

P5-2004-29

Д. В. Ширков¹, В. Ф. Ковалев²

РЕНОРМГРУППОВАЯ СИММЕТРИЯ
ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЯ

Направлено в журнал «Journal of Physics A»

¹Объединенный институт ядерных исследований, Дубна,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

²Институт математического моделирования РАН, Москва

Ширков Д. В., Ковалев В. Ф.

P5-2004-29

Ренормгрупповая симметрия для функционалов от решения

Работа содержит обобщение ренормгруппового алгоритма для краевых задач математической физики и связанного с ним понятия ренормгрупповой симметрии, сформулированных ранее в работах авторов применительно к моделям, использующим дифференциальные уравнения. Эти алгоритм и симметрия формулируются теперь для задач с нелокальными (интегральными) уравнениями. Подробно обсуждаются и иллюстрируются примерами приложения обобщенного алгоритма к моделям с нелокальными вкладами, имеющими вид линейных функционалов от решения.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2004

Перевод авторов

Shirkov D. V., Kovalev V. F.

P5-2004-29

Renormgroup Symmetry for Solution Functionals

A paper contains generalization of the renormgroup algorithm for boundary value problems of mathematical physics and related concept of the renormgroup symmetry, formulated earlier by the authors with reference to models based on differential equations. These algorithm and symmetry are formulated now for models with nonlocal (integral) equations. We discuss in detail and illustrate by examples the applications of the generalized algorithm to models with nonlocal terms which appear as linear functionals of the solution.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2004

*Посвящается Льву Васильевичу Овсянникову
в связи с его 85-летием*

1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие ренормгрупповой симметрии (РГС) возникло в математической физике в начале 90-х гг. [1, 2] (см. также обзоры [3, 4]), будучи привнесено из теоретической физики.

1.1. Ренормгруппа в КТП. В свою очередь, понятие ренормализационной группы (РГ) впервые появилось в наиболее сложном разделе теоретической физики — квантовой теории поля (КТП). Наличие групповой структуры (группы преобразований Ли) в результатах вычислений КТП было открыто в начале 50-х гг. Штюкельбергом и Петерманом [5] (см. также [6, 7]).

Эта структура и подлежащая ей точная симметрия решений были затем использованы Н. Н. Боголюбовым для создания регулярного метода уточнения приближенных решений задач КТП — метода ренормализационной группы [8] (см. также [9–11]), включающего элементы аппарата теории групп непрерывных преобразований (теории Софуса Ли). Улучшение аппроксимационных свойств оказывается наиболее существенным в окрестности сингулярности решения. В квантово-полевым случае это сингулярности в инфракрасной (см. [9, 10, 12]), а также в ультрафиолетовой областях. К последнему случаю относится наиболее яркий физический результат метода РГ — открытие свойства асимптотической свободы неабелевых калибровочных теорий [13].

В 70-х гг. РГ-симметрия и метод РГ были с успехом экспортированы в некоторые другие, достаточно сложные разделы современной теоретической физики. Среди них теория критических явлений, теория турбулентности и теория хаоса в больших статистических системах. Затем, в 80-х гг., РГ-симметрия была обнаружена в решениях некоторых более простых физических задач — из статистики, теории переноса, классической гидродинамики. Существенную роль в этом процессе сыграло сопоставление [14] с «принципом инвариантности» В. А. Амбарцумяна, сформулированным им для асимптотики решения в плоской задаче переноса излучения [15]. В итоге была установлена близость РГ-симметрии с симметрией самоподобия (иначе *автомодельности*) и было предложено [16] рассматривать РГ-симметрию как функциональное обобщение степенного самоподобия, т. е. как «функциональное самоподобие» (ФСП).

Следует отметить, что в большей части упомянутых случаев использовалась аналогия с перенормировочными преобразованиями Дайсона, введен-

ными [17] при формализации процедуры перенормировок, служащей в КТП для устранения так называемых ультрафиолетовых расходимостей. При этом уже в ранних работах [7,9,18] была отмечена независимость РГ-симметрии от наличия подобных трудностей КТП. РГ-симметрия рассматривалась здесь в контексте *конечных* перенормировочных преобразований (см., например, [11], гл. VI), т. е. преобразований *репараметризации* решений. Именно в последнем качестве она и была «протиражирована» в других разделах теоретической физики, включая наименее сложные. Именно такое понимание РГ-симметрии приводит к ее эквивалентности с ФСП.

Обратим внимание на то, что в случаях задач, описываемых сложными уравнениями, — как, например, теория переноса (интегродифференциальное уравнение Больцмана) или квантовая теория поля (бесконечная зацепляющаяся цепочка интегродифференциальных уравнений Дайсона–Швингера), — достаточно простой симметрией обладают лишь некоторые составляющие (компоненты) решения или их интегральные характеристики. Так, в КТП центральным объектом РГ-преобразований является так называемая «функция инвариантного заряда» $\bar{\alpha}$ (иначе «бегущая константа связи»), представляющая собой специфическое произведение лоренц-инвариантных амплитуд пропагаторов d_i , вертексов Γ_k и параметра разложения α :

$$\bar{\alpha} = \alpha \Gamma^2 \Pi_i d_i.$$

При этом в уравнения Дайсона–Швингера входят лишь функции d_i , Γ_k и константа взаимодействия α по отдельности, но не их произведение $\bar{\alpha}$. В простейшей плоской односкоростной задаче переноса свойством РГ-инвариантности обладает асимптотика «плотности частиц, движущихся в глубь среды» $n_+(x)$, $x \rightarrow \infty$, не входящей в уравнение Больцмана*.

1.2. РГС в математической физике. При переносе ренормгрупповых представлений в задачи математической физики [1,2] в конечном счете ставились те же цели, что и в КТП, — «исправление» поведения решений в окрестности сингулярности. При этом — подобно тому как распространение РГ-метода из КТП в другие области теоретической физики (такие как теория критических явлений, физика полимеров и динамический хаос) породило различные и иногда существенно отличные от исходной формы реализации РГ-идеологии (см., например, обзор [19]) — в применениях к задачам математической физики возникли различные варианты формулировки РГ-метода. Например, подход, близкий к квантово-полевой РГ и названный авторами

*И представимой в виде интеграла $\int_0^1 n(x, \vartheta) d \cos \vartheta$ от решения односкоростного кинетического уравнения $n(x, \vartheta)$.

«пертурбативной теорией ренормализационной группы», использовался Гольденфельдом с соавторами [20] для нахождения асимптотик решений нелинейных дифференциальных уравнений (ДУ) параболического типа и глобального асимптотического анализа. Основной целью здесь являлось улучшение пертурбативного решения, представленного на малых временах разложением в ряд по степеням некоторого малого параметра и содержащего секулярные вклады, и построение равномерно пригодной асимптотики этого решения на больших временах в заданном порядке по малому параметру. Геометрическая трактовка этого приема была сформулирована Кунихиро [21] на основе классической теории огибающих и затем переформулирована с использованием понятия об инвариантном многообразии [22]. Похожий метод использовался затем в приложении к кинетическим уравнениям (см., например, обзор [23] и цитируемую там литературу), а также в других физических задачах (см. [24–27]).

Несколько иной метод, использующий процедуру последовательного изменения масштабов и близкий по духу к вильсоновской ренормгруппе [28], применили в своих построениях Брикмон и Купийainen [29] для исследования решений нелинейных ДУ. С использованием итерационной процедуры преобразования масштабов им удалось установить факт глобальной устойчивости решения и исследовать его асимптотики на больших временах для некоторых классов нелинейных параболических уравнений.

Для краевых задач (КЗ) математической физики, использующих ДУ, нами был развит (см. [1,2], а также недавние обзоры [4, с. 232–249; 30]) совершенно иной, отличный от известных ранее РГ-алгоритм. Чтобы это отличие стало очевидным, напомним, что в основе метода РГ, в том виде, в котором он изначально был сформулирован Н. Н. Боголюбовым и одним из авторов этой работы [8] для задач КТП, лежит использование *точного* группового свойства решения для улучшения *приближенного* пертурбативного (т. е. полученного по теории возмущений (ТВ)) решения. Одной из известных формулировок этого свойства является функциональное уравнение (представляющее собой всего лишь запись группового закона сложения) для инвариантного заряда в КТП. В каждом конкретном случае обнаружение подобной симметрии (т. е. группового свойства) решения требует специального, зачастую нестандартного, анализа (см., например, обсуждение в работах [19, 20, 31]), что является алгоритмическим недостатком техники РГ.

Возвращаясь к математической физике (МФ), отметим, что здесь имеют дело с задачами, использующими системы ДУ, симметрии которых могут быть найдены регулярным способом с помощью техники группового анализа Софуса Ли. В задачах МФ это обстоятельство оказалось определяющим при создании «РГ-алгоритма», который объединил РГ-идеологию из КТП с регулярным способом построения симметрий решений КЗ. Именно благодаря этому алгоритму и возникло понятие ренормгрупповой симметрии для реше-

ний КЗ: эти симметрии находятся в результате вычислительной процедуры, подобной используемой в современном групповом анализе, и при этом имеют то же назначение, что и в методе РГ Боголюбова, т. е. получение улучшенного (по сравнению с исходным приближенным) решения.

Первые результаты в этом направлении были получены более пятнадцати лет назад в задаче о генерации высших гармоник в плазме [1, 32]. В дальнейшем регулярный РГ-алгоритм был с успехом применен к различным КЗ (см. [3, 4], а также [30], где указаны ссылки на последние публикации). В следующем разделе мы остановимся на деталях этого алгоритма подробнее.

На начальном этапе [1,2] применение РГС в основном ограничивалось задачами на основе ДУ, хотя формально РГ-алгоритм может быть использован в любой проблеме, для которой можно указать регулярный способ вычисления симметрий ее уравнений. В этом плане переход к таким объектам, которые до недавнего времени не являлись предметом группового анализа, например к интегральным и интегродифференциальным уравнениям, существенно расширяет область приложения РГС.

В только что упомянутых случаях интегральные соотношения составляют основу задачи. Они, однако, могут являться неким самостоятельным объектом приложения для РГС, построенных для решений КЗ для ДУ. Зачастую физический интерес представляет не само решение во всем диапазоне изменения переменных и параметров, а некая его интегральная характеристика — функционал от решения. Эта характеристика может появляться, например, в результате усреднения (интегрирования) по одной из независимых переменных* или в результате перехода к новому интегральному представлению, например представлению Фурье. В этом случае РГ-алгоритм может быть применен не для уточнения частного решения с последующим вычислением его интегральной характеристики, а непосредственно для улучшения значения функционала от приближенного решения. Указанные мотивы послужили основанием для распространения РГ-алгоритма на модели с нелокальными (интегральными) уравнениями.

Содержание работы структурировано следующим образом. В разд. 2 формулируется обобщение РГ-алгоритма, разработанного в приложении к КЗ для ДУ [3] (и изложенного в [4, 30]), на модели с нелокальными уравнениями. В разд. 3 представлен обзор недавних результатов, полученных на основе модифицированного РГ-алгоритма, а также демонстрируется эффективность метода на уже известных решениях. В качестве примеров рассмотрены: интегральные преобразования, сохраняющие РГ-инвариантность в КТП, интегральные характеристики решений начальной задачи для уравнения Хопфа и задачи о распространении светового пучка в нелинейной оптике, преобразова-

*См., например, примечание на с. 2.

ние нелинейных диэлектрических проницаемостей в плазме при переходе от гидродинамического к кинетическому описанию, построение и использование РГС в задаче о разлете плазменного сгустка и ускорении частиц. Технические подробности вынесены в приложение 1. Некоторые общие закономерности, объединяющие понятия РГ-симметрии, функционального самоподобия и автомодельности, рассмотрены в приложении 2.

2. СХЕМА РГ-АЛГОРИТМА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

Процедура построения и использования РГС применительно к КЗ для ДУ детально описана в наших предыдущих работах, например, в обзорах [4, 30]. Тем не менее, для связности изложения, ниже кратко обрисованы основные этапы схемы с акцентом на те изменения, которые надо внести в РГ-алгоритм, для того чтобы он мог применяться и к нелокальным задачам.

В качестве исходной в этих задачах будем рассматривать систему из $\nu \geq 1$ интегродифференциальных (в том числе дифференциальных и интегральных) уравнений для функций $u = \{u^\alpha\}$, $\alpha = 1, \dots, m$, от переменных $x = \{x^i\}$, $i = 1, \dots, n$,

$$[E] : E_\nu(u(x)) = 0 \quad (1)$$

с нелокальными вкладами, зависящими от интегралов от этих функций, дополненную соответствующими краевыми (граничными или начальными) условиями. Предположим, что нам известно некоторое приближенное решение $u^\alpha = U^\alpha$, например, представленное отрезком ряда ТВ по степеням малого параметра или по степеням малого отклонения от границы области, решение на которой считается известным.

Тогда, условно, схема реализации РГ-алгоритма представима в виде последовательности четырех этапов:

(I) построения ренормгруппового *многообразия*,

(II) нахождения допускаемой им *группы симметрий* и

(III) ее *сужения* на частном решении КЗ и нахождения РГС, а также

(IV) отыскания отвечающего РГС *аналитического решения*.

Эти шаги представлены на схеме (см. рис. 1). Каждый из них изображается в виде стрелки (с соответствующим номером), соединяющей исход-

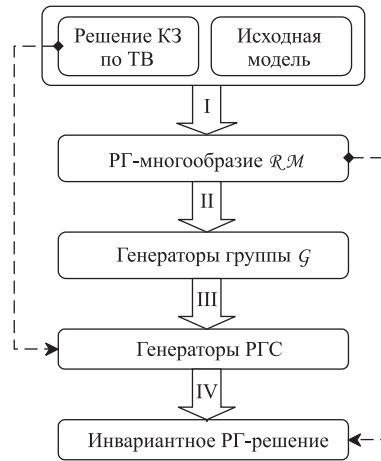


Рис. 1. Общая схема реализации РГ-алгоритма

ный объект с другим, получившимся в результате данного этапа. Подробное рассмотрение каждого из шагов приводится ниже, в п. 2.1–2.4. Помимо основных, «широких» стрелок, описывающих возникновение новых объектов, схема содержит пунктирные стрелки, отвечающие использованию (при построении очередного объекта) дополнительной информации, извлекаемой из более «раннего» объекта. Эти стрелки комментируются при описании каждого из шагов алгоритма.

2.1. Построение РГ-многообразия. Начальной задачей является построение РГС и соответствующих преобразований, затрагивающих в том числе параметры частного решения. Поэтому назначение **первого (I)** шага состоит в том или ином способе вовлечения в групповые преобразования параметров, входящих как в уравнения задачи, так и в краевые условия, от которых зависит это частное решение. Эта цель достигается путем построения специального РГ-многообразия $\mathcal{R}\mathcal{M}$, которое мы полагаем заданным в виде системы из s ДУ k -го порядка и q нелокальных соотношений

$$F_\sigma(z, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) = 0, \quad \sigma = 1, \dots, s, \quad (2)$$

$$F_\sigma(z, u, u_{(1)}, \dots, u_{(r)}, J_a(u)) = 0, \quad \sigma = 1 + s, \dots, q + s. \quad (3)$$

Здесь и ниже используется терминология дифференциальной алгебры и принятые в групповом анализе [33] обозначения для переменных:

$$\begin{aligned} z &= \{z^i\}, \quad u = \{u^\alpha\}, \quad u_{(1)} = \{u_i^\alpha\}, \\ u_{(2)} &= \{u_{ij}^\alpha\}, \dots, \quad i, j = 1, \dots, n + l. \end{aligned} \quad (4)$$

Связь между этими переменными задается системой соотношений

$$u_i^\alpha = D_i(u^\alpha), \quad u_{ij}^\alpha = D_j(u_i^\alpha) = D_j D_i(u^\alpha), \dots \quad (5)$$

с помощью оператора полного дифференцирования

$$D_i = \frac{\partial}{\partial z^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} + u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots \quad (6)$$

Переменные z называются независимыми, переменные u — *дифференциальными переменными*, имеющими последовательные производные $u_{(1)}, u_{(2)} \dots$. В z наряду с «традиционными» переменными $x = \{x^i\}$ включены также параметры задачи $p = \{p^j\}, j = 1, \dots, l$, т. е. $z = \{x, p\}$. Локально аналитическая функция переменных (4), например функция $F_\sigma(z, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)})$ из (2), с наивысшим порядком производных k , называется дифференциальной функцией k -го порядка, а совокупность всех таких функций с произвольными значениями k образует пространство дифференциальных функций $\mathcal{A}[z, u]$.

Любая функция $F_\sigma \in \mathcal{A}[z, u]$ порождает дифференциальное многообразие $[F_\sigma]$, определяемое бесконечной системой уравнений

$$[F_\sigma]: \quad F_\sigma = 0, \quad D_i F_\sigma = 0, \quad D_i D_j F_\sigma = 0, \dots \quad (7)$$

Входящие в (3) нелокальные переменные $J_a(u)$ вводятся интегральными операциями

$$J_a(u) = \int \mathcal{F}_a(u(z)) dz. \quad (8)$$

Наличие соотношений (3) характеризует основное отличие \mathcal{RM} для нелокальных задач от случая КЗ для ДУ, для которых РГ-многообразие является дифференциальным.

Отметим, что в общем случае \mathcal{RM} не совпадает с системой исходных уравнений. Только в отдельных случаях, о которых будет сказано ниже, и с дополнительными оговорками, расширяющими и уточняющими список переменных и параметров, участвующих в РГ-преобразованиях, можно установить соответствие между (1) и (2)–(3). Однако для произвольных краевых задач выполнить первый шаг алгоритма, просто трактуя $[E]$ как \mathcal{RM} , не удастся, и конкретная форма реализации первого шага зависит как от вида исходных уравнений (1), так и от формы записи граничных условий. Сформулированный ранее для моделей с ДУ общий способ построения \mathcal{RM} остается в силе и для нелокальных задач. В этом смысле по-прежнему верны несколько указанных ранее (см., например, [4]) и перечисленных ниже возможных путей построения этого многообразия:

1. Один из этих путей связан с процедурой расширения пространства переменных, вовлекаемых в групповые преобразования, и по сути дела уже реализован при записи \mathcal{RM} в форме (2)–(3). Здесь в качестве дополнительных независимых переменных добавлены *параметры* p , входящие в решения как через исходные уравнения, так и через краевые условия. Соответственно, производные по этим параметрам расширяют пространство дифференциальных переменных. Зачастую такое расширение пространства независимых и дифференциальных переменных преобразует исходные уравнения (1) в многообразии \mathcal{RM} , однако присущая им нелокальность при этом сохраняется.

2. Другая возможность основана на использовании нестандартной формы записи краевых условий, например их формулировке в виде некоторых дополнительных дифференциальных соотношений (связей) или уравнений погружения. В этом случае применяется хорошо известный прием [15; 34, гл. VII, § 3; 35; 36], при котором решения КЗ трактуются как аналитические функции независимых переменных и параметров, входящих в граничные условия $b = \{x_0^i, u_0^\alpha\}$. Дифференцирование этих функций по последним дает дополнительные соотношения — *уравнения погружения*, которые совместно с исходными (1) образуют искомое многообразие \mathcal{RM} .

Структура уравнений погружения определяется не только видом исходного уравнения, но и типом краевых данных к нему [34,36]. Одним и тем же исходным уравнениям при разных краевых данных соответствуют разные уравнения погружения. В простейшем случае уравнения погружения имеют вид эволюционных ДУ в частных производных первого порядка, однако возможны и более сложные варианты, когда уравнения погружения становятся нелокальными*. Таким образом, использование уравнений погружения может привести к нелокальному $\mathcal{R}\mathcal{M}$ даже в том случае, когда исходные уравнения (1) представляют дифференциальное многообразие.

Обобщением приема с использованием уравнений погружения является переформулирование краевых данных на языке дифференциальной связи [37, 38], совместной с исходными уравнениями. В частности, такие дифференциальные связи высокого порядка могут возникать из исследования высших симметрий (более подробное разъяснение этого термина дано в следующем разделе) для исходных уравнений [37] и уравнений погружения [39].

