



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

11-2004-142

На правах рукописи
УДК 519.6, 517.9

ДИМОВА
Стефка Николаева

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ СТРУКТУР**

Специальность: 05.13.18 — математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна 2004

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий
Объединенного института ядерных исследований

Научный консультант:

доктор физ.-мат. наук, чл.корр. РАН,
проф. Курдюмов Сергей Павлович.

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, проф. **Абрамов Александр Александрович**;
доктор физ.-мат. наук, проф. **Вабищевич Пётр Николаевич**;
доктор физ.-мат. наук, проф. **Гулин Алексей Владимирович**.

Ведущая организация:

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва.

Защита диссертации состоится “ ” “ ” 2004 г.
в ч. на заседании Диссертационного совета Д 720.001.04 в Объединенном институте ядерных исследований (Лаборатория информационных технологий), г. Дубна, Московской области.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан “ ” “ ” 2004 г.

Ученый секретарь Совета:

кандидат физико-математических наук



Иванченко З.М.

1 ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

1.1 Актуальность работы

Новые тенденции в современной науке наиболее ярко проявляются в **синергетике** [1],[2]. Одной из главных задач синергетики – выявление общих принципов, лежащих в основе процессов **самоорганизации** в системах самой разной природы: физических, технических, биологических, социальных. При всем различии таких систем, все они характеризуются несколькими общими признаками, среди которых определяющими являются **открытость, диссипативность и нелинейность** [2].

Открытость системы означает наличие в ней обмена веществом и энергией с окружающей средой не только через границы системы, а также через объемные источники и стоки.

Диссипативность системы означает наличие в ней рассеивающего, размывающего неоднородности фактора (теплопроводность, диффузия, дисперсия и т.д.).

Нелинейность системы выражается нелинейной зависимостью диссипирующего фактора от состояния среды. В такой среде действие нелинейных объемных источников и стоков создает и может усиливать ее неоднородность. Взаимодействие этих двух нелинейных факторов (с одной стороны сглаживание неоднородностей благодаря диссипации, а с другой – их усиление объемными источниками и стоками) может приводить к **локализации** процессов на определенных участках среды – т.е., к **возникновению структур, к возникновению самоорганизации**. Чтобы отразить влияние диссипации на формирование структур, Пригожин ввёл понятие **диссипативной структуры** [3]. Действие стоков приводит к возникновению **стационарных диссипативных структур** (стоячие волны, ячейки Бенара), а действие источников – к **нестационарным, эволюлирующим диссипативным структурам** (тепловые структуры, в частности Т-слой [4], бегущие и спиральные волны, вихри).

Благодаря нелинейности в одной и той же среде без изменения её параметров могут возникать разные структуры. Но не произвольные структуры, а свойственные только этой среде. Одна из важнейших и актуальных задач синергетики – **определение спектра структур, которые могут возникать и самоподдерживаться в открытых нелинейных системах**.

Важный класс диссипативных структур образуют **сильно нестационарные структуры** [5]. Они возникают в результате сверхбыстрых процессов в нелинейных открытых системах с объемными источниками (так называемые **системы с положительной нелинейной обратной связью**). Характерные величины в таких процессах (температура, концентрация, энергия) возрастают на несколько порядков за конечное время. Это время принято называть **временем обострения**, а сам процесс – **режимом с обострением (blow-up)**.

Проблема режимов с обострением поставлена в 1940-х и 50-х годах в связи с теорией цепных реакций Семенова и с теорией горения (Зельдович, Баренблатт, Либрович). Их интенсивное изучение в 70-х годах началось благодаря предложенному на основе численных экспериментов [6] процессу сверхсжатия центральных частей капли из дейтерия и трития путем ее облучения профилированным во времени лазерным импульсом. Режимы с обострением рассматриваются в области физики плазмы [7], лазерного термоядерного синтеза [8], магнитной гидродинамики [9], астрофизики. Методология решения “задач на обострение” позволяет с нетрадиционной точки зре-

ния рассмотреть ряд классических задач. Она открывает новые подходы к задачам коллапса (быстрое сжатие вещества), химической кинетики, метеорологии (катастрофические явления в атмосфере Земли), экологии (рост и вымирание биологических популяций), эпидемиологии (вспышка инфекционных заболеваний), экономики (феномен бурного экономического развития) и т.д. Поэтому **разработка надежных и эффективных методов численного решения задач на обострение является актуальной проблемой, выходящей за рамки конкретного класса задач.**

Механизмы самоорганизации можно проследить, изучая сравнительно простые на первый взгляд математические модели. Вся синергетика работает с несколькими такими моделями – это **нелинейные уравнения (или системы уравнений) типа реакция-диффузия с нелинейными источниками и стоками.**

Одна из самых богатых моделей – модель тепловых структур. В общем виде она выглядит так:

$$u_t = \sum_{i=1}^N (k_i(u)u_{x_i})_{x_i} + Q(u), \quad t > 0, \quad x \in R^N \quad (1)$$

Эта модель описывает процессы распространения тепла и горения в среде с коэффициентами теплопроводности $k_i(u) \geq 0$ и источником $Q(u) \geq 0$, которые являются нелинейными функциями температуры $u(t, x) \geq 0$.

Модели вида (1) в различном контексте изучались многими исследователями. Большое количество работ посвящено полулинейным уравнениям: $k_i(u) \equiv 1$, $Q(u) = \lambda e^u$ (уравнение Франка-Каменецкого), $Q(u) = u^\beta$, $\beta > 1$. После пионерской работы Н. Fujita (1966 г.), они и их обобщения изучались интенсивно многими авторами. Среди них: J. Vebernes, A. Bressan, H. Brezis, D. Eberly, A. Friedman, B.A. Галактионов, И.М. Гельфанд, М.А. Herrero, R. Kohn, Л.А. Лепин, С.А. Посашков, А.А. Самарский, J.L. Vazquez, L.J.L. Velazquez. Монография [28] содержит обширную библиографию и отражает часть этих исследований.

