

P11-2004-41

М. Д. Шафранов, В. А. Бабкин

**ВЫСОКОТОЧНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОСТАТИКИ
ДЛЯ СИСТЕМ ПРОВОДНИКИ-ДИЭЛЕКТРИКИ**

Шафранов М. Д., Бабкин В. А.

P11-2004-41

Высокоточный метод решения краевых задач электростатики для систем проводники–диэлектрики

Рассмотрен новый прецизионный метод аналитического решения задач «диэлектрики в поле проводников». Он основан на принципе линейной суперпозиции полей от простого распределения зарядов. Линейные или точечные заряды определяются из граничных условий. Все сингулярности локализованы внутри электродов и внутри или вне диэлектриков. Величины зарядов определяются решением системы линейных алгебраических уравнений. Достоинствами метода являются высокая точность, простота и доступность. Точность метода лучше чем 0,004 %.

Работа выполнена в Лаборатории физики частиц ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2004

Перевод авторов

Shafranov M. D., Babkin V. A.

P11-2004-41

A Precision Method of Solving a Boundary Problem for Dielectrics–Conductors System

A new precision method of analytical field calculation is presented. The method is suitable for solution of the problem of dielectrics in the field of conductors. This method consists in the linear superposition of the fields due to simple charge distributions. Linear or point charges are to be determined from the boundary values. All singularities are located inside the electrodes and inside or outside the dielectrics. The values of charges are determined by the solution of the system of linear equations. The advantages of the method are its accuracy, simplicity and availability. The accuracy of the method is higher than 0.004 %.

The investigation has been performed at the Laboratory of Particle Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2004

1. EXORDIUM ORATIONIS, PIA DISSIDERIA*

В работе дано обоснование высокоточного метода решения краевых задач электростатики для систем проводники–диэлектрики. Суть метода заключается в численном решении граничных задач с использованием вспомогательных зарядов проводников и вспомогательных зарядов диэлектрика, размещаемых определенным образом. Каждому вспомогательному заряду проводников и диэлектриков сопоставляются контрольные точки на их поверхностях. Величины зарядов находятся из решения системы линейных уравнений, которые составляются с учетом выполнения граничных условий в контрольных точках.

Классическим примером применения точечного вспомогательного заряда служит вычисление напряженности электрического поля, создаваемого поверхностными зарядами проводящей сферы радиусом R с полным зарядом Q . Вне равномерно заряженной сферы напряженность поля будет такой же, как в случае, когда весь заряд Q является точечным и сосредоточен в ее центре.

Другой пример использования вспомогательных зарядов — расчет электрических полей и потенциалов, создаваемых системой сетки из проволочек, размещенных между двумя пластинами конденсатора [1]. Вместо проволочек использовались линейные заряды. Такая система линейных зарядов есть математическая модель многопроволочной пропорциональной камеры (МПК) [2]. Численное моделирование полей в объеме камеры показало, что вдоль линии, перпендикулярной к плоскости проволочек и проходящей через центр проволочки, электрическое поле E пропорционально $\coth t$, где $t = \pi dy/s$. Здесь dy — текущая координата, а s — расстояние между соседними проволочками (соседними линейными зарядами). Фрагмент распределения $\coth t$ показан на рис. 1.

Начиная со значения $t \cong 6$, когда $dy/s = 2$, электрическое поле становится однородным. Особенности, связанные с дискретным характером зарядов, исчезают. На расстоянии $dy = 2s$ от плоскости проволочек эквипотенциальной поверхностью является плоская поверхность, параллельная плоскости проволочек. Отсюда следует способ решения краевой задачи для

*Вступление, благие намерения (лат.). В доброе старое время, во времена Паскаля и Ньютона, все научные труды писались на латыни. Это обеспечивало широкий обмен научными результатами среди ученых мира. Сегодня даже в России предпочитают английский.

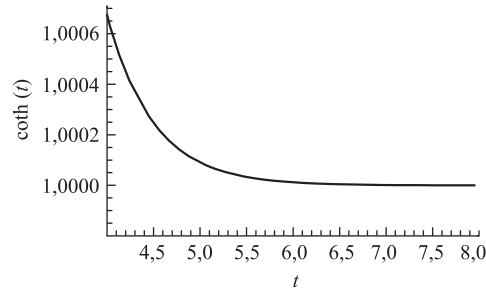


Рис. 1. Электрическое поле E вдоль линии, перпендикулярной плоскости проволочек, пропорционально $\coth(t)$, где $t = \pi dy/s$

