также создает дополнительные трудности при продолжении решений по параметру. С другой стороны, в случае многосолитонных решений увеличивается число дискретных, в том числе потенциально “неустойчивых”, собственных значений вспомогательной линеаризованной задачи. Поэтому при изменении параметра оказывается недостаточным следить за каким-либо одним собственным значением, “отвечающим” за устойчивость, как это делается, например, в [17], требуется полная информация о дискретном спектре. Все это обусловило особенности представленной ниже вычислительной схемы.

2. Схема численного анализа

2.1. Продолжение стационарных решений по параметру

При продолжении по параметру α решения $\Psi(x)$ стационарной граничной задачи

$$F(\Psi, \alpha) = 0 \quad (12)$$

(здесь F – нелинейный оператор) выбирается некоторая скалярная характеристика $\|\Psi\|$ (бифуркационная мера) и строится ее зависимость от параметра $\|\Psi(\alpha)\|$ (бифуркационная диаграмма). В рассматриваемых здесь задачах в качестве бифуркационной меры использовалось значение интеграла энергии, которое для уравнений с параметрической и прямой накачкой имеет соответственно вид

$$E = \text{Re} \int \{ |\Psi_x|^2 + |\Psi|^2 - |\Psi|^4 + h\Psi^2 \} dx, \quad (13)$$

и

$$E = \int \{ |\Psi_x|^2 + |\Psi|^2 - |\Psi|^4 - h(\Psi + \bar{\Psi}) - |\Psi_0|^2 + |\Psi_0|^4 + h(\Psi_0 + \bar{\Psi}_0) \} dx. \quad (14)$$

Здесь Ψ_0 – асимптотическое значение решения при $|x| \rightarrow \infty$.

Схема продолжения по параметру решения стационарной задачи (12) включает в себя: а) алгоритм выбора начального приближения (предиктор); б) алгоритм численного решения задачи (12) при заданном значении параметра (корректор); и в) алгоритм выбора следующего значения параметра¹.

В представляемой здесь вычислительной схеме начальное приближение (предиктор) строилось согласно схеме Эйлера с использованием решений при двух предыдущих значениях параметра.

Для численного решения стационарных задач (3),(4) и (5),(6) (корректор) использовалась ньютоновская итерационная схема

¹Отметим, что такое разделение является в значительной степени условным. Существуют алгоритмы, объединяющие пункты а) и б) (например, метод эволюции параметра в работах [18]) или пункты б) и в) (см., например, [19, 20]).

[21] с конечно-разностной аппроксимацией четвертого порядка точности на основе трехточечных формул согласно обобщению схемы Нумерова [22].

Наконец, в части выбора следующего значения параметра основную трудность представляют точки поворота, в которых необходимо поменять направление движения по параметру с выходом на новую ветвь решений.

Как хорошо известно, необходимым признаком точки поворота в стационарной задаче (12) является вырожденность оператора производной Фреше $F_{\Psi}(\alpha, \Psi)$. Однако сам по себе этот факт не дает практического ответа на вопрос, как организовать движение по параметру в окрестности точки поворота. Предлагаемые в литературе рецепты [19, 20] в основном связаны с включением в исходную задачу (12) дополнительного соотношения (выводимого, например, из выражения для длины участка бифуркационной кривой между двумя значениями параметра). При этом значение параметра включается в число неизвестных величин и вычисляется вместе с решением исходной системы в единой итерационной схеме (обычно ньютоновской). Однако применительно к рассматриваемым в нашей работе задачам такой подход приводит к добавлению полностью заполненной строки к трехдиагональной матрице, аппроксимирующей оператор $F_{\Psi}(\alpha, \Psi)$. Это усложняет обращение данного оператора в ньютоновских итерациях и приводит к значительному увеличению времени счета, а также, что более существенно, к ухудшению сходимости итерационной схемы (особенно вблизи границ существования решений).