3. В том случае, когда рассмотрение в качестве $\mathcal{R}\mathcal{M}$ исходных уравнений с соответствующими краевыми условиями не дает возможности построить РГС, но при этом задающие модель уравнения содержат малый параметр α , искомое *приближенное* многообразие $\mathcal{R}\mathcal{M}$ можно получить путем рассмотрения упрощенной задачи при $\alpha = 0$, уравнения которой допускают более широкую группу симметрии по сравнению с вариантом $\alpha \neq 0$, и применению затем метода возмущений в групповом анализе (см. [33, т. 3, гл. 2, с. 31]). При учете вкладов, возникающих из-за влияния малого α , эта симметрия сохраняется и *наследуется* исходными уравнениями в виде дополнительных вкладов (имеющих вид поправок по степеням α) в формулах для операторов группы. Как следствие, аналогичное представление в виде ряда по степеням малого параметра возникает также для операторов РГС, получаемых из этих операторов на следующих шагах алгоритма**.

Перечисленные выше пути не исчерпывают всех возможностей по построению $\mathcal{R}\mathcal{M}$, скорее они подчеркивают разнообразие подходов к реализации первого шага в зависимости от характера рассматриваемой задачи. Выбор конкретной реализации чаще всего диктуется как видом уравнений (1) и краевых условий к ним, так и видом приближенного решения. Подобная многовариантность присуща только первому шагу алгоритма и нацелена на охват наиболее широкого круга задач, исследуемых данным методом. Уже следу-

*Например, если начальное значение искомой функции u_0^α фигурирует в качестве параметра в исходном уравнении, то уравнения погружения становятся нелинейными интегродифференциальными уравнениями [37].

**Теория приближенных симметрий развита пока только в приложении к ДУ, поэтому построение приближенных РГС представляется обоснованным по крайней мере в том случае, когда малый параметр присутствует только в ДУ (2).

ющий шаг схемы выполняется в рамках хорошо разработанных теоретико-групповых методов.

2.2. Вычисление группы преобразований. Следующий, **второй (II)** шаг состоит в вычислении наиболее широкой допускаемой группы симметрии \mathcal{G} для (2)–(3). Именно здесь требуется существенное изменение РГ-алгоритма по сравнению с его реализацией для дифференциального РГ-многообразия. В самом деле, в приложении к $\mathcal{R}\mathcal{M}$, задаваемом лишь системой ДУ (2), речь шла о локальной группе преобразований в пространстве дифференциальных функций \mathcal{A} , при которых система (2) остается неизменной.

При использовании классического алгоритма Ли для нахождения симметрий процедура заключается в построении касательного векторного поля, определяемого оператором

$$X = \xi^i \partial_{z^i} + \eta^\alpha \partial_{u^\alpha}, \quad \xi^i, \eta^\alpha \in \mathcal{A}, \quad (9)$$

с координатами ξ^i, η^α , которые являются функциями групповых переменных $\{z^i, u^\alpha\}$ и удовлетворяют системе линейных однородных ДУ в частных производных

$$X_{(k)} F_\sigma \Big|_{[F_\sigma]} = 0, \quad \sigma = 1, \dots, s, \quad (10)$$

известных под названием **определяющих уравнений (ОУ)** и возникающих из условия инвариантности системы (2) относительно группы с оператором X . Здесь $X_{(k)}$ обозначает оператор X , продолженный (см., например, [33]) на все входящие в F_σ производные:

$$\begin{aligned} X_{(k)} &= X + \zeta_i^\alpha \partial_{u_i^\alpha} + \dots + \zeta_{i_1 \dots i_k}^\alpha \partial_{u_{i_1 \dots i_k}^\alpha}, \\ \zeta_{i_1 \dots i_k}^\alpha &= D_{i_k}(\zeta_{i_1 \dots i_{k-1}}^\alpha) - u_{j_{i_1 \dots i_k}}^\alpha D_{i_k}(\zeta^j), \end{aligned} \quad (11)$$

и знак $\Big|_{[F_\sigma]}$ означает вычисление на дифференциальном многообразии (7), порождаемом (2). ОУ (10) наряду с функциями от переменных $\{z^i, u^\alpha\}$ содержат также и производные $\{u_{(k)}\}$. Дифференцирование (или, как еще говорят, «расщепление») по этим производным преобразует систему ОУ (10) в эквивалентную ей систему линейных ДУ для ξ^i, η^α , уже не содержащую производных, которая, как правило, оказывается переопределенной. Ее решение дает набор значений координат ξ^i, η^α , т. е. набор инфинитезимальных операторов (9) (или генераторов группы), которые соответствуют допускаемому векторному полю и образуют алгебру Ли. В случае, когда общий элемент этой алгебры

$$X = \sum_j A^j X_j \quad (12)$$

с произвольными постоянными A^j содержит конечный набор операторов ($1 \leq j \leq r$), группа называется конечномерной (конечной) с размерностью r ;

в противном случае, когда j не ограничено, или когда координаты ξ^i , η^α зависят от произвольных функций групповых переменных, группа называется бесконечной.

Обрисованный здесь классический алгоритм применим для нахождения точечных симметрий. Для целей построения и применения РГС полезными являются также используемые в современном групповом анализе различные модификации и обобщения классического алгоритма Ли (см. [40–42], а также [33] и цитируемую там литературу). Типичным и часто реализуемым в приложениях примером обобщения служит группа симметрии, задаваемая продолженным на все высшие производные оператором типа (9)

$$\begin{aligned} X &= \xi^i \partial_{z^i} + \eta^\alpha \partial_{u^\alpha} + \zeta_i^\alpha \partial_{u_i^\alpha} + \zeta_{i_1 i_2}^\alpha \partial_{u_{i_1 i_2}^\alpha} + \dots, \\ \zeta_i^\alpha &= D_i(\varkappa^\alpha) + \xi^j u_{ij}^\alpha, \quad \zeta_{i_1 i_2}^\alpha = D_{i_1} D_{i_2}(\varkappa^\alpha) + \xi^j u_{j i_1 i_2}^\alpha, \\ \varkappa^\alpha &= \eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha, \end{aligned} \quad (13)$$

с координатами $\xi^i([z, u])$, $\eta^\alpha([z, u])$, $\zeta_i^\alpha([z, u]) \dots$, являющимися дифференциальными функциями из пространства \mathcal{A} , — так называемая группа симметрии Ли–Беклунда (используют также термины «высшие» или «обобщенные» симметрии). Множество всех операторов Ли–Беклунда образует бесконечномерную алгебру Ли L_B , причем любой оператор вида $X_* = \xi^i D_i$ для произвольной дифференциальной функции $\xi^i([z, u])$ является оператором Ли–Беклунда, а множество L_* операторов X_* образует идеал в L_B . Это свойство позволяет ввести понятие эквивалентности двух операторов Ли–Беклунда $X_1, X_2 \in L_B$, если $X_1 - X_2 \in L_*$ (записывается в виде $X_1 \sim X_2$). В частности, любой оператор Ли–Беклунда $X \in L_B$ эквивалентен оператору (13) с $\xi^i = 0$:

$$X \sim Y = X - \xi^i D_i = \varkappa^\alpha \partial_{u^\alpha}, \quad \varkappa^\alpha \equiv \eta^\alpha - \xi^i u_i^\alpha. \quad (14)$$

Оператор Y известен как *каноническое представление* X , причем в записи (14) подразумевается распространение действия оператора на все высшие производные в соответствии с формулами (13). Существенно, что инфинитезимальное преобразование группы \mathcal{G} с оператором (14) и параметром a затрагивает только зависимые переменные u^α :

$$u'^\alpha = u^\alpha + a \varkappa^\alpha + O(a^2), \quad z'^i = z^i, \quad (15)$$

не меняя независимые переменные z^i . Как будет следовать из дальнейшего, канонический оператор группы Ли–Беклунда (14) играет важную роль в построении РГС, в том числе и для моделей с интегродифференциальными уравнениями (ИДУ).

В принципе, в рамках предлагаемого алгоритма в качестве исходных для построения РГС могут обсуждаться и другие возможные типы допускаемых

симметрий, такие как приближенные симметрии [43], нелиевские и условные симметрии [44–47], скрытые (нелокальные) симметрии [48], дискретные симметрии [49] и т. д.

При переходе к РГ-многообразию, которое задается системой (2)–(3), классический алгоритм Ли, использующий инфинитезимальный подход, оказывается неприменимым. Основным препятствием здесь оказывается то, что \mathcal{RM} в этом случае не определено *локально* в пространстве дифференциальных функций, поэтому основное преимущество вычислительного алгоритма Ли, а именно представление ОУ в виде переопределенной системы уравнений, здесь не реализуется. Также в рамках классического группового анализа не определена процедура продолжения оператора группы точечных преобразований на нелокальные переменные. Поэтому ниже указаны возможные пути преодоления этих сложностей при выполнении второго шага РГ-алгоритма.

Различные известные подходы к вычислению группы симметрии для нелокальных уравнений (например, ИДУ) могут быть разделены на две большие группы: *непрямые* и *прямые* методы.

Алгоритмы первой группы основаны на том или ином способе замены исходной системы нелокальных уравнений системой ДУ. Полученная система ДУ анализируется затем использованием стандартных методов классического группового анализа Ли. Укажем два возможных способа сведения нелокальных уравнений к дифференциальным: метод моментов и метод гранично-дифференциальных уравнений.

Первый из них применялся для систем ИДУ с нелокальными вкладами, зависящими от моментов входящей в уравнение функции. В этом случае исходная система ИДУ сводится к бесконечной системе ДУ для этих моментов. Метод моментов был использован при построении точечных симметрий Ли для уравнений Власова–Максвелла в теории плазмы [50], для уравнений Бенни [51] и кинетических уравнений власовского и больцмановского типов [52].

Второй способ — метод гранично-дифференциальных уравнений [53] — был применен для вычисления симметрий кинетического уравнения, используемого при описании процесса коагуляции. Каждый из определенных интегралов в кинетическом уравнении заменялся на соответствующую разность значений первообразной функции на граничном множестве. При этом исходное ИДУ принимало форму гранично-дифференциального (или функционального) уравнения.

При модификации РГ-алгоритма будем опираться на прямые методы вычисления симметрий, которые были развиты в [54, 55] и использованы для нахождения симметрий кинетического уравнения Больцмана, уравнений движения вязкоэластичной среды и уравнений Власова–Максвелла в кинетической теории плазмы. Здесь исключительно плодотворным оказались понятия группы Ли–Беклунда и канонического оператора группы, поскольку при ка-

ноническом представлении оператора группы независимые переменные $\{z^i\}$ не преобразуются. Это свойство позволило сформулировать понятие группы симметрии ИДУ вида (3) как локальной группы преобразований \mathcal{G} с оператором (14), при которой вид функции F_σ остается неизменным для любого значения параметра группы a . Дифференцирование по параметру группы a соответствующего условия инвариантности, записанного для функции F_σ , зависящей от преобразованной зависимой переменной u'^α , и переход к пределу $a \rightarrow 0$ дает ОУ. В отличие от случая исходных ДУ, эти ОУ в общем случае также являются нелокальными.

С помощью канонического оператора Y критерий инвариантности для (3) относительно допускаемой группы может быть записан в инфинитезимальной форме

$$Y F_\sigma \Big|_{[F_\sigma]} = 0, \quad \sigma = 1 + s, \dots, q + s, \quad \text{где} \quad Y \equiv \int dz \varkappa(z) \frac{\delta}{\delta u(z)}. \quad (16)$$

Имея в виду обобщение действия канонического оператора группы не только на дифференциальные функции, но и на *функционалы*, здесь в определении Y использовано вариационное дифференцирование [55]. Для интегрального функционала (8) производная $\delta J / \delta u(z)$ по функции u определена через главную (линейную) часть приращения функционала как предел (если он существует) (см. [56])*:

$$\frac{\delta J[u]}{\delta u(z)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{J[u + \delta u_\epsilon] - J[u]}{\int_\Delta d\tau \delta u_\epsilon(\tau)}; \quad z \in (\tau_1, \tau_2).$$

Здесь бесконечно малая вариация $\delta u_\epsilon(z) \geq 0$ — непрерывно дифференцируемая функция, заданная на фиксированном интервале $\Delta = [\tau_1, \tau_2]$ и отличная от нуля лишь в ϵ -окрестности точки z , причем норма $\|\delta u_\epsilon\|_{C^1} \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

Прямым вычислением можно проверить, что действие оператора Y на любую дифференциальную функцию и ее производные, например u, u_z, \dots , приводит к обычному результату: $Yu = \varkappa, Yu_z = D_z(\varkappa)$ и т.д. Следовательно, если $F_\sigma = 0$ является обычным ДУ, то формулы (16) приводят к локальному ОУ, а в случае, когда $F_\sigma = 0$ имеет вид системы ИДУ, формулы (16) можно рассматривать как *нелокальные* ОУ, зависящие как от локальных, так и от нелокальных переменных.

Рассмотрение локальных и нелокальных переменных в ОУ как независимых позволяет разделить эти уравнения на локальные и нелокальные. Процедура решения локальных ОУ выполняется стандартным способом, с

*Определение вариационной производной для произвольного функционала см. в [57].

использованием алгоритма Ли, основанного на расщеплении системы переопределенных уравнений по отношению к локальным переменным и их производным. В результате находят выражения для координат оператора группы, определяющих так называемую группу *промежуточных* симметрий [55], которые в дальнейшем используются при анализе нелокальных ОУ. Процедура решения нелокальных ОУ выполняется аналогичным образом, подстановкой найденных координат операторов группы промежуточной симметрии в нелокальные ОУ и их расщеплением с помощью вариационного дифференцирования. Таким образом, построение симметрий нелокальных уравнений также становится алгоритмической процедурой, которую можно представить как последовательность следующих операций:

- а) определение набора локальных групповых переменных,
- б) построение ОУ на основе инфинитезимального критерия инвариантности, который использует обобщение определения канонического оператора,
- в) разделение ОУ на локальные и нелокальные,
- г) решение локальных ОУ с использованием стандартного алгоритма Ли,
- д) решение нелокальных ОУ с помощью операции вариационного дифференцирования.

Эти действия являются обобщением второго шага алгоритма на случай, когда \mathcal{RM} представляет собой интегральное или интегродифференциальное многообразие.

В заключение опишем операцию продолжения группы симметрии на нелокальные переменные. Для того чтобы выполнить стандартную (в классическом групповом анализе) операцию продолжения оператора точечной группы Ли на нелокальную переменную, задаваемую, например, интегральным соотношением (8), следует вначале переписать этот оператор в каноническом виде Y и формально продолжить его на нелокальную переменную J :

$$Y + \varkappa^J \partial_J \equiv \varkappa \partial_u + \varkappa^J \partial_J. \quad (17)$$

Интегральное соотношение между \varkappa и \varkappa^J получается применением оператора (17) к уравнению (8), которое было введено как определение величины J . Подставляя явные выражения для координаты \varkappa оператора Y и вычисляя полученные интегралы, находим искомую координату \varkappa^J продолженного оператора:

$$\varkappa^J = \int \frac{\delta J(u)}{\delta u(z)} \varkappa(z) dz \equiv \int \frac{\delta \mathcal{F}(u(z'))}{\delta u(z)} \varkappa(z) dz dz' = \int \mathcal{F}_u \varkappa(z) dz. \quad (18)$$

Здесь, для краткости, указан лишь один аргумент координаты генератора — тот, по которому ведется интегрирование.

Из изложенного ясно, что при переходе от моделей с ДУ к задачам с ИДУ наибольшее изменение претерпел второй шаг РГ-алгоритма. Поэтому в приложении 1, п. 1 этот шаг подробно проиллюстрирован на примере вычисления группы симметрии для системы ИДУ, определяющей эволюцию бесстолкновительной плазмы. Выбор в качестве примера этой системы обусловлен тем, что именно она (или ее более простой вариант) используется в качестве \mathcal{RM} в двух последних примерах в п. 3.4.

Описанные в этом параграфе действия, приводящие к операторам допускаемой группы в неканоническом (9) или в каноническом (14) представлении, составляют суть второго шага РГ-алгоритма. Использование инфинитезимального подхода, при котором процедура нахождения координат операторов группы сводится к решению систем локальных (10) и нелокальных (16) ОУ, позволяет (по крайней мере для локальных ОУ) воспользоваться системами компьютерной алгебры, что существенно облегчает выполнение громоздких рутинных вычислений.

2.3. Сужение группы на решении. Найденная на втором шаге группа \mathcal{G} , определяемая операторами (9) и (14), в общем случае является более широкой, чем интересующая нас ренормгруппа. Поскольку последняя связана с конкретным частным решением краевой задачи, то для того, чтобы получить РГС, следует сделать **третий (III) шаг**, заключающийся в *сужении* группы \mathcal{G} на многообразии, задаваемом этим частным решением. С математической точки зрения эта процедура состоит в проверке условия обращения в нуль линейной комбинации координат \varkappa_j^α канонического оператора, эквивалентного (12), на некотором частном решении $U^\alpha(z)$ краевой задачи

$$\left\{ \sum_j A^j \varkappa_j^\alpha \equiv \sum_j A^j (\eta_j^\alpha - \xi_j^i u_i^\alpha) \right\} \Big|_{u^\alpha = U^\alpha(z)} = 0. \quad (19)$$

Форма условия, задаваемого соотношением (19), является общей для любого решения КЗ, но способ реализации процедуры сужения группы в каждом отдельном случае различен. Обычно используют частное приближенное решение для конкретной КЗ. На общей схеме это указано в виде пунктирной стрелки, соединяющей «исходный объект» — приближенное решение для частной КЗ — с тем объектом, который возникает в итоге третьего шага.

При вычислении комбинации (19) на конкретном частном решении $U^\alpha(z)$ она из системы ДУ для инвариантов группы преобразуется в алгебраические соотношения. Отметим два следствия указанных действий. Во-первых, процедура сужения приводит к набору соотношений между различными A^j и таким образом «связывает» координаты различных операторов группы X_j ,

допускаемых \mathcal{RM} (2)–(3). Во-вторых, она устраняет (частично или полностью) произвол, который может возникать в значении координат ξ^i , η^α в случае бесконечной группы \mathcal{G} .

Как правило, процедура сужения группы \mathcal{G} уменьшает ее размерность. Таким образом, общий элемент (12) группы \mathcal{G} после выполнения этой процедуры представляется линейной комбинацией новых генераторов R_i с координатами $\hat{\xi}^i$, $\hat{\eta}^\alpha$:

$$X \Rightarrow R = \sum_j B^j R_j, \quad R_j = \hat{\xi}_j^i \partial_{x^i} + \hat{\eta}_j^\alpha \partial_{u^\alpha}, \quad (20)$$

и произвольными постоянными B^j .

Набор операторов R_j , каждый из которых содержит искомое решение задачи в своем инвариантном многообразии, определяет группу преобразований, которую мы по аналогии с РГ для моделей с ДУ также будем называть *ренормгруппой*.

Как и для ДУ моделей, эта группа, имеющая конечную или бесконечную размерность, оказывается в общем случае шире, чем обсуждаемая в КТП РГ, которая обычно дается точечной однопараметрической группой. Кроме того, как уже было отмечено, РГ в МФ характеризуется большим разнообразием типов РГС, включающих помимо точечных и другие симметрии, например симметрии Ли–Беклунда высокого порядка.

Отвлекаясь от вида получаемой РГС, отметим как общие, так и различные черты в методах построения РГ в МФ и КТП. В КТП РГ-преобразования для широкого класса квантово-полевых задач определяются как преобразования растяжения параметров и независимых переменных и более сложные функциональные преобразования характеристики решения, подчиняющиеся некоторому функциональному уравнению. Дифференцирование этого уравнения по параметру группы дает инфинитезимальную формулировку РГ в КТП с помощью так называемой β -функции (или «генератора РГ» в принятой в КТП терминологии). При этом конкретный вид β -функции устанавливается с помощью дифференцирования приближенного решения по соответствующему каноническому параметру РГ в точке, где этот параметр обращается в нуль. Эта процедура является аналогом процедуры сужения группы на решении в МФ. Отметим, что в КТП термин «ренормгруппа» используется для обозначения группы преобразований еще до определения конкретной реализации для β -функции (т. е. до проведения операции сужения группы на частном решении). Это обусловлено общим видом РГ-оператора, который одинаков для широкого круга задач КТП. В МФ, ввиду невозможности построения РГС в достаточно общем виде, термин «ренормгруппа» мы используем для обозначения алгебры симметрии, которая получается *после* проведения процедуры сужения группы на решении.