Квазилинейное уравнение изучалось в работах D.G. Aronson, A. Friedman, H.A. Levine, S. Kaplan, L.A. Pelitier и др.. Большой вклад ученых русской школы. Необычный эффект локализации граничных режимов с обострением обнаружен численным экспериментом в работе А. А. Самарского и М. И. Соболя 1963 года [10]. Проблема локализации в квазилинейных уравнениях с источником поставлена С.П. Курдюмовым в 1974 г.. Работы И.М. Гельфанда, А.С. Калашникова, ученых школы А.А. Самарского и С. П. Курдюмова (их работы цитированы ниже) посвящены исследованию интереснейших проблем физического и математического характера, связанных с моделью (1) или ее обобщениями. Среди них: локализация (строгая и эффективная) процесса горения в пространстве, развитие разных типов режимов с обострением, возникновение структур – бегущие и стоячие волны, сложные структуры с различной степенью симметрии. Секретом успеха этих исследований явилось **сочетание вычислительного эксперимента с применением и развитием качественных и аналитических методов теории обыкновенных и в частных производных дифференциальных уравнений, теорий групп Ли и Ли-Бэклунда.**

Особое место в этих исследованиях занимает изучение разных типов автомодельных и инвариантно-групповых решений уравнения (1) со **степенными нелинейностями:**

$$k_i(u) = u^{\sigma_i}, \quad Q(u) = u^\beta \quad (2)$$

Такой выбор не случаен. Зависимости вида (2) от температуры встречаются в многих реальных процессах [11]. Например, в случае $\sigma_i = \sigma = 2.5$, $\beta \leq 5.2$, уравнение (1) моделирует термоядерное горение с электронной теплопроводностью в плазме [7]; значения $\sigma = 0$, $2 \leq \beta \leq 3$ соответствуют моделям автокаталитических процессов с диффузией в химических реакторах; $\sigma \approx 6.5$ соответствует радиационной теплопроводности высокотемпературной плазмы в звездах и т.д..

Установлено [31],[17], что на классе степенных функций симметрия уравнения (1) в определенном смысле максимальна, оно допускает богатый набор инвариантно-групповых решений. Нестационарные диссипативные структуры режимов с обострением, рассматриваемые в предлагаемой работе, связаны со степенными автомодельными решениями или с более общими инвариантными решениями, когда по радиусу автомодельность степенная, а по углу – бегущая волна. Исследования в области диссипативных структур дают основание считать, что именно инвариантные решения описывают “аттракторы” эволюции диссипативных структур и тем самым характеризуют важные внутренние свойства нелинейной диссипативной среды.

Этот богатый запас инвариантных решений уравнения (1) со степенными нелинейностями необходим для успешного применения методов исследования того же уравнения в случае более общих зависимостей $k(u)$, $Q(u)$. С помощью методов операторного сравнения и стационарных состояний удастся исследовать свойства решений (такие как локализация, неограниченность, асимптотическое поведение) целых классов более общих нелинейных уравнений.

Наконец, в случае степенных коэффициентов есть нужные соотношения между диссипацией и источником, при которых происходит их согласование. В результате этого возникают сложные структуры, более того, возникает **спектр структур**, которые горят согласованно, с одним моментом обострения. Чтобы установить в системе эту сложную организацию и вывести ее на один из возможных путей эволюции, надо знать что заложено в ней и спровоцировать этот путь заданием начальных данных из области притяжения аттракторно-структур. Поэтому **нахождение аттракторов процессов в системах различной природы является очень актуальной проблемой теории самоорганизации.**

1.2 Цели работы

Основная цель работы – исследование условий возникновения и эволюции сильно нестационарных тепловых структур в среде, описываемой уравнением нелинейной теплопроводности со степенными нелинейностями и некоторыми его модификациями. В частности, это выявление и исследование возможных способов сложной организации нелинейной диссипативной среды. И так как исследования проводятся в основном численным экспериментом, то важной задачей является также создание и апробирование эффективных вычислительных алгоритмов для рассматриваемых классов задач:

- нелинейных параболических задач с сингулярными по времени решениями – задач Коши и краевых задач для квазилинейных параболических уравнений, системы таких уравнений и полулинейных уравнений;

- автомодельных нелинейных задач – краевых задач для квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), системы таких уравнений и квазилинейных эллиптических уравнений.

1.3 Научная новизна работы

Впервые реализованы численно инвариантные решения, которые описывают направленные распространение тепла и горения в двумерной нелинейной анизотропной среде со степенными коэффициентами теплопроводности и степенными источниками. Так конструктивным образом доказано их существование.

Найдены два новых типа решений автоматической задачи (так называемых собственных функций горения нелинейной среды) – “с перетяжкой” и с полостью около центра симметрии, в цилиндрически- и сферически-симметричном случаях при параметрах среды $\beta > \sigma + 1$. На основе детального численного исследования предложен сценарий поведения сложных собственных функций (четных и нечетных) при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$.

Открыт новый мир структур при параметрах среды $\beta < \sigma + 1$. Это удалось благодаря:

- изменения идеологии – искать структуры, “живущие” и развивающиеся не на нулевом фоне, а на гомотермическом фоне (т.е. изменения математической модели тепловых структур постановкой новых условий на бесконечности);
- нахождения подходящего (комплекснозначного) разделения переменных в линеаризованной автоматической задаче и тем самым нахождения линейных приближений к спиральным с.ф.;
- детального аналитического и численного исследования линейных приближений, которое показало, что их асимптотики автомодельные.

Все это дало возможность замкнуть автомодельную задачу в случае $\beta < \sigma + 1$ подходящими краевыми условиями, конструировать начальные приближения к различным решениям и решить ее численно. Таким образом впервые показано, что усложнение организации среды может происходить не только за счет локализованных во вне и сходящихся к центру структур, но и за счет расходящихся волн горения сложной структуры, в том числе раскручивающихся спиральных волн.

1.4 Достоверность результатов

Проведено детальное исследование поведения решений при изменении как физических, так и вычислительных параметров для каждого из рассмотренных классов задач. В частности, расчеты проводились на последовательностях вложенных сеток и таким образом исследовался их порядок точности; когда это было возможно, численные результаты сравнивались с известными аналитическими или качественными результатами.

Новые, неожиданные результаты подтверждены разными методами.