плоского проводника, находящегося под потенциалом U . При решении вместо плоского электрода используется система линейных зарядов. Размещение этих зарядов по отношению к поверхности электрода определяется по соотношению $dy = 2s$. Для каждой контрольной точки составляется уравнение вида $\sum_i U_i = U$. Их общее число равно числу линейных зарядов. В этом уравнении $U_i = f(q_i, r_i)$ в рассматриваемой контрольной точке является потенциалом, образованным линейным зарядом с индексом i . Таким образом, из решения системы уравнений определяются величины вспомогательных зарядов. По известным формулам электростатики для линейных зарядов можно рассчитать поля и потенциалы. Использование линейных зарядов ограничено очень узким кругом задач. В общих случаях необходимо использовать точечные вспомогательные заряды [3].

Метод решения краевых задач электростатики для систем проводники–диэлектрики с использованием вспомогательных зарядов впервые был рассмотрен в [4]. Задача решалась с помощью итеративного способа. Но там же в качестве развития метода предлагалось решение подобных задач алгебраическими методами на основе систем линейных уравнений. Позже метод использовался в [5–7]. В [5] показано влияние диэлектрической рамки на краевые эффекты в МПК. Следствия размещения диэлектрической пластины в объеме МПК рассмотрены в [6]. В [7] даны некоторые распределения электрических полей и потенциалов в многопроволочном детекторе ZEPLIN III [8].

Поясним метод выбора системы уравнений для решения задачи «диэлектрик в электростатическом поле проводников». На рис. 2 показана часть пластины конденсатора — источника сторонних зарядов, находящегося под потенциалом $-U$, а также часть диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε , находящегося на некотором расстоянии от пластины, ограниченной дугой sd .

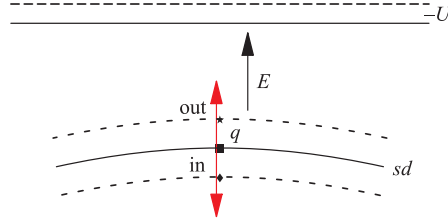


Рис. 2. Схема, поясняющая выбор системы уравнений. Здесь E — поле сторонних зарядов, U — значение потенциала на пластине конденсатора, sd — граница раздела вакуум–диэлектрик, in и out — соответственно внутренние и внешние заряды диэлектрика

Стрелкой E показано направление поля, создаваемого сторонними зарядами. В соответствии с направлением вектора электрического поля E на поверхности диэлектрика индуцируются связанные положительные заряды. Направления нормальных компонентов электрического поля от индуцированных зарядов обозначены стрелками, исходящими из точки q на поверхности диэлектрика (см. рис. 2). Электрическое поле в любой точке поверхности создается всеми связанными зарядами диэлектрика вместе со сторонними зарядами электродов. На основании принципа суперпозиции в электростатике мы имеем соотношения между нормальными составляющими на поверхности внутри и вне диэлектрика:

$$E_n(\text{in}) = E_n - E_n(q) \text{ и } E_n(\text{out}) = E_n + E_n(q).$$

В этих краевых условиях E_n — нормальный компонент поля от сторонних зарядов, а $E_n(q)$ — нормальный компонент поля от всех связанных зарядов на поверхности диэлектрика в точке q . По законам электростатики эти два соотношения связаны уравнением, справедливым для любой точки поверхности диэлектрика:

$$E_n + E_n(q) = \varepsilon(E_n - E_n(q)). \quad (1.1)$$

Когда мы говорим о полях, образованных всеми зарядами, то фактически речь идет об интегрировании полей, создаваемых *неизвестными распределениями поверхностных плотностей зарядов* диэлектрика и проводника. Именно в силу этого в общих случаях задачи «диэлектрик в электрическом поле проводников» в аналитической форме неразрешимы. Исключением являются задачи о неограниченном по длине диэлектрическом стержне эллиптического сечения и диэлектрическом эллипсоиде вращения, размещенных в однородных электрических полях [9]. При решении задачи с использова-

нием вспомогательных зарядов граничные условия для проводников удовлетворяются зарядами, размещаемыми *вместо проводников* в объеме, который они занимали. Граничные условия для диэлектриков удовлетворяются вспомогательными зарядами, размещаемыми *вместо диэлектриков* в объеме и вне объема, который занимал диэлектрик. Вспомогательные заряды размещаются вблизи поверхностей диэлектриков.