В предлагаемой нами схеме используется тот факт, что производная $d\alpha/d\|\Psi\|$ в точке поворота равна нулю. Численно аппроксимируя значение этой производной и проверяя на каждом шаге по параметру выполнение соотношения

$$\Delta\alpha_i/\Delta\|\Psi\|_i < \epsilon, \quad (15)$$

где $\epsilon > 0$ – заранее заданное малое число, $\Delta\alpha_i = \alpha_i - \alpha_{i-1}$ – шаг по параметру, а $\Delta\|\Psi\|_i = \|\Psi(\alpha_i)\| - \|\Psi(\alpha_{i-1})\|$, можно установить положение точки поворота, в которой движение

вдоль бифуркационной кривой должно поменять направление. Это означает, что при выполнении условия (15) следует поменять знак шага продолжения по параметру. При этом построение начального приближения по схеме Эйлера исключает возврат на ветку уже известных решений.

Таким образом, в рассматриваемом подходе алгоритм движения по параметру “вынесен” за пределы ньютоновской схемы и не приводит к ее усложнению.

Шаг по параметру можно выбрать постоянным либо вычислять по формуле

$$\Delta\alpha_{i+1} = \Delta\alpha_i \cdot \frac{\Delta\|\Psi(\alpha_{i-1})\|}{\Delta\|\Psi(\alpha_i)\|}. \quad (16)$$

В последнем случае обеспечивается уменьшение шага вблизи точки поворота (где решение меняется быстро) и увеличение шага на пологом участке бифуркационной кривой. При этом начальный ($i = 0$) шаг по параметру должен быть достаточно малым, чтобы обеспечивать устойчивую и быструю (за 4-5 итераций) сходимость ньютоновской итерационной схемы.

2.2. Численный анализ устойчивости стационарных решений

Для численного решения задачи на собственные значения (8) используется разложение собственных функций u и v в ряд Фурье:

$$u(x) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} u^m \exp(-i\omega_m x), \quad v(x) = \sum_{m=-N/2}^{N/2} v^m \exp(-i\omega_m x), \quad (17)$$

где $\omega_m = \frac{2\pi m}{L}$. После подстановки разложений (17) в (8) и использования правила свертки задача на собственные значения для дифференциального оператора сводится к задаче на собственные значения для заполненной матрицы. Последние вычисляются с помощью стандартной программы из пакета EISPACK.

Как оператор (9), так и оператор (10) имеют в своем дискретном спектре пару вещественных собственных значений $\mu_{1,2} = \pm\gamma$.

(Собственное значение $\mu_1 = \lambda_1 + \gamma$ связано с трансляционной инвариантностью исходного уравнения в частных производных.) Точность, с которой вычисляются эти собственные значения, служит показателем адекватности выбора параметров N и L в разложениях (17).

При необходимости для уточнения отдельных собственных значений можно использовать ньютоновскую итерационную схему, как это делалось, например, в [23]. Однако в рассматриваемых в настоящей работе задачах такой необходимости не возникало: при выборе $L = 50$, $N = 500$ “тестовые” значения $\mu_{1,2}$ воспроизводились с точностью $5 \cdot 10^{-8}$.

3. Результаты вычислений

3.1. Нелинейное уравнение Шрёдингера с параметрической накачкой

Поскольку при $|x| \rightarrow \infty$ солитонные решения в уравнении (3) стремятся к нулю монотонно, они, в отличие от солитонов уравнения (5), не могут формировать связанные состояния путем взаимодействия осциллирующих асимптотик [3]. Вариационный анализ, проведенный в случае $\gamma = 0$, не выявил существования связанных состояний даже в случае сильного перекрытия солитонов [4].

Тем не менее связанные состояния солитонов наблюдались в экспериментах по фарадеевскому резонансу на поверхности жидкости и были воспроизведены в их прямом численном моделировании [5]. Данные физические и вычислительные эксперименты оставили, однако, открытым вопрос о существовании устойчивых связанных состояний уравнения (1) на бесконечном интервале. Это связано, с одной стороны, со значительным расстоянием между солитонами в наблюдавшихся комплексах и, с другой стороны, с относительно короткими интервалами, на которых были выполнены упомянутые эксперименты.

