



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

5-2004-59

На правах рукописи

УДК 519.6

517.9

550.831

577

**ЛАНЕЕВ**

Евгений Борисович

**УСТОЙЧИВОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ  
ПРОДОЛЖЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ  
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕРМОГРАФИИ И ГЕОФИЗИКЕ**

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Дубна 2004

Работа выполнена в Российском университете дружбы народов

Научный консультант:

доктор физ.-мат. наук, проф. **Жидков Евгений Петрович**

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, проф. **Вабищевич Петр Николаевич**

доктор физ.-мат. наук, проф. **Мелихов Вячеслав Романович**

доктор физ.-мат. наук, проф. **Шелаев Игорь Александрович**

Ведущая организация: **Московский государственный институт электроники и математики**

Защита диссертации состоится «    »    2004 г. в    ч. на заседании диссертационного совета Д720.001.04 в Объединенном институте ядерных исследований (Лаборатория информационных технологий), г. Дубна Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан «    »    2004 г.

Ученый секретарь совета  
кандидат физико-математических наук



Иванченко З.М.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы.**

Совершенствование вычислительной техники и ее использование для решения прикладных задач сформировало по-существу новый инструмент научного исследования – вычислительного эксперимента, – что в свою очередь привело к формированию нового направления в научных исследованиях – математического моделирования. С 80-х годов XX века революция в вычислительной технике позволила перейти на качественно новый уровень сложности решаемых задач и, что не менее важно – уровень представления результатов. Вместе с тем возрастает значение квалифицированного проведения вычислительного эксперимента с обоснованным выбором модели и алгоритмов и их коррекции. Потенциал современной вычислительной техники позволяют говорить о возможности все более глубокой обработки результатов измерений в рамках все более усложняющихся физических и математических моделей. Это относится и к исследованиям структуры и состояния объектов по косвенной (измеряемой) информации. Проблема обработки данных с такой целью математически как правило формулируется в виде обратных задач математической физики, которые ставятся в рамках той или иной физической модели. Характерный пример задач такого рода – обратные задачи геофизики – задачи определения структуры земной коры по измеряемым физическим полям, связанным с этой структурой. Такие задачи возникают в тех случаях, когда внутренняя структура объекта по тем или иным причинам недоступна прямому исследованию, в то время как косвенная информация о структуре объекта может быть получена в виде порождаемого этой структурой пространственного распределения физических полей, собственных или полученных как отклик на внешнее воздействие, которые могут быть измерены. Среди таких задач разнообразные геофизические задачи, обратные задачи газовой динамики, теплообмена, задачи электрокардиографии, электроэнцефалографии, томографии и другие. С 80-х годов внимание исследователей привлекли собственные физические поля биологических объектов.

В диссертационной работе в прикладном плане рассматриваются обратные задачи, возникающие в термографии и геофизике (гравиразведке).

При тепловизионных исследованиях нагретых теплопроводящих объектов, излучающих в инфракрасном диапазоне, «снимок» температурного поля с поверхности объекта как правило служит материалом для непосредственной интерпретации с целью идентификации внутренней структуры (или ее аномалий). При этом воспроизведение внутренней структуры термограммой может быть искажено как за счет ее относительной удаленности от поверхности тела, так и за счет неровностей поверхности. Коррекция изображения возможна на основе метода продолжения стационарного температурного поля с поверхности в область, близкую к структурным неоднородностям. Это продолжение осуществляется решением задачи Коши для уравнения Лапласа или аналогичной ей задачи. Термограмма, полученная в результате такого продолжения как след температурного поля на некоторой поверхности вблизи структуры, может рассматриваться как результат математической обработки исходной термограммы. Отметим, что всякий способ визуализации температурного поля, формирующий термограмму, является сам по себе математической обработкой значений температурного поля. Таким образом, разработанный в диссертации метод может рассматриваться как математическая обработка термограмм методом аналитического продолжения стационарного температурного поля.

Другой круг задач связан с проблемой обработки данных гравиразведки. Анализ имеющихся методов, в большинстве своем связанных с концепцией аналитического продолжения позволяет говорить о том, что задача аналитического продолжения потенциального поля с неплоской ограниченной поверхностью в трехмерном случае остается до конца нерешенной и актуальной. Несмотря на то, что теория продолжения потенциального поля с неплоской неограниченной поверхностью разработана достаточно полно, переход от интегралов Фурье к рядам Фурье при численной реализации методов продолжения, а также при задании поля в реальной ситуации на ограниченной поверхности использование формул, соответствующих неограни-

ченной поверхности, недостаточно обосновано и изучено. В диссертации предлагается концепция продолжения потенциального поля с неплоской поверхности в исходным образом ограниченной модели, приводящая к смешанной задаче для уравнения Лапласа. Состоятельность модели обосновывается оценками по геометрическим параметрам области. Ограниченность области позволяет решать задачу разложением в ряд Фурье. Кроме того, обосновывается дискретизация задачи и переход к дискретным рядам Фурье. Известную замкнутость концепции продолжения потенциального поля в ограниченной области придает опирающееся на полученные оценки уточнение поля по методу Рунге-Ричардсона.

**Целью диссертационной работы** является решение фундаментальной научной проблемы – разработка эффективных методов математической обработки данных в термографии и гравиразведке и других прикладных областях на основе концепции аналитического продолжения гармонических функций с целью восстановления внутренней структуры объектов по косвенным данным. Достижение цели осуществляется решением следующих задач:

1. Выбор математических моделей, постановка и исследование обратных задач термографии о восстановлении внутренней структуры объекта по измеренному температурному полю на поверхности, постановка задач продолжения температурного поля в виде задач Коши для уравнения Лапласа и смешанных задач.

2. Выбор математических моделей для аналитического продолжения векторных потенциальных полей с неплоских ограниченных поверхностей. Обоснование модели получением оценок по параметрам области по отношению к модели во всем пространстве. Сведение краевых векторных задач продолжения потенциальных полей в цилиндрических областях к смешанным краевым задачам для уравнения Лапласа.

3. Построение точного и устойчивого приближенного решения задачи Коши для уравнения Лапласа и смешанных задач с данными Коши на по-

верхности произвольного вида. Имея в виду, что поверхности могут быть заданы в результате измерений или приближенного моделирования, требуется построение устойчивого приближенного решения в случае приближенного задания поверхности.