Посмотрим, к каким соотношениям приводит использование внутренних вспомогательных зарядов диэлектрика на поверхности, ограничивающей его. Внутренние (in) заряды участвуют в создании внешнего электрического поля E_{out} . Направление электрического поля, создаваемого положительными внутренними зарядами, совпадает с направлением поля конденсатора (см. рис. 2), в результате мы получаем $E_{\text{out}} = E + E(\text{in})$. Тогда в соответствии с законами электростатики на поверхности диэлектрика с внутренней стороны величина поля определяется выражением $E_{\text{in}} = E - E(\text{in})$. С использованием связи между полями на границе вакуум–диэлектрик имеем окончательное выражение, аналогичное уравнению (1.1):

$$E + E(\text{in}) = \varepsilon(E - E(\text{in})).$$

Обратимся к проблеме применения внешних зарядов. С учетом направления электрического поля внешнего заряда (out) на поверхности диэлектрика с внутренней стороны создается поле $E_{\text{in}} = E - E(\text{out})$. В этом случае требование законов электростатики приводит к соотношению для поля вне диэлектрика $E_{\text{out}} = E + E(\text{out})$, следовательно, в этом случае соотношение для граничных условий принимает вид

$$E + E(\text{out}) = \varepsilon(E - E(\text{out})).$$

Таким образом, мы видим идентичность соотношений для нахождения внешних и внутренних зарядов. Это позволит составлять одинаковые системы уравнений, отличающиеся только тем, какие заряды необходимо использовать.

2. AD REM*

В качестве физической модели нами рассматривается диэлектрический стержень диаметром 10 мм с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$, который расположен с вакуумным (газовым) зазором в объеме плоского конденсатора. Расстояние между пластинами конденсатора 20 мм, их ширина 120 мм. Выбор

*К делу (лат.).

расстояний, сравнимых с диаметром стержня, позволяет успешнее проследить зависимость точности решения задачи от различных параметров: числа вспомогательных зарядов, их взаимного расположения. Длина стержня и пластин 500 мм. Такие величины длины позволяют рассмотреть двумерный случай в медианном сечении $z = 0$. Разместим вспомогательные линейные заряды «вне электродов», а также «внутри или вне диэлектрика» (рис. 3). Кавычки обозначают некоторую условность, поскольку в математической модели в явном виде отсутствуют и конденсатор, и диэлектрик. Математической моделью является совокупность систем уравнений для нахождения величин всех вспомогательных зарядов. В свою очередь, вспомогательные заряды обеспечивают выполнение граничных условий на поверхностях, соответствующих поверхностям электродов, а также на поверхности диэлектрика.

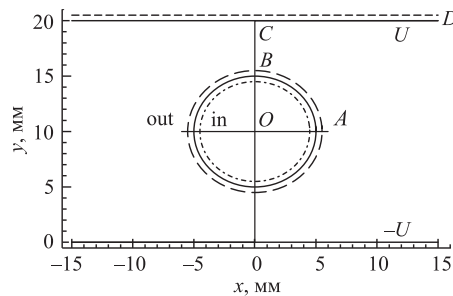


Рис. 3. Схема расположения вспомогательных зарядов в физической модели диэлектрического стержня в поле конденсатора

В конкретном варианте число вспомогательных зарядов каждой из пластин конденсатора равно 400. В соответствии с рассмотренным выше соотношением $dy = 2s$ при расстоянии между соседними зарядами 0,3 мм, а расстояние между поверхностью с зарядами и поверхностью пластины конденсатора равно 0,6 мм. Рассматривались случаи, когда по периметру диэлектрика брались переменное число контрольных точек и равное им число внутренних и внешних вспомогательных зарядов диэлектрика. Расстояние между контрольными точками $ds = 2\pi R_0/n$, где R_0 — радиус стержня. Расстояние между каждой из поверхностей с зарядами и поверхностью диэлектрика

$$dr = 2ds. \quad (2.1)$$

Для поверхностей с зарядами радиус определяется соотношением $R = R_0 \pm dr$. Заряды размещаются на тех же радиусах, что и соответствующие им

контрольные точки. При моделировании потенциал верхней пластины конденсатора равнялся 500 В, а потенциал нижней пластины составлял –500 В. На цилиндрической поверхности диэлектрика, обращенной к верхнему электроду конденсатора, находящемуся под положительным потенциалом, появляются связанные отрицательные заряды.

3. OMNE INITIUM DIFFICILE EST*

Рассмотрим метод раздельного использования внутренних или внешних зарядов, относящихся к диэлектрику. Внутренние вспомогательные заряды диэлектрика вместе со вспомогательными зарядами проводника используются для определения полей и потенциалов вне диэлектрика. А внешние заряды диэлектрика вместе со вспомогательными зарядами проводника используются для определения электрических характеристик внутри диэлектрика.