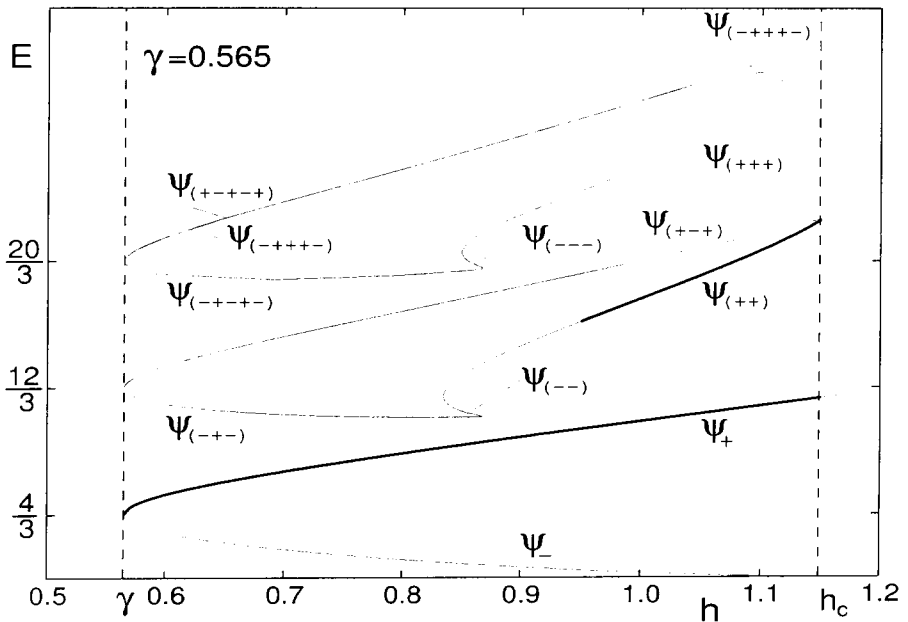


Рис. 1. Диаграмма существования и устойчивости одно-, двух- и трехсолитонных стационарных решений уравнения (3). Жирными линиями показаны устойчивые состояния

Ответ на этот вопрос удалось получить в работе [24], где впервые были численно найдены многосолитонные решения уравнения (3). На рис. 1 представлена бифуркационная диаграмма для случая $\gamma = 0.565$, полученная путем продолжения по параметру h в соответствии с представленной в предыдущем разделе вычислительной схемой.

Часть ветки $\Psi_{(++)}$, нанесенная на рис. 1 жирной линией, представляет единственное найденное нами *устойчивое* связанное состояние солитонов. Вторая кривая, помеченная жирной линией, — это известное в явном виде устойчивое односолитонное решение Ψ_+ [15]. Все остальные решения, представленные на рис. 1, неустойчивы.

С увеличением h расстояние между солитонами в комплексе $\Psi_{(++)}$ растет, но остается конечным при всех h до $h = h_c$.

При уменьшении h в точке $h = 0.9435$ в результате бифуркации

Андропова–Хопфа, при которой пара комплексно-сопряженных собственных значений переходит из левой в правую половину плоскости $[\text{Re}\lambda, \text{Im}\lambda]$, комплекс $\Psi_{(++)}$ теряет устойчивость. В точке поворота $h = 0.83504$ решение $\Psi_{(++)}$ трансформируется в $\Psi_{(--)}$. Далее, в следующей точке поворота $h = 0.86742$ формируется комплекс $\Psi_{(-+-)}$. Если продолжать ветку $\Psi_{(-+-)}$ по параметру h влево, расстояние между солитонами увеличивается, и в точке поворота $h = \gamma$ комплекс $\Psi_{(-+-)}$ трансформируется в решение $\Psi_{(+-+)}$. При движении по ветке $\Psi_{(+-+)}$ в сторону $h \rightarrow h_c = \sqrt{1 + \gamma^2}$ ширина центрального солитона увеличивается ($1/A_- \rightarrow \infty$), а расстояние между солитонами растет, в результате чего при $h \rightarrow h_c$ комплекс вырождается в три отдельных солитона на бесконечном расстоянии друг от друга.

В отличие от комплекса $\Psi_{(++)}$ ветка решений $\Psi_{(++++)}$ имеет точку поворота вблизи $h \sim h_c$ и переходит в этой точке в комплекс $\Psi_{(-++++)}$, в котором при $h \rightarrow \gamma$ расстояние между солитонами увеличивается до бесконечности.