Разработанные методы и алгоритмы для параболических и для эллиптических задач имеют внутренний критерий точности:

- восстановление в параболической задаче времени обострения, заложенном в соответствующей автомодельной задаче, если начальные данные автомодельные;
- сохранение автомодельности вплоть до момента обострения при использовании точных автомодельных начальных данных.

Полученные новые типы решений автоматической задачи в радиально-симметричном случае инициировали исследования других авторов [12]–[14] другими методами

(методом динамической аналогии, бифуркационным анализом). Цитированные исследования подтвердили существование этих новых решений.

1.5 Практическая ценность работы

Математическая модель тепловых структур возникла в связи с решением актуальных технологических проблем физики плазмы, лазерного термоядерного синтеза, магнитной гидродинамики и др.. Как было отмечено выше, режимы с обострением встречаются также во многих других областях. Разработанная здесь и тщательно апробированная методика решения задач на обострение применима к моделям физики плазмы, моделям автокаталитических реакций, в теории горения (модели воспламенения твердого и жидкого горючего). Она легко может быть перенесена и на другие классы задач. Отметим особо метод построения адаптивных сеток по пространственным переменным, согласованных с известными асимптотиками процессов в среде.

1.6 Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах в ЛИТ (ЛВТА), ОИЯИ, Дубна; в ИПМ им. "М.В. Келдыша", РАН, Москва; в ВЦ РАН, Москва; в ФМИ Софийского университета "Св. Кл. Охридского"; в Институте математики и информатики Болгарской АН; в Университете в Линфилд, Орегон, США; в Департаменте по Прикладной математике Университета в Колорадо, Боулдер, США; на коллоквиуме Факультета математики Университета в Кайзерслаутерне, Германия; в "Макс Планк" институте по физике плазмы, Мюнхен, Германия; в Техническом Университете в Гетеборге, Швеция, и на следующих международных конференциях:

Numerical Methods and Applications, 1988, 1994, 1998, София; 2002, Боровец, Болгария;

Qualitative Theory of Differential Equations, март 1989, Рига, Латвия;

International IMACS Conference on Mathematical Modelling and Applied Mathematics, июнь 1990, Москва;

International Colloquium on Differential Equations, август 1991, Пловдив, Болгария;

Elliptic Boundary Value Problems, March 1992, Росток, Германия;

International Colloquium on Numerical Analysis, август 1992, 1996, 1997, Пловдив, Болгария;

International Conference on Programming and Mathematical Methods for Solving Physical Problems, июнь 1993, Дубна;

International Conference "Criteria of Self-organization in Physical, Chemical and Biological Systems, июнь 1995, Москва-Суздаль;

IMA Minisymposium "Mathematical Investigations of Models in Combustion", ноябрь 14-17, 1999, Минеапелис, США;

International Congress on Mathematical Modelling, октябрь 2002, Дубна.

Исследования проводились в соответствии с тематическими планами ЛИТ ОИЯИ, ИМИ Болгарской АН, ФМИ Софийского Университета и были поддержаны грантами Министерства образования, науки и технологий Болгарии, и Научного фонда Софийского университета.

1.7 Публикации

По материалам диссертации опубликовано 22 работы, из которых 5 работ в российских ведущих научных журналах.

1.8 Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации – 211 страниц, включая 65 рисунков, 22 таблицы и список литературы, содержащий 138 наименований.

1.9 Личный вклад автора

Автор диссертации, работая в коллективе соавторов из Института Прикладной Математики, РАН, Москва, из Института математики и информатики БАН, София, из Факультета математики и информатики Софийского университета, в большинстве случаев был инициатором данных исследований. Двое из соавторов – Даниела Василева и Милена Колева – были аспирантками автора диссертации (вторая руководимая совместно с проф. М. Касчиевым) и защитили успешно кандидатские диссертации. Все аналитические исследования, приведенные в диссертации, являются личным вкладом автора. Автор непосредственно участвовала в математической постановке задач, в разработке численных методов и алгоритмов, в их программной реализации, а также в численном решении поставленных задач, в обработке, анализе и интерпретации результатов численных экспериментов.

2 ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **Введении** обоснована актуальность проблем, исследованных в диссертационной работе, и сформулированы цели работы. Введены необходимые понятия, перечислены основные задачи и сделан обзор известных автору результатов, связанных с ними. Коротко изложены и прокомментированы полученные в диссертации результаты.

Основные используемые понятия введены на самой простой модели вида (1), когда предполагается радиальная симметрия. В этом случае задача Коши с финитными начальными данными формулируется так:

$$u_t = x^{1-N}(x^{N-1}u^\sigma u_x)_x + u^\beta, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad t > 0, \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad (3)$$

$$u_x(t, 0) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) \geq 0, \quad 0 \leq x < l, \quad u_0(x) \equiv 0, \quad x \geq l. \quad (4)$$

Если начальные данные удовлетворяют дополнительным условиям: $u_0(x) \in C(\mathbb{R}_+)$, $(u_0^\sigma u_0')(0) = 0$, то существует единственное локальное (по времени) обобщенное решение $u = u(t, x)$ задачи (3)-(4), которое является неотрицательной непрерывной функцией в $\mathbb{R}_+ \times (0, T_0)$, где $T_0 \in (0, \infty]$ – конечное или бесконечное время существования решения (см. список литературы в обзоре [15]). При этом $u(t, x)$ является классическим решением в окрестности любой точки (t, x) , где $u(t, x)$ является строго положительным. В точках вырождения оно может не иметь необходимой гладкости, но тепловой поток $-x^{N-1}u^\sigma u_x$ должен быть непрерывным. Это означает, что

$u^\sigma u_x = 0$ всюду, где $u = 0$. Когда время T_0 конечное и $\overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(t, x) = +\infty$, T_0 называется **временем обострения** неограниченного (сингулярного по времени) решения.

Неограниченное решение называется **локализованным (в строгом смысле)**, если множество $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^N : |u(T_0^-, x) := \overline{\lim}_{t \rightarrow T_0^-} u(t, x) > 0\}$ ограничено в \mathbb{R}^N .

Неограниченное решение называется **эффективно локализованным**, если множество $\omega_L = \{x \in \mathbb{R}^N : |u(T_0^-, x) = \infty\}$ ограничено.