Для каждой из контрольных точек верхней пластины конденсатора составляются уравнения типа

$$\sum_i U_i + \sum_k U_k + \sum_d U_d = U_{01}. \quad (3.1)$$

В подобном уравнении U_i — потенциал, создаваемый зарядом с номером i , относящимся к одной из пластин конденсатора, U_k — потенциал от заряда k второй пластины, U_d — потенциал от заряда d диэлектрика.

Уравнения типа

$$\sum_i U_i^* + \sum_k U_k^* + \sum_d U_d^* = U_{02} \quad (3.2)$$

относятся, соответственно, ко второй пластине конденсатора. Потенциалы U_{01} и U_{02} — граничные условия для конденсатора.

В соответствии с соотношением (1.1) составлены уравнения

$$\sum_i E_{ni} + \sum_k E_{nk} + \sum_d E_{nd} = \varepsilon \left(\sum_i E_{ni} + \sum_k E_{nk} - \sum_d E_{nd} \right), \quad (3.3)$$

они являются следствием выполнения граничных условий на поверхности диэлектрика.

Число этих уравнений равно числу вспомогательных зарядов первой, второй пластины конденсатора и стержню диэлектрика, т. е. система уравнений полностью определена.

*Всякое начало трудно (лат.).

Начнем с решения системы уравнений (3.1)–(3.3) при использовании внутренних вспомогательных зарядов диэлектрика. Найденные заряды позволяют получить распределения потенциалов и электрических полей вне диэлектрика. На рис. 4, *a* показано распределение напряженности электрического поля с внутренней стороны пластины конденсатора. Рассмотрим распределение для $x > 50$ мм. В этой части пластины число вспомогательных зарядов меньше, чем в части $x < 50$ мм. Уменьшение числа зарядов при $x > 50$ мм для обеспечения эквипотенциальности проводника, как это требуют законы электростатики проводников, компенсируется увеличением величин зарядов. Максимум при $x = 0$ обусловлен присутствием диэлектрика. На рис. 4, *б* представлена центральная часть данного распределения. Рассматриваемое распределение получено наложением пяти независимых распределений, полученных для разного числа вспомогательных зарядов.

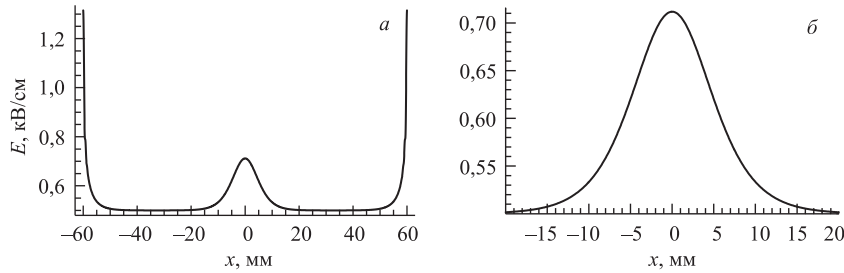


Рис. 4. *a*. Распределение напряженности электрического поля вдоль поверхности одной из пластин конденсатора, полученное наложением пяти независимых распределений для различного числа вспомогательных зарядов диэлектрика; *б* — центральная часть распределения, показанного на *a*

На рис. 5 в увеличенном виде показан фрагмент распределения рис. 4, *a*, который демонстрирует влияние дискретности зарядов. Распределение с локальными максимумами и минимумами (кривая 1) соответствует распределению на внутренней поверхности пластины, находящейся на расстоянии $dy = 2s$ от поверхности с зарядами. Кривая 2 соответствует распределению поля на расстоянии $dy = 3s$ от поверхности с зарядами.

Значения поля E в зависимости от числа вспомогательных зарядов диэлектрика n для $x = 0$ представлены в табл. 1, по которой можно судить о точности рассматриваемого метода.