При движении вдоль ветки $\Psi_{(++++)}$ по параметру h влево в результате двух поворотов решение трансформируется сначала в $\Psi_{(----)}$, а затем в $\Psi_{(-+--+--)}$. В еще одной точке поворота в окрестности $h \sim \gamma$ образуется комплекс $\Psi_{(+--+--+)}$, межсолитонные расстояния в котором увеличиваются до бесконечности при движении к $h \rightarrow h_c$. Отметим, что решения $\Psi_{(-+--+--)}$ и $\Psi_{(-++++)}$ имеют близкие значения энергии, поскольку состоят из одинакового количества Ψ_+ - и Ψ_- -солитонов. В результате на графике эти кривые сливаются.

На рис. 2 представлен двухсолитонный комплекс $\Psi_{(++)}$ при значениях параметров $h = 0.9$ и $\gamma = 0.565$. В таблице для этого же решения представлены результаты расчетов на последовательности сгущающихся сеток. Из таблицы видно, что величина

$$\sigma = \frac{|\Psi|_{\Delta x} - |\Psi|_{\Delta x/2}}{|\Psi|_{\Delta x/2} - |\Psi|_{\Delta x/4}} \quad (18)$$

близка к 2^4 , что подтверждает четвертый порядок точности вычислительной схемы.

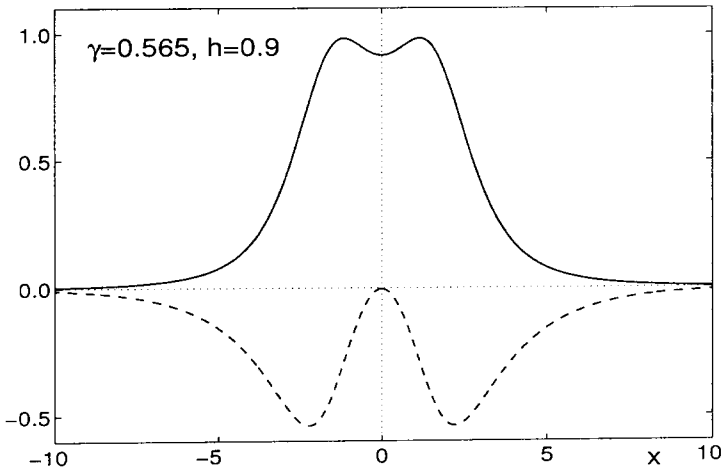


Рис. 2. Двухсолитонный комплекс $\Psi_{(++)}$ уравнения (3). Сплошная линия – $\text{Re}\Psi_{(++)}$, штриховая – $\text{Im}\Psi_{(++)}$

Таблица. Расчеты на последовательности сгущающихся сеток для двухсолитонного решения $|\Psi_{(++)}|$ при $\gamma = 0.565$, $h = 0.9$, $\Delta x = 0.01$

x	$ \Psi_{\Delta x}(x) $	$ \Psi_{\Delta x/2}(x) $	$ \Psi_{\Delta x/4}(x) $	σ (ф-ла (18))
0.0	1.8086245e+0	1.8086244e+0	1.8086244e+0	16.7
2.5	7.3392867e-01	7.3392872e-01	7.3392872e-01	15.9
5.0	8.5984262e-05	8.5984260e-05	8.5984260e-05	20.0
7.5	1.4559609e-07	1.4559608e-07	1.4559608e-07	17.4
10.0	8.8852913e-10	8.8852905e-10	8.8852905e-10	17.3
12.5	6.6756636e-12	6.6756631e-12	6.6756630e-12	17.2
15.0	5.1505045e-14	5.1505041e-14	5.1505040e-14	17.2
17.5	3.9868053e-16	3.9868049e-16	3.9868049e-16	17.2
20.0	3.0872662e-18	3.0872659e-18	3.0872659e-18	17.2
22.5	2.3908062e-20	2.3908060e-20	2.3908060e-20	17.3
25.0	1.8514725e-22	1.8514724e-22	1.8514723e-22	17.3

Все вычисления для уравнения (3) проводились с шагом конечно-разностной аппроксимации $\Delta x = 5 \cdot 10^{-3}$ на интервале $[-100, 100]$. При этом значение невязки в ньютоновской схеме, вычисляемое в сеточной норме, не превышало $1 \cdot 10^{-10}$. При численном решении

задачи (9) в формулах (17) полагалось $N = 500$, $L = 50$. Шаг движения по параметру варьировался от $1 \cdot 10^{-8}$ вблизи точек поворота до $5 \cdot 10^{-4}$ на пологих участках бифуркационной кривой.