Уравнение (3) допускает **автомодельное решение (а.р.)** [16]:

$$u_a(t, x) = \psi(t)\theta(\xi) = (1 - t/T_0)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta(\xi), \quad (5)$$

$$\xi = x/\varphi(t) = x(1 - t/T_0)^{-\frac{m}{\beta-1}}, \quad m = (\beta - \sigma - 1)/2. \quad (6)$$

Оно соответствует начальным данным $u_a(0, x) = \theta(x)$. Функцию $\theta(\xi) \geq 0$, определяющую пространственно-временную структуру автомодельного решения, согласно принятой терминологии [18] называют **собственной функцией (с.ф.) горения нелинейной среды, описываемой уравнением (3)**. Далее для краткости используется название собственная функция. Она удовлетворяет в \mathbb{R}_+ вырождающемуся ОДУ:

$$-\frac{1}{\xi^{N-1}}(\xi^{N-1}\theta^\sigma\theta')' + \frac{\beta - \sigma - 1}{2(\beta - 1)T_0}\xi\theta' + \frac{1}{(\beta - 1)T_0}\theta - \theta^\beta = 0 \quad (7)$$

и крайевым условиям:

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(\infty) = 0, \quad \theta^\sigma\theta' = 0, \quad \text{если } \theta = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7) имеет два решения, являющимися константами: $\theta(\xi) \equiv 0$ и $\theta(\xi) \equiv \theta_H = (T_0(\beta - 1))^{-1/(\beta-1)}$. Они играют существенную роль при анализе различных решений уравнения (7). Если задача (7), (8) имеет решение для некоторого $T_0 = T_{0,1}$, то она имеет решение и при любом другом $T_0 = T_{0,2}$, при этом решения связаны преобразованием подобия [19]. Это дает возможность без ограничения общности положить

$$T_0 = 1/(\beta - 1), \quad \text{и тем самым, } \theta_H \equiv 1.$$

Тогда уравнение (7) принимает вид:

$$L(\theta) \equiv -\xi^{1-N}(\xi^{N-1}\theta^\sigma\theta')' + m\xi\theta' + \theta - \theta^\beta = 0. \quad (9)$$

Анализ решений задачи (9), (8), (см. [17], [16], Глава IV, и ссылки в них), дает следующие результаты:

✓ При любых $1 < \beta \leq \sigma + 1$ существует финитное решение $\theta(\xi) \geq 0$.

✓ При $\beta < \sigma + 1$, $N \geq 1$ и $\beta = \sigma + 1$, $N > 1$ задача не имеет немонотонных решений. Единственность решения доказана для случая $\beta < \sigma + 1$, $N = 1$.

✓ При $\beta > \sigma + 1$, $N \geq 1$ задача не имеет финитных решений.

✓ Если $\sigma + 1 < \beta < \beta_s = (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2)_+$, то задача имеет по крайней мере одно решение $\theta(\xi) > 0$ в \mathbb{R}_+ , которое строго монотонно убывает по ξ и имеет асимптотику

$$\theta(\xi) = C_a \xi^{-2/(\beta-\sigma-1)} [1 + \omega(\xi)], \quad \omega(\xi) \rightarrow 0, \quad \xi \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$C_a = C_a(\sigma, \beta, N)$ – постоянная. Позже [27] интервал по β был расширен.

✓ При $N = 1$, $\beta > \sigma + 1$ задача имеет не менее чем

$$K = -[-a] - 1, \quad [.] - \text{целая часть, } a = (\beta - 1)/(\beta - \sigma - 1) > 1 \quad (11)$$

решений, различающихся по числу экстремумов на полуоси $\xi \in [0, \infty)$ [20]. Обозначим их через $\theta_{a,i}(\xi)$, $i = 1, 2, \dots, K$. На основе линейного анализа и некоторых численных результатов в работе [21] было высказано предположение, что число различных решений $\theta_{a,i}(\xi)$ при $\beta > \sigma + 1$ и $N \geq 1$ равняется $K + 1$. В случае $N = 1$ этот результат был уточнен недавно [14] бифуркационным анализом: число решений дается формулой $K = [a]$, если a – нецелое, и $K = a - 1$, если a – целое. Для $N = 2, 3$ бифуркационный анализ дает ту же оценку числа решений, но при $\beta \approx \sigma + 1$, $\beta > \sigma + 1$ она нарушается (см. раздел 2.2 и [14]).

На основе этих результатов устанавливаются **базисные режимы** горения среды, описываемыми а.р. (5),(6). Для их характеристики вводятся также следующие понятия: **полуширина** $x_s = x_s(t)$, которая для монотонных по x решений с единственным максимумом в точке $x = 0$ определяется уравнением $u(t, x_s) = u(t, 0)/2$, и **точка фронта** $x_f: u(t, x_f) = 0$, $u^\sigma u_x(t, x_f) = 0$.

HS-режим с обострением, $1 < \beta < \sigma + 1$. Формируется *тепловая волна*, которая за время T_0 охватывает все пространство. Процесс с обострением не локализован: $\text{mes } \Omega_L = \text{mes } \omega_L = \infty$, $x_s \rightarrow \infty$, $x_f \rightarrow \infty$, $t \rightarrow T_0^-$.

S-режим с обострением, $\beta = \sigma + 1$. Диффузия тепла и интенсивность нагрева согласуются так, что приводят к локализации процесса в области диаметром L_s , называемой *“фундаментальной длиной”* S-режима: $\Omega_L = \omega_L = \{|x| < L_s/2\}$. Внутри Ω_L среда нагревается до бесконечной температуры за время T_0 ; $x_s = \text{const}$, $x_f = L_s/2$.

LS-режим с обострением, $\sigma + 1 < \beta < \beta_f = \sigma + 1 + \frac{2}{N}$. Интенсивность источника сильнее, чем диффузия. Среда нагревается до бесконечной температуры за время T_0 только в одной точке: $\text{mes } \omega_L = 0$, $x_s \rightarrow 0$, $t \rightarrow T_0^-$. В соответствии с различными решениями $\theta_{a,i}(\xi)$, $i = 1, 2, \dots$, среда горит в виде простых ($i = 1$) и сложных структур ($i > 1$) с одним и тем же моментом обострения.