На третьем шаге также наглядно проявляется отличие обсуждаемого РГ-алгоритма от стандартного группового анализа, используемого в основном с целью классификации и построения всех допускаемых группой симметрии решений (инвариантных, частично инвариантных и т. д.) при не конкретизированных априори краевых данных, которые уточняются в процессе построения каждого отдельного решения.

В отличие от этого выполняемая на третьем шаге процедура проверки условий инвариантности приближенного частного решения относительно группы преобразований с операторами, координаты которых были найдены на втором шаге, решает сразу две задачи. Во-первых, она указывает на группу преобразований, которая по самому методу построения оставляет инвариантным решение задачи с заданными краевыми (начальными) данными. Таким образом, отпадает необходимость в исследовании всех возможных инвариантных решений в попытке найти решение с требуемыми краевыми условиями. Во-вторых, эта процедура дает точное (в рамках используемого группового приема) выражение для РГ-оператора, который обеспечивает преобразование приближенного решения в улучшенное решение КЗ.

Приведенное в этом параграфе изложение третьего шага алгоритма завершает описание процедуры построения РГС. В следующем параграфе показано, как РГС используются для достижения конечной цели РГ-алгоритма — улучшения приближенного решения.

2.4. Построение РГ-инвариантного решения. Описанные выше три шага полностью определяют регулярный алгоритм построения РГС, но необходим еще один, **четвертый (IV)**, заключительный шаг. На этом шаге операторы РГС используются для нахождения аналитических выражений для новых, улучшенных (по сравнению с исходными) решений КЗ.

С математической точки зрения реализация этого шага состоит в использовании условий *ренормгрупповой инвариантности**, которые задаются *совместной* системой уравнений (2)–(3) и условий обращения в нуль линейной комбинации координат $\hat{\mathcal{X}}_j^\alpha$ канонического оператора, эквивалентного (20):

$$\sum_j R^j \hat{\mathcal{X}}_j^\alpha \equiv \sum_j B^j \left(\hat{\eta}_j^\alpha - \hat{\xi}_j^i u_i^\alpha \right) = 0. \quad (21)$$

Необходимость использования \mathcal{RM} при построении решения КЗ на рис. 1 отмечена пунктирной стрелкой, соединяющей эти два объекта.

Видно, что условия (21) по форме близки к (19). Однако, в отличие от предыдущего шага, дифференциальные переменные u_i^α в (21) не заменяются

*Здесь следует указать на существующую аналогию между этим понятием и понятием функциональной автомодельности [58, 59] (см. также обсуждение в приложении 2).

приближенными выражениями для решений КЗ $U(z)$, а рассматриваются как обычные зависимые переменные.

В наиболее распространенном случае, когда в роли ренормгруппы выступает *однопараметрическая точечная группа Ли*, условие РГ-инвариантности приводит к *уравнениям в частных производных первого порядка*. Решения соответствующих им характеристических уравнений дают *групповые инварианты* (подобные инвариантным зарядам в КТП), через которые выражается искомое решение КЗ. К аналогичному результату приводит также построение конечных преобразований группы (путем решения соответствующих уравнений Ли) и применение этих конечных преобразований к краевым данным (см. обсуждение аналогичной проблемы для задачи Коши для уравнений первого порядка в [40, § 29]).

В общем случае произвольной РГС условия РГ-инвариантности, записанные для КЗ, не представляют собой характеристических уравнений для оператора точечной группы Ли. Они могут иметь более сложный вид, например представлять комбинацию ДУ в частных производных и обыкновенных ДУ высокого порядка. Однако общий подход к построению решения КЗ как инвариантного РГ-решения остается в силе.

Изложение четвертого шага завершает описание регулярного алгоритма построения РГС для моделей с ИДУ. Следующий раздел содержит ряд конкретных примеров, демонстрирующих его возможности.

3. ПОСТРОЕНИЕ РГС ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

3.1. Интегральные преобразования и РГ-инвариантность. Обратимся к интегральным преобразованиям ренорм-инвариантной (так называемой эффективной, или «бегущей») функции связи в простой модели квантовой теории поля с одной константой связи, подобной квантовой электродинамике (КЭД) или квантовой хромодинамике (КХД).

Понятие инвариантной функции связи изначально было введено (в КЭД — под названием *инвариантного заряда* электрона) как произведение константы связи (в КЭД — квадрата заряда электрона e) и действительных постоянных z_i , входящих в конечные перенормировочные преобразования Дайсона. Последние мультипликативно преобразуют параметр разложения КЭД $\alpha = e^2/4\pi$, а также пропагаторы частиц $\Delta_i(\dots, \alpha) = \Delta_i(Q, m, \mu; \alpha)$

$$\Delta_i(\dots, \alpha) \rightarrow \Delta'_i(\dots, \alpha') = z_i^{-1} \Delta_i(\dots, z_3 \alpha), \quad \alpha \rightarrow \alpha' = z_3 \alpha, \quad (22)$$

и вершинные функции Грина Γ_i , которые рассматриваются обычно в импульсно-энергетическом представлении.

Эти константы z_i , а вследствие этого и инвариантная функция связи $\bar{\alpha}(Q^2)$ могут быть выражены через значения так называемых скалярных ам-

плитуд пропагаторов и вершин в том же представлении. Например, в массивной КЭД [7,9]

$$\bar{\alpha}(Q^2) \equiv \alpha d \left(\frac{Q^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}; \alpha \right), \quad (23)$$

где m — масса электрона, μ — некоторый параметр, связанный с граничными условиями, d — поперечная скалярная амплитуда фотонного пропагатора, которая вещественна в евклидовой части импульсно-энергетического пространства. Эта функция является инвариантной относительно одновременного преобразования

$$R_t : \quad \mu^2 \rightarrow t\mu^2; \alpha \rightarrow \bar{\alpha} \left(t, \frac{m^2}{\mu^2}; \alpha \right), \quad (24)$$

представляющего собой обычную форму РГ-преобразования в массивной однозарядной КТП. При этом функция $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ является действительной функцией своего действительного положительного аргумента — квадрата 4-импульса:

$$Q^2 \equiv \mathcal{Q}^2 - Q_0^2 \geq 0. \quad (25)$$

В КХД инвариантная функция связи $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ вводится аналогичным образом как произведение параметра разложения α_s на соответствующие скалярные амплитуды вершин и пропагаторов. Современная практика вычислений в КТП, как правило, использует выражения для наблюдаемых и некоторых других промежуточных ренормгрупповых инвариантных (или ковариантных) объектов, выраженных параметрически в терминах инвариантной функции связи. Для этого интересующая инвариантная величина должна быть записана в соответствующем представлении. Например, в терминах $\bar{\alpha}_s(Q^2)$ могут быть представлены *только* лишь объекты, определенные в евклидовой части импульсного представления (25).

Однако некоторые наблюдаемые, например эффективные поперечные сечения рассеяния, как раз являются функциями положительного аргумента $s = Q_0^2 - \mathcal{Q}^2$ — квадрата энергии в системе центра масс. Между тем переход от положительных («евклидовых») к отрицательным («минковским») значениям аргумента Q^2 в контексте ренормгруппы не может быть осуществлен непосредственно. Дело в том, что амплитуды пропагаторов, подобные фотонной амплитуде $d(Q^2)$, принимают комплексные значения при действительных отрицательных $Q^2 < 0$, т. е. в псевдоевклидовой области значений своего действительного аргумента.

Поэтому соотношения соответствия между ренорм-инвариантными величинами в различных областях — евклидовой и минковской — могут быть установлены лишь более опосредованным образом, например при помощи

линейных интегральных преобразований. Так, например, «эффективная минковская» функция связи $\tilde{\alpha}$ может быть связана с введенной выше «евклидовой» $\bar{\alpha}$ особым интегральным преобразованием

$$\bar{\alpha}(Q^2) = Q^2 \int_0^{\infty} \frac{\tilde{\alpha}(s) ds}{(s + Q^2)^2}, \quad (26)$$

введенным в [60] и подробно рассмотренным в [61].

Второй содержательный пример дает нам переход от евклидова импульсного представления к «представлению расстояний» в обычном конфигурационном пространстве. Этот переход может быть выполнен с помощью соответствующего синус-преобразования Фурье [62]

$$\bar{\alpha}(Q) \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dr}{r} \sin(Qr) \alpha_D(r). \quad (27)$$

В этой связи представляет интерес общий вопрос о PГ-инвариантности величин, связанных между собой линейными интегральными преобразованиями. Мы покажем ниже, что задача установления однозначного соответствия инвариантных величин в различных представлениях легко решается процедурой продолжения PГС-оператора на нелокальные переменные.

Допустим, что нам задан PГС-оператор, имеющий следующую, характерную для ультрафиолетового случая КТП, форму:

$$R_1 = u\partial_u - \beta(g)\partial_g. \quad (28)$$

Инвариантом этого оператора является эффективная функция связи $\bar{g}(u, g)^*$, заданная в $\{u, g\}$ -представлении. Предположим, что нас интересует теперь некое иное представление этой величины, определяемое другими переменными $\{v, g\}$. Пусть эффективная функция связи $\tilde{g}(v, g)$ в этом новом представлении связана с $\bar{g}(u, g)$ линейным интегральным преобразованием

$$\tilde{g} = \int_0^{\infty} K(u, v)\bar{g} du. \quad (29)$$

Записывая оператор R_1 в каноническом виде

$$\bar{R}_1 = \bar{\kappa}\partial_{\bar{g}}, \quad \bar{\kappa} = \beta(g)\bar{g}_g - u\bar{g}_u, \quad (30)$$

*Здесь форма записи отвечает структуре аргументов правой части (23) в безмассовом $m = 0$ случае.

и применяя алгоритм, описанный выше, легко переписать этот оператор в $\{v, g, \tilde{g}\}$ -переменных:

$$\bar{R}_2 = \tilde{\kappa} \partial_{\tilde{g}}, \quad \tilde{\kappa} = \beta(g) \tilde{g}_g + \int_0^\infty du \tilde{g}(uK(u, v))_u. \quad (31)$$

При получении (31) мы полагали, что ядро $K(u, v)$ и эффективная функция связи ограничены и достаточно быстро убывают с ростом u , так что произведение $uK(u, v)\tilde{g}$ обращается в нуль как при $u \rightarrow 0$, так и при $u \rightarrow \infty$. Оператор \bar{R}_2 имеет тот же вид, что и (30), при условии что $K(u, v)$ подчиняется уравнению

$$\partial_u(uK(u, v)) - v\partial_v K(u, v) = 0. \quad (32)$$

Его решение дает следующий общий вид ядра преобразования:

$$K(u, v) = v\mathcal{K}(uv). \quad (33)$$

Подставляя (32) в (31) и возвращаясь назад к неканоническому представлению, приходим к РГС-оператору в преобразованных переменных $\{v, g\}$

$$R_2 = -v\partial_v - \beta(g)\partial_g, \quad (34)$$

инвариантом которого является величина эффективной функции связи $\tilde{g}(v, g)$ в $\{v, g\}$ -представлении. Некоторые частные случаи реализации ядра \mathcal{K} соответствуют интегральным преобразованиям, которые уже обсуждались в литературе [62]. Например, полагая $\mathcal{K} = 1/(1 + uv)^2$, $u = s$ и $v = 1/Q^2$, получаем преобразование (26), а при $\mathcal{K} = (1/\pi) \sin(\sqrt{uv})/(uv)$, $u = r^2$ и $v = Q^2$ мы приходим к синус-преобразованию Фурье (27). Можно сказать, что приведенные примеры указывают на новый алгоритм установления взаимно-однозначного соответствия инвариантных величин в различных представлениях.

3.2. Случай функционалов от решения уравнения Хопфа. Рассмотрим теперь простой методологический пример, иллюстрирующий приложения РГС-алгоритма к функционалу от решения. Пусть имеется начальная задача для уравнения Хопфа:

$$u_t + auu_x = 0, \quad u(0, x) = \mathcal{V}(x), \quad (35)$$

решение которой хорошо известно и при t , отличном от нуля, задается в неявном виде

$$u = \mathcal{V}(x - aut). \quad (36)$$

Выбирая, например, начальное распределение в виде экспоненты

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^0 \exp(x), \quad (37)$$

получаем

$$x - aut = \ln(u/\mathcal{V}^0). \quad (38)$$

Пусть нас интересует вид решения не во всем пространстве, а лишь его значение в точке $x = 0$, которое мы будем обозначать функцией $u^0(t) = u(t, 0)$. Тогда из уравнения (38) получаем соотношение, не содержащее x :

$$au^0t + \ln(u^0/\mathcal{V}^0) = 0. \quad (39)$$

Решение уравнения (39) для $u^0(t)$ записывается через специальную, так называемую W -функцию Ламберта*

$$u^0(t) = \frac{1}{at} W_{-1}(a\mathcal{V}^0t). \quad (40)$$

В двух предельных случаях малых ($t \ll 1/a\mathcal{V}^0$) и больших ($t \gg 1/a\mathcal{V}^0$) значений времени t это решение принимает более простой вид

$$u^0(t) = \mathcal{V}^0(1 - at\mathcal{V}^0), \quad t \ll 1/a\mathcal{V}^0, \quad (41)$$

$$u^0(t) = \frac{1}{at} (\ln(a\mathcal{V}^0t) - \ln \ln(a\mathcal{V}^0t)), \quad t \gg 1/a\mathcal{V}^0. \quad (42)$$

Очевидно, что первый результат (41) легко получается из решения исходного уравнения (38) по теории возмущений, если рассматривать его на малых временах. Решение, даваемое вторым соотношением (42), представляет противоположный предел больших времен. Переход от первой асимптотики ко второй происходит в рамках полного решения (40).

Предположим, что нам неизвестен явный вид решения (40), и попробуем осуществить переход от одной асимптотики (41) к другой (42), используя РГ-подход. Необходимые для такого перехода РГС будем строить с помощью упомянутого выше регулярного алгоритма.

В качестве \mathcal{RM} возьмем исходное уравнение (35), рассматриваемое в расширенном пространстве групповых переменных, которое включает независимые переменные t, x , зависимую переменную v и параметр a . Допускаемая таким РГ-многообразием бесконечная точечная непрерывная группа преобразований Ли представляется оператором

$$X = \xi^1 \partial_t + \xi^2 \partial_x + \xi^3 \partial_a + \eta \partial_u, \quad (43)$$

*Многолистая функция Ламберта неявно определяется соотношением $W \exp(W) = z$. Ее частная ветвь $W_{-1}(z)$ действительна на положительной действительной оси [63].

координаты которого зависят от четырех произвольных функций $\psi^i, i = 1, \dots, 4$, своих аргументов:

$$\begin{aligned}\xi^1 &= \psi^1(t, x, u, a), & \xi^2 &= au\psi^1(t, x, u, a) + t\psi^2(u, \chi, a) + \psi^3(u, \chi, a), \\ \xi^3 &= a\psi^4(u, \chi, a), & \eta &= -\psi^4(u, \chi, a)u + (1/a)\psi^2(u, \chi, a), \\ & & \chi &= x - aut.\end{aligned}\quad (44)$$

Выполняемая с использованием критерия (19) процедура сужения точечной группы (43) на приближенном решении по степеням малого t

$$u^{\text{pt}} = \mathcal{V}(x) - at\mathcal{V}\mathcal{V}_x + O(t^2) \quad (45)$$

оставляет произвольной функцию ψ^1 и налагает одно ограничение на три функции ψ^3, ψ^2 и ψ^4 . Одну из этих функций, например ψ^4 , можно положить равной нулю, т. е. считать параметр a инвариантом РГ-преобразования, тогда ограничение на две оставшиеся функции принимает вид простого линейного соотношения $\psi^2 = a\mathcal{V}_x\psi^3$. Ввиду произвольности функций ψ^2 и ψ^3 будем считать их зависящими только от u , а также представим с помощью (45) производную \mathcal{V}_x как некоторую функцию $H(u)$, что дает

$$\psi^2 = aH(u)\psi^3. \quad (46)$$

Используя это соотношение, запишем РГ-оператор в виде

$$R_3 = \psi^1\partial_t + [au\psi^1 + (atH(u) + 1)\psi^3(u)]\partial_x + \psi^3(u)H(u)\partial_u. \quad (47)$$

Произвольность входящих в (47) функций $\psi^{1,3}$ позволяет выбрать такие их значения, которые, не снижая общности рассмотрения, максимально упрощают выражение для РГ-оператора. Например, можно положить $\psi^3 = 1$ и выбрать

$$\psi^1 = -(1/au)(atH(u) + 1), \quad (48)$$

т. е. считать, что координата x также является инвариантом РГ-преобразования. В результате РГ-оператор (47) принимает вид

$$R_3 = -(1/au)(atH(u) + 1)\partial_t + H(u)\partial_u. \quad (49)$$

Поскольку нас интересует закон РГ-преобразования не величины u , а ее значения в точке $x = 0$, то полученный оператор надо продолжить на переменную u^0 , которая формально может быть представлена линейным функционалом от u :

$$u^0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \delta(x)u(t, x). \quad (50)$$

Используя для этого изложенный в п. 2.1 регулярный алгоритм и сужая полученный после такого продолжения РГ-оператор на пространство групповых переменных $\{t, u^0\}$, представим его в виде

$$R_3 = -(1/au^0)(atH(u^0) + 1)\partial_t + H(u^0)\partial_{u^0}. \quad (51)$$

Этот РГ-оператор имеет инвариант

$$J_0 = au^0t + \mathcal{J}(u^0), \quad \mathcal{J}(u^0) = \int \frac{du'}{H(u')}, \quad (52)$$

и искомое решение представляется через этот инвариант, если учесть начальное значение $J_0(t = 0) = \mathcal{J}(\mathcal{V}(0))$. В частности, для экспоненциального начального профиля (37), когда $H(u') = u'$ и $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}^0$, использование этого инварианта приводит к соотношению (39) и представлению для u^0 в виде функции Ламберта (40). Формулы (52) и (39) решают поставленную задачу о переходе от решения по теории возмущений (41) к асимптотическому представлению (42) *без построения решения исходного уравнения*, с использованием только ТВ и соответствующей РГС. На первый взгляд рассмотренный методический пример и проведенное построение выглядят достаточно громоздко и гораздо проще исходить из очевидного решения (36). Но в более сложных ситуациях явный вид решения зачастую неизвестен, тогда как РГС удается построить. Иллюстрацией этого утверждения служат примеры, приведенные в двух последующих параграфах.

Следует отметить, что процедура сужения группы (43) для получения РГС (51) может быть выполнена непосредственно в пространстве переменных $\{t, u^0\}$. Для этого нужно продолжить оператор (43) на нелокальную переменную и проверить условия РГ-инвариантности на решении по ТВ, записанном для функции u^0 при малых $t \rightarrow 0$. При прежнем выборе $\psi^3 = 1$ и $\psi^4 = 0$ это сразу дает соотношение (48) и определяет каноническую координату продолженного на переменную u^0 оператора. Таким образом, в вычислительном плане эта процедура здесь оказывается проще, чем построение оператора РГС в пространстве всех групповых переменных с последующим его сужением на пространство нелокальных переменных.