3.2. Нелинейное уравнение Шрёдингера с прямой накачкой

Как и уравнение Шрёдингера с параметрической накачкой, уравнение (5) имеет два односолитонных решения: Ψ_+ и Ψ_- , причем солитон Ψ_+ всегда неустойчив, а Ψ_- устойчив в определенном диапазоне параметров [16] внутри области существования солитонных решений.

Впервые двух- и трехсолитонные комплексы уравнения (5) были обнаружены в работе [25]. В отличие от уравнения (3) в уравнении (5) солитоны могут связываться на разных расстояниях (“квантовых орбитах”), что объясняется их осциллирующей асимптотикой [2]. Межсолитонные расстояния, соответствующие n -й орбите, приблизительно равны $n\pi/k$, где k – волновое число затухающей асимптотики солитона $\Psi \propto e^{-px} \cos(kx)$. Это видно на рис. 3, где для случая $\gamma = 0.52$ и $h = 0.35$ показаны двухсолитонные комплексы $\Psi_{(-)}^1$, $\Psi_{(-)}^2$ и $\Psi_{(-)}^3$ с межсолитонными расстояниями, соответствующими первой, второй и третьей орбите. (Здесь и далее верхний индекс означает номер “квантовой орбиты”).

Численное исследование, выполненное в работе [25], оставило невыясненным ряд вопросов. В частности, в [25] не удалось получить солитонные комплексы на второй орбите, наиболее перспективные с точки зрения устойчивости; осталось непонятным, что происходит с решениями вблизи верхней границы области существования по h ; недостаточная точность вычисленных решений не позволила до конца прояснить взаимосвязь веток бифуркационной диаграммы в окрестности нижней границы области существования по h . Помимо отсутствия алгоритма продолжения через точки поворота, это связано с особенностями использовавшейся в данной работе вычислительной схемы: построенный на основе обобщения непрерывного аналога метода Ньютона [21] алгоритм, обеспечивая