Чтобы показать значимость автомодельных решений как аттракторов широких классов других решений того же уравнения, введем еще несколько понятий.

В случае произвольных *финитных* начальных данных $u_0(x)$ (4) вводится в рассмотрении *автомодельное представление* решения $u(t, x)$ задачи (3), (4), определяемое в каждый момент времени в соответствии с видом а.р. (5), (6):

$$\Theta(t, \xi) = (1 - t/T_0)^{\frac{1}{\beta-1}} u\left(t, \xi(1 - t/T_0)^{\frac{m}{\beta-1}}\right) = \psi^{-1}(t)u(t, \xi\varphi(t)) \quad (12)$$

Автомодельное решение $u_a(t, x)$ называется **асимптотически устойчивым**, если существует достаточно широкий класс решений $u(t, x)$ задачи (3), (4) с начальными данными $u_0 \neq \theta(x)$, автомодельные представления $\Theta(t, \xi)$ которых стремятся в некоторой норме к $\theta(\xi)$ когда $t \rightarrow T_0^-$:

$$\|\Theta(t, \xi) - \theta(\xi)\| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow T_0^-. \quad (13)$$

В определении автомодельного представления (12) участвует неизвестное время обострения T_0 и оно непригодно для численного исследования асимптотической устойчивости а.р. В работе [19] был предложен и численно реализован (при $N = 1$)

другой подход, позволяющий исследовать “структурную” устойчивость неограниченных а.р. в специальной “автомодельной” норме, согласованной при каждом t с геометрической формой структуры и не использующей в явном виде времени обострения T_0 . Вводится новое автомодельное представление в соответствии со структурой а.р. $u_a(t, x)$:

$$\Theta(t, \xi) = u(t, \xi(\gamma(t))^{-m})/\gamma(t), \quad \gamma(t) = \frac{\max_x u(t, x)}{\max_\xi \theta(\xi)}. \quad (14)$$

Автомодельное решение $u_a(t, x)$ называется *структурно устойчивым*, если сходимость (13) имеет места для $\Theta(t, \xi)$, заданной через (14).

Для автомодельных решений со сложной пространственно-временной структурой, отвечающих немонотонным собственным функциям горения нелинейной среды, вводится понятие *метаустойчивости*. Автомодельное решение $u_a(t, x)$ называется *метаустойчивым*, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует класс начальных данных $u_0(x) \approx \theta(x)$ и время $T, T_0 - T \ll T_0$ таких, что для автомодельных представлений соответствующих решений выполнялось

$$\|\Theta(t, \xi) - \theta(\xi)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (15)$$

Глава 1 посвящена численным методам решения основных задач – нелинейных автомодельных задач (**раздел 1.1**) и нелинейных параболических задач с сингулярными по времени (blow-up) решениями (**раздел 1.2**). Детальное описание и исследование методов сделано для случая радиальной симметрии.

Общими трудностями как для автомодельных, так и для параболических задач, являются: нелинейность; зависимость от нескольких параметров (как правило – трех); недостаточная гладкость решений на поверхностях вырождения эллиптического оператора, где решения обращаются в ноль. В случае радиальной симметрии при $N > 1$ и в полярных координатах в двумерном случае к ним добавляется сингулярность в точке $x = 0$ ($\xi = 0$).

Что касается автомодельных задач, то самая существенная трудность – это неединственность решения, что существенно отличает их от классических задач с единственным решением. Возникают следующие проблемы:

- ✓ найти “хорошее” приближение к каждому решению;
- ✓ сконструировать итерационный метод, который: сходится всегда к искомому решению (соответствующему начальному приближению); сходится быстро; обеспечивает достаточную точность;
- ✓ автоматизировать процесс вычислений так, чтобы единообразно и быстро находить все различные решения при данных параметрах задачи (σ, β, N);
- ✓ определить априори куда перенести условия из бесконечности, чтобы асимптотика (10) выполнялась (отметим, что чем больше номер с.ф., тем больше константа C_a в асимптотике).

Для преодоления указанных проблем здесь использованы:

- подход “**линеаризации**” [19] автомодельного уравнения относительно нетривиального пространственно-однородного решения θ_N и **спивание** решений линеаризованного уравнения с известной асимптотикой, для нахождения приближений к различным решениям;

– итерационные схемы, основанные на **непрерывном аналоге метода Ньютона (НАМН)** для решения нелинейных функциональных уравнений [35], который имеет большую, по сравнению с классическим методом Ньютона, область сходимости;

– **метод конечных элементов (МКЭ)** разного порядка точности на квазиравномерных сетках, для решения линейного уравнения НАМН на каждом шаге итерационного процесса;

– МКЭ, основанный на **несимметричном методе Галеркина** [22], для сингулярных в центре симметрии задач при $N \geq 3$.

В разделе 1.1.1 поставлена радиально-симметричная автомодельная задача:

Найти функцию $\theta(\xi) \geq 0$, удовлетворяющую уравнению (9) и краевым условиям (8), которые с учетом перечисленных ее свойств и асимптотику (10), уточнены следующим образом:

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(l) = 0, \quad \text{для } \beta \leq \sigma + 1, \quad (16)$$

где l выбирается так, чтобы краевое условие не влияло на решение, т.е., l было больше носителя ξ_0 решения;

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta'(l) + (p/l)\theta(l) = 0, \quad p = 1/m = 2/(\beta - \sigma - 1), \quad \text{для } \beta > \sigma + 1, \quad (17)$$

где l выбирается так, чтобы с хорошей точностью выполнялась асимптотика (10).