4. Разработка эффективных алгоритмов задач продолжения гармонических функций как задач Коши для уравнения Лапласа и смешанных задач с данными на поверхностях общего вида методом Фурье.

5. Обоснование дискретизации задач, получение оценок дискретизации и оценок устойчивости приближенного решения по параметрам дискретизации задачи.

6. Проведение вычислительного эксперимента по применению разработанных алгоритмов к модельным задачам термографии и геофизики.

7. Применение разработанных алгоритмов к решению практических задач термографии и геофизики.

### **Научная новизна и значимость**

1. Предложен новый метод точного и устойчивого приближенного решения задач Коши для уравнения Лапласа и структурно близких ей смешанных краевых задач с данными на поверхности общего вида, в том числе заданной приближенно.

2. Предложен новый метод обработки термографических данных на основе аналитического продолжения стационарных гармонических температурных полей, учитывающий форму поверхности измерений.

3. Разработаны новые алгоритмы продолжения векторных потенциальных полей с неплоской ограниченной поверхностью, в том числе заданной приближенно.

4. Впервые дано обоснование сходимости регуляризованного метода устойчивого решения задачи продолжения по параметрам области при ее расширении до всего пространства.

5. Впервые для уточнения результата аналитического продолжения применен метод Рунге-Ричардсона по параметрам области при ее расширении

до всего пространства.

6. Впервые доказаны теоремы сходимости по мере для решения линейной обратной задачи потенциала в трехмерном случае и критерий сходимости по мере применен для численного решения задачи продолжения потенциального поля.

### **Практическая ценность.**

Разработанные алгоритмы продолжения температурного поля применяются для обработки термограмм – термографических (тепловизионных) изображений или термографических данных, полученных другими измерительными средствами, с целью повышения разрешающей способности термографических изображений и повышения их интерпретационных возможностей.

Разработанные алгоритмы продолжения потенциальных полей применяются для обработки гравиметрических данных и последующей интерпретации продолженного поля с целью выявления гравитационных аномалий, а также – оконтуривания месторождений полезных ископаемых.

### **Личный вклад автора.**

Все результаты диссертации, выносимые на защиту, получены лично автором. В работах, выполненных в соавторстве, автору принадлежит определяющий вклад в анализ математических моделей, разработку и обоснование методов и постановку вычислительного эксперимента.

### **Апробация работы.**

Полученные в диссертации результаты докладывались на Всесоюзной школе семинаре по некорректным задачам (г.Саратов, 1985), Всесоюзных конференциях «Вычислительная физика и математическое моделирование» ( г.Волгоград, 1988 и 1989 гг.), Международном совещании по программированию и математическим методам решения физических задач (Дубна, 1993), Международной конференции «Компьютерное моделиро-

вание и компьютерные методы в физике» (Дубна, 1996), Международных конференциях «Актуальные проблемы вычислительной физики» (Дубна, 1998, 2000 гг.), VIII Белорусской международной математической конференции (Минск, 2000), V Международном конгрессе по математическому моделированию (Дубна, 2002), Международной конференции «Вычислительные методы в прикладной математике» (Минск, 2003), семинаре В.Б.Гласко на физическом факультете МГУ, семинаре по уравнениям в частных производных В.Н.Масленниковой в РУДН, семинарах Е.П.Жидкова в ЛИТ(ЛВТА) ОИЯИ.

### **Публикации.**

Полученные в диссертации результаты опубликованы в 33 работах [1] – [33].

### **Структура и объем диссертации.**

Диссертация состоит из введения, шести глав и заключения, содержит 24 рисунка, список цитированной литературы из 222 наименований. Объем диссертации 220 страниц.

### **Основное содержание диссертации**

Во введении дается общая характеристика работы, обосновывается актуальность, формулируется цель работы, определены научная новизна и значимость, кратко излагается содержание работы.

Первая глава посвящена постановке и анализу задач, имеющих различное содержание в прикладном аспекте, математическое содержание которых – продолжение гармонических функций с криволинейных поверхностей до носителя функции плотности источников (или особенностей) этих функций с целью получения возможно большей информации о структуре функции плотности распределения источников.

В параграфах 1.1.1, 1.1.2 ставится проблема обработки термографических изображений как задача восстановления внутренней структуры объ-



екта как функции распределения источников тепла или неоднородностей коэффициента теплопроводности. Рассматриваются стационарные математические модели в вариантах замкнутой поверхности с условием третьего рода и цилиндрических областей с прямоугольным сечением как краевых задач для гармонических функций со смешанными граничными условиями. Так, например, модель стационарного температурного поля с заданной температурой на боковых гранях цилиндра имеет вид смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= -4\pi\rho(M), \quad M \in D(F, \infty), \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_S &= h(U_0 - u) \Big|_S, \\ u|_{x=0, l_x} &= U_0, \quad u|_{y=0, l_y} = U_0, \\ u &\rightarrow U_0 \text{ при } z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$D(F, \infty) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, F(x, y) < z < \infty\}, \quad (2)$$

$$S = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = F(x, y)\}, F \in C^2(\Pi(0)), \quad (3)$$

$$\Pi(z) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = \text{const}\} \quad (4)$$

и на поверхности  $S$  – конвективный теплообмен со средой температуры  $U_0$ . В рамках выбранных моделей ставятся обратные задачи восстановления функции плотности распределения источников по измеренному температурному полю на поверхности.

**ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА.** Пусть в рамках модели (1) функция

$$f = u|_S,$$

где  $S$  – поверхность вида (3), известна, требуется найти неизвестную функцию  $\rho$  в области (2).

В параграфе 1.1.3 прослеживается связь обратных задач термографии с обратной задачей потенциала и обсуждаются вопросы корректности их

постановок. Дан обзор классов единственности и устойчивости ОЗП как классов единственности и устойчивости обратных задач термографии.