3.3. Нелинейная оптика: развитие сингулярности на оси лазерного пучка. Следующий пример относится к нелинейной оптике и связан с описанием поведения лазерного пучка в нелинейной среде. Известно (см., например, обзор [64]), что рефракция света при его распространении в нелинейной среде обусловлена зависимостью показателя преломления среды от интенсивности лазерного пучка. В пренебрежении эффектами дифракции этот процесс описывается системой двух ДУ в частных производных первого порядка для интенсивности пучка $I(z, x)$ и производной его эйконала по поперечной ко-

ординате $v(z, x)$ — уравнениями нелинейной геометрической оптики:

$$v_z + vv_x - \alpha I_x = 0, \quad I_z + vI_x + Iv_x = \nu Iv/x. \quad (53)$$

Здесь α — коэффициент нелинейности рефракции, z и x — координаты в направлении распространения пучка и в поперечном направлении соответственно; $\nu = 1$ для цилиндрического и $\nu = 0$ для плоского случая. Отсутствие в уравнениях (53) вкладов, ответственных за дифракцию пучка, соответствует предположению о том, что характерный поперечный масштаб изменения интенсивности пучка при нелинейной рефракции велик по сравнению с длиной лазерной волны. Это предположение, определяющее условие применимости геометрической оптики, нарушается вблизи точек особенности, где обращаются в бесконечность производные v_x и I_x . Кроме того, после особых точек возникают области пересечения лучей — многолучевые области, требующие специального исследования; здесь мы не будем обсуждать эти вопросы подробно, отсылая читателя к соответствующим пособиям (см., например, [65]).

Нелинейная среда занимает полупространство $z \geq 0$, и краевые условия для уравнений (53) задаются на ее границе, т. е. при $z = 0$:

$$v(0, x) = 0, \quad I(0, x) = \mathcal{I}(x). \quad (54)$$

Выбор нулевого значения производной эйконала на границе соответствует варианту коллимированного пучка. При этом распределение интенсивности пучка по поперечной координате x на входе в нелинейную среду характеризуется функцией $\mathcal{I}(x)$ с максимальным значением, равным единице.

Задача о рефракции пучка в нелинейной среде изучалась с применением различных аналитических приемов (см. [64, 66, 67]), однако не существует универсального метода, пригодного для любой геометрии задачи и произвольных начальных данных. Использование РГ-алгоритма открывает новые возможности для построения решений КЗ для уравнений (53) (см., например, [4, 68]). В частности, он позволяет продолжить решение, известное в малой окрестности границы $z \simeq 0$ нелинейной среды, в окрестность сингулярности решения, возникновение которой представляет собой наиболее интересный физический эффект.

Нас будет интересовать поведение $I(x)$ и $v(x)$ на оси пучка вплоть до точки, где образуется сингулярность. Покажем, что этот эффект может быть исследован применением РГ-алгоритма к двум функционалам от решения КЗ (53)–(54), а именно к интенсивности лазерного пучка $I^0(z) \equiv I(z, 0)$ и ко второй производной от эйконала $W^0(z) \equiv v_x(z, 0)$, вычисленных на оси пучка и связанных с этим решением формальными соотношениями

$$I^0(z) = \int dx \delta(x) I(z, x), \quad W^0(z) = \int dx \delta(x) v_x(z, x). \quad (55)$$

Граничные условия для этих функционалов с учетом (54) записываются в виде

$$I^0(0) = 1, \quad W^0(0) = 0. \quad (56)$$

Несмотря на то, что эти условия не содержат сведений о зависимости интенсивности пучка от координаты x , такая информация заключается в операторе РГС, явный вид которого определяется профилем интенсивности пучка $\mathcal{I}(x)$ при $z = 0$. Приведем два примера, отвечающих цилиндрическому и плоскому («щелевому») лазерному пучкам с различными $\mathcal{I}(x)$.

Для цилиндрического пучка ($\nu = 1$) с параболическим распределением интенсивности $\mathcal{I}(x) = 1 - x^2$ РГС-оператор имеет вид [4]

$$R^{\text{par}} = (1 - 2\alpha z^2)\partial_z - 2\alpha z x \partial_x - 2\alpha(x - vz)\partial_v + 4\alpha I z \partial_I. \quad (57)$$

Для определения зависимости I^0 и v_x^0 от координаты z продолжим (57) на нелокальные переменные I^0 и W^0 и перейдем к пространству переменных $\{z, I^0, W^0\}$, что дает оператор

$$R_4 = (1 - 2\alpha z^2)\partial_z + 4\alpha I^0 z \partial_{I^0} - 2\alpha(1 - 2zW^0)\partial_{W^0}. \quad (58)$$

Решение уравнений Ли (см., например, [40, гл. 1, § 1]) для R_4 с учетом условий (56) приводит к выражениям*

$$I^0 = \frac{1}{1 - 2\alpha z^2}, \quad W^0 = -\frac{2\alpha z}{1 - 2\alpha z^2}, \quad (59)$$

характеризующим пространственную зависимость величин $I^0(z)$ и $W^0(z)$ от границы нелинейной среды $z = 0$ до точки появления особенности в решении $z_{\text{sing}} = 1/\sqrt{2\alpha}$, где интенсивность пучка и производная его эйконала обращаются в бесконечность; за этой точкой возникает область пересечения лучей, где нарушается применимость уравнений (53). К соотношениям (59) также можно прийти, используя выражения для двух инвариантов оператора (58) $J_1 = (1 - 2\alpha z^2)I^0$ и $J_2 = W^0(1 - 2\alpha z^2) + 2\alpha z$. Равенства $J_1 = 1$ и $J_2 = 0$ для этих инвариантов, справедливые при учете граничных условий (56), сразу приводят к формулам (59).

Графики типичных зависимостей величин $I^0(z)$ и $W^0(z)$ от безразмерной координаты z/z_{sing} при $\alpha = 0,1$ приведены на рис. 2. Изменение параметра α не меняет вид графика для интенсивности I^0 , а значения W^0 на рис. 2, а

*Эти выражения также следуют из формул, полученных ранее [69] без использования РГ-алгоритма.

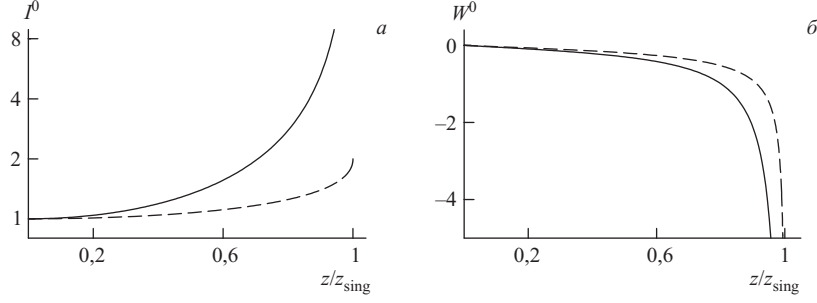


Рис. 2. Зависимости интенсивности лазерного пучка (а) и второй производной его эйконала (б) на оси пучка $x = 0$ как функции переменной z/z_{sing} , где z — расстояние от границы нелинейной среды. Зависимости построены по формулам для цилиндрического (59) (сплошные линии) и плоского (63) (штриховые линии) случаев

меняются пропорционально $\sqrt{\alpha}$. Сплошные линии соответствуют формулам (59), т. е. параболическому распределению интенсивности цилиндрического пучка на входе в среду; штриховые линии отвечают плоской геометрии пучка, рассматриваемой ниже.

Процедура продолжения оператора на нелокальные переменные использует канонический вид операторов (операторы Ли–Беклунда) и пригодна также в том случае, когда этот оператор отвечает высшей симметрии Ли–Беклунда. Именно такой случай реализуется для плоского лазерного пучка с «солитонным» профилем распределения интенсивности на границе: $I(x) = \cosh^{-2}(x)$. Здесь соответствующий оператор РГС имеет довольно громоздкий вид

$$\begin{aligned}
R^{\text{sol}} = & \left\{ \frac{I}{(Iv_x^2 + \alpha I_x^2)^2} \left[\left(\frac{1}{2}(Iv_x^2 - \alpha I_x^2)(v^2 + 4\alpha(1 - I)) + 4\alpha v I I_x v_x \right) v_{xx} + \right. \right. \\
& + (2\alpha v(\alpha I_x^2 - Iv_x^2) + \alpha v_x I_x (v^2 + 4\alpha(1 - I))) \times \\
& \times \left(I_{xx} - \frac{I_x^2}{2I} \right) \left. \right] - v(1 - tv_x) - \alpha t I_x \left. \right\} \partial_v + \left\{ \frac{I}{(Iv_x^2 + \alpha I_x^2)^2} \times \right. \\
& \times \left[\left(\frac{1}{2}(Iv_x^2 - \alpha I_x^2)(v^2 + 4\alpha(1 - I)) + 4\alpha v I v_x I_x \right) \left(I_{xx} - \frac{I_x^2}{2I} \right) - \right. \\
& - [2v(\alpha I_x^2 - Iv_x^2) + v_x I_x (v^2 + 4\alpha(1 - I))] I v_{xx} + \\
& \left. \left. + \frac{1}{4I}(Iv_x^2 + \alpha I_x^2) [4\alpha I_x^2 + (I_x v - 2I v_x)^2] \right] - I(2 - tv_x) + tv_x I_x \right\} \partial_I. \quad (60)
\end{aligned}$$

Продолжение (60) на нелокальные переменные (55) дает более простой оператор в пространстве функционалов (55)

$$\begin{aligned}
R_5 &\equiv \varkappa^{I^0} \partial_{I^0} + \varkappa^{W^0} \partial_{W^0} = \\
&= \left(4 - 5I^0 - zI_z^0 + 2(I^0 - 1) \frac{I^0 I_{zz}^0}{(I_z^0)^2} \right) \partial_{I^0} + \left(\frac{I^0}{I^0} + z \frac{I_{zz}^0}{I^0} - z \left(\frac{I_z^0}{I^0} \right)^2 - \right. \\
&\quad \left. - 2(I^0 - 1) \left[\frac{I_{zzz}^0}{(I_z^0)^2} + 2 \frac{I_z^0}{(I^0)^2} - 2 \frac{(I_z^0)^2}{(I^0)^3} \right] \right) \partial_{W^0}. \quad (61)
\end{aligned}$$

При получении этой формулы использовалась следующая из исходных уравнений связь производных функций I и v_x по пространственным переменным на оси пучка (при $x = 0$)

$$\begin{aligned}
v_{xxx}(z, 0) &= \frac{1}{\alpha I^0} \left[\frac{I_{zzz}^0}{I^0} + 10 \left(\frac{I_z^0}{I^0} \right)^3 - 8 \frac{I_{zz}^0 I_z^0}{(I^0)^2} \right], \\
v_x(z, 0) &= \frac{I_z^0}{I^0}, \quad I_{xx}(z, 0) = \frac{1}{\alpha} \left[2 \left(\frac{I_z^0}{I^0} \right)^2 - \frac{I_{zz}^0}{I^0} \right].
\end{aligned} \quad (62)$$

Интенсивность пучка и вторая производная его эйконала на оси определяются из условия РГ-инвариантности (21), которое эквивалентно равенству нулю координат \varkappa^{I^0} и \varkappa^{W^0} оператора (61). Это условие дает два ОДУ соответственно второго и третьего порядка. Решая сначала ОДУ второго порядка с начальными условиями (56) и дополнительным условием на первую производную $(I_z^0/\sqrt{I^0-1})|_{z \rightarrow 0} = 2\sqrt{\alpha}$, которое следует из последнего соотношения (62) при $z = 0$, получаем в неявной форме закон изменения I^0 и W^0 (ср. с формулами (59) для параболического пучка)

$$z = \frac{\sqrt{I^0-1}}{\sqrt{\alpha} I^0}, \quad W^0 = -\frac{2\alpha z I^0}{1-2\alpha z^2 I^0}. \quad (63)$$

Эти формулы справедливы от границы нелинейной среды $z = 0$ до точки возникновения особенности решения. Координата особенности находится из условия обращения в бесконечность производной W^0 , что дает $z_{\text{sing}} = 1/2\sqrt{\alpha}$, а значение интенсивности I^0 в этой точке равно двум. Решение оставшегося ОДУ третьего порядка дает тот же самый результат. Зависимость I^0 и W^0 от безразмерной координаты z/z_{sing} при $\alpha = 0,1$ показана на рис. 2 штриховыми линиями. Без продолжения РГС на нелокальные переменные результат (63) с использованием РГ-алгоритма был получен ранее в [4].

Подводя итог этому параграфу, отметим, что универсальность процедуры продолжения РГ-операторов, представленных либо в виде операторов точечной группы, либо в виде операторов группы Ли–Беклунда, позволила с единых

позиций описать возникновение сингулярности решения КЗ (53), используя для этого сокращенное описание на языке функционалов от решения.

3.4. РГС для функционалов от решений уравнений Власова–Максвелла.

В этом параграфе приложения РГС к функционалам от решения демонстрируются на примере двух задач из кинетической теории плазмы. Первая из них связана с построением тензоров нелинейной диэлектрической проницаемости плазмы, а вторая посвящена обсуждению решения начальной задачи о разлете неоднородного сгустка плазмы.

3.4.1. Нелинейная диэлектрическая проницаемость плазмы и трехпараметрическая РГС. Нелинейность электродинамики реальных сред обусловлена нелинейностью связи индуцируемых в среде плотностей тока и заряда с электромагнитным полем. Получение этой связи, называемой материальным уравнением, сводится к определению зависимости от электромагнитного поля вектора электрической индукции $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ (см. [70, с. 48]), связанного с электрическим полем $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и плотностью тока $\mathbf{j}(t, \mathbf{r})$ равенством, которое в представлении Фурье имеет следующий вид (здесь переменные «с волной» используются для отличия представления Фурье от обычного пространственно-временного представления):

$$\tilde{\mathbf{D}}(\omega, \mathbf{k}) = \tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k}) + i \frac{4\pi}{\omega} \tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{k}). \quad (64)$$

Для описания слаботурбулентной плазмы, процессов рассеяния волн на частицах, параметрических неустойчивостей, генерации гармоник и т. д. материальное уравнение представляют в виде разложения в ряд по целым положительным степеням электромагнитных полей, т. е. записывают плотность тока $\tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{k})$ в виде суммы

$$\tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{k}) = \sum_l \tilde{\mathbf{j}}^{(l)}(\omega, \mathbf{k}), \quad \tilde{\mathbf{j}}^{(l)}(\omega, \mathbf{k}) \sim O(\tilde{\mathbf{E}}^l). \quad (65)$$

Наличие временной и пространственной дисперсии делает связь между индуцированным током и полем интегральной нелокальной, что приводит к материальному уравнению, имеющему в фурье-представлении следующий вид [70]*:

$$\begin{aligned} \tilde{D}_i(\omega, \mathbf{k}) = & \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) \tilde{E}_j(\omega, \mathbf{k}) + \sum_{n=2}^{\infty} \int d\omega_1 d\mathbf{k}_1 \dots d\omega_n d\mathbf{k}_n \times \\ & \times \delta(\omega - \omega_1 - \dots - \omega_n) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \dots - \mathbf{k}_n) \times \\ & \times \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) \tilde{E}_{j_1}(\omega_1, \mathbf{k}_1) \dots \tilde{E}_{j_n}(\omega_n, \mathbf{k}_n). \end{aligned} \quad (66)$$

*Здесь нижний индекс указывает на соответствующую компоненту тензора, а не обозначает производную.

Сравнение (65) и (64) с уравнением (66) устанавливает связь между многоиндексными тензорами нелинейной диэлектрической проницаемости (НДП) плазмы $\varepsilon_{ij_1\dots j_n}$, которые являются ядрами нелинейных по полю интегральных слагаемых ряда (66), и плотностью тока $\tilde{\mathbf{j}}^{(l)}$ соответствующего порядка $l \geq 2$.

Обычно, без использования РГ-алгоритма, НДП горячей плазмы находится итерацией по степеням самосогласованного электромагнитного поля кинетического уравнения Власова для функции распределения частиц $f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ (значок сорта частиц здесь опущен)

$$f_t + \mathbf{v}f_r + \frac{e}{m\Gamma} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}) \right\} f_v = 0; \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{v}/c)^2}}, \quad (67)$$

на фоне стационарного и однородного по координате \mathbf{r} распределения $f_0(\mathbf{v})$:

$$f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{v}) + \sum_{l \geq 1} f^{(l)}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (68)$$

$$f^{(l)} \sim O(\mathbf{E}^l), \quad \mathbf{j}^{(l)}(t, \mathbf{r}) = em \int d\mathbf{v} \mathbf{v} (\Gamma)^5 f^{(l)},$$

а НДП холодной плазмы получается итерацией более простых уравнений бесстолкновительной гидродинамики для плотности $N(t, \mathbf{r})$ и скорости $\mathbf{V}(t, \mathbf{r})$ частиц (записанных здесь для одного сорта частиц в нерелятивистском приближении)

$$N_t + \text{div}(N\mathbf{V}) = 0, \quad \mathbf{V}_t + (\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V} = \frac{e}{m} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{B}] \right\}, \quad (69)$$

в которых электрическое \mathbf{E} и магнитное \mathbf{B} поля удовлетворяют уравнениям Максвелла (см. (88) в приложении 1, п. 1), а плотности заряда ρ и тока \mathbf{j} имеют вид

$$\rho = eN, \quad \mathbf{j} = eN\mathbf{V}. \quad (70)$$

В правой части (70) подразумевается суммирование по различным сортам частиц плазмы, однако для упрощения записи индекс сорта опущен и в дальнейшем указывается только один сорт частиц, например электроны.

Принято считать, что формулы для НДП в горячей плазме являются более общими, чем в холодной (см., например, [70, гл. 2]), и переходят в последние в частном случае, когда функция распределения частиц плазмы по импульсам в исходном равновесном состоянии представляет собой дельта-функцию Дирака $f_0(\mathbf{v}) = \delta(\mathbf{v})$. С ростом порядка нелинейности ($l \geq 4$) алгебраическая процедура симметризации тензоров НДП становится в горячей плазме более громоздкой, чем в холодной. Использование РГ-алгоритма позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между тензорами НДП в холодной и

горячей плазме в произвольном порядке нелинейности l и указывает способ получения выражений для тензоров НДП в горячей плазме из соответствующих «холодных» выражений.

Для этого представим плотность тока заданного порядка $\tilde{\mathbf{j}}^{(l)}(\omega, \mathbf{k})$ в горячей плазме в виде свертки парциальной, зависящей от лагранжевой скорости движения частиц \mathbf{w} (см. приложение 1, п. 2), плотности тока $\tilde{\mathbf{j}}^{(l)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w})$ с равновесной функцией распределения частиц по скоростям в отсутствие электромагнитных полей $f_0(\mathbf{w})$:

$$\tilde{\mathbf{j}}^{(l)}(\omega, \mathbf{k}) = \int d\mathbf{w} f_0(\mathbf{w}) \tilde{\mathbf{j}}^{(l)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w}). \quad (71)$$

Выражение для парциальной плотности тока при $f_0(\mathbf{w}) = \delta(\mathbf{w})$, т.е. в холодной плазме ($\mathbf{w} = 0$), находится итерацией по самосогласованному полю уравнений (69), (70), а переход от выражений для $\tilde{\mathbf{j}}^{(l)}(\omega, \mathbf{k}, 0)$ к выражениям $\tilde{\mathbf{j}}^{(l)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w})$ при произвольных $\mathbf{w} \neq 0$ осуществляется с помощью группы преобразований, задаваемой соответствующим оператором РГС

$$\mathbf{R}_6 = \mathbf{k} \partial_\omega + \partial_{\mathbf{w}} - \frac{1}{c} [\tilde{\mathbf{B}}, \partial_{\tilde{\mathbf{E}}}] + \tilde{\varrho} \partial_{\tilde{\mathbf{j}}}, \quad (72)$$

который находится в приложении 1, п. 2 с использованием изложенного в разд. 2 алгоритма. Оператору (72) соответствует трехпараметрическая группа с векторным параметром \mathbf{w} , и ее конечные преобразования (штрихованные переменные здесь соответствуют преобразованным величинам)

$$\begin{aligned} \omega' &= \omega + \mathbf{k}\mathbf{w}; & (\beta'_{is}/\omega') \tilde{E}'_s &= (1/\omega) \tilde{E}_i; & \tilde{\varrho}' &= \tilde{\varrho}; & \tilde{j}'_i &= \beta'_{si} \tilde{j}_s; \\ \mathbf{k}' &= \mathbf{k}; & \tilde{\mathbf{B}}' &= \tilde{\mathbf{B}} = (c/\omega) [\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{E}}]; & \beta_{is} &= \delta_{is} + k_i w_s / (\omega - \mathbf{k}\mathbf{w}) \end{aligned} \quad (73)$$

дают искомую связь величины парциальной плотности тока $\tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{k}, 0)$ при $\mathbf{w} = 0$ (в холодной плазме) с аналогичной величиной $\tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w})$ для произвольного значения $\mathbf{w} \neq 0$. После интегрирования по скоростям \mathbf{w} с «весом» $f_0(\mathbf{w})$ согласно (71) получается выражение для плотности тока заданного порядка в горячей плазме, которое и определяет соответствующий многоиндексный тензор НДП плазмы (подробнее см. приложение 1, п. 2).