Таблица 1

n	10	20	50	100	1000
E , кВ/см	0,711777	0,711777	0,711776	0,711776	0,711775

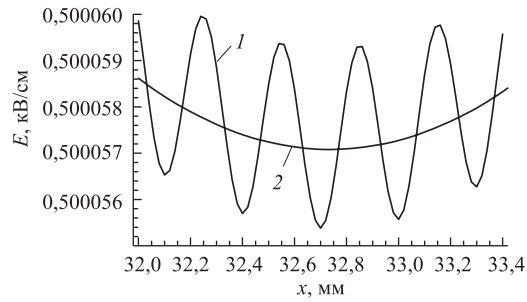


Рис. 5. Фрагмент распределения, показанного на рис. 4, а, демонстрирующий влияние дискретности зарядов. Кривая 1 соответствует распределению на расстоянии $dy = 2ds$ от плоскости с зарядами, кривая 2 — на расстоянии $dy = 3ds$

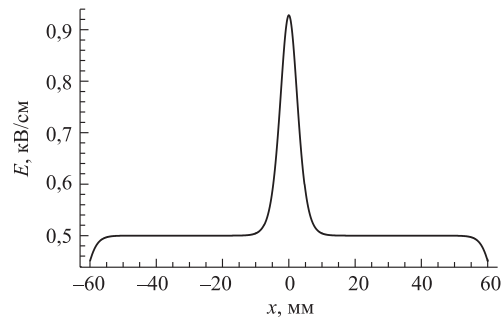


Рис. 6. Распределение компоненты поля E_y вдоль плоскости, проходящей через точку B на рис. 3 и параллельной пластинам конденсатора

Распределение нормальных составляющих поля вдоль плоскости, проходящей через точку B рис. 3, показано на рис. 6.

В табл. 2 сведены данные о величинах потенциала на поверхности диэлектрика в зависимости от числа вспомогательных зарядов диэлектрика n в точке B рис. 3.

Таблица 2

n	10	20	60	100	200	300
$U, В$	114,7750	114,7036	114,7031	114,7040	114,7042	114,7043

Используя систему уравнений (3.1)–(3.3), получаем все внутренние вспомогательные заряды, относящиеся к диэлектрику, и заряды, относящиеся к конденсатору. Вне диэлектрика распределения электрических полей в ши-

роком интервале числа вспомогательных зарядов полностью идентичны. Это же относится и к потенциальным распределениям. Возникает вопрос, с какой точностью между потенциалами и полями вне диэлектрика выполняются соотношения, предписываемые законом электростатики $E = dU/dy$. Для проверки этого с шагом 0,01 мм были получены соответствующие величины потенциала вдоль оси ординат вне диэлектрика. Вычислялись отношения разницы потенциалов ΔU на интервале $\Delta y = 0,002$ мм к величине этого интервала. Полученное значение $\Delta U/\Delta y$ сравнивалось со значением величины поля в точке, соответствующей середине интервала Δy . На рис. 7 приве-

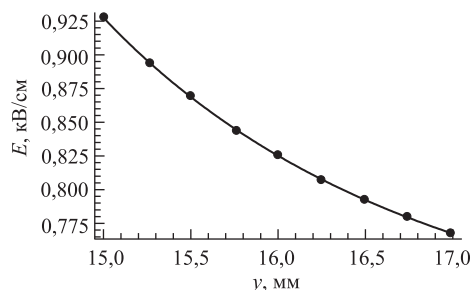


Рис. 7. Распределение поля вдоль оси y (сплошная кривая) и отношение $\Delta U/\Delta y$, взятое на интервале $y = 0,002$ мм (точки). Разница не превышает 0,000001 кВ/см

ден результат такого сравнения. Во всем интервале разница не превышает 0,000001 кВ/см, т. е. находится на уровне точности вычислений, а не точности решения задачи. Такое согласие, естественно, является подтверждением правильности выбора уравнений и метода решения задачи по нахождению параметров электрических полей и потенциалов вне диэлектрика.

4. NIHIL EST SIMUL ET INVENTUM ET PERFECTUM*

Рассмотрим случай использования внешних вспомогательных зарядов диэлектрика. Система уравнений (3.1)–(3.3) позволяет это сделать. Вычисления были проведены в [10]. Для этого варианта точность нахождения величин электрических полей в объеме диэлектрика для 200 и 800 вспомогательных зарядов находится на уровне 2 и 0,5 %. Можно ли увеличить точность решения задачи для определения потенциалов и полей внутри диэлектрика?

Для выполнения граничных условий нормальные компоненты электрического поля должны быть равны по абсолютной величине. Но из этого не

*Ничто не бывает одновременно и изобретенным, и совершенным (лат.).

следует равенство соответствующих внешних и внутренних вспомогательных зарядов $q_o = q_i$. Это утверждение справедливо для любой произвольно выбранной пары зарядов поверхности sd . С увеличением числа любой пары внешних и внутренних вспомогательных зарядов разница $(q_o - q_i)$ стремится к нулю. Приравняем соответствующие внешние и внутренние заряды диэлектрика и посмотрим результат.