В связи с относительной узостью известных классов единственности в параграфе 1.1.4 рассматривается концепция продолжения гармонических функций в рамках моделей, рассмотренных в предыдущих параграфах, как задача частичного решения обратной задачи термографии. Дан обзор известных методов аналитического продолжения. Задачи аналитического продолжения стационарного температурного поля сформулированы как задачи Коши и смешанные краевые задачи для уравнения Лапласа с данными на поверхности достаточно общего вида. В частности, задача продолжения температурного поля в рамках модели (1) ставится как смешанная задача для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= 0, \quad M \in D(F, H), \\ u|_S &= f, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S &= -hf \Big|_S, \\ u|_{x=0, l_x} &= 0 \quad u|_{y=0, l_y} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где область

$$D(F, H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, F(x, y) < z < H\}. \quad (6)$$

Предполагается, что носитель функции  $\rho$  расположен в области  $z > H$ .

К аналогичным приводят задачи продолжения векторных потенциальных полей, широко используемых в геофизике, в цилиндрических областях прямоугольного сечения, позволяющих эффективно строить решения методом Фурье. В параграфе 1.2.1 рассматриваются соответствующие задачи. В частности, в рамках нечетно-периодической модели

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}^-(M) &= 0, \quad M \in D^\infty, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}^-(M) &= -4\pi\rho(M), \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}^-]|_{x=0, l_x} &= 0, [\mathbf{n}, \mathbf{E}^-]|_{y=0, l_y} = 0, \\ \mathbf{E}^- &\rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$D^\infty = \{(x, y, z) \in R^3 : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, -\infty < z < \infty\}, \quad (8)$$

векторная задача продолжения потенциального поля  $\mathbf{E}^-$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}^-(M) &= 0, & M \in D(H, F) &= \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}^-(M) &= 0, & 0 < y < l_y, F(x, y) < z < H, \}, & F \in C^2(\Pi(0)), \\ \mathbf{E}^-|_S &= \mathbf{E}^{-0}, & S &= \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = F(x, y)\}, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}^-]|_{x=0, l_x} &= 0, & [\mathbf{n}, \mathbf{E}^-]|_{y=0, l_y} &= 0, \\ \Pi(z) &= \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = \operatorname{const}\} \end{aligned} \quad (9)$$

сводится к смешанной задаче для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta E_z^-(M) &= 0, & M \in D(H, F), \\ E_z^-|_S &= E_z^0, \\ \frac{\partial E_z^-}{\partial n}|_S &= \frac{1}{n_1} \left( \frac{\partial E_x^0}{\partial x} + \frac{\partial E_y^0}{\partial y} \right), & \mathbf{n}_1 = (F_x, F_y, -1), \\ E_z^-|_{x=0, l_x} &= 0, & E_z^-|_{y=0, l_y} &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

В параграфе 1.2.2 приводятся оценки погрешности модели в цилиндрической области (8) по отношению к модели во всем пространстве

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}(M) &= 0, & M \in R^3, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}(M) &= -4\pi\rho(M) \end{aligned} \quad (11)$$

по параметрам области  $l_x, l_y$

$$|\mathbf{E}^-(M) - \mathbf{E}(M)| \leq \operatorname{Const} \left( \frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right), \quad M \in \bar{G}^\infty, \quad (12)$$

где

$$\bar{D}^\infty = \{(\bar{x}, \bar{y}, z) : \frac{-l_x}{2} < \bar{x} < \frac{l_x}{2}, \frac{-l_y}{2} < \bar{y} < \frac{l_y}{2}, -\infty < z < \infty\}.$$

Эти оценки вместе с результатами четвертой главы являются обоснованием использования моделей в цилиндрических областях.

В праграфе 1.2.3 устанавливается связь обратной задачи восстановления плотности источников по заданному полю в рамках периодической модели с обратной задачей потенциала.

В параграфе 1.2.4 рассматривается вариант линейной обратной задачи потенциала, позволяющий связать аналитическое продолжение гармонической функции с задачей восстановления формы носителя функции плотности распределения источников, соответствующей бесконечно тонкому телу.

Во второй главе построены устойчивые решения задачи Коши для уравнения Лапласа (ЗКУЛ) в некоторых постановках с произвольными данными на части границы достаточно общего вида. Эти постановки характерны тем, что допускают построение точного решения с использованием метода Фурье с разложением в ряд по хорошо известным ортогональным системам, хотя в исходной области переменные вообще говоря не делятся.

В параграфе 2.1 приведены соответствующие постановки ЗКУЛ и близкие им смешанные задачи, в частности, смешанная задача для уравнения Лапласа с краевыми условиями первого рода и данными Коши общего вида

$$\begin{aligned} \Delta u(M) &= 0, \quad M \in D(F, H), \\ u|_S &= f, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S &= g, \\ u|_{x=0, l_x} &= 0, \quad u|_{y=0, l_y} = 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$D(F, H) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, F(x, y) < z < H\}, \quad (14)$$

$$S = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = F(x, y)\}, F \in C^2(\Pi(0)), \quad (15)$$

$$\Pi(z) = \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = \text{const}\}. \quad (16)$$

Обсуждается вопрос корректности поставленных задач, приведены примеры неустойчивости для рассматриваемых задач, аналогичные примеру Адамара. Для задачи (13) в качестве такого примера приведена функция

$$U_n(x, y, z) = \frac{1}{n^2} \exp \left( n \sqrt{\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}} \left( z - \max_{(x,y)} F(x, y) \right) \right) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi n y}{l_y}. \quad (17)$$

Обзор известных методов решения, в том числе численного, приведен в параграфе 2.2.