В частности, в линейном по электрическому полю приближении эта процедура устанавливает связь между скалярной диэлектрической проницаемостью холодной однородной нерелятивистской плазмы

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m\omega^2} \quad (74)$$

и тензором линейной диэлектрической проницаемости горячей однородной нерелятивистской плазмы с равновесной функцией распределения $f_0(\mathbf{w})$

$$\varepsilon_{ab}(\omega, \mathbf{k}) = \delta_{ab} - \frac{4\pi e^2 n_{e0}}{m\omega^2} \int d\mathbf{w} f_0(\mathbf{w}) \beta_{sa} \beta_{sb}. \quad (75)$$

Формула (75), возникшая из скалярного равенства (74) как результат применения РГ-преобразований к парциальным плотностям тока в холодной плазме с последующим интегрированием по параметру группы, иллюстрирует возможность получения тензора диэлектрической проницаемости горячей плазмы из соответствующего «холодного» выражения (впервые этот результат был приведен во второй из работ, указанных в [2]). Соответствующая РГС строится из операторов симметрии уравнений кинетики плазмы с последующим их продолжением на функционалы от решения — парциальные плотности тока и заряда в фурье-представлении. При этом использованное выше линейное по электромагнитному полю приближение не является существенным ограничением, поскольку при преобразованиях (73) связь между преобразованными (штрихованными) и непреобразованными парциальными плотностями тока и заряда остается линейной. Это означает, что преобразования (73) можно также применять к парциальным плотностям тока и заряда произвольного порядка l , т. е. предлагаемая РГ-схема позволяет строить тензор НДП произвольного порядка в горячей плазме исходя из соответствующих «холодных» выражений для НДП. Пример такого построения для $l = 2$ приведен в приложении 1, п. 2.

3.4.2. Ускорение ионов и динамика разлета плазменного сгустка. Теоретические исследования генерации ускоренных частиц при разлете плазмы в вакуум, начало которым было положено в 60-х гг. в работах [71], продолжают и в настоящее время. Причина неослабевающего интереса к этой проблеме кроется в том, что явление ускорения ионов проявляется в самых различных экспериментах и приложениях с использованием мощных лазеров, например в лазерном термоядерном синтезе, при изучении разлета сверхгорячей кластерной плазмы, при создании радиационных источников для медицины, материаловедения и ядерной физики.

Существенный прогресс в изучении динамики разлета плазмы и ускорении ионов был достигнут использованием квазинейтрального приближения [72, 73], пригодного для описания течений плазмы с характерным масштабом возмущений плотности, бóльшим по сравнению с дебаевским радиусом частиц плазмы. В этом приближении плотность заряда и тока в плазме полагают равными нулю, что существенно упрощает исходную модель с нелокальными вкладами. Вместо системы уравнений Власова–Максвелла (67) с соответствующими материальными уравнениями здесь используют только кинетические уравнения для функций распределений частиц различных

сортот

$$f_t^\alpha + v f_x^\alpha + (e_\alpha/m_\alpha) E(t, x) f_v^\alpha = 0 \quad (76)$$

с наложенными на них дополнительными нелокальными связями, возникающими из условий равенства нулю плотности тока и заряда:

$$\int dv \sum_\alpha e_\alpha f^\alpha = 0, \quad \int dv v \sum_\alpha e_\alpha f^\alpha = 0. \quad (77)$$

При этом электрическое поле E выражается через моменты функций распределения:

$$E(t, x) = \left(\int dv v^2 \partial_x \sum_\alpha e_\alpha f^\alpha \right) \left(\int dv \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} f^\alpha \right)^{-1}. \quad (78)$$

Начальные условия для решений системы (76)–(77) отвечают заданным в момент времени $t = 0$ функциям распределения электронов и ионов:

$$f^\alpha|_{t=0} = f_0^\alpha(x, v). \quad (79)$$

Уравнения (76), (77) описывают одномерную динамику плазменного образования, неоднородного по координате x ; при этом функции распределения частиц f^α зависят от t , x и компоненты скорости v вдоль направления неоднородности плазмы. Аналитическое исследование даже такой упрощенной модели представляет большие трудности, но благодаря применению РГ-алгоритма удастся не только построить решения при различных начальных функциях распределения частиц [73], но и найти закон изменения их плотности без вычисления в явном виде самих функций распределения частиц.

Для построения РГС будем рассматривать совокупность локальных (76) и нелокальных (77) уравнений в качестве \mathcal{RM} , в котором электрическое поле $E(t, x)$ фигурирует в качестве некоторой произвольной, подлежащей определению, функции своих переменных. Допускаемая этим многообразием группа точечных преобразований Ли вычисляется способом, аналогичным использованному в приложении 1, п. 1. Однако помимо операторов переноса по времени и координате, оператора галилеевских преобразований и операторов квазинейтральности, которые являются подгруппой (101) в нерелятивистском пределе, и трех операторов растяжений, сумма которых также дает нерелятивистский аналог оператора растяжений из (101), здесь возникает новый по сравнению с (101) оператор проективной группы. Именно этот оператор и дает возможность построения класса точных решений интересующей нас начальной задачи, поскольку линейная комбинация оператора сдвига по

времени и оператора проективной группы оставляет инвариантным приближенное решение начальной задачи $f^\alpha = f_0^\alpha(x, v) + O(t)$ по ТВ при $t \rightarrow 0$, т. е. является оператором РГС

$$R_7 = (1 + \Omega^2 t^2) \partial_t + \Omega^2 t x \partial_x + \Omega^2 (x - vt) \partial_v \quad (80)$$

для пространственно-симметричных начальных функций распределения с нулевой средней скоростью. Постоянную Ω можно трактовать как отношение характерной скорости звука c_s к начальному масштабу неоднородности электронной плотности L_0 .

Помимо функций распределения частиц f^α инвариантами РГ-оператора (80) являются также комбинации $x/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ и $v^2 + \Omega^2 (x - vt)^2$. Соответственно, значения функций распределения в любой момент времени $t \neq 0$ выражаются с помощью этих инвариантов через начальные значения (79):

$$f^\alpha = f_0^\alpha(I^{(\alpha)}), \quad I^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (v^2 + \Omega^2 (x - vt)^2) + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \Phi_0(x'). \quad (81)$$

Здесь зависимость Φ_0 от переменной $x' = x/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ определяется условиями квазинейтральности (77), а электрическое поле $E = -\Phi_x$ находится с помощью потенциала

$$\Phi(t, x) = \Phi_0(x') (1 + \Omega^2 t^2)^{-1}. \quad (82)$$

Конкретный пример, иллюстрирующий эти формулы для плазменного слоя, состоящего из группы горячих и холодных электронов и ионов двух сортов, приведен в приложении 1, п. 3.

Применение оператора РГС не ограничивается только построением решений начальной задачи для уравнений (76), (77) и нахождением соответствующих функций распределения частиц. Для практических приложений зачастую нужна более грубая характеристика динамики плазмы, например плотность частиц (ионов) данного сорта $n^q(t, x)$, которая может быть вычислена по соответствующей функции распределения:

$$n^q(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} dv f^q(t, x, v). \quad (83)$$

Прямое интегрирование функции распределения по скорости в аналитическом виде не всегда удастся осуществить ввиду ее сложной зависимости от инварианта $I^{(\alpha)}$, поэтому здесь на помощь приходит описанная в п. 2.1 процедура продолжения оператора на функционал. Именно поскольку плотность $n^q(t, x)$ является линейным функционалом от f^q , то процедура продолжения

оператора (80) на функционал от решения (83) дает в суженном пространстве переменных $\{t, x, n^q\}$ следующий РГ-оператор:

$$R_8 = (1 + \Omega^2 t^2) \partial_t + \Omega^2 t x \partial_x - \Omega^2 t n^q \partial_{n^q}. \quad (84)$$

Решение уравнений Ли для оператора R_8 с учетом начальных условий (79) дает связь инвариантов этого оператора — одной из уже приведенных для оператора (80) комбинаций $J_3 = x/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ и произведения $J_4^q = n^q \sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$ — в произвольный момент времени $t \neq 0$ с их значениями в начальный момент времени $t = 0$: $J_3|_{t=0} = x'$, $J_4^q|_{t=0} = \mathcal{N}_q(x')$. Эта связь сразу приводит к формулам, характеризующим пространственно-временное распределение плотности ионов данного сорта через начальное распределение плотности:

$$n^q = \frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}} \mathcal{N}_q \left(\frac{x}{\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}} \right), \quad \mathcal{N}_q(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dv f_0^q(I^{(q)}). \quad (85)$$

На рис. 3 представлены кривые, иллюстрирующие результаты (85) для плазменного слоя, состоящего из холодных ($\alpha = c$) и горячих ($\alpha = h$) электронов и ионов двух сортов ($q = 1, 2$). Конкретности ради здесь выбраны ионы углерода C^{+4} ($q = 1$) и протоны H^{+1} ($q = 2$). При $t = 0$ ионы характеризуются максвелловскими функциями распределения с плотностями n_{10} , n_{20} и температурами T_1 , T_2 , а функция распределения электронов имеет вид двухтемпературного максвелловского распределения с соответствующими плотностями n_{c0} и n_{h0} ($n_{c0} + n_{h0} = Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20}$) и температурами T_c и T_h горячей и холодной компонент. Подробные формулы для решения задачи о разлете такого плазменного слоя составляют содержание п. 3 приложения 1. Приведенные на рис. 3 сплошные кривые показывают зависимость безразмерной «универсальной» плотности ионов плазмы $N_q = (n_{q0}/n_{c0}) \mathcal{N}_q$, отнесенной к максимальной плотности холодных электронов, от безразмерной «координаты»

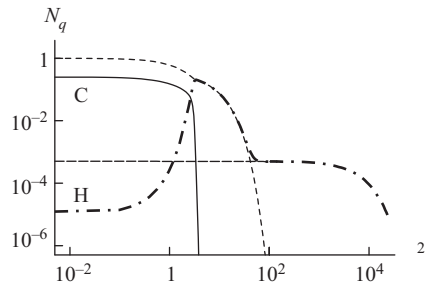


Рис. 3. Кривые, характеризующие зависимость инвариантов РГС-оператора (84): «универсальная» плотность N_q ионов плазмы — ионов углерода (кривая С) и протонов (кривая Н) — изображена как функция безразмерной «координаты» $\chi^2 = (x/L_0)^2/(1 + \Omega^2 t^2)$. Для наглядности здесь короткими и длинными штриховыми линиями показаны зависимости от χ^2 безразмерных плотностей холодных и горячих электронов соответственно

$\chi^2 = (x/L_0)^2/(1+\Omega^2 t^2)$, нормированной на характерный начальный масштаб плотности ионов L_0 . «Универсальность» этой зависимости объясняется тем, что она отражает связь между инвариантами РГС-оператора (84). Параметры плазмы выбраны следующими: $T_{1,2}/T_c = 0,1$; $T_h/T_c = 1000$; $n_{h0}/Z_1 n_{10} = 5 \cdot 10^{-4}$. Штриховые кривые показывают распределение безразмерной плотности холодных электронов $(n_c/n_{c0})\sqrt{1+\Omega^2 t^2}$ (короткие штрихи) и горячих электронов $(n_h/n_{h0})\sqrt{1+\Omega^2 t^2}$ (длинные штрихи).

Соотношения (85) являются выражением указанного во введении свойства ФСП [58] решения: произведение $n^q \sqrt{1+\Omega^2 t^2}$, будучи одним из инвариантов РГ-оператора, выражается через некоторую универсальную функцию \mathcal{N}_q от другого инварианта оператора (84), причем вид этой функции задается начальными условиями, т.е. определяется через начальные функции распределения частиц f_0^q (см. приложение 1, п. 3). Такое представление имеет достаточно общую природу и является типичным свойством решений КЗ, полученных с применением РГС, которое уместно назвать Φ -теоремой (по аналогии с известной Π -теоремой). Краткому обсуждению этого свойства посвящено приложение 2.

Аналогичные результаты получаются для более сложных функций распределения [74] и при выходе за рамки модели плоского одномерного разлета, например для сферически-симметричного разлета плазменного сгустка [75].

Подводя итог п. 3.4, отметим, что в примерах 3.4.1 и 3.4.2 в полной мере реализована программа применения РГ-алгоритма для нелокальных задач. Здесь одновременно использованы как модифицированный РГ-алгоритм для вычисления РГС для нелокальной системы уравнений, так и процедура продолжения РГ-операторов на функционалы от решения.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель работы состояла в реализации программы расширения возможностей приложения РГ-алгоритма к задачам математической физики и была явно сформулирована в разд. 2 для нелокальных задач. Соответствующий класс охватывает теперь (помимо задач на основе ДУ) модели, содержащие нелокальные элементы, в том числе интегральные и интегродифференциальные уравнения.

Эта формулировка сохраняет прежнюю общую схему построения РГ-алгоритма в виде четырех последовательных этапов [4]. Однако форма реализации последних существенным образом меняется, что наиболее ярко проявляется на первых двух этапах алгоритма (см. рис. 1), связанных с определением нелокального РГ-многообразия и нахождением допускаемой группы симметрии. Отмечено, что нелокальность РГ-многообразия может иметь место даже для физических задач, основанных на дифференциальных уравне-

ниях. Ввиду отсутствия здесь регулярного вычислительного метода (аналогичного алгоритму Ли для ДУ) при выполнении второго шага алгоритма возможны различные реализации. Дано их краткое перечисление и в качестве иллюстрации выбран и более подробно изложен вариант с использованием канонического оператора группы.

В разд. 3 показана эффективность использования процедуры продолжения РГ-оператора на нелокальные переменные с целью сокращенного описания решения на языке его интегральной характеристики — функционала от решения. Существенно при этом, что знания самого решения в явном виде не требуется.

Приведенные примеры служат иллюстрацией программы, сформулированной в разд. 2. С одной стороны, они демонстрируют применение нового алгоритма для интегродифференциальных систем (вычисление РГ-симметрии для нелинейной диэлектрической проницаемости плазмы) и процедуры продолжения на функционалы от решения (задача Коши для уравнения Хопфа, эволюция лазерного пучка в нелинейной геометрической оптике). С другой стороны, в задаче о разлете плазменного сгустка имеет место одновременное использование обоих приемов, поскольку в ней процесс вычисления РГ-симметрий для решения нелокальной системы уравнений дополняется процедурой продолжения найденного РГ-оператора на функционал от решения — плотность частиц плазмы — с целью получения закона его изменения.

При формулировке и обсуждении аналитической формы результатов сделан акцент на роль инвариантов соответствующих РГ-операторов. Проявляющиеся здесь общие закономерности рассмотрены в приложении 2.

Материалы разд. 3 свидетельствуют об универсальности метода ренорм-групповых симметрий. Поэтому они позволяют рассчитывать на дальнейшее расширение класса задач, поддающихся исследованию с помощью метода РГС, на новые объекты, для которых его применение пока не является стандартной процедурой. Здесь имеются в виду бесконечные системы зацепляющихся интегродифференциальных уравнений, подобные системам для корреляционных функций статистической физики и системам уравнений для обобщенных функций Грина — пропагаторов и вершинных функций — в квантовой теории поля.

Работа поддержана грантами РФФИ № 02-01-00185 и 03-02-16428, грантом НШ-2339.2003.2 и грантами INTAS 2001-0233; 2001-0572.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Основу этого приложения составляют материалы исследований по применению РГ-симметрий к задачам кинетической теории плазмы, опубликованные в [2, 55, 73–76, 78, 88, 90].

1. Симметрии уравнения Власова–Максвелла. В этом пункте приложения подробно иллюстрируется второй шаг общей схемы построения РГС на примере вычисления группы симметрии для системы ИДУ, которые определяют эволюцию бесстолкновительной плазмы. Макроскопическое состояние частиц плазмы задается функциями распределения f^α (своей для каждого сорта частиц плазмы), зависящими от времени t , радиуса-вектора \mathbf{r} частицы в координатном пространстве и скорости частицы \mathbf{v} . Эволюция функций распределения описывается кинетическими уравнениями Власова [81], при этом зачастую удобнее использовать не стандартные уравнения Власова с эйлеровой скоростью \mathbf{v} , а их гидродинамический аналог [82–84] с лагранжевой скоростью \mathbf{w} .

При переходе к лагранжевой формулировке вместо эйлеровой скорости \mathbf{v} и импульса \mathbf{p} для каждого сорта частиц вводятся две векторные функции — скорость $\mathbf{V}^\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{q})$ и импульс $\mathbf{P}^\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{q})$, зависящие от лагранжева импульса \mathbf{q} и эйлеровых координаты \mathbf{r} и времени t и связанные с \mathbf{v} и \mathbf{p} соотношениями

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{V}^\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{r}, t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{P}^\alpha(\mathbf{q}, \mathbf{r}, t), \\ \mathbf{V}^\alpha &= c^2 \mathbf{P}^\alpha (m^2 c^4 + c^2 (\mathbf{P}^\alpha)^2)^{-1/2}.\end{aligned}\tag{86}$$

Вид замены (86) выбирается таким образом, что получающиеся в результате уравнения для лагранжевых функций распределения частиц каждого сорта не содержат производной этих функций по лагранжеву импульсу \mathbf{q} .

Такая (лагранжева) формулировка кинетического описания плазмы сводится к уравнениям гидродинамического типа для плотности $N^\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{w})$ и скорости $\mathbf{V}^\alpha(t, \mathbf{r}, \mathbf{w})$, которые зависят от t , \mathbf{r} и \mathbf{w} :

$$\begin{aligned}N_t^\alpha + \operatorname{div} (N^\alpha \mathbf{V}^\alpha) &= 0, \\ \mathbf{V}^\alpha_t + (\mathbf{V}^\alpha \nabla) \mathbf{V}^\alpha &= \\ &= \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \sqrt{1 - \left(\frac{\mathbf{V}^\alpha}{c}\right)^2} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{V}^\alpha, \mathbf{B}] - \frac{1}{c^2} \mathbf{V}^\alpha (\mathbf{V}^\alpha, \mathbf{E}) \right\}.\end{aligned}\tag{87}$$

Здесь индекс α указывает на сорт частиц плазмы (с зарядом e_α и массой m_α), движущихся в самосогласованном электромагнитном поле, векторы напряженности \mathbf{E} и \mathbf{B} которого подчиняются уравнениям Максвелла

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_t + c \operatorname{rot} \mathbf{E} &= 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho; \\ \mathbf{E}_t - c \operatorname{rot} \mathbf{B} + 4\pi \mathbf{j} &= 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0.\end{aligned}\tag{88}$$

Плотности заряда ρ и тока \mathbf{j} , в свою очередь, определяются движениями частиц плазмы:

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} m_{\alpha}^3 \int d\mathbf{w} N^{\alpha}(\gamma)^5, \\ \mathbf{j} &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} m_{\alpha}^3 \int d\mathbf{w} N^{\alpha} \mathbf{V}^{\alpha}(\gamma)^5, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\mathbf{w}/c)^2}}.\end{aligned}\tag{89}$$

Поскольку лагранжевы плотность и скорость частиц всех сортов рассматриваются в едином фазовом пространстве, задаваемом переменными $\{t, \mathbf{r}, \mathbf{w}\}$, то в материальных уравнениях (89) при переходе от интегрирования по трехмерному лагранжеву импульсу к интегрированию по трехмерной скорости возникает дополнительный множитель, пропорциональный пятой степени релятивистского фактора γ .