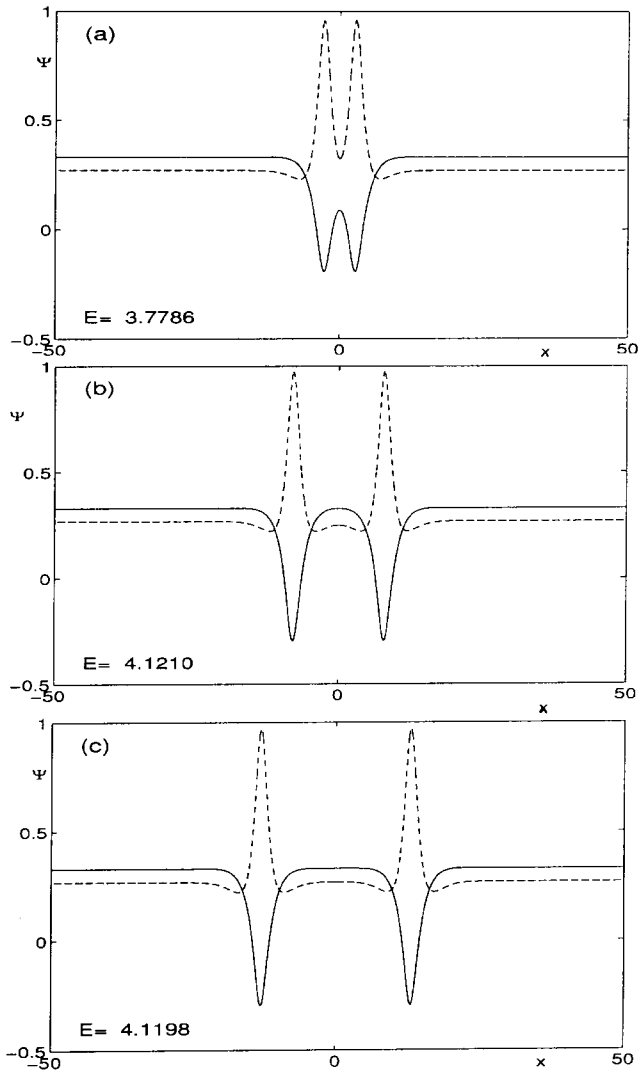


Рис. 3. Двухсолитонные решения уравнения (5). Сплошные линии – вещественная часть; штрихи – мнимая часть. (а) – $\Psi_{(--)}^1$; (б) – $\Psi_{(--)}^2$; (в) – $\Psi_{(--)}^3$

Бифуркационные кривые как односолитонного решения Ψ_+ , так и двух- и трехсолитонных комплексов $\Psi_{(++)}$ и $\Psi_{(+++)}$ берут свое начало в правом нижнем углу диаграммы, где эти решения сливаются с однородным решением $\Psi = \Psi_0$.

При движении по параметру h в сторону нижней границы существования двухсолитонные комплексы первой, второй и третьей орбиты $\Psi_{(++)}^1$, $\Psi_{(++)}^2$, $\Psi_{(++)}^3$ поворачивают соответственно в комплексы $\Psi_{(--) }^1$, $\Psi_{(--) }^2$, $\Psi_{(--) }^3$. При этом точки поворота $\Psi_{(++)}^2 \rightarrow \Psi_{(--) }^2$ и $\Psi_{(++)}^3 \rightarrow \Psi_{(--) }^3$ находятся существенно ближе к нижней границе области существования по h , нежели к точке поворота $\Psi_{(++)}^1 \rightarrow \Psi_{(--) }^1$.

Трехсолитонные комплексы $\Psi_{(+++)}^1$, $\Psi_{(+++)}^2$, $\Psi_{(+++)}^3$ в точках поворота вблизи нижней границы области существования переходят соответственно в решения $\Psi_{(+-+)}^1$, $\Psi_{(--+)}^2$, $\Psi_{(---)}^3$. В свою очередь, трехсолитонные комплексы $\Psi_{(+-+)}^1$, $\Psi_{(--+)}^2$, $\Psi_{(+-+)}^3$ переходят соответственно в $\Psi_{(---)}^1$, $\Psi_{(---)}^2$, $\Psi_{(---)}^3$. Таким образом, в указанных точках поворота в трехсолитонных комплексах на первой орбите только один Ψ_+ -солитон переходит в Ψ_- -солитон; в комплексах на второй орбите два Ψ_+ -солитона меняются на Ψ_- -солитоны; в комплексах на третьей орбите, где солитоны наименее связаны, все входящие в комплекс Ψ_+ -солитоны трансформируются в Ψ_- , в то время как Ψ_- -составляющие превращаются в Ψ_+ .

Поскольку комплексы типа Ψ^2 и Ψ^3 , имеющие в своем составе одинаковое число Ψ_+ - и Ψ_- -составляющих, имеют близкие значения энергии, на графике соответствующие кривые сливаются.

Как уже упоминалось, в окрестности верхней границы области существования по h все $\Psi_{(++)}$ - и $\Psi_{(+++)}$ -комплексы переходят в однородное решение. Бифуркационные кривые остальных двух- и трехсолитонных комплексов, содержащих Ψ_- -составляющие, вблизи правой границы по h поворачивают вверх ("ключообразные" повороты в правой части диаграммы на рис. 4). При этом происходит усложнение решений: к ним добавляются новые Ψ_+ -составляющие. Это видно на рис. 5, где в крупном масштабе показаны некоторые точки поворота вблизи нижней и верхней границ области существования по h .