В параграфе 2.3 построены точные решения ЗКУЛ, в том числе (13) на основе оригинального метода автора, сводящего задачу к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Для задачи (13) это уравнение имеет вид

$$\int_{\Pi(H)} \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P) v_H(P) dx_P dy_P = -\Phi(M),$$

$$M \in \Pi(a), \quad a < \min_{(x,y)} F(x, y), \quad (18)$$

где  $G$  – функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области  $D(-\infty, H)$ , для нормальной производной которой имеет место разложение

$$\frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P)|_{P \in \Pi(H)} = -\frac{4}{l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(-H+z_M)} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y}, \quad (19)$$

позволяющее решать уравнение (18) методом Фурье. Правая часть уравнения – функция  $\Phi$  – вычисляется как интеграл по поверхности  $S$  по известным функциям  $f$  и  $g$

$$\Phi(M) = \int_S [f(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) - g(P) \varphi(M, P)] d\sigma_P, \quad (20)$$

где

$$\varphi(M, P) = \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} |z_M - z_P|}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \times$$

$$\times \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \quad (21)$$

– функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области  $D^\infty$  вида (8). Точное решение задачи (13) может быть представлено в виде

$$u(M) = v(M) - \Phi(M), \quad M \in D(F, H), \quad (22)$$

где функция  $\Phi$  вычисляется по известным функциям  $f$  и  $g$  по формуле (20), а функция  $v$  по найденному решению  $v|_H$  интегрального уравнения

$$v(M) = - \int_{\Pi(H)} \frac{\partial G}{\partial n_P}(M, P)v_H(P)dx_Pdy_P =$$

$$= \sum_{n,m=1}^{\infty} \tilde{\Phi}_{nm}(a)e^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(z_M - a)} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad M \in D(-\infty, H),$$

$$\tilde{\Phi}_{z,nm}(a) = \frac{4}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \Phi_z(x, y, a) \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy. \quad (23)$$

Этот же метод позволяет применить схему регуляризации А.Н.Тихонова для построения устойчивого решения. Это построение приведено и обосновано соответствующими теоремами сходимости в параграфе 2.4. А именно, приближенное решение интегрального уравнения (18) в случае, когда функции  $f$  и  $g$  в задаче (13) заданы с погрешностью, то есть вместо  $f$  и  $g$  заданы функции  $f^\delta$  и  $g^\delta$ , такие что

$$\|f^\delta - f\|_{L_2(S)} \leq \delta, \quad \|g^\delta - g\|_{L_2(S)} \leq Const \cdot \delta, \quad (24)$$

строится как экстремаль функционала Тихонова

$$M^\alpha[w] = \left\| \int_S \frac{\partial G}{\partial n} w d\sigma + \Phi^\delta \right\|_{L_2(\Pi(a))}^2 + \alpha \|w\|_{L_2(\Pi(H))}^2, \quad (25)$$

где

$$\Phi^\delta(M) = \int_S [f^\delta(P) \frac{\partial \varphi}{\partial n_P}(M, P) - g^\delta(P) \varphi(M, P)] d\sigma_P. \quad (26)$$

Приближенное решение задачи (13) в соответствии с (22) строится как

$$u_\alpha^\delta(M) = v_\alpha^\delta(M) - \Phi^\delta(M), \quad M \in D(F, H), \quad (27)$$

$$v_\alpha^\delta(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{nm}^\delta(a) e^{\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(z_M - a)}}{1 + \alpha e^{2\pi\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}(H - a)}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (28)$$

В параграфе 2.5 рассмотрены ЗКУЛ, в которых граница и данные Коши на ней заданы приближенно. Будем считать, что поверхность  $S$  в задаче (13) задается с некоторой погрешностью, а именно: вместо точной функции  $F$  в (15) задана функция  $F^\mu$  такая, что

$$\|F^\mu - F\|_{L_2(\Pi(0))} \leq \mu. \quad (29)$$

В связи с этим рассматривается задача о вычислении нормали к поверхности, заданной приближенно. Вычисление нормали необходимо для формирования правой части основного интегрального уравнения, представленной поверхностными интегралами (20)

$$\Phi(M) = \int_{\Pi(0)} \left[ f(P) (\nabla_P \varphi(M, P), \mathbf{n}_1(P)) - g(P) \varphi(M, P) n_1(P) \right]_{P \in S} dx_P dy_P, \quad (30)$$

где

$$\mathbf{n}_1 = (F'_x, F'_y, -1) = \mathbf{i}F'_x + \mathbf{j}F'_y - \mathbf{k}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{n}_1}{n_1}. \quad (31)$$

Вектор-функция  $\mathbf{n}_1$  представляет собой градиент функции  $F - z$ ,

$$\mathbf{n}_1 = \text{grad}(F(x, y) - z) = \nabla_{xy} F - \mathbf{k}.$$

Так как функция  $F$  известна с некоторой погрешностью, задача вычисления ее градиента - некорректно поставленная задача - рассматривается как задача вычисления значений неограниченного оператора в постановке В.А.Морозова. В качестве приближения к функции  $\nabla F$  рассматривается градиент экстремали  $W_\beta^\mu$  функционала

$$N^\beta[W] = \left\| W - F^\mu \right\|_{L_2(\Pi(0))}^2 + \beta \left\| \nabla W \right\|_{L_2(\Pi(0))}^2, \quad (32)$$

а для вычисления нормали к поверхности используется приближение:

$$\mathbf{n}_{1,\beta}^\mu = \nabla_{xy} W_\beta^\mu - \mathbf{k}. \quad (33)$$

Доказано, что

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{n}_{1,\beta}^\mu - \mathbf{n}_1 \right\|_{L_2(\Pi(0))} = \left\| \nabla_{xy} W_\beta^\mu - \nabla_{xy} F \right\|_{L_2(\Pi(0))} \leq \\ & \leq \frac{\mu}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \left\| \Delta F \right\|_{L_2(\Pi(0))} \leq \frac{\mu}{2\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} \text{Const} \leq \sqrt{\text{Const} \cdot \mu} \leq C_1 \sqrt{\mu}, \end{aligned}$$

если

$$\beta(\mu) = \text{Const}^{-1} \mu.$$

При приближенном задании поверхности  $S$ , определяемом условием (29), а также функций  $f$  и  $g$ , функция (30) может быть вычислена как

$$\begin{aligned} \Phi^{\delta,\mu}(M) = \int_{\Pi(0)} & \left[ f^\delta(P) (\nabla_P \varphi(M, P), \mathbf{n}_1^\mu(P)) - \right. \\ & \left. - g^\delta(P) \varphi(M, P) n_1^\mu(P) \right]_{P \in S} dx_P dy_P, \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\mathbf{n}_1^\mu = \mathbf{n}_{1,\beta(\mu)}^\mu = \nabla_{xy} W_{\beta(\mu)}^\mu - \mathbf{k}, \quad (35)$$

причем

$$\max_{M \in \Pi(\alpha)} \left| \Phi^{\delta,\mu}(M) - \Phi(M) \right| \leq C_1 \sqrt{\mu} + C_2 \delta = \Delta(\mu, \delta) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{\mu \rightarrow 0} 0. \quad (36)$$

Доказана сходимость приближенного решения к точному по параметрам  $\mu$  и  $\delta$ .