Детальное изложение численного метода сделано на примере этой задачи. В ньютоновской итерационной схеме (раздел 1.1.2)

$$L'(\theta_k)v_k = -L(\theta_k), \quad (18)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \tau_k v_k, \quad 0 < \tau_k \leq 1, \quad k = 0, 1, \dots,$$

$$\theta_k = \theta_k(\xi) = \theta(\xi, t_k), \quad v_k = v_k(\xi) = v(\xi, t_k), \quad (19)$$

$\theta_0(\xi)$ – начальное приближение,

уравнение (18) имеет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_k^\sigma v_k')' - \frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \sigma \theta_k^{\sigma-1} \theta_k' v_k)' + m \xi v_k' + \\ & + (1 - \beta \theta_k^{\beta-1}) v_k = - \left[-\frac{1}{\xi^{N-1}} (\xi^{N-1} \theta_k^\sigma \theta_k')' + m \xi \theta_k' + \theta_k - \theta_k^\beta \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Итерационные поправки $v_k(\xi)$ удовлетворяют однородным граничным условиям

$$v_k'(0) = 0, \quad v_k(l) = 0 \quad \text{для } \beta \leq \sigma + 1, \quad (21)$$

$$v_k'(0) = 0, \quad v_k'(l) + (p/l)v_k(l) = 0 \quad \text{для } \beta > \sigma + 1. \quad (22)$$

В разделе 1.1.3 проведена дискретизация по МКЭ задач (20), (21) и (20), (22) в слабой форме:

Найти функцию $v_k(\xi) \in H^1(0, l)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(L'(\theta_k)v_k, w) = -(L(\theta_k), w), \quad \forall w \in H_\alpha^1(0, l), \quad (v, w) = \int_0^l \xi^{N-1} v(\xi) w(\xi) d\xi \quad (23)$$

и граничным условиям (21) или (22), где $\theta_k(\xi)$ – заданная функция,

$$\begin{aligned}\theta_k \in D &= \{\theta(\xi) : \theta^{\sigma+1}, d\theta^{\sigma+1}/d\xi \in L^2(0, l)\}, \\ H_\alpha^1(0, l) &= \{w : \xi^{(N-1)/2}w, \xi^{(N-1)/2}w' \in L^2(0, l), (1-\alpha)w(l) = 0\}.\end{aligned}$$

Значение $\alpha = 0$ отвечает условию (21), а $\alpha = 1$ – условию (22).

Аппроксимация интегрального тождества (23) проводится на основе МКЭ с использованием Лагранжевых (линейных и квадратичных) конечных элементов. Так для вектора \bar{V} с компонентами значения итерационных поправок в узлах конечно-элементной сетки получена линейная система уравнений

$$A(\theta)\bar{V} = -B(\theta)\bar{\Theta} \quad (24)$$

с несимметричными ленточными матрицами A и B . Для решения системы (24) использовано LU разложение матрицы A , которое не увеличивает ее профиля.

Шаг τ_k в (19) определяется экстраполяционной формулой [23]:

$$\tau_k = \min\left(1, \tau_{k-1} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}\right), \text{ если } \delta_k < \delta_{k-1}, \quad \tau_k = \max\left(\tau_0, \tau_{k-1} \frac{\delta_{k-1}}{\delta_k}\right), \text{ если } \delta_k \geq \delta_{k-1},$$

где $\delta_k = \max_{\eta \in \omega_h} |B(\theta_k)\bar{\Theta}_k|$. Этот выбор τ_k при уменьшении δ_k обеспечивает стремление τ_k к 1, и скорость сходимости (18), (19) становится квадратичной.

Выбор начальных приближений обсуждается в Разделе 1.1.5. Для $\beta \leq \sigma + 1$ предложено

$$\theta_0^N(\xi) = \begin{cases} A^{(N)} \cos^2(\pi\xi/2\xi_0^{(N)}), & \xi \leq \xi_0^{(N)}, \\ 0, & \xi_0^{(N)} \leq \xi \leq l, \end{cases} \quad (25)$$

где $A^{(N)} \geq 1$ – константы. Приближения (25) основаны на известном [5] точном решении для S -режима при $N = 1$:

$$\theta(\xi) = \begin{cases} \left(\frac{2(\sigma+1)}{(\sigma+2)} \cos^2 \frac{\pi\xi}{2\xi_0^{(1)}}\right)^{\frac{1}{\sigma}}, & \xi \leq \xi_0^{(1)} = L_S^{(1)}/2 = \pi\sqrt{\sigma+1}/\sigma, \\ 0, & \xi \geq \xi_0^{(1)} \end{cases}, \quad (26)$$

на полученных в [21] приближенных оценках для ξ_0 при $N = 2, 3$:

$$L_S^{(N)}/2 = \xi_0^{(N)} \approx \pi\sqrt{\sigma+1 + 1.84(N-1)\sigma/\pi}/\sigma,$$

и на установленном нами в численном эксперименте соотношении $\xi_{0,HS}^{(N)} < \xi_0^{(N)}$.

Для $\beta > \sigma + 1$ “линейные приближения” искались в виде:

$$\tilde{\theta}_{0,i}(\xi) = \begin{cases} 1 + \alpha_i y(\xi), & 0 \leq \xi < \bar{\xi}_i \\ C_i \xi^{-p}, & \bar{\xi}_i \leq \xi \leq l. \end{cases}, \quad (27)$$

где $y(\xi) = F(-(\beta-1)/(\beta-\sigma-1), N/2; (\beta-\sigma-1)\xi^2/4)$ – вырожденная гипергеометрическая функция. Она является решением линеаризованного относительно $\theta_H \equiv 1$ автомодельного уравнения $(\theta(\xi) = 1 + \varepsilon y(\xi), |\varepsilon y(\xi)| \ll 1)$:

$$-\xi^{1-N}(\xi^{N-1}y')' + m\xi y' - (\beta-1)y = 0. \quad (28)$$

Параметры $\bar{\xi}_i$, α_i , C_i определялись из условий $\tilde{\theta}_{0,i}(\xi) \in C^2[0, l]$ (C^2 – приближения) или $\tilde{\theta}_{0,i}(\xi) \in C^1[0, l]$ (C^1 – приближения). В обоих случаях

$$\alpha_i = -p/[p y(\bar{\xi}_i) + \bar{\xi}_i y'(\bar{\xi}_i)], \quad C_i = \bar{\xi}_i^{p+1} y'(\bar{\xi}_i)/[p y(\bar{\xi}_i) + \bar{\xi}_i y'(\bar{\xi}_i)]. \quad (29)$$