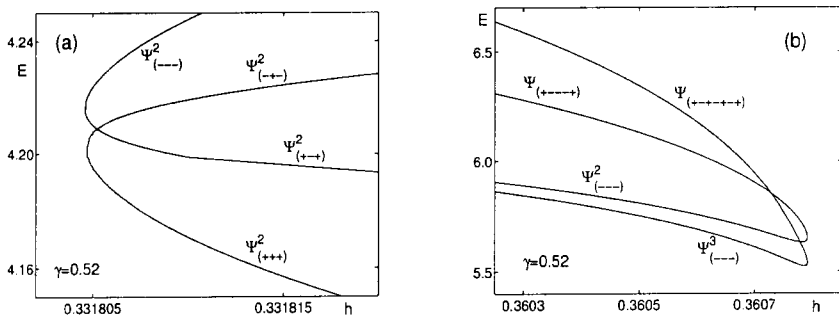


Рис. 5. Фрагменты диаграммы, представленной на рис. 4: (а) – вблизи нижней границы существования по h ; (б) – вблизи верхней границы

Все расчеты для уравнения (5) проводились с теми же вычислительными параметрами, что и для уравнения с параметрической накачкой.

Результаты, связанные с уточнением нижней границы области существования солитонных решений по параметру h (точка поворота солитона Ψ_- в Ψ_+), опубликованы в работе [26]. Подробный анализ устойчивости и бифуркаций многосолитонных решений, соответствующих различным веткам на рис. 4, будет предметом отдельной публикации. Здесь мы отметим только, что *устойчивыми* на этой диаграмме являются решения Ψ_- и $\Psi_{(-)}$.

Заключение

В работе дано описание схемы численного анализа многосолитонных комплексов нелинейного уравнения Шрёдингера, включающей алгоритм продолжения по параметру через точки поворота. Представлены численные результаты, полученные для нелинейного уравнения Шрёдингера с диссипацией для случаев прямой и параметрической накачки.

Представленная здесь вычислительная схема оказалась эффективной и успешно использовалась для решения и других

задач теории солитонов в неинтегрируемых системах, а именно: при численном исследовании *движущихся* солитонов уравнения (1) [27]; двух- и трехмерных осциллонов при нелинейном фарадеевском резонансе [28]; темных солитонов с параметрической накачкой и диссипацией [29].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 03-01-00657); Национального научного фонда ЮАР (гранты 20533723 и 2060193); Мемориального фонда Джонсона (Кейптаун) и Комиссии научных сообществ Кейптаунского университета.

Список литературы

- [1] S. Wabnitz, *Opt. Lett.* **18**, 601 (1993); N. N. Akhmediev, A. Ankiewicz, and J. M. Soto-Crespo, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4047 (1997); S. Longhi, *Phys. Rev. E*, **55**, 1, (1997)
- [2] B. A. Malomed, *Phys. Rev. A* **44**, 6954 (1991)
- [3] B. A. Malomed, *Phys. Rev. A* **47**, 2874 (1993)
- [4] J. R. Yan and Y. P. Mei, *Europhys. Lett.*, **23** (5), p. 335-3401 (1993)
- [5] X. Wang, R. Wei, *Phys. Lett. A* **192**, 1 (1994); W. Wang, X. Wang, J. Wang, and R. Wei, *Phys. Lett. A* **219**, 74 (1996); X. Wang, R. Wei, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2744 (1997); *Phys. Rev. E* **57**, 2405 (1998)
- [6] J. Christoph *et al*, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1586 (1999)
- [7] A. Mecozzi, W. L. Kath, P. Kumar, and C. G. Goedde, *Opt. Lett.* **19**, 2050 (1994); C. G. Goedde, W. L. Kath, and P. Kumar, *ibid.* **19**, 2077 (1994); S. Longhi, *Opt. Lett.* **20**, 695 (1995); S. Longhi and A. Geraci, *Appl. Phys. Lett.* **67**, 3060 (1995); S. Longhi, *Phys. Rev. E* **53**, 5520 (1996)
- [8] A. Larraza and S. Putterman, *J. Fluid Mech.* **148**, 443 (1984); J. W. Miles, *J. Fluid Mech.* **148**, 451 (1984);
- [9] M. Umeki, *J. Fluid Mech.* **227**, 161 (1991)
- [10] E. Moses, J. Feinberg, and V. Steinberg, *Phys. Rev. A* **35**, 2757 (1987); P. Kolodner, D. Bensimon, and C. M. Surko, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 1723 (1988); P. Kolodner, *Phys. Rev. A* **44**, 6448 (1991); *ibid.* 6466
- [11] A. Jotes and R. Ribotta, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2164 (1988)
- [12] G. Wysin and A. R. Bishop, *J. Magn. Magn. Mater.* **54-57**, 1132 (1986); A. M. Kosevich, B. A. Ivanov, and A. S. Kovalev, *Phys. Rep.* **194**, 118 (1990)
- [13] K. Nozaki and N. Bekki, *Phys. Rev. Lett* **50**, 1226 (1983); *Phys. Lett.* **102A**, 383 (1984), *J. Phys. Soc. Jpn.* **54**, 2363 (1985)