Завершается глава параграфом 2.6, в котором из приближенного устойчивого решения выделяется конструкция, являющаяся по смыслу функцией Карлемана-Лаврентьева. Приближенное решение (27) задачи (13) может быть записано в виде

$$u_\alpha^\delta(M) = \int_S [f^\delta(P) \frac{\partial C_\alpha}{\partial n_P}(M, P) - g^\delta(P) C_\alpha(M, P)] d\sigma_P, \quad (37)$$



где

$$\begin{aligned}
 C_\alpha(M, P) = \varphi(M, P) + V_\alpha(M, P) = & \frac{1}{4\pi r_{MP}} + W_\alpha(M, P) = \\
 & \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} |z_M - z_P|}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y} \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} - \\
 & - \frac{2}{\pi l_x l_y} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \alpha e^{2\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (H-a)}} \frac{e^{\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (z_M - z_P)}}{\sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \times \\
 & \times \sin \frac{\pi n x_P}{l_x} \sin \frac{\pi m y_P}{l_y} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Доказывается, что эта конструкция  $C_\alpha(M, P)$  удовлетворяет определению функции Карлемана-Лаврентьева.

В третьей главе устойчивые методы решения ЗКУЛ, разработанные во второй главе, применены к решению задачи продолжения гармонического температурного поля как основы для обработки термографических изображений.

В параграфе 3.1 рассматриваются варианты обработки термограммы (температурного поля на поверхности объекта) гармоническим продолжением в цилиндрическую область и использованием разложения решения в двойной тригонометрический ряд. Для задачи (5) решение получаем в виде (27), где

$$\begin{aligned}
 \Phi^{\delta, \mu}(M) = \int_{\Pi(0)} & \left[ h f^\delta(P) \varphi(M, P) n_1^\mu(P) + \right. \\
 & \left. + f^\delta(P) (\nabla_P \varphi(M, P), n_1^\mu(P)) \right]_{P \in S} dx_P dy_P. \quad (39)
 \end{aligned}$$

В параграфе 3.2 рассматривается вариант продолжения стационарного температурного поля с замкнутой поверхности в ряд по многочленам Лежандра в сферической системе координат. Для определения центра си-

стемы координат получена формула

$$\mathbf{r}_0 = \int_{\partial D} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{r} - u \mathbf{n} \right] d\sigma \Big/ \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \int_{\partial D} [(f - U) \mathbf{r} + f \mathbf{n}] d\sigma \Big/ \int_{\partial D} (f - U) d\sigma,$$

использующая только заданное температурное поле на поверхности и устойчивая к погрешностям в задании этого температурного поля.

В четвертой главе методы решения ЗКУЛ как смешанной задачи использованы для решения задачи продолжения потенциального поля

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}(M) &= 0, & M \in D(F, H) &= \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, \\ \operatorname{div} \mathbf{E}(M) &= 0, & 0 < y < l_y, F(x, y) < z < H, \}, \\ \mathbf{E}|_S &= \mathbf{E}^0, & S &= \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = F(x, y)\}, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{x=0, l_x} &= 0, & [\mathbf{n}, \mathbf{E}]|_{y=0, l_y} &= 0, & F \in C^2(\Pi(0)), \\ \Pi(z) &= \{(x, y, z) : 0 < x < l_x, 0 < y < l_y, z = \operatorname{const}\}. \end{aligned} \quad (40)$$

В параграфе 4.1 решается базовая задача о продолжении «вертикальной» составляющей гармонического потенциального поля по полному полю, заданному на неплоской поверхности как смешанная задача для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} \Delta E_z(M) &= 0, & M \in D(F, H), \\ E_z|_S &= E_z^0, \\ \frac{\partial E_z}{\partial n}|_S &= \frac{1}{n_1} \left( \frac{\partial E_x^0}{\partial x} + \frac{\partial E_y^0}{\partial y} \right), & \mathbf{n}_1 = (F_x, F_y, -1), \\ E_z|_{x=0, l_x} &= 0, & E_z|_{y=0, l_y} &= 0, \end{aligned} \quad (41)$$

полученная из векторной в параграфе 1.2.1. Приближенное решение этой задачи получено в виде

$$E_{z, \alpha}^\delta(M) = v_{z, \alpha}^\delta(M) - \Phi_z^\delta(M), \quad M \in D(F, H), \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_z^\delta(M) &= \int_{\Pi(0)} [E_x^{0, \delta}(x_P, y_P) \frac{\partial \varphi}{\partial x_P}(M, P) + E_y^{0, \delta}(x_P, y_P) \frac{\partial \varphi}{\partial y_P}(M, P) + \\ &+ E_z^{0, \delta}(x_P, y_P) (\mathbf{n}_1, \nabla_P \varphi(M, P))] |_{P \in S} dx_P dy_P, \end{aligned} \quad (43)$$

$$v_{z,\alpha}^\delta(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}_{z,nm}^\delta(a) e^{\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (z_M - a)}}{1 + \alpha e^{2\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (H - a)}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad (44)$$

$\tilde{\Phi}_{z,nm}^\delta(a)$  – коэффициенты Фурье функции  $\Phi_z^\delta|_{\Pi(a)}$ . Доказана теорема сходимости приближенного решения к точному при уменьшении погрешности в данных согласованно с параметром регуляризации.

**Теорема.** Пусть решение задачи (41) существует в области  $D(F, H)$ . Тогда для любого  $\alpha = \alpha(\delta) > 0$  такого, что  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  и  $\delta/\sqrt{\alpha(\delta)} \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$  функция  $E_{z,\alpha}^\delta$  вида (42) равномерно сходится к точному решению в  $D(F + \varepsilon, H - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

В параграфе 4.2 та же задача решается в случае, когда в качестве погрешности в данных взята погрешность модели, полученная параграфе 1.2.2 первой главы. Особенность доказательства сходимости приближенного решения к точному в этом случае состоит в том, что константы в оценках, полученных в первом параграфе, зависят от параметров области и при расширении области до  $R^3$  эта зависимость должна быть раскрыта и учтена при предельном переходе.