Для решения важно, чтобы это число зарядов находилось в разумных пределах. В результате решения системы уравнений (3.1)–(3.3) для заданного числа внутренних зарядов имеем заряды конденсатора и диэлектрика. Для нахождения полей внутри диэлектрика используем те же вспомогательные заряды конденсатора, а внешним зарядам диэлектрика припишем соответствующие величины внутренних вспомогательных зарядов. Проведем сравнение полученных результатов вычисления распределений поля внутри диэлектрика с различным числом вспомогательных зарядов. Результат сравнения представлен на рис. 8. Кривые (снизу вверх) соответствуют числу внешних зарядов

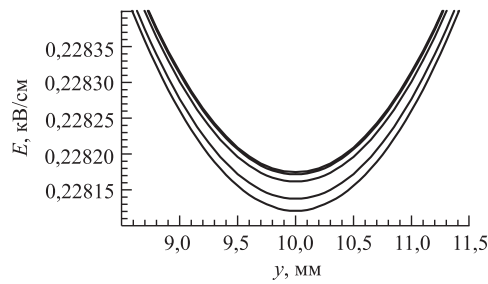


Рис. 8. Результат сравнения распределений полей внутри диэлектрика в зависимости от числа его вспомогательных зарядов: 500, 600, 1000, 2000 (снизу вверх)

диэлектрика — 500, 600, 1000 и 2000. При значении $y = 10$ величины полей соответственно равны 0,228121, 0,228138, 0,228162 и 0,228172 кВ/см. 500 вспомогательных зарядов обеспечивают точность 0,022 %. Результат является удовлетворительным по точности, но число зарядов все-таки велико. Попробуем решить задачу с использованием условия непрерывности потенциала на поверхности диэлектрика.

5. INVENTIT ET PERFECIT*

Система уравнений (3.1)–(3.3) не учитывает условия непрерывности потенциала на поверхности диэлектрика, требуемые законами электростатики.

*Открыл и усовершенствовал (лат.).

Это условие непрерывности потенциала в контрольных точках на поверхности диэлектрика описывается уравнениями вида

$$\sum_i U_i + \sum_k U_k + \sum_d U_d^i = \sum_i U_i + \sum_k U_k + \sum_d U_d^o.$$

Здесь суммы $\sum_i U_i + \sum_k U_k$ представляют величины потенциалов, создаваемых вспомогательными зарядами конденсатора, они одинаковым образом входят в обе части уравнения, их можно сократить. После сокращения имеем уравнения для потенциалов, создаваемых вспомогательными зарядами только диэлектрика:

$$\sum_d U_d^i = \sum_d U_d^o. \quad (5.1)$$

Используя в правой части этой системы уравнений внутренние заряды диэлектрика из решения системы (3.1)–(3.3), определим внешние вспомогательные заряды диэлектрика и проведем необходимые расчеты. Ниже представлены графические результаты.

На рис. 9 приведены шесть совмещенных распределений электрического поля вдоль оси ординат с использованием по 10, 20, 60, 100, 200 и 300 внутренних и внешних зарядов диэлектрика.

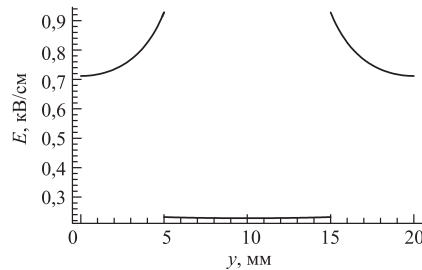


Рис. 9. Совмещенное распределение электрического поля вдоль оси ординат, проходящей через центр диэлектрического стержня, для 10, 20, 60, 100, 200 и 300 вспомогательных зарядов диэлектрика

Рис. 10 представляет указанные распределения только в объеме диэлектрика. Верхняя кривая соответствует 10 вспомогательным зарядам. Среднее значение напряженности поля в центре диэлектрика по пяти последним наборам зарядов $E = 0,228174$ кВ/см. Для случая 10 зарядов $E = 0,228247$ кВ/см. По соотношению $dr = 2ds$ (1.2) для данного случая при $r = 5$ мм $dr = 6,28$ мм. Значит, вспомогательный заряд расположен не между контрольной

точкой и центром, а за центром. Следствием этого является и различие в потенциале для 10 вспомогательных зарядов (табл. 2).