Для C^1 -приближений точка $\bar{\xi}_i$ является корнем уравнения $y(\xi) = 0$ (всего $K + 1$ корней), а для C^2 -приближений – корнем уравнения

$$(p + 1)y'(\xi) + \xi y''(\xi) = 0.$$

На основе изложенной методики создан комплекс программ на языке *FORTRAN*. Он дает возможность вычислять решения автомодельной задачи для всех видов режимов с обострением. В случае *LS*-режима вычисление “линейных приближений” и сшивание с асимптотикой реализовано программно, так что процесс полностью автоматизирован – задается только номер искомой с.ф.. Это сделало возможным тщательное исследование сходимости и точности численного метода (**Раздел 1.1.6**). Оно проводилось посредством сравнения с известным точным решением (26) *S*-режима при $N = 1$ и методом Рунге на последовательностях вложенных сеток для *HS*- и *LS*-режимов. Исследование показало: в той части области, где решение имеет необходимую гладкость, при использовании **линейных элементов** имеет место **оптимальный порядок точности $O(h^2)$** , а при использовании **квадратичных элементов** – **сверхсходимость порядка $O(h^4)$ в узлах разбиения**.

Многочисленные эксперименты, проведенные в широком диапазоне изменения значений параметров σ и β при $N = 1, 2, 3$, указывают на быструю сходимость итерационного процесса (18), (19). Замечены однако следующие особенности:

- при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ гипотеза о малых колебаниях с.ф. около гомотермического решения, на которой подход линеаризации основан, не выполняется. При $N = 2, 3$ были обнаружены с.ф., значения которых равны нулю в кольцевой области около центра симметрии. Это обусловило необходимость детального исследования случая $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$.

- при $N = 2, 3$ в сингулярной точке $\xi = 0$ порядок точности ниже ($\alpha \approx 1.7$ для линейных и $\alpha \approx 3.7$ для квадратичных элементов).

Для преодоления потери точности в окрестности $\xi = 0$ была использована модификация метода Галеркина на сингулярный случай. Она предложена и теоретически исследована для линейных сингулярных при $x = 0$ задач в работе [22] и названа **несимметричным методом Галеркина**. Идея несимметричного метода – применить метод Галеркина к специальной, несимметричной форме оригинальной (самосопряженной) задачи. Применительно к автомодельной задаче он изложен в **Разделе 1.1.7**. Вычислительная схема построена на основе **альтернативной формы записи уравнения (9)**:

$$\tilde{L}(\theta) = -(\xi^\gamma \theta^\sigma \theta')' - \gamma(N - 2)\theta^\sigma \theta' + m\xi^{1+\gamma} \theta' + \xi^\gamma \theta(1 - \theta^{\beta-1}) = 0 \quad (30)$$

где $\gamma = 0$ при $N = 1$, $\gamma = 1$ при $N = 2, 3$. При $N = 1, 2$ она совпадает с (9).

Многочисленные эксперименты на последовательностях вложенных сеток, проведенные для *S*-, *HS*- и *LS*-режимов, $N \geq 3$, показывают оптимальный порядок точности этой вычислительной схемы вплоть до центра симметрии.

Раздел 1.2 посвящен численным методам решения параболических задач.

Основная трудность численного решения параболических задач - неограниченность решений, при этом неограниченность в изолированных точках, в конечной области или во всем пространстве. И еще связанные с ней: **подвижная граница**, на которой решение не во всех случаях достаточно гладкое; **неустойчивость** неограниченных решений.

Неограниченные решения режимов с обострением неустойчивы в том смысле, что малым возмущениям начальных данных соответствует малое (априорно неизвестное) изменение времени обострения, и следовательно – сколь угодно большие изменения в решении вблизи момента обострения. Именно для устранения проблем с неустойчивостью вблизи момента обострения введены понятия структурной устойчивости и метастойчивости. Они отражают сущность режимов с обострением. Простые структуры устойчивы в этом смысле вплоть до момента обострения, сложные структуры вырождаются в простые вблизи момента обострения. При этом вырождение может происходить разным образом - сложная структура может выродиться в одну или несколько простых. Эта неустойчивость стохастическая.

Одна из задач этой работы – исследование структурной устойчивости и метастойчивости различных инвариантных решений – накладывает существенные требования на методы решения параболических задач – реализовать методы, вычислительная неустойчивость которых существенно “меньше” неустойчивости решения. Как показано дальше, разработанные методы дают возможность, во-первых, вычислять автомодельные решения вплоть до момента обострения, когда максимум решения нарастает на 3-15 порядков (в зависимости от параметров задачи) с сохранением автомодельности, и во-вторых, восстанавливать время обострения T_0 , заложенное в автомодельной задаче ($T_0 = 1/(\beta - 1)$), с точностью до $10^{-5} \div 10^{-7}$. Это дает возможность прогнозировать с большой точностью возникновение критических режимов в среде.

Для преодоления указанных проблем и для удовлетворения поставленных требований, здесь использованы:

- **трансформация Кирхгофа** для линеаризации эллиптической части дифференциального оператора;
- **МКЭ** для дискретизации по пространственным переменным с интерполированием нелинейных коэффициентов по базису конечномерного пространства и концентрации матрицы массы;
- **динамические адаптивные сетки** в *LS*-режиме (сгущающиеся сетки) и в *HS*-режиме (разреживающиеся сетки с сохранением числа узлов), согласованные с автомодельными (и приближенными автомодельными в полулинейном случае) законами;
- **несимметричный метод Галеркина** в радиально-симметричном случае при размерности пространства $N \geq 3$;
- **явный метод типа Рунге-Кутты** второго порядка точности с расширенной областью устойчивости и с автоматическим выбором шага, обеспечивающим выполнение слабого принципа максимума и, в случае глобальных решений, достижение заданной точности ϵ в конце интервала интегрирования.

В разделе 1.2.1 поставлена радиально-симметричная параболическая задача:

$$u_t = \frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} u^\sigma u_r)_r + u^\beta, \quad 0 < r < R, \quad 0 < t < T_0, \quad (31)$$

$$u_r(t, 0) = 0, \quad 0 < t < T_0, \quad u(t, R) = 0, \quad 0 < t < T_0, \quad (32)$$

$$u(0, r) = u_0(r) \geq 0, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (33)$$

Величина R выбирается так, чтобы граничное условие в (32) не влияло на решение $u(t, r)$. При $\beta \geq \sigma + 1$ это возможно из-за локализации процесса, при $\beta < \sigma + 1$ величина $R = R(t)$ меняется автоматически в процессе счета.