**Теорема.** Пусть  $\alpha = \alpha(\Delta) > 0$ ,  $\alpha(\Delta) \rightarrow 0$  и  $\Delta/\sqrt{\alpha(\Delta)} \rightarrow 0$  при  $\Delta \rightarrow 0$  и пусть

$$C_7 l_y \leq l_x \leq C_8 l_y. \quad (45)$$

Тогда функция  $E_{z,\alpha(\Delta)}^\delta$  вида (42), где

$$\Delta = \text{Const} \left( \frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right) \ln(l_x^2 + l_y^2),$$

сходится равномерно к  $z$ -компоненте поля (11) в  $\bar{D}(F + \varepsilon, H - \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$  при  $l_x \rightarrow \infty$ , где область

$$\bar{D}(H, F) = \left\{ (\bar{x}, \bar{y}, z) : \frac{-l_x}{2} < \bar{x} < \frac{l_x}{2}, \right. \\ \left. \frac{-l_y}{2} < \bar{y} < \frac{l_y}{2}, H > z > F(\bar{x} + \frac{l_x}{2}, \bar{y} + \frac{l_y}{2}) \right\}.$$

В параграфе 4.3 приведено решение векторной задачи с использованием преобразования Гильберта «вертикальной» компоненты поля в «горизонтальные»

$$E_{x,\alpha}^\delta(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [(\tilde{v}_{z,\alpha}^\delta)_{nm}(z) + \tilde{\Phi}_{z,nm}^\delta(z)] \frac{\pi n}{l_x \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \cos \frac{\pi n x_M}{l_x} \sin \frac{\pi m y_M}{l_y}, \quad (46)$$

$$E_{y,\alpha}^\delta(M) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [(\tilde{v}_{z,\alpha}^\delta)_{nm}(z) + \tilde{\Phi}_{z,nm}^\delta(z)] \frac{\pi m}{l_y \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \sin \frac{\pi n x_M}{l_x} \cos \frac{\pi m y_M}{l_y}. \quad (47)$$

Доказана сходимость полного векторного приближенного решения к точному решению векторной задачи.

В параграфе 4.4 разработанная схема решения задачи продолжения потенциального поля применяется для случая продолжения в область с известной плотностью источников с целью восстановления поля вблизи носителя неизвестной функции плотности источников.

В параграфе 4.5 получено равномерное приближение поля вплоть до границы  $S$  области за счет представления поля в виде суперпозиции равномерных приближений полей от источников, расположенных по разные стороны от границы  $S$ .

В параграфе 4.6 предлагается критерий качества приближенного продолжения поля – оценка сходимости по мере. Оценивается мера симметрической разности областей, в которых приближенное и точное решение соответственно превышают определенное значение. Такой критерий эффективен в том случае, когда

$$\rho(x, y, z) = \sigma_0 \chi_D(x, y) \delta(z - H)$$

и компонента поля  $E_z$  совпадает с точностью до множителя с характеристической функцией носителя плотности источников

$$E_z = 2\pi\sigma_0\chi_D.$$

**Теорема.** В условиях теоремы сходимости  $E_{z,\alpha}^\delta$  к  $E_z$

$$\mu(D_\lambda^\delta(z)\Delta D) \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0, z \rightarrow H,$$

где

$$D = \text{Supp}\chi_D$$

— носитель плотности  $\sigma_0\chi_D\delta(z - H)$ ,

$$D_\lambda^\delta(z) = \{(x, y) \in \Pi(0) : E_{z,\alpha}^\delta(x, y, z) > \lambda, z = \text{const}, \}.$$

В параграфе 4.7 на основе оценок погрешности по параметрам области, полученным во втором параграфе первой главы, реализован вариант уточнения приближения поля в периодической модели по методу Рунге-Ричардсона. Уточнение поля в периодической модели имеет вид

$$\frac{r^2}{r^2 - 1} \mathbf{E}_r^-(M) - \frac{1}{r^2 - 1} \mathbf{E}^-(M) = \mathbf{E}(M) + o\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right), \quad M \in \bar{D}^\infty,$$

где слева уточненное значение поля  $\mathbf{E}$  в пересечении областей  $\bar{D}^\infty$  и  $\bar{D}_r^\infty$  с порядком  $o\left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2}\right)$ . Центры областей  $\bar{D}^\infty$  и  $\bar{D}_r^\infty$  и функции плотности источников совмещены. Размеры сечения области  $\bar{D}_r^\infty - l_x r \times l_y r$ .

В пятой главе приведены основные вычислительные алгоритмы решения задачи аналитического продолжения гармонических функций и дано их обоснование.

В параграфе 5.1 приводится вычислительная схема решения задачи продолжения потенциального поля. Показано, что коэффициенты Фурье  $z$ -компоненты поля потенциала источников на вспомогательной поверхности, с которой осуществляется продолжение в сторону источников, могут вычисляться по экономичным схемам, существенно сокращающим количество элементарных вычислительных операций

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{z,nm}(a) = & \frac{n}{l_x \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \frac{2}{l_x l_y} \int_{\Pi(0)} (E_x^0(x, y) + E_z^0(x, y) F_x(x, y)) \times \\ & \times e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (F(x, y) - a)} \cos \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m}{l_y \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}}} \frac{2}{l_x l_y} \int_{\Pi(0)} (E_y^0(x, y) + E_z^0(x, y) F_y(x, y)) \times \\
& \quad \times e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (F(x, y) - a)} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \cos \frac{\pi m y}{l_y} dx dy - \\
& - \frac{2}{l_x l_y} \int_{\Pi(0)} (E_x^0(x, y) F_x(x, y) + E_y^0(x, y) F_y(x, y) - E_z^0(x, y)) \times \\
& \quad \times e^{-\pi \sqrt{\frac{n^2}{l_x^2} + \frac{m^2}{l_y^2}} (F(x, y) - a)} \sin \frac{\pi n x}{l_x} \sin \frac{\pi m y}{l_y} dx dy. \quad (48)
\end{aligned}$$