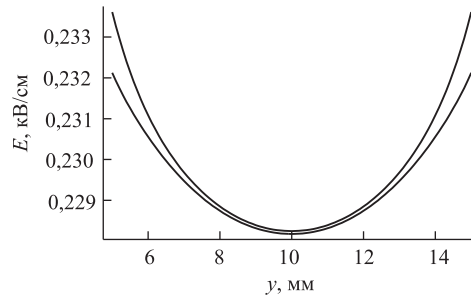


Рис. 10. Распределения электрического поля, представленные на рис. 9, взятые только в объеме диэлектрика

6. PERGAM TURBARE PORRO ITA HAEC RES POSTULAT*

Для выполнения граничных условий нормальные компоненты электрического поля в любой точке поверхности независимо от числа зарядов должны быть равны по абсолютной величине. Это требование электростатики приводит к соотношению

$$\sum_d E_d^o = \sum_d E_d^i. \quad (6.1)$$

Как и в случае условий (5.1), из решения уравнений (3.1)–(3.3) определяются внешние вспомогательные заряды диэлектрика, позволяющие выполнить необходимые вычисления.

7. SPECIOSA MIRACULA**

Результат решений с использованием уравнений (5.1) и (6.1) совместно с уравнениями (3.1)–(3.3) представлен на рис. 11.

*Буду продолжать свои выдумки — этого требует дело (лат.).

**Блистательные чудеса (лат.).

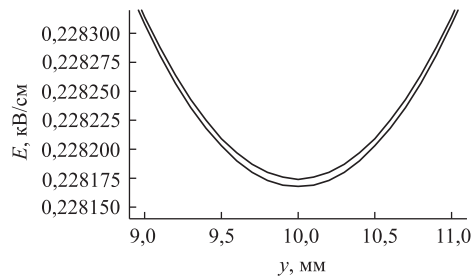


Рис. 11. Распределения поля внутри диэлектрика в случаях использования уравнений (5.1) и (6.1) для нахождения внешних вспомогательных зарядов диэлектрика

На нем показаны фрагменты распределений напряженностей поля в объеме диэлектрика. Величины полей в центре для случая использования уравнений (5.1) и (6.1) соответственно равны 0,228174 и 0,228168 кВ/см. Отношения нормальных компонентов поля на поверхности диэлектрика 3,99974 и 3,99984 при заданном значении $\varepsilon = 4$ позволяют оценить точность решения для нахождения полей и потенциалов внутри диэлектрика. Она равна 0,00625 и 0,004 % соответственно. О точности выполнения условий непрерывности потенциалов на поверхности диэлектрика можно судить по их величинам, вычисленным с внутренними и внешними вспомогательными зарядами диэлектрика с использованием уравнений (5.1) и (6.1).

Если с помощью уравнений (5.1) внешние заряды находятся из равенства потенциалов, то нет ничего удивительного в результате: 114,70426 и 114,70425 В.

Из (6.1) внешние заряды находятся из равенства нормальных компонентов поля, поэтому для определения потенциалов используется не прямой, а косвенный способ. Отсюда и различие при вычислении с внутренними и внешними вспомогательными зарядами: 114,70426 и 114,70099 В.

Разница при использовании уравнений (3.1)–(3.3) вместе с уравнениями (5.1) или (6.1) мала, поэтому при решении необходимо применять в конкретном случае вариант, наиболее подходящий для составления уравнений и последующих вычислений.

Нами рассмотрен наиболее точный вариант решения для диэлектрика очень простого по форме. Одной из причин выбора диэлектрика такой формы является именно его простота. Это дало возможность быстрой безошибочной перестройки программного обеспечения. Вместе с тем, для проверки метода и выбора параметров, обеспечивающих необходимую точность решения, появляется возможность сравнения результатов решений с результатами чисто аналитического безмодельного решения. Таким объектом для сравнения

методов вычисления является бесконечно длинный круглый стержень диэлектрика в однородном электрическом поле [9]. Для этого случая в указанной работе приведена простая формула:

$$E_d = E_s(2\varepsilon_s/(\varepsilon + \varepsilon_s)),$$

в которой E_d — напряженность поля в объеме диэлектрического стержня, E_s — напряженность однородного поля вне стержня, ε_s и ε — диэлектрические проницаемости внешней среды и стержня. Для нашего случая диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_s = 1$ и $\varepsilon = 4$ формула принимает следующий вид:

$$E_d = \frac{2}{5}E_s. \quad (7.1)$$

Мы рассмотрели два варианта расстояний между обкладками конденсатора (2 и 6 см) при одинаковой разности потенциалов между ними, равной 1000 В. Следовательно, для этих двух вариантов при отсутствии диэлектрического стержня величины 0,5 и 0,166667 кВ/см в определенной мере представляют значения однородных полей. Для неограниченного по длине диэлектрического стержня, неограниченных по размеру пластин конденсатора и зазору между пластинами мы имеем в соответствии с выражением (7.1) следующие величины полей в диэлектрике: $E_{d1} = 2 \times 0,5/5 = 0,2$; $E_{d2} = 2 \times 0,166667/5 = 0,066667$ кВ/см.