Характерно, что уравнения (87) не содержат в явном виде лагранжеву скорость \mathbf{w} (или лагранжев импульс \mathbf{q}). Для отыскания этой зависимости следует решать эти уравнения с «начальными» условиями $\mathbf{V}^{\alpha} = \mathbf{w}$, $N^{\alpha} = N_0^{\alpha}(t_0, \mathbf{r}, \mathbf{w})$, которые выполняются при нулевом значении электрического и магнитного полей $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ и при $t = t_0$. В частности, в однородной плазме «начальные» условия для плотности N^{α} принимают вид $N_0^{\alpha} = n_{\alpha 0} f_0^{\alpha}(\mathbf{q})$, где постоянная во времени и однородная в пространстве функция $f_0^{\alpha}(\mathbf{q})$ лагранжева импульса совпадает с функцией $f_0^{\alpha}(\mathbf{p})$ эйлера импульса \mathbf{p} .

Знание зависимости плотности $N^{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{w})$ и скорости $\mathbf{V}^{\alpha}(t, \mathbf{r}, \mathbf{w})$ от лагранжева импульса позволяет восстановить вид функции распределения частиц с помощью соотношений (индекс сорта частиц в этих формулах опущен)

$$\begin{aligned}N(t, \mathbf{r}, \mathbf{q}) &= f(\mathbf{p} = \mathbf{P}(\mathbf{q}, \mathbf{r}, t), \mathbf{r}, t) \det \left(\frac{\partial P_i}{\partial q_j} \right), \\ \mathbf{v} &= c^2 \mathbf{p} (m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2)^{-1/2}, \\ \mathbf{w} &= c^2 \mathbf{q} (m^2 c^4 + c^2 \mathbf{q}^2)^{-1/2}, \quad \mathbf{V} = c^2 \mathbf{P} (m^2 c^4 + c^2 \mathbf{P}^2)^{-1/2}.\end{aligned}\tag{90}$$

Система уравнений (87)–(89) представляет лагранжеву формулировку [82–84] известных уравнений Власова–Максвелла [85], в которых (89) играют роль нелокальных материальных соотношений. Их наличие является основным препятствием на пути нахождения группы симметрии для системы (87)–(89) с помощью стандартного алгоритма Ли. Однако изложенный в п. 2.2 способ дает прямой метод вычисления симметрий для системы Власова–Максвелла, представленной в виде (87)–(89).

Инфинитезимальный оператор допускаемой локальной группы точечных однопараметрических преобразований запишем в стандартной форме

$$X = \xi^1 \partial_t + \xi^2 \partial_r + \xi^3 \partial_w + \sum_{\alpha} \eta^{1\alpha} \partial_{N^{\alpha}} + \sum_{\alpha} \eta^{2\alpha} \partial_{V^{\alpha}} + \eta^3 \partial_E + \eta^4 \partial_B + \eta^5 \partial_j + \eta^6 \partial_{\rho}, \quad (91)$$

где координаты ξ^i и η^k зависят от $t, r, w, N^{\alpha}, V^{\alpha}, E, B, j$ и ρ . В канонической форме этот оператор принимает вид

$$Y = \sum_{\alpha} \varkappa^{1\alpha} \partial_{N^{\alpha}} + \overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha} \partial_{V^{\alpha}} + \overrightarrow{\varkappa}^3 \partial_E + \overrightarrow{\varkappa}^4 \partial_B + \overrightarrow{\varkappa}^5 \partial_j + \varkappa^6 \partial_{\rho}, \quad (92)$$

$$\varkappa^{1\alpha} = \eta^{1\alpha} - \mathcal{D}N^{\alpha}, \quad \overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha} = \eta^{2\alpha} - \mathcal{D}V^{\alpha},$$

$$\overrightarrow{\varkappa}^3 = \eta^3 - \mathcal{D}E, \quad \overrightarrow{\varkappa}^4 = \eta^4 - \mathcal{D}B,$$

$$\overrightarrow{\varkappa}^5 = \eta^5 - \mathcal{D}j, \quad \varkappa^6 = \eta^6 - \mathcal{D}\rho, \quad \mathcal{D} \equiv \xi^1 \partial_t - (\xi^2 \nabla_r) - (\xi^3 \nabla_w).$$

Плотности тока и заряда в (89) являются моментами функций N^{α} и V^{α} и, так же как и определяемые ими в уравнениях Максвелла (88) электрические и магнитные поля, не зависят от скорости частиц плазмы, что приводит к дополнительным дифференциальным связям

$$\mathbf{E}_w = 0; \quad \mathbf{B}_w = 0; \quad \mathbf{j}_w = 0; \quad \rho_w = 0, \quad (93)$$

очевидным с физической точки зрения, но существенным для отыскания симметрий уравнений Власова–Максвелла.

Применение канонического оператора (92) к объединенной системе исходных уравнений (87)–(89) и (93) дает систему ОУ

$$D_t (\varkappa^{1\alpha}) + (V^{\alpha}, D_r) \varkappa^{1\alpha} + N^{\alpha} (D_r, \overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha}) = 0,$$

$$D_t (\overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha}) + (V^{\alpha}, D_r) \overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha} + (\overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha}, \nabla) V^{\alpha} =$$

$$= \frac{e^{\alpha}}{m^{\alpha}} \sqrt{1 - \left(\frac{V^{\alpha}}{c}\right)^2} \left\{ \overrightarrow{\varkappa}^3 + \frac{1}{c} ([V^{\alpha}, \overrightarrow{\varkappa}^4] + [\overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha}, \mathbf{B}]) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{c^2} (\overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha} (V^{\alpha}, \mathbf{E}) + V^{\alpha} ((\overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha}, \mathbf{E}) + (V^{\alpha}, \overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha}))) \right\} - \frac{e^{\alpha}}{m^{\alpha}} \frac{(V^{\alpha}, \overrightarrow{\varkappa}^{2\alpha})}{c^2} \times$$

$$\times \left(1 - \left(\frac{V^{\alpha}}{c}\right)^2 \right)^{-1/2} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [V^{\alpha}, \mathbf{B}] - \frac{1}{c^2} V^{\alpha} (V^{\alpha}, \mathbf{E}) \right\}; \quad (94)$$

$$\begin{aligned}
c \left[D_r, \vec{\varkappa}^3 \right] + D_t \left(\vec{\varkappa}^4 \right) &= 0; & c \left[D_r, \vec{\varkappa}^4 \right] - D_t \left(\vec{\varkappa}^3 \right) &= 4\pi \vec{\varkappa}^5; \\
\left(D_r, \vec{\varkappa}^3 \right) &= 4\pi \varkappa^6; & \left(D_r, \vec{\varkappa}^4 \right) &= 0; \\
D_w \left(\vec{\varkappa}^{3,4,5} \right) &= 0, & D_w \left(\varkappa^6 \right) &= 0; \\
\varkappa^6 - \sum_{\alpha} e_{\alpha} m_{\alpha}^4 \int d\mathbf{w}(\gamma)^5 \varkappa^{1\alpha} &= 0, \\
\vec{\varkappa}^5 - \sum_{\alpha} e_{\alpha} m_{\alpha}^3 \int d\mathbf{w}(\gamma)^5 (\varkappa^{1\alpha} \mathbf{V}^{\alpha} + \vec{\varkappa}^{2\alpha} N^{\alpha}) &= 0,
\end{aligned} \tag{95}$$

которую следует решать с учетом полной системы уравнений (87)–(89), (93) и всех их дифференциальных следствий. Здесь, как и в п. 2.2, используется символ (6) оператора полного дифференцирования D по соответствующей (скалярной или векторной) переменной, фигурирующей в качестве его индекса, а круглые и квадратные скобки являются стандартным обозначением скалярного и векторного произведений.

При решении ОУ (94)–(95) групповые переменные

$$\begin{aligned}
N^{\alpha}, N_r^{\alpha}, N_w^{\alpha}, \quad \mathbf{V}^{\alpha}, \mathbf{V}_r^{\alpha}, \mathbf{V}_w^{\alpha}, \quad \int d\mathbf{v}(\gamma)^5 N^{\alpha}, \quad \int d\mathbf{v}(\gamma)^5 N_r^{\alpha}, \\
\int d\mathbf{v}(\gamma)^5 \mathbf{V}^{\alpha} N^{\alpha}, \quad \int d\mathbf{v}(\gamma)^5 \mathbf{V}_r^{\alpha} N^{\alpha}, \quad \int d\mathbf{v}(\gamma)^5 \mathbf{V}_r^{\alpha} N^{\alpha}, \quad \dots
\end{aligned} \tag{96}$$

рассматриваются как независимые. Это предположение разделяет ОУ на локальные (94) и нелокальные (95) уравнения. Локальные ОУ решаются стандартным способом, с помощью лиевского вычислительного алгоритма группового анализа. Для ускорения вычислений на этом этапе можно использовать любой из доступных пакетов для вычисления симметрий, входящих в одну из систем компьютерной алгебры. Так, при использовании пакета DIMSYM в системе компьютерной алгебры REDUCE для решения локальных ОУ на современном персональном компьютере (Pentium-III, 750 МГц) требуется всего несколько минут. Найденные таким способом функции ξ и η

$$\begin{aligned}
\eta^{1\alpha} &= ((\mathbf{b}, \mathbf{r}) + A^{\alpha}(\mathbf{w})) N^{\alpha}; & \eta^{2\alpha} &= \mathbf{b}c^2 - \mathbf{V}^{\alpha}(\mathbf{b}, \mathbf{V}^{\alpha}) + [\mathbf{g}, \mathbf{V}^{\alpha}]; \\
\eta^3 &= -A_2 \mathbf{E} + [\mathbf{g}, \mathbf{E}] - c[\mathbf{b}, \mathbf{B}]; & \eta^4 &= -A_2 \mathbf{B} + [\mathbf{g}, \mathbf{B}] + c[\mathbf{b}, \mathbf{E}]; \\
\eta^5 &= -2A_2 \mathbf{j} + [\mathbf{g}, \mathbf{j}] + c^2 \mathbf{b}\rho; & \eta^6 &= -2A_2 \rho + (\mathbf{b}, \mathbf{j}); \\
\xi^1 &= A_0 + A_2 t + (\mathbf{b}, \mathbf{r}); \\
\xi^2 &= \mathbf{A}_1 + c^2 \mathbf{b}t + [\mathbf{g}, \mathbf{r}] + A_2 \mathbf{r}; & \xi^3 &= \xi(\mathbf{w}),
\end{aligned} \tag{97}$$

определяют промежуточную (см. п. 2.2) симметрию (ср. с [87, 88]). Здесь A_0 , \mathbf{A}_1 , A_2 , \mathbf{b} и \mathbf{g} — произвольные скалярные и векторные постоянные, $A^{\alpha}(\mathbf{w})$ и $\xi(\mathbf{w})$ — произвольные функции своих аргументов.

Обратимся к решению нелокальных ОУ (95), которые перепишем в виде, явно содержащем производные

$$\eta^6 - \mathcal{D}\rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha} m_{\alpha}^3 \int d\mathbf{w}(\gamma)^5 (\eta^{1\alpha} - \mathcal{D}N^{\alpha}),$$

$$\mathcal{D} \equiv \xi^1 \partial_t - (\xi^2 \nabla_r) - (\xi^3 \nabla_{\mathbf{w}}), \quad (98)$$

$$\eta^5 - \mathcal{D}\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} m_{\alpha}^3 \int d\mathbf{w}(\gamma)^5 (\mathbf{V}^{\alpha}(\eta^{1\alpha} - \mathcal{D}N^{\alpha}) + N^{\alpha}(\eta^{2\alpha} - \mathcal{D}\mathbf{V}^{\alpha})).$$

Как и локальные ОУ, последние следует решать с учетом исходных соотношений (87)–(89). Тогда, вычисляя производные N_t^{α} , \mathbf{V}_t^{α} , ρ_t и \mathbf{j}_t из исходных уравнений (87)–(89) и вставляя их в первое из уравнений (98) при одновременном учете явных выражений для координат (97), приходим к следующему нелокальному ОУ:

$$\int d\mathbf{w} \gamma^5 \left[\sum_{\alpha} e_{\alpha} m_{\alpha}^3 N^{\alpha} \left(A^{\alpha} + 2A_2 + 5 \frac{(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{c^2} \gamma^2 + (\nabla_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\xi}) \right) \right] = 0. \quad (99)$$

При получении этого соотношения предполагалось, что произведение $\gamma^5 N^{\alpha} \boldsymbol{\xi}$ обращается в нуль на концах интервала интегрирования по скорости \mathbf{w} . Как любое ОУ, соотношение (99) является тождеством по всем групповым переменным, которые в нем имеются, и его дифференцирование по любой из них тоже дает равенство нулю. Следовательно, нелокальное ОУ (99) можно расщепить по отношению к независимой групповой переменной N^{α} , используя вариационное дифференцирование, т.е. действуя на него оператором $\delta/\delta N(\mathbf{w}')$. «Пронся» вариационную производную $\delta/\delta N(\mathbf{w}')$ под знак интеграла:

$$\int d\mathbf{w} \gamma^5 \left[\sum_{\alpha} e_{\alpha} m_{\alpha}^3 \left(A^{\alpha} + 2A_2 + 5 \frac{(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{c^2} \gamma^2 + (\nabla_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\xi}) \right) \right] \frac{\delta N^{\alpha}(\mathbf{w})}{\delta N^{\alpha}(\mathbf{w}')} = 0$$

и снимая интегрирование по скорости \mathbf{w} с помощью дельта-функции: $\delta N(\mathbf{w})/\delta N(\mathbf{w}') = \delta(\mathbf{w} - \mathbf{w}')$, получаем следующее выражение для A^{α} :

$$A^{\alpha} = -2A_2 - 5 \frac{(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{c^2} \gamma^2 - (\nabla_{\mathbf{w}}, \boldsymbol{\xi}). \quad (100)$$

Решение второго нелокального ОУ дает тот же самый результат.

Формулы (97) и (100) полностью определяют непрерывную точечную группу Ли уравнений Власова–Максвелла (с лагранжевой скоростью), кото-

рую мы представим в неканоническом виде (ср. с [55,88])

$$\begin{aligned}
P_0 &= i\partial_t; \quad \mathbf{P} = i\partial_r; \\
\mathbf{B} &= \mathbf{r}\partial_t + c^2 t\partial_r - c[\mathbf{B}, \partial_E] + c[\mathbf{E}, \partial_B] + c^2 \rho\partial_j + \mathbf{j}\partial_\rho + \\
&\quad + \sum_{\alpha} (N^\alpha \mathbf{V}^\alpha \partial_{N^\alpha} + c^2 \partial_{V^\alpha} - \mathbf{V}^\alpha (\mathbf{V}^\alpha, \partial_{V^\alpha})); \\
\mathbf{R} &= [\mathbf{r}, \partial_r] + [\mathbf{V}^\alpha, \partial_{V^\alpha}] + [\mathbf{E}, \partial_E] + [\mathbf{B}, \partial_B] + [\mathbf{j}, \partial_j]; \\
D &= t\partial_t + \mathbf{r}\partial_r - 2 \sum_{\alpha} N^\alpha \partial_{N^\alpha} - \mathbf{E}\partial_E - \mathbf{B}\partial_B - 2\mathbf{j}\partial_j - 2\rho\partial_\rho; \\
X_\infty &= \boldsymbol{\xi}\partial_w - \left(5 \frac{(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi})}{c^2} \gamma^2 + (\nabla_w, \boldsymbol{\xi}) \right) \sum_{\alpha} N^\alpha \partial_{N^\alpha}.
\end{aligned} \tag{101}$$

Входящие в (101) операторы имеют простой физический смысл: $P_\mu = (P_0, \mathbf{P})$, где $\mu = 0, 1, 2, 3$, задают преобразования переноса по времени и трем компонентам радиуса-вектора \mathbf{r} , \mathbf{B} определяет преобразования Лоренца, состоящие из гиперболических поворотов (бустов) в плоскостях $\{ct, \mathbf{r}\}$ и $\{c\rho, \mathbf{j}\}$, дробно-линейных преобразований скорости \mathbf{V}^α , преобразований плотности N^α и преобразований компонент 4-тензора электромагнитного поля (см., например, [86, § 24, 25]), а \mathbf{R} задает круговые повороты. Эти десять (скалярных) операторов отвечают группе Пуанкаре* (ср. с аналогичным результатом в холодной плазме [89]):

$$L_{10} = \langle P_0, \mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathbf{R} \rangle.$$

В (101) она дополняется оператором D , задающим преобразования растяжений, и оператором бесконечной подгруппы X_∞ (см. также [90; 91, с. 98; 33, т. 2, с. 419], определяющим согласованные преобразования лагранжевой скорости и плотности частиц плазмы. Таким образом, при условии инвариантности параметров теории e_α, m_α и c непрерывная точечная группа Ли, допускаемая системой Власова–Максвелла с лагранжевой скоростью, представлена 11-мерной подалгеброй, заданной алгеброй L_{10} группы Пуанкаре и одномерной алгеброй с оператором растяжений D , и бесконечномерной подалгеброй с оператором X_∞ .

В завершение примера представим полученные результаты вычисления симметрии в пространстве переменных Фурье для функций, не зависящих от лагранжевой скорости \mathbf{w} . С точки зрения исходного представления задание

*Часто для шести операторов, задающих гиперболические и круговые повороты в плоскостях $(c^2 t, x^k)$ и (x^j, x^k) ($j, k = 1, 2, 3$; $\mathbf{r} = (x^1, x^2, x^3)$) соответственно, используют единые обозначения в виде операторов $M_{\mu\nu}$, где $M_{0k} = i\mathbf{V}_{0k}$ и $M_{jk} = i\mathbf{R}_{jk}$. Три оператора (M_{23}, M_{31}, M_{12}) являются компонентами вектор-оператора $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{P}]$.

преобразования Фурье, например, плотности заряда

$$\tilde{\rho}(\omega, \mathbf{k}) = \int dt d\mathbf{r} \rho(t, \mathbf{r}) \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}) \quad (102)$$

эквивалентно введению новой нелокальной переменной. Для того чтобы выполнить операцию продолжения оператора точечной группы Ли (91) на нелокальную переменную, перепишем этот оператор в каноническом виде (92) и формально продолжим его на нелокальную переменную $\tilde{\rho}(\omega, \mathbf{k})$:

$$\tilde{Y} \equiv Y + \tilde{\varkappa}^6 \partial_{\tilde{\rho}}. \quad (103)$$

Интегральное соотношение между \varkappa^6 и $\tilde{\varkappa}^6$ получается применением оператора (103) к уравнению (102). Здесь оно рассматривается как определение величины $\tilde{\rho}$ (как и в (18)):

$$\tilde{\varkappa}^6 = \int dt d\mathbf{r} \varkappa^6 \exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r}). \quad (104)$$

Подставляя \varkappa^6 из (97), (100) в (104) и вычисля полученные интегралы (интегрируя по частям), находим искомую координату $\tilde{\varkappa}^6$. Например, для оператора переноса по времени P_0 координата $\varkappa^6 = -i\rho_t$ после подстановки в (104) приводит к выражению $\tilde{\varkappa}^{1e} = -\omega\tilde{\rho}$ для координаты в фурье-переменных. Подобным образом вычисляются и остальные координаты канонического оператора. Вставляя эти результаты в (103), сужая группу на переменные Фурье, не содержащие зависимости от лагранжевой скорости \mathbf{w} (т. е. оставляя в (103) лишь вклады, ответственные за преобразование этих переменных в фурье-представлении), и возвращаясь к неканоническому представлению, получаем следующий набор операторов для точечной 11-параметрической группы Ли в $\{\omega, \mathbf{k}\}$ -представлении:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0 &= -\omega(\tilde{\mathbf{E}}\partial_{\tilde{E}} + \tilde{\mathbf{B}}\partial_{\tilde{B}} + \tilde{\mathbf{j}}\partial_{\tilde{j}} + \tilde{\rho}\partial_{\tilde{\rho}}); \\ \tilde{\mathbf{P}} &= \mathbf{k}(\tilde{\mathbf{E}}\partial_{\tilde{E}} + \tilde{\mathbf{B}}\partial_{\tilde{B}} + \tilde{\mathbf{j}}\partial_{\tilde{j}} + \tilde{\rho}\partial_{\tilde{\rho}}); \\ \tilde{\mathbf{B}} &= c^2\mathbf{k}\partial_{\omega} + \omega\partial_{\mathbf{k}} - c[\tilde{\mathbf{B}}, \partial_{\tilde{E}}] + c[\tilde{\mathbf{E}}, \partial_{\tilde{B}}] + c^2\tilde{\rho}\partial_{\tilde{j}} + \tilde{\mathbf{j}}\partial_{\tilde{\rho}}; \\ \tilde{\mathbf{R}} &= [\mathbf{k}, \partial_{\mathbf{k}}] + [\tilde{\mathbf{E}}, \partial_{\tilde{E}}] + [\tilde{\mathbf{B}}, \partial_{\tilde{B}}] + [\tilde{\mathbf{j}}, \partial_{\tilde{j}}]; \\ \tilde{\mathbf{D}} &= -\omega\partial_{\omega} - \mathbf{k}\partial_{\mathbf{k}} + 3\tilde{\mathbf{E}}\partial_{\tilde{E}} + 3\tilde{\mathbf{B}}\partial_{\tilde{B}} + 2\tilde{\mathbf{j}}\partial_{\tilde{j}} + 2\tilde{\rho}\partial_{\tilde{\rho}}. \end{aligned} \quad (105)$$

Формулы (105) дополняют группу (101) соответствующими преобразованиями величин в фурье-пространстве. Например, преобразования Лоренца с оператором \mathbf{B} дополняются гиперболическими поворотами в плоскостях $\{\omega, c\mathbf{k}\}$ и $\{c\tilde{\rho}, \tilde{\mathbf{j}}\}$ и преобразованиями 4-тензора фурье-компонент электромагнитного поля.