Получены оценки приближения при дискретизации задачи, а также оценки устойчивости регуляризованного решения по отношению к погрешности дискретизации.

$$\begin{aligned}
|\Phi_z^{\delta, NT}(M) - \Phi_z(M)|_{M \in \Pi(a)} & \leq |\Phi_z^{\delta, NT}(M) - \Phi_z^{NT}(M)|_{M \in \Pi(a)} + \\
& + |\Phi_z^{NT}(M) - \Phi_z^N(M)|_{M \in \Pi(a)} + |\Phi_z^N(M) - \Phi_z(M)|_{M \in \Pi(a)} \leq \\
& \leq C_3 \delta + C_1 N_x^{-2} + C_2 N_y^{-2} + C_4 e^{-\pi d \min[N_x/l_x, N_y/l_y]} \min[N_x/l_x, N_y/l_y] = \\
& = \Delta(\delta, N_x, N_y). \quad (49)
\end{aligned}$$

Аналогичные экономичные алгоритмы, а также оценки дискретизации и устойчивости получены в параграфе 5.2 для задачи продолжения температурного поля в цилиндре. Приведены алгоритмы решения задачи при продолжении температурного поля с замкнутой поверхности.

В шестой главе приведены результаты вычислительного эксперимента на модельных примерах, а также примеры обработки реальных данных, в термографии - в параграфе 6.1 и в геофизике - в параграфе 6.2.

В заключении перечислены основные оригинальные результаты содержащиеся в диссертации.

## Основные результаты диссертации

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Построены точное и устойчивое приближенное решения задачи Коши для уравнения Лапласа и примыкающих к ней смешанных задач с данными Коши на поверхности произвольного вида. Устойчивое приближенное решение построено в случае, когда данные Коши и поверхность заданы приближенно. Доказана сходимости приближенного решения задач к точному. Из устойчивого решения выделена функция Карлемана-Лаврентьева – аналог функции Грина для рассматриваемого круга задач.

2. На базе устойчивого решения задачи Коши для уравнения Лапласа построено решение обратной задачи термографии как задачи продолжения температурного поля с целью локализации источников и восстановления их пространственной структуры. Для оценки области гармоничности получены устойчивые формулы для определения «центра масс» источников тепла. Метод аналитического продолжения применен для математической обработки термограмм – тепловизионных изображений с целью уточнения формы температурных неоднородностей, связанных с внутренней структурой исследуемого объекта.

3. Получены устойчивые решения задач продолжения векторных потенциальных полей в цилиндрических областях сведением к смешанным краевым задачам для уравнения Лапласа для базовой компоненты, при этом остальные компоненты получены преобразованием Гильберта. Обоснован выбор ограниченных математических моделей для аналитического продолжения векторных потенциальных полей с неплоских ограниченных поверхностей получением оценок по параметрам области по отношению к модели поля во всем пространстве. Доказана устойчивость приближенного решения задачи продолжения при применении разработанных методов продолжения по отношению к погрешности ограниченной модели. На основании полученных оценок разработан метод уточнения решения задачи продолжения в ограниченной модели с использованием метода Рунге-Ричардсона на вложенных областях. Предложен и обоснован метод оценки качества приближенного решения задачи продолжения поля сходимостью по мере областей, ограниченных линиями уровня решения. Тем самым обоснована

возможность «оконтуривания» плотностных неоднородностей при продолжении поля.

4. Обоснована дискретизация задач гармонического продолжения, получены оценки дискретизации и оценки устойчивости приближенного решения по параметрам дискретизации задачи.

5. Разработаны эффективные алгоритмы задач продолжения гармонических функций как задач Коши для уравнения Лапласа и смешанных задач с данными на приближенно заданных поверхностях общего вида методом дискретного ряда Фурье.

6. Показана эффективность разработанных методов и алгоритмов методом вычислительного эксперимента, примененного к модельным задачам термографии и геофизики, а также – применением к обработке реальных данных.

#### **Содержание диссертации отражено в следующих работах:**

1. *Ильинский А.С., Ланеев Е.Б.* Об определении положения источника тепла по косвенным данным//Вестник МГУ. Сер.15. Вычислит. матем. и кибернетика. 1988. №2. С. 18-22.
2. *Ланеев Е.Б.* Об одной задаче продолжения потенциала в неодносвязную область.// Современные задачи математической физики и математическое обеспечение ЭВМ. Изд-во УДН. 1986. С.108-116.
3. *Ланеев Е.Б.* О задаче Коши для уравнения Лапласа в неодносвязной области.// Статистическая и квантовая физика и ее приложения. Изд-во УДН. 1986. С.49-56.
4. *Ланеев Е.Б.* Об одной линейной обратной задаче потенциала// Системы массового обслуживания и информатика.М.: Изд-во УДН. 1987. С. 134-140.
5. *Ланеев Е.Б.* О регуляризации некоторых операций векторного анализа // Методы функционального анализа в математической физике.



М.: Изд-во УДН. 1987. С. 101-106.

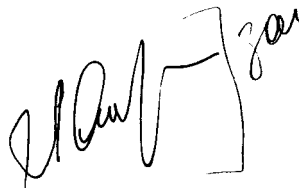
6. Ланеев Е.Б. О функции Карлемана в задаче Коши для уравнения Лапласа в неодносвязной области.// Прямые и обратные задачи математической физики и функциональные пространства. Изд-во УДН. 1988. С. 86-93.
7. Ланеев Е.Б. О задаче Коши для уравнения Гельмгольца в неодносвязной области// Краевые задачи и пространства дифференцируемых функций. М.: Изд-во УДН. 1989. С. 19-30.
8. Ланеев Е.Б. Устойчивое решение задачи Коши для уравнения Лапласа в приложении к задаче аналитического продолжения температурных полей// Всесоюзная конф. «Вычислительная физика и мат. моделирование», Волгоград, 12-18 сент. 1988. Тезисы докладов. М.: Изд-во УДН. 1989. С. 59-60.
9. Ланеев Е.Б., Ловецкий К.П., Севастьянов Л.А. Обработка термограмм методом аналитического продолжения// Всесоюзная конфер. «Вычислительная физика и мат. моделирование», Волгоград, 12-18 сент. 1988. Тезисы докладов. М.: Изд-во УДН. 1989. С. 61.
10. Ланеев Е.Б. Функция Карлемана в некорректно поставленных задачах, связанных с задачами аналитического продолжения температурных полей// II Всесоюзная конф. "Вычислительная физика и матем. моделирование", Волгоград, 11-14 сент. 1989. Тезисы докладов. М.:Изд-во УДН. 1990. С. 52-54.
11. Ланеев Е.Б. Задача Коши для системы уравнений потенциального поля // Тезисы докл. XXVI научной конф. ф-та физ-мат. и естественных наук 14 - 19 мая 1990 г. М.: Изд-во РУДН. 1990. С. 42.
12. Ланеев Е. Б. Задача Коши для уравнения Лапласа и проблема аналитического продолжения температурных полей.// Математическое моделирование систем. М.:Изд-во УДН. 1990. С.33-40.