Вычисления для центра диэлектрика дали такие результаты: $E_{d1} = 0,2292$ и $E_{d2} = 0,06751$ кВ/см. Отличие от идеального случая составляет 15 и 1,26 %. При увеличении расстояния между обкладками конденсатора с 2 до 6 см уменьшилось влияние диэлектрика на распределение зарядов конденсатора. Поле в окрестности диэлектрика стало более однородным. Факт отличия от идеального случая только в 1,26 % является свидетельством правильности рассматриваемого метода решения.

Какой критерий использовать для выбора числа вспомогательных зарядов n в общем случае? Таким критерием выбора может служить отношение ds/R_0 , R_0 , в нашем случае, радиус стержня и $ds = 2\pi R_0/n$. Примем за наименьшее число $n = 20$, которое, как показано, уже обеспечивает высокую точность решения. Тогда для рассмотренной геометрии $ds = 1,57$ мм. Таким образом, критерием является соотношение $ds/R_0 \leq 0,314$. Для общего случая в качестве R_0 в данной точке будет служить наименьший радиус кривизны поверхности.

8. SUMMA SUMMARUM*

Потребности практики привели к разработке методов решения краевых задач с проводниками для целей электронной оптики. В решении задач электронной оптики используются метод конечных разностей, метод конечных элементов и метод интегральных уравнений [11]. Метод конечных элементов является основой систем программ Maxwell-3D [12]. Эта лицензионная программа совместно с программой Garfield [13] широко используется для определения электрических характеристик и моделирования многих процессов в координатных детекторах, применяемых для исследований по физике высоких энергий и элементарных частиц на крупнейших ускорителях Европы и Америки.

Метод, описанный в данной статье, — результат развития методов алгебраических линейных уравнений с использованием вспомогательных зарядов [3–7]. Его преимуществом по сравнению с предложенным ранее методом является большая точность при быстром решении системы уравнений.

9. AB IMO PECTORE**

Авторы благодарны Шафрановой М.Г. за помощь в научном редактировании текста статьи, Топурия Т.П. за предоставленные материалы и за помощь в написании программ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Morse P., Feshbach H.* Methods of theoretical physics. N. Y.: McGraw Hill, 1953.
2. *Sauli F.* Principles of operation of multiwire proportional and drift chambers. CERN Report 77-09. 1977.
3. *Шафранов М.Д.* Сообщение ОИЯИ Р11-98-103. Дубна, 1998.
4. *Шафранов М.Д.* Сообщение ОИЯИ Р11-99-148. Дубна, 1999.
5. *Топурия Т.П., Шафранов М.Д.* // Краткие сообщения ОИЯИ. 1999. №5, 6[97]. С.42.
6. *Шафранов М.Д., Топурия Т.П.* Сообщение ОИЯИ Р13-99-318. Дубна, 1999.
7. *Шафранов М.Д., Топурия Т.П.* // Письма в ЭЧАЯ. 2002. №6[115]. С.51.
8. *Howard A. S. et al.* Measurements with a two-phase xenon a dark matter detector // York 2000. The Identification of Dark Matter / Eds. N.J. Spooner, V. Kudryavtsev. Singapore, 2001. P. 457–462.

*В конечном итоге (лат.).

**С полной искренностью, от души (лат.).

9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 2003. Т. 8.
10. Топурия Т. П., Шафранов М. Д. Сообщение ОИЯИ Р13-04-40. Дубна, 2004.
11. Hawkes P. W., Kasper E. Principles of Electron Optics. V. 1: Basic Geometrical Optics. London: Academic Press, 1989.
12. MAXWELL/HFSS. Ansoft Corporation. Pittsburg. PA.
13. Veenhof R. // Nucl. Instr. Meth. A. 1998. V. 419. P. 726;
<http://consult.cern.ch/writeup/garfield/examples/.../reprt.htm>

Получено 1 апреля 2004 г.

Редактор *О. Г. Андреева*

Подписано в печать 23.06.2004.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,0. Уч.-изд. л. 1,55. Тираж 310 экз. Заказ № 54493.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/