- [14] K. Nozaki and N. Bekki, *Physica D* **21**, 381 (1986)
- [15] I. V. Barashenkov, M. M. Bogdan, and V. I. Korobov, *Europhys. Lett.* **15**, 113 (1991)
- [16] I. V. Barashenkov and Yu. S. Smirnov, *Phys. Rev. E* **54**, 5707 (1996).
- [17] Т. Бояджиев, М. Тодоров, *Математическое моделирование*, **12**, No.4, 61 (2000)
- [18] Л. В. Кузьмина, И. Д. Родионов, *ЖВМиМФ* **25**, No. 8, 1200 (1985);
В. А. Жевнеров, И. Д. Родионов, *ЖВМиМФ* **26**, No. 3, 449 (1986)
- [19] R. Seydel. *From equilibrium to chaos. Practical bifurcation and stability analysis.* Elsevier Science Publishing Co., Inc. (1988)
- [20] E. L. Allgower, K. Georg. *Numerical Continuation Methods.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1990)
- [21] И. В. Пузынин, И. В. Амирханов, Е. В. Земляная, В. Н. Первушин, Т. П. Пузынина, Т. А. Стриж, В. Д. Лахно, *ЭЧАЯ*, **30**, No.1, 210 (1999)
- [22] Е. В. Земляная, И. В. Пузынин, Т. П. Пузынина. *Сообщение ОИЯИ Р11-97-414, Дубна* (1997)
- [23] I. V. Barashenkov and E. V. Zemlyanaya. *Comp. Phys. Comm.* **126**, No.1-2, 22 (2000)
- [24] I. V. Barashenkov and E. V. Zemlyanaya, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 2568 (1999)
- [25] I. V. Barashenkov, Yu. S. Smirnov, and N. V. Alexeeva, *Phys. Rev. E* **57**, 2350 (1998)
- [26] I. V. Barashenkov and E. V. Zemlyanaya, *Physica D*, **132** 363 (1999)
- [27] I. V. Barashenkov, E. V. Zemlyanaya, M. Bär, *Phys. Rev. E* **64**, 016603 (2001)
- [28] I. V. Barashenkov, N. V. Alexeeva, E. V. Zemlyanaya, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 104101 (2002)
- [29] I. V. Barashenkov, S. R. Woodford, and E. V. Zemlyanaya, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 054103 (2003)

Получено 10 декабря 2003 г.

Земляная Е. В., Барашенков И. В.

P11-2003-223

Численное исследование многосолитонных комплексов
в нелинейном уравнении Шредингера
с диссипацией и накачкой

В работе описана схема численного анализа многосолитонных комплексов в диссипативном нелинейном уравнении Шредингера, включающая алгоритм продолжения решения по параметру через точки поворота. Представлены численные результаты для нелинейного уравнения Шредингера как с прямой (внешней), так и с параметрической накачкой.

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2003

Перевод авторов

Zemlyanaya E. V., Barashenkov I. V.

P11-2003-223

Numerical Study of Multisoliton Complexes
in the Damped Driven Nonlinear Schrödinger Equation

We present a method of numerical analysis of multisoliton complexes in the damped driven nonlinear Schrödinger equation. Numerical results for cases of the parametrical driving and the external driving are given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2003

Редактор *О. Г. Андреева*
Макет *Е. В. Сабоевой*

Подписано в печать 16.01.2004.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 0,99. Тираж 310 экз. Заказ № 54267.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/