13. *Laneev E. B., Sorokin V. A.* Stable method for solving the Cauchy problem for elliptic equation and analytic continuation of physical fields // Proceedings of the International Conference on Programming and Math. Methods for solving Physical Problems. World Science. Singapore. 1994. P. 170-172.
14. *Laneev E. B.* On ill-posed mixed problem for Laplace equation // Int. Conf. Comp. Modelling and Computing in Physics. Dubna, Sept. 16-21, 1996. Book of Abstracts. JINR. Dubna. 1996.
15. *Laneev E. B., Vasudevan Bhuvana* Computational Modeling of Analytic Continuation of Temperature Fields from an Uncertain Surface First International Confer. Modern Trends in Computational Physics. Dubna, June 15-20, 1998. Book of Abstracts. JINR. Dubna. 1998. P.110.
16. *Ланеев Е.Б., Васудеван Бхувана* Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа. // Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика. 1999. №1. С.128-133.
17. *Ланеев Е.Б.* Устойчивое продолжение потенциального поля с поверхности // Тезисы докл. XXXVI Всеросс. научной конф. по пробл. матем., информат., физики, химии и методики преп. естественнонаучных дисциплин. 22-26 мая 2000 г. Физические секции. М.: Изд-во РУДН. 2000. С.35-36.
18. *Ланеев Е.Б.* Устойчивое продолжение температурного поля с поверхности // VIII Белорусская Математ. Конфер. 19-24 июня 2000 г. Тезисы докладов междунар.конф. Ч. 3. Минск. Изд-во Ин-та матем. НАН Беларуси. 2000. С.68.
19. *Laneev E.B., Zhidkov E.P.* Stable method of potential field continuation // Second Inter. Conf. Modern Trends in Computational Physics. Dubna, July 24-29, 2000. Book of Abstracts. JINR. Dubna. 2000. P.109.

20. Ланеев Е.Б. О некоторых постановаках задачи продолжения потенциального поля.//Вестник РУДН. Серия Физика. 2000. №8(1). С. 21-28.
21. Ланеев Е.Б. Устойчивое решение одной некорректно поставленной краевой задачи для потенциального поля.//Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика. 2000. №1. С.105-112.
22. Ланеев Е.Б. Двумерный аналог преобразования Гильберта в задаче продолжения потенциального поля.//Вестник РУДН. Серия Прикладная математика и информатика. 2001. №1. С.110-119.
23. Ланеев Е.Б. О погрешности периодической модели задаче продолжения потенциального поля.//Вестник РУДН. Серия Физика. 2001. №9(1). с.4-16.
24. Laneev E.B., Mouratov M.N, Zhidkov E.P. On stable solution for a mixed boundary-value problem for Laplace equation with inexact data on an approximately defined boundary// V Intern. Congress on Math. Modelling.Sept.30-Oct.6, 2002. Dubna. Book of abstracts. Vol.1.Dubna. JINR. 2002. P. 183.
25. Laneev E.B., Zhidkov E.P. Stable method of potential field continuation // Journal Comput. Methods in Science and Engineering. 2002. Vol.2. №1-2. P. 181-188.
26. Ланеев Е. Б., Муратов М. Н. Об устойчивом решении одной смешанной краевой задачи для уравнения Лапласа с приближенно заданной границей.// Вестник РУДН. Серия Математика. 2002. №9(1). С. 102-111.
27. Ланеев Е. Б., Лузгачева Е. В. Об устойчивом решении одной краевой задачи для системы уравнений потенциального поля.// Вестник РУДН. Серия Математика. 2002. №9(1). С.92-101.
28. Ланеев Е.Б. Об особенностях применения метода Фурье при численном решении задачи продолжения потенциального поля. //Вестник

РУДН. Серия Прикладная и компьютерная математика. 2002. №1(1). С.87-97.

29. *Bobrikova E.V., Laneev E.B. and Zhidkov E.P.* Stable potential field continuation from non-planar surface.// Abstracts of International Conference CMAM-1, July 20-24, 2003, Minsk, Belarus, p. 14.
30. *Laneev E.B., Mouratov M.N, Zhidkov E.P.* Analytical continuation of the temperature field measured on an approximately defined surface.// Abstracts of International Conference CMAM-1, July 20-24, 2003, Minsk, Belarus, pp. 34-35.
31. *Ланеев Е. Б., Муратов М. Н.* Об одной обратной задаче к краевой задаче для уравнения Лапласа с условием третьего рода на неточно заданной границе.// Вестник РУДН. Серия Математика. 2003. №10(1). С. 100-110.
32. *Ланеев Е.Б., Бобрикова Е.В.* О равномерном устойчивом приближении одной некорректной краевой задачи для системы уравнений потенциального поля.// Вестник РУДН, сер. Математика, 2003, №10(1), С. 8-16.
33. *Ланеев Е.Б.* Об устойчивом решении одной смешанной задачи для уравнения Лапласа с краевыми условиями второго рода //Вестник РУДН. Серия Прикладная и компьютерная математика. 2003. Т. 2. №2. С. 52-60.



Получено 20 апреля 2004 г.

*Макет Н. А. Киселевой*

Подписано в печать 21.04.2004.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,62. Уч.-изд. л. 1,65. Тираж 100 экз. Заказ № 54401.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)