Формулы (101) и (105) решают задачу построения группы симметрии для уравнений Власова–Максвелла и ее записи в переменных Фурье, а п. 1 приложения 1 в целом является иллюстрацией второго шага алгоритма построения РГС.

2. РГС в задаче построения тензоров НДП в горячей плазме. В этом пункте приложения детализируется процедура построения многоиндексного тензора НДП горячей плазмы из соответствующего выражения для холодной плазмы. Поскольку эта процедура одинакова для тензоров проницаемости произвольного порядка, то мы проиллюстрируем ее на примере линейных по самосогласованному электрическому полю \mathbf{E} материальных соотношений в нерелятивистской плазме. В холодной плазме фурье-компоненты линейных по полю $\tilde{\mathbf{E}}(\omega, \mathbf{k})$ парциальных плотностей тока $\tilde{\mathbf{j}}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}, 0)$ и заряда $\tilde{\varrho}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}, 0)$ получаются линеаризацией уравнений (69), (70) на фоне однородной и равновесной плотности электронов n_{e0} и определены хорошо известными соотношениями

$$\tilde{\mathbf{j}}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}, 0) = i \frac{e^2 n_{e0}}{m\omega} \tilde{\mathbf{E}}; \quad \tilde{\varrho}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}, 0) = i \frac{e^2 n_{e0}}{m\omega^2} (\mathbf{k} \tilde{\mathbf{E}}). \quad (106)$$

Их использование в (64) дает скалярную диэлектрическую проницаемость холодной однородной нерелятивистской плазмы, выражение для которой дается формулой (74) в основной части текста. Выражения (106) определяют нулевые члены разложения парциальной плотности тока $\tilde{\mathbf{j}}^{(l)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w})$ по степеням скорости частиц плазмы \mathbf{w} . Для получения следующих слагаемых этого ряда следует исходить из кинетического описания плазмы, для чего удобно использовать не уравнения Власова (67) с эйлеровой скоростью \mathbf{v} , а нерелятивистский гидродинамический аналог (87) уравнений Власова с лагранжевой скоростью \mathbf{w} и равновесной функцией распределения $f_0(\mathbf{w})$. Такая (лагранжева) формулировка кинетического описания плазмы сводится к нерелятивистскому пределу уравнений (87), совпадающему по форме с (69), с той, однако, существенной разницей, что в отличие от (69) плотность $N(t, \mathbf{r}, \mathbf{w})$ и скорость $\mathbf{V}(t, \mathbf{r}, \mathbf{w})$ теперь зависят также и от лагранжевой скорости и в однородном невозмущенном состоянии плазмы подчиняются «начальным» условиям при $t = t_0 = -\infty$:

$$\begin{aligned} N(t_0, \mathbf{r}, \mathbf{w}) &= n_{e0} f_0(\mathbf{w}), & \mathbf{V}(t_0, \mathbf{r}, \mathbf{w}) &= \mathbf{w}; \\ \mathbf{E}(t_0, \mathbf{r}) &= \mathbf{B}(t_0, \mathbf{r}) = 0, & \int d\mathbf{w} f_0 &= 1. \end{aligned} \quad (107)$$

В нерелятивистском пределе материальные соотношения (89) также упрощаются:

$$\rho(t, \mathbf{r}) = e \int d\mathbf{w} N, \quad \mathbf{j}(t, \mathbf{r}) = e \int d\mathbf{w} N \mathbf{V}. \quad (108)$$

Линеаризация уравнений кинетики плазмы в лагранжевых переменных на фоне основного состояния (107) приводит к следующим формулам для поправок к парциальной плотности тока при малых значениях \mathbf{w} :

$$\tilde{\mathbf{j}}^{(1)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w}) = i \frac{e^2 n_{e0}}{m\omega} \left\{ \tilde{\mathbf{E}} + (1/\omega) (\mathbf{w}(\mathbf{k}\tilde{\mathbf{E}}) + \mathbf{k}(\mathbf{w}\tilde{\mathbf{E}})) \right\} + O(w^2). \quad (109)$$

Чтобы продолжить эту формулу на произвольные ненулевые значения \mathbf{w} , используем оператор РГС, который находится из допускаемой уравнениями кинетики плазмы группы точечных преобразований Ли (101). Нас будут интересовать два оператора из полной допускаемой группы, а именно оператор переноса по лагранжевой скорости, который получается из оператора X_∞ при $\xi(\mathbf{w}) = 1$, и оператор преобразований Галилея, который является нерелятивистским аналогом оператора преобразований Лоренца \mathbf{V} в наборе (101):

$$\mathbf{Z}_1 = \partial_{\mathbf{w}}, \quad \mathbf{Z}_2 = t\partial_r + \partial_V - \frac{1}{c}[\mathbf{B}, \partial_{\mathbf{E}}] + \rho\partial_j. \quad (110)$$

Перейдем в операторе \mathbf{Z}_2 от скорости \mathbf{V} и плотности N к парциальным плотностям тока \mathbf{j} и заряда ρ , продолжим полученный оператор на переменные Фурье и сложим его с оператором переноса \mathbf{Z}_1 . В результате получим оператор, который оставляет инвариантной парциальную плотность тока (109) при $\mathbf{w} \rightarrow 0$, т. е. является искомым оператором РГС

$$\mathbf{R}_6 = \mathbf{k}\partial_\omega + \partial_{\mathbf{w}} - \frac{1}{c}[\tilde{\mathbf{B}}, \partial_{\tilde{\mathbf{E}}}] + \tilde{\rho}\partial_j,$$

приведенным также (72) в п.3.4.1 основной части текста. Оператору (72) соответствует трехпараметрическая группа с векторным параметром \mathbf{w} , и ее конечные преобразования (73) дают искомую связь величины парциальной плотности тока $\tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{k}, 0)$ при $\mathbf{w} = 0$ (в холодной плазме) с аналогичной величиной $\tilde{\mathbf{j}}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w})$ для произвольного значения $\mathbf{w} \neq 0$. В частности, в линейном по электрическому полю приближении при использовании (106) получается соотношение

$$\tilde{j}_i^{(1)}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{w}) = \frac{ie^2 n_{e0}}{m\omega} \beta_{si} \beta_{sa} \tilde{E}_a(\omega, \mathbf{k}). \quad (111)$$

Подстановка (111) в (71) и далее использование $\tilde{j}_i^{(1)}(\omega, \mathbf{k})$ в (64) дает искомое выражение (75) для тензора линейной диэлектрической проницаемости горячей однородной нерелятивистской плазмы в отсутствие внешних полей с равновесной функцией распределения $f_0(\mathbf{w})$.

Применение преобразования (73) к парциальным плотностям тока и заряда произвольного порядка l позволяет строить тензор НДП произвольного

порядка в горячей плазме исходя из соответствующих «холодных» выражений для НДП. Опуская промежуточные выкладки, приведем результат такого построения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij_1 \dots j_n}(\omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \omega_n, \mathbf{k}_n) = \\ = \int d\mathbf{w} f_0(\mathbf{w}) \frac{\Omega \Omega_1 \dots \Omega_n}{\omega \omega_1 \dots \omega_n} \bar{\varepsilon}_{ab_1 \dots b_n}(\Omega_1, \mathbf{k}_1; \dots; \Omega_n, \mathbf{k}_n) \times \\ \times \beta_{a_i}(\omega, \mathbf{k}) \beta_{b_1 j_1}(\omega_1, \mathbf{k}_1) \dots \beta_{b_n j_n}(\omega_n, \mathbf{k}_n); \quad n \geq 2; \quad (112) \end{aligned}$$

$$\omega = \omega_1 + \dots + \omega_n; \quad \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \dots + \mathbf{k}_n;$$

$$\Omega \equiv (\omega - \mathbf{k}\mathbf{w}), \quad \Omega_i \equiv (\omega_i - \mathbf{k}_i\mathbf{w}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь $\bar{\varepsilon}$ отвечает тензору НДП холодной бесстолкновительной плазмы без внешних полей. Например, для нелинейности второго порядка он определен формулой [70]

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{ijs}(\Omega_1, \mathbf{k}_1; \Omega_2, \mathbf{k}_2) = \\ = -\frac{4\pi e^3 n_{e0}}{2! m^2 \Omega \Omega_1 \Omega_2} \left(\frac{k_i}{\Omega} \delta_{js} + \frac{k_{1s}}{\Omega_1} \delta_{ij} + \frac{k_{2j}}{\Omega_2} \delta_{is} \right). \quad (113) \end{aligned}$$

Аналогичный результат может быть получен и для релятивистской плазмы, однако при этом следует использовать не трехпараметрическую группу преобразований Галилея, а шестипараметрическую группу, состоящую из преобразований Лоренца и вращений [2, 76].

3. Динамика разлета плоского плазменного слоя. Этот пункт приложения служит иллюстрацией результатов п. 3.4.2 применительно к разлету плазменного слоя, состоящего из холодных ($\alpha = c$) и горячих ($\alpha = h$) электронов и ионов двух сортов ($\alpha = 1, 2$). Полагаем, что изначально (при $t = 0$) ионы характеризуются максвелловскими функциями распределения с плотностями n_{10} , n_{20} и температурами T_1 , T_2 , а функция распределения электронов имеет вид двухтемпературного максвелловского распределения с соответствующими плотностями n_{c0} и n_{h0} ($n_{c0} + n_{h0} = Z_1 n_{10} + Z_2 n_{20}$) и температурами T_c и T_h холодной и горячей компонент. С физической точки зрения такой выбор начальных условий при некоторых дополнительных условиях, заключающихся в малости концентрации горячих электронов и легких ионов, может моделировать задачу разлета мишени, состоящей из тяжелых ионов с малой примесью адсорбированных на поверхности легких ионов (например, протонов), которая предварительно была быстро нагрета коротким импульсом лазерного

излучения, вследствие чего образовалась группа горячих электронов. Тогда решение начальной задачи (81) представляется в виде

$$\begin{aligned} f^e &= \frac{n_{c0}}{\sqrt{2\pi}v_{T_c}} \exp\left(-\frac{I^{(c)}}{v_{T_c}^2}\right) + \frac{n_{h0}}{\sqrt{2\pi}v_{T_h}} \exp\left(-\frac{I^{(h)}}{v_{T_h}^2}\right), \quad v_{T_\alpha}^2 = \frac{T_\alpha}{m_\alpha}, \\ f^q &= \frac{n_{q0}}{\sqrt{2\pi}v_{T_q}} \exp\left(-\frac{I^{(q)}}{v_{T_q}^2}\right), \quad q = 1, 2, \end{aligned} \quad (114)$$

где инварианты $I^{(\alpha)}$ даются соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{I^{(c)}}{v_{T_c}^2} &= \mathcal{E} + \frac{(1 + \Omega^2 t^2)}{2v_{T_c}^2} (v - u)^2, \quad \frac{I^{(h)}}{v_{T_h}^2} = \mathcal{E} \frac{T_c}{T_h} + \frac{(1 + \Omega^2 t^2)}{2v_{T_h}^2} (v - u)^2, \\ \frac{I^{(q)}}{v_{T_q}^2} &= -\mathcal{E} \left(\frac{Z_q T_{c0}}{T_{q0}} \right) + \frac{U^2}{2v_{T_q}^2} \left(1 + \frac{Z_q m_e}{m_q} \right) + \\ &\quad + \frac{(1 + \Omega^2 t^2)}{2v_{T_q}^2} (v - u)^2, \quad q = 1, 2. \end{aligned} \quad (115)$$

Здесь $u = xt\Omega^2/(1 + \Omega^2 t^2)$ — локальная скорость частиц плазмы, $U = x\Omega/\sqrt{1 + \Omega^2 t^2}$, а потенциал Φ определен через функцию \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \frac{e\Phi}{T_c} (1 + \Omega^2 t^2) + \frac{U^2}{2v_{T_c}^2}, \quad (116)$$

которая находится из трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} n_{c0} &= \sum_{q=1,2} Z_q n_{q0} \exp \left[\left(1 + \frac{Z_q T_c}{T_q} \right) \mathcal{E} - \frac{U^2}{2v_{T_q}^2} \left(1 + \frac{Z_q m_e}{m_q} \right) \right] - \\ &\quad - n_{h0} \exp \left[\left(1 - \frac{T_c}{T_h} \right) \mathcal{E} \right]. \end{aligned} \quad (117)$$

Формулы (114)–(117) полностью задают поведение функций распределения всех рассматриваемых в данном примере сортов частиц при разлете плазменного слоя. При этом пространственно-временное распределение плотности ионов данного сорта определено формулами (85), в которых плотность ионов \mathcal{N}_q для рассмотренных выше начальных функций распределения принимает вид

$$\mathcal{N}_q = n_{q0} \exp \left[\mathcal{E} \left(\frac{Z_q T_{c0}}{T_{q0}} \right) - \frac{U^2}{2v_{T_q}^2} \left(1 + \frac{Z_q m_e}{m_q} \right) \right], \quad q = 1, 2, \quad (118)$$

где связь функции \mathcal{E} с переменной U по-прежнему находится из уравнения (117).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Как при описании РГ-алгоритма (разд. 2), так и в иллюстрирующих его приложениях (разд. 3) неоднократно отмечалась роль инвариантов РГ-преобразования в процессе построения решений КЗ. В этом приложении рассмотрена связь РГ-инвариантного представления решения КЗ с понятиями обычной (степенной) и функциональной автомодельности и с известными предложениями группового анализа.

1. Анализ размерностей и П-теорема. Интуитивно понятие инварианта применялось еще в *теории подобия* и *анализе размерностей* при исследовании физических явлений в различных системах единиц измерения.

В самом деле, пусть имеется размерная величина a , являющаяся функцией набора независимых размерных величин a_1, a_2, \dots, a_n :

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_k; a_{k+1}, \dots, a_n) \quad (119)$$

и пусть первые $k \leq n$ из них имеют независимые размерности, т.е. не существуют рациональные числа r_1, \dots, r_k , не все равные нулю, с которыми мультипликативная комбинация этих величин $a_1^{r_1} \dots a_k^{r_k}$ является безразмерной. Функциональная зависимость (119) между размерными величинами a и a_i отражает закономерности, которые не зависят от системы единиц измерений, и поэтому она должна обладать некоторой специальной структурой. Выяснение этой структуры привело в начале XX в. к формулировке предложения, известного [79] под названием П-теоремы (пи-теоремы):

П-теорема: *Безразмерная комбинация*

$$\Pi = \frac{a}{a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k}}$$

величины a и набора a_1, a_2, \dots, a_k представима в виде функции

$$\Pi = d(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}) \quad (120)$$

их безразмерных степенных комбинаций

$$\Pi_i = a_{k+i} a_1^{p_1^i} a_2^{p_2^i} \dots a_k^{p_k^i}, \quad i = 1, \dots, n - k,$$

*с рациональными p_k^i , причем так называемая определяющая функция d связана с f соотношением**

$$d(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}) = f(1, 1, \dots; \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}).$$

*Вариант, когда функция f имеет разрывы, здесь не рассматривается.

Иначе — любое соотношение (119) между $n + 1$ размерными величинами равносильно некоторому соотношению (120) между $n + 1 - k$ степенными инвариантами $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$, представляющими собой их безразмерные комбинации.

Постоянство численных значений безразмерных инвариантов Π_1, \dots, Π_{n-k} является необходимым и достаточным условием подобия двух явлений в различных диапазонах скоростей, температур, плотностей, интенсивности внешних воздействий и т. п. Например, при изучении обтекания несжимаемой вязкой жидкостью твердого тела (см., например, [79, гл. 2]) выясняется, что картина обтекания зависит не от размеров тела l , скорости движения V , плотности ρ и вязкости жидкости μ по отдельности, а от их безразмерной комбинации — числа Рейнольдса $Re = \rho V l / \mu$, и системы с одинаковыми числами Рейнольдса будут вести себя одинаково. В случае, когда вязкое сопротивление мало, но существенно волновое сопротивление — что реализуется, например, при движении тела по поверхности жидкости с большой скоростью — картина течения определяется другой безразмерной комбинацией — числом Фруда $Fr = V / \sqrt{lg}$. Физическое подобие явлений позволяет вместо изучения явления в натуре проводить его на модели — обычно значительно меньшего масштаба — в лабораторных условиях, как это и делается для анализа движений корпусов кораблей и самолетов, при исследовании обтекания крыльев при больших скоростях, при моделировании процессов при сверхвысоких давлениях и температурах.

Из П-теоремы следует представление

$$a = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \dots a_k^{m_k} d(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}). \quad (121)$$

Сравнение формул (119) и (120), (121) показывает, что использование степенных автомодельных переменных уменьшает размерность анализируемой задачи и тем самым упрощает ее анализ. Поиск инвариантов Π_i при заданных уравнениях и граничных условиях можно проводить в общем виде, формально вводя независимые единицы измерения и определяя размерности остальных величин с помощью самих уравнений, краевых данных или других дополнительных (в том числе и интегральных) ограничений, существующих для искомого решения.

Отметим, что конструктивное использование представления (121) предполагает наличие явного вида определяющей функции d . На практике такую информацию извлекают из тех или иных приближенных частных решений.

2. Инвариантное представление решения и Ф-теорема. П-теорема допускает прозрачный комментарий в терминах теоретико-группового анализа. Используя тесную связь теории размерностей физических величин с группой растяжений и ее инвариантами, любой результат теории размерностей удастся получить с помощью теории групп растяжений [40, гл. 5]. Так, по поводу задачи о подобии, доказано, что величина является безразмерной, если и только

если ее значение есть инвариант соответствующей группы. Что же касается основной задачи теории размерностей о выявлении из набора физических величин тех, которые являются независимыми, и выражении остальных величин через независимые, то она решается построением *универсального инварианта* группы растяжений (об условиях его существования см. [40, гл. 1, § 3.5]). Последний может быть выбран так, что в нем переменные разделяются, что и делает возможной запись искомой величины в виде (121). При этом само инвариантное решение системы ДУ называется *автомодельным*. Для явной записи решений через инварианты используется хорошо известная в групповом анализе дифференциальных уравнений (и применимая не только к инвариантным решениям группы растяжений) (см. [40, гл. 5, § 18; 33, v. 3, p. 6])

Теорема об инвариантном представлении: Пусть многообразие $M \subset \mathbb{R}^N$ допускает группу \mathcal{G} . Предположим, что M является неособым многообразием группы \mathcal{G} , т. е. инфинитезимальный оператор группы \mathcal{G} не обращается в нуль тождественно на M . Тогда M может быть представлено системой уравнений, левые части которых являются инвариантами группы \mathcal{G} , т. е. системой следующего вида:

$$F_k(J_1(z), J_2(z), \dots, J_{N-1}(z)) = 0, \quad k = 1, \dots, s. \quad (122)$$

Здесь функции $J_1(z), J_2(z), \dots, J_{N-1}(z)$, $z \in \mathbb{R}^N$, образуют базис инвариантов группы \mathcal{G} . Следовательно, уравнения (122) с произвольными функциями F_k , зависящими от $N - 1$ переменных, дают в общем виде представление неособого инвариантного многообразия группы \mathcal{G} .

Подобно тому как симметрия функционального самоподобия и соответствующее представление решений являются обобщением обычной (степенной) автомодельности, так и групповой анализ при рассмотрении произвольных групп преобразований дает более сложное представление инвариантных решений, чем то, которое дает группа растяжений. Отказ от полной инвариантности решения и использования понятия частичной инвариантности [40, гл. 5] еще больше расширяет возможные способы представления решений.

Завершая обсуждение степенной автомодельности и ее связи с представлением решения через степенные инварианты в форме (121), отметим, что существуют задачи, в которых показатели некоторых инвариантов не являются целыми числами или рациональными дробями и не получаются из анализа размерностей. Как правило, это трансцендентные числа, непрерывно зависящие от параметров задачи, и их нахождение сводится к решению некой (обычно нелинейной) задачи на собственные значения. Автомодельные решения, в которых для установления автомодельности и нахождения соответствующих переменных недостаточно проведения анализа размерностей, получили название [80] *автомодельных решений второго рода*.

Обратимся теперь к решениям КЗ, которые получаются при использовании РГ-алгоритма, и напомним, что они являются инвариантными решениями для РГ-операторов.

Форма таких решений сохраняет связь как с положениями группового анализа (теорема об инвариантном представлении), так и с классическими представлениями об автомодельных решениях. Можно сказать, что РГ-инвариантные решения допускают более общее утверждение, которое мы назовем Φ -теоремой (фи-теоремой):

Φ -теорема: *Инвариантное решение краевой задачи может быть представлено системой уравнений вида (122), записанных через функциональные инварианты ϕ_i этой задачи.*

Под ϕ_i понимаются инварианты функциональных преобразований, вовлекающих не только зависимые и независимые переменные уравнений задачи, но и параметры краевых условий, т. е. инварианты ренормгрупповых преобразований.

По существу Φ -теорема является аналогом *теоремы об инвариантном представлении* применительно к решениям КЗ, обладающим свойством функционального самоподобия. При этом в качестве неособого многообразия следует рассматривать подмногообразие $\mathcal{R}\mathcal{M}$, инвариантное относительно ренормгруппы \mathcal{G} .

В том частном случае, когда в (122) $s = 1$, а в функциональном инварианте $\phi(y, \{a\})$, содержащем единственную искомую функцию y , переменные разделяются, решение можно записать в явном виде, близком к (121):

$$y = \phi_{(1)}^{-1}(\Phi(\dots), \{a\}); \quad \phi = \Phi(\dots, \phi_i, \dots), \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (123)$$

Здесь функция $\phi_{(1)}^{-1}$ является обратной к ϕ по отношению к первому аргументу, вследствие чего решение y оказывается зависящим не только от оставшихся функциональных инвариантов ϕ_i , но и от переменных и параметров $\{a\}$, входивших в инвариант ϕ (ср. с (121)). Таким образом, как и для степенного самоподобия, сами решения КЗ не являются, вообще говоря, инвариантами РГ-преобразований, но выражаются через некие комбинации инвариантов операторов РГС.

Примером решения КЗ, являющегося таким инвариантом, служат выражения (114) для функций распределения частиц плазмы в разлетающемся сгустке.

Второй пример дает нам модель квантовой теории поля с двумя константами связи g и h . Здесь инвариантные величины, например наблюдаемые эффективные поперечные сечения рассеяния $\sigma_\nu(s)$, выражаются через РГ-инварианты — две инвариантные функции связи $\bar{g}(s/\mu^2; g, h)$, $\bar{h}(s/\mu^2; g, h)$

и отношение m^2/s — соотношениями

$$\sigma_\nu(s) = \Sigma_\nu(m^2/s, \bar{g}, \bar{h}). \quad (124)$$

В свою очередь, функции \bar{g} и \bar{h} находятся из системы двух функциональных соотношений (см., например, уравнение (48.37) в [11])

$$\begin{aligned} G(y/x, \bar{g}(x, y; g, h), \bar{h}(x, y; g, h)) &= G(y; g, h); \\ H(y/x, \bar{g}(x, y; g, h), \bar{h}(x, y; g, h)) &= H(y; g, h), \end{aligned} \quad (125)$$

содержащих* две произвольные функции двух аргументов G и H . Поэтому определение каждой из $\sigma_\nu(s)$ требует знания трех определяющих функций Σ_ν, G и H . Заметим еще, что процедура привязки численных значений параметров g и h к краевым данным необходимо вовлекает по крайней мере два соотношения (124).

В то же время *не* являются инвариантами РГ-оператора функционалы от функций распределения, определяющие согласно формулам (85) плотности частиц разлетающейся плазмы. Другой пример, когда решение КЗ строится из инвариантов РГ-преобразования, но само таким инвариантом не является, представлен соотношениями (59) и (63) для функционалов (55) в задаче о рефракции пучка в нелинейной среде.

В случае, когда нельзя выделить решение КЗ явно, вместо представления (123) приходится разрешать неявные соотношения вида (125) или еще более общие формулы (122).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В. // ТМФ. 1989. Т. 81. С. 69.
2. Shirkov D. V. // Renormalization group '91: Proc. of the Second Intern. Conf., Sept. 1991, Dubna, USSR / Ed. D. V. Shirkov and V. B. Priezzhev. Singapore, 1992. P. 1–10;
Kovalev V. F., Krivenko S. V., Pustovalov V. V. // Ibid. P. 300–314.
3. Kovalev V. F., Pustovalov V. V., Shirkov D. V. // J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 1170;
Kovalev V. F., Pustovalov V. V., Shirkov D. V. hep-th/9706056.
4. Kovalev V. F., Shirkov D. V. // Phys. Rep. 2001. V. 352(4–6). P. 219.

*И представляющих обобщение формулы $F(y/x, \bar{g}(x, y; g)) = F(y, g)$, полученной Овсянниковым в 1956 г. для однозарядного случая.

5. *Stueckelberg E. E. C., Petermann A. // Helv. Phys. Acta. 1951. V. 24. P. 317;*
Stueckelberg E. E. C., Petermann A. // Helv. Phys. Acta. 1953. V. 26. P. 499 (in French).
6. *Gell-Mann M., Low F. // Phys. Rev. 1954. V. 95. P. 1300.*
7. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. С. 203.*
8. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. // Докл. АН СССР. 1955. Т. 103. С. 391.*
9. *Bogoliubov N. N., Shirkov D. V. // Nuovo Cim. 1956. V. 3. P. 845.*
10. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 77.*
11. *Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантовых полей. М.: Наука, 1958; 1973; 1976; 1984.*
12. *Лозунов А. А. // ЖЭТФ. 1956. Т. 30. С. 793.*
13. *Gross D., Wilczek F. // Phys. Rev. Lett. 1973. V. 30. 1343;*
Politzer H. D. // Phys. Rev. Lett. 1973. V 30. P. 1346.
14. *Мнацаканян М. А. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 27. С. 856.*
15. *Амбарцумян В. А. // Астр. журн. 1942. Т. 19(5). С. 30;*
Амбарцумян В. А. Научные труды. Ереван: Изд-во АН Армянской ССР, 1960. Т. 1.
16. *Ширков Д. В. // Докл. АН СССР. 1982. Т. 27. С. 197.*
17. *Dyson F. // Phys. Rev. 1949. V. 75. P. 1736.*
18. *Бланк В. З., Бонч-Бруевич В. Л., Ширков Д. В. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 265.*
19. *Ширков Д. В. // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49:5. С. 155;*
Shirkov D. V. hep-th/9602024.
20. *Chen L. Y., Goldenfeld N., Oono Y. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54(1). P. 376.*
21. *Kunihiro T. // Progr. Theor. Phys. 1995. V. 94(4). P. 503.*
22. *Ei S. I., Fujii K, Kunihiro T. // Ann. Phys. 2000. V. 280(4). P. 236.*
23. *Hatta Y., Kunihiro T. // Ann. Phys. 2002. V. 298. P. 24–57.*
24. *Pashko O., Oono Y. // Intern. J. Mod. Phys. B. 2000. V. 14(6). P. 555–561.*
25. *Frasca M. // Phys. Rev. A. 1998. V. 58. P. 771–774.*
26. *de Vega H. J., Salgado J. F. J. // Phys. Rev. D. 1997. V. 56. P. 6524–6532.*

27. *Kunihiro T.* // *Progr. Theor. Phys. Supplement.* 1998. V. 131. P. 459–471.
28. *Wilson K.* // *Phys. Rev. B.* 1971. V. 4. P. 3174;
Wilson K. // *Phys. Rev. B.* 1971. V. 4. P. 3184.
29. *Bricmont J., Kupiainen A.* // *Comm. Math. Phys.* 1992. V. 150. P. 193;
Bricmont J, Kupiainen A., Lin G. // *Comm. Pure Appl. Math.* 1994. V. 47. P. 893;
Bricmont J., Kupiainen A., Xin J. // *J. Diff. Eqs.* 1996. V. 130. P. 9.
30. *Kovalev V. F.* // *Acta Physica Slovaca.* 2002. V. 52(4). P. 353.
31. *Shirkov D. V.* // *Int. J. Mod. Phys. A.* 1988. V. 3. P. 1321.
32. *Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В.* Препринт ФИАН СССР № 78. М., 1987.
33. *CRC Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations / Ed. N. H. Ibragimov.* Boca Raton: CRC Press, 1994–1996. 1994. V. 1; 1995 V. 2; 1996. V. 3.
34. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1953. 468 с.
35. *Casti J., Calaba R.* Imbedding methods in applied mathematics. Addison-Wesley, 1973.
36. *Кляцкин В. И.* Методы погружения в теории распространения волн. М.: Наука, 1986.
37. *Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В., Ширков Д. В.* Сообщение ОИЯИ P5-95-447. Дубна, 1995. 33 с.
38. *Сидоров А. Ф., Шапеев В. П., Яненко Н. Н.* Метод дифференциальных связей и его приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 1984. 272 с.
39. *Ковалев В. Ф., Кривенко С. В., Пустовалов В. В.* // Проблемы управления и навигации авиационно-космических систем. Киев, 1994. С. 33.
40. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978;
Ovsyannikov L. V. Group analysis of differential equations. N. Y., 1982.
41. *Ибрагимов Н. Х.* Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983;
Ibragimov N. H. Transformation groups applied to mathematical physics. Dorfrecht-Lancaster, 1985.
42. *Olver P. J.* Applications of Lie groups to differential equations. N. Y., 1986.
43. *Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. 1989. Т. 34. С. 85.

44. *Bluman G. W., Cole J. D.* // J. Math. Mech. 1969. V. 18. P. 1025.
45. *Olver P. J., Rosenau P.* // Phys. Lett. 1986. V. 114. P. 107.
46. *Воробьев Е. М.* // Докл. АН СССР. 1986. Т. 287. С. 536.
47. *Фуцич В. И., Серов Н. И.* Симметрия и решения уравнений математической физики. Киев, 1989. С. 96–103.
48. *Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х.* // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. С. 11;
Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. // Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Наука, 1987. С. 22–56;
Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 34. С. 3–83.
49. *Дородницын В. А.* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 34. С. 149.
50. *Таранов В. Б.* // ЖТФ. 1976. Т. 46. С. 1271;
Таранов В. Б. Препринт КИЯИ-74-21. Киев, 1974.
51. *Ibragimov N. H., Kovalev V. F., Pustovalov V. V.* // Nonlinear Dynamics. 2002. V. 28. P. 135; math-ph/0109012.
52. *Краснослободцев А. В.* // Труды Института общей физики АН СССР. М.: Наука, 1989. Т. 18. С. 33–71.
53. *Chetverikov V. N., Kudryavtsev A. G.* // Acta Appl. Math. 1995. V. 41. P. 45–56;
Chetverikov V. N., Kudryavtsev A. G. // American Mathematical Society Translations. 1995. V. 167. P. 1–22.
54. *Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В.* // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. С. 323; Sov. Phys. Dokl. 1987. V. 32. P. 874;
Григорьев Ю. Н., Мелешко С. В. Препринт Института теоретической и прикладной механики СО АН СССР № 18-86. Новосибирск, 1986;
Мелешко С. В. Классификация решений с вырожденным годографом уравнений газовой динамики и теории пластичности: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск, 1991;
Grigoryev Yu. N., Meleshko S. V. // Arch. Mech. 1990. V. 42. P. 693–701.

55. Ковалев В. Ф., Кривенко С. В., Пустовалов В. В. // Письма в ЖЭТФ. 1992. Т. 55. С. 256;
 Ковалев В. Ф., Кривенко С. В., Пустовалов В. В. // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. С. 1804;
 Ковалев В. Ф., Кривенко С. В., Пустовалов В. В. // Дифференциальные уравнения. 1993. Т. 29. С. 1971.
56. Бушлаев В. С. Вариационное исчисление. Л., 1980.
57. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982.
58. Ширков Д. В. // ТМФ. 1984. Т. 60. С. 218.
59. Ковалев В. Ф., Ширков Д. В. // ТМФ. 1999. Т. 121. С. 66–88;
 Kovalev V. F., Shirkov D. V. math-ph/0001056.
60. Dokshitzer Yu. L. et al. // Nucl. Phys. B. 1996. V. 469. P. 953;
 Dokshitzer Yu. L. et al. hep-ph/9512336.
61. Shirkov D. V. // Eur. Phys. J. C. 2001. V. 22. P. 331; hep-ph/0107282.
62. Ширков Д. В. // ТМФ. 2003. Т. 136(1). С. 3–19; hep-ph/0210013.
63. Corless R. M. et al. On the Lambert W Function // Advances in Computational Mathematics. 1996. V. 5. P. 329.
64. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // УФН. 1968. Т. 93. С. 19–70.
65. Gurevich A. V. Nonlinear phenomena in the ionosphere // Physics and Chemistry in Space. N. Y., 1978.
66. Власов С. Н., Таланов В. И. // Самофокусировка волн. Н. Новгород, 1997. 220 с.
67. Bergé L. // Phys. Rep. 1998. V. 303. P. 259.
68. Kovalev V. F., Shirkov D. V. // J. Nonlin. Opt. Phys. & Materials. 1997. V. 6. P. 443.
69. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. // ЖЭТФ. 1966. Т. 50(6). С. 1537.
70. Пустовалов В. В., Силин В. П. // Труды Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР. М., 1972. Т. 61. С. 42.
71. Гуревич А. В., Парийская Л. В., Питаевский Л. П. // ЖЭТФ. 1965. Т. 49. С. 647.
 Гуревич А. В., Питаевский Л. П. // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 1778; Sov. Phys. JETP. 1969. V. 29. P. 954.

72. *Dorozhkina D. S., Semenov V. E.* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 2691; Письма в ЖЭТФ. 1998. Т. 67. С. 543.
73. *Ковалев В. Ф., Быченко В. Ю., Тихончук В. Т.* // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 74. С. 12.
74. *Ковалев В. Ф., Быченко В. Ю., Тихончук В. Т.* // ЖЭТФ. 2002. Т. 122(2). С. 264.
75. *Kovalev V. F., Bychenkov V. Yu.* // Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90(18). P. 185004-(1-4).
76. *Ковалев В. Ф., Кривенко С. В., Пустовалов В. В.* Препринт ФИАН СССР им. П. Н. Лебедева № 152. М., 1991.
77. *Sack Ch., Shamel H.* // Phys. Rep. 1987. V. 156(6). P. 311.
78. *Kovalev V. F., Krivenko S. V., Pustovalov V. V.* // Proc. of the Intern. Workshop on Symmetry Methods in Physics in Memory of Professor Ya. A. Smorodinsky, Dubna, July 6–10, 1993. Dubna, 1994. V. 1. P. 253.
79. *Rayleigh* // Nature. 1915. V. 95. P. 66;
Riabouchinsky D. P. // Nature. 1915. V. 95. P. 105;
Bridgman P. W. // Dimensional Analysis. New Haven, 1932;
Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981.
80. *Баренблатт Г. И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеониздат, 1982.
81. *Власов А. А.* // ЖЭТФ. 1938. Т. 8(3). С. 291–317;
Власов А. А. // УФН. 1967. Т. 93(3). С. 444.
82. *Lewak G. J.* // J. Plasma Physics. 1969. V. 3. P. 243.
83. *Пустовалов В. В., Черников А. А.* Препринт Физического института им. П. Н. Лебедева АН СССР № 171. М., 1980.
84. *Пустовалов В. В. и др.* // Краткие сообщения по физике ФИАН им. П. Н. Лебедева. 1976. № 12. С. 28–32.
85. Основы физики плазмы: В 2-х т. Дополнение ко второму тому / Под ред. А. А. Галеева, Р. Судана, М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 156.
86. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* // Теория поля. М.: Наука, 1973.
87. *Ковалев В. Ф., Кривенко С. В., Пустовалов В. В.* // Краткие сообщения по физике ФИАН им. П. Н. Лебедева. 1993. № 3–4. С. 27–33.
88. *Kovalev V. F., Krivenko S. V., Pustovalov V. V.* // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. 1996. V. 3(1–2). P. 175–80; Proc. of the Intern. Conf. «Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics», Kiev, July 3–8, 1995. V. 2.

89. *Ковалев В. Ф., Пустовалов В. В.* // Краткие сообщения по физике ФИАН СССР им. П. Н. Лебедева. 1991. №4. С. 27–30.
90. *Ковалев В. Ф., Кривенко С. В., Пустовалов В. В.* Препринт Физического института им. П. Н. Лебедева РАН №62. М., 1992.
91. *Кривенко С. В.* Группы симметрий уравнения Власова в кинетической теории плазмы: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М.: ФИАН, 1996.

Получено 12 марта 2004 г.

СОДЕРЖАНИЕ

1	ВВЕДЕНИЕ	1
1.1	Ренормгруппа в КТП.	1
1.2	РГС в математической физике.	2
2	СХЕМА РГ-АЛГОРИТМА ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЗАДАЧ	5
2.1	Построение РГ-многообразия.	6
2.2	Вычисление группы преобразований.	9
2.3	Сужение группы на решении.	14
2.4	Построение РГ-инвариантного решения.	16
3	ПОСТРОЕНИЕ РГС ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ	17
3.1	Интегральные преобразования и РГ-инвариантность.	17
3.2	Случай функционалов от решения уравнения Хопфа.	20
3.3	Нелинейная оптика: развитие сингулярности на оси лазерного пучка.	23
3.4	РГС для функционалов от решений уравнений Власова–Максвелла.	28
3.4.1	Нелинейная диэлектрическая проницаемость плазмы и трехпараметрическая РГС.	28
3.4.2	Ускорение ионов и динамика разлета плазменного сгустка.	31
4	ЗАКЛЮЧЕНИЕ	35
	ПРИЛОЖЕНИЕ 1	36
1.	Симметрии уравнения Власова–Максвелла.	37
2.	РГС в задаче построения тензоров НДП в горячей плазме	44
3.	Динамика разлета плоского плазменного слоя.	46
	ПРИЛОЖЕНИЕ 2	48
1.	Анализ размерностей и П-теорема.	48
2.	Инвариантное представление решения и Ф-теорема.	49
	ЛИТЕРАТУРА	52

Редактор *А. Н. Шабашова*
Макет *Е. В. Сабатовой*

Подписано в печать 28.04.2004.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 3,81. Уч.-изд. л. 4,66. Тираж 315 экз. Заказ № 54411.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/