Симметричный метод Галеркина изложен в разделе 1.2.2. Применение трансформации Кирхгофа

$$p(u) = \int_0^u w^\sigma dw = \frac{u^{\sigma+1}}{\sigma+1}, \quad (34)$$

является существенным для последующего интерполирования нелинейных коэффициентов и оптимизации процесса вычислений.

Задача (31)-(34) в слабой форме формулируется так:

Найти функцию $u(t, r) \in D$, $D = \{u : u, \partial u^{\sigma+1}/\partial r \in L_2\}$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$(u_t, v) = A(t; u, v), \quad \forall v \in H_0^1(0, R), \quad 0 < t < T_0, \quad (35)$$

начальному условию (33) и граничным условиям (32). Здесь

$$(u, v) = \int_0^R r^{N-1} u(r) v(r) dr, \quad A(t; u, v) = \int_0^R r^{N-1} \left[\frac{\partial p(u)}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + q(u) v \right] dr, \quad q(u) = u^\beta,$$

$$H_0^1(0, R) = \{v : r^{(N-1)/2} v, r^{(N-1)/2} v' \in L_2(0, R), v(R) = 0\}.$$

Для дискретизации (35), (33) использованы Лагранжевы (линейные и квадратичные) конечные элементы.

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ – стандартный узловой базис Лагранжа пространства S_h . Интерполируем $u(t, r)$, $u_0(r)$ и нелинейные функции $p(u)$, $q(u)$ по базису S_h :

$$u_h(t, r) = \sum_{i=1}^n u_i(t) \varphi_i(r), \quad u_0(r) = \sum_{i=1}^n u_0(r_i) \varphi_i(r), \quad (36)$$

$$p(u) \sim p_I = \sum_{i=1}^n p(u_i) \varphi_i(r), \quad q(u) \sim q_I = \sum_{i=1}^n q(u_i) \varphi_i(r). \quad (37)$$

Использование аппроксимаций (36), (37) и концентрация матрицы массы дают следующую систему ОДУ (записанной в нормальной форме):

$$\dot{\mathbf{u}} = -\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{p}(\mathbf{u}) + \mathbf{q}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0. \quad (38)$$

Здесь $\mathbf{u} = [u_1(t), \dots, u_n(t)]^T$, $\mathbf{p}(\mathbf{u}) = [p(u_1), \dots, p(u_n)]^T$, $\mathbf{q}(\mathbf{u}) = [q(u_1), \dots, q(u_n)]^T$,

$$\tilde{\mathbf{M}} = \text{diag}\{\tilde{m}_{ii}\}, \tilde{m}_{ii} = \sum_{j=1}^n m_{ij}, m_{ij} = \int_0^R r^{N-1} \varphi_i \varphi_j dr, \mathbf{K} = \{k_{ij}\}, k_{ij} = \int_0^R r^{N-1} \varphi_i' \varphi_j' dr.$$

Отметим следующие два преимущества этого подхода: матрица жесткости \mathbf{K} постоянная; матрица массы $\tilde{\mathbf{M}}$ диагональная, так что произведение $\tilde{\mathbf{M}}^{-1} \mathbf{K}$ имеет ту же разреженную структуру, как и матрица \mathbf{K} .

Несимметричный метод Галеркина обобщен для нелинейной параболической задачи (31)–(33) в разделе 1.2.3. После трансформации Кирхгофа (34) уравнение (31) записывается в следующей несимметричной форме:

$$r^\gamma u_t = (r^\gamma p_r)_r + \gamma(N-2)p_r + r^\gamma q(u), \quad \gamma = 0, N = 1; \quad \gamma = 1, N > 1.$$

на основе которой делается дискретизация. Применяя все следующие шаги как в симметричном методе, получаем систему ОДУ:

$$\dot{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(-\mathbf{Kp}(\mathbf{u}) + \gamma(\mathbf{N} - 2)\mathbf{Bu}) + \mathbf{q}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad (39)$$

$$m_{ij} = \int_0^R r^\gamma \varphi_i \varphi_j dr, \quad k_{ij} = \int_0^R r^\gamma \varphi_i' \varphi_j' dr, \quad \mathbf{B} = \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n, \quad b_{ij} = \int_0^R r^\gamma \varphi_i' \varphi_j dr.$$

Матрица \mathbf{B} несимметричная.

Модификация явного метода Рунге-Кутты второго порядка точности с расширенной областью устойчивости, использованная для решения систем ОДУ (38) и (39), приведена в разделе 1.2.4. Реализован автоматический выбор шага так, чтобы одновременно выполнялись условия устойчивости и достижения заданной точности ε в конце интервала интегрирования. Для сингулярных по времени решений использован стоп-критерий $\tau < 10^{-16}$ и тогда \tilde{T}_0 – время, достигнутое в счете.

Выбор явного метода решения системы ОДУ обусловлен следующими причинами:

- исследование чисто неявной нелинейной разностной схемы для решения задачи (31)–(33) при $N = 1$, проведенное в [16], §5, Глава VII, показало, что ее однозначная разрешимость на временном слое накладывает зависимость между шагами по пространству и по времени такова порядка, как и условия устойчивости явной схемы;

- вблизи момента обострения, когда значения решения на временном слое различаются на несколько порядков, связывать их в системе уравнений необоснованно;

- при одинаковых ограничениях на шаги по времени, явные методы намного экономичнее неявных; они допускают и распараллеливание;

- явные методы лучше приспособлены к локальному сгущению пространственной сетки, которое абсолютно необходимо в случае обостряющихся в изолированных точках решений.

Идеология динамических адаптивных сеток, согласованных с автомоделными (и приближенными автомоделными) законами, изложена в самом общем случае в разделе 1.2.5.

Если дифференциальное уравнение $u_t = Lu$ допускает автомоделное решение $u_a(t, x) = \varphi(t)\theta(\xi)$, $\xi = x/\psi(t)$, то связь между x и ξ дает идею как адаптировать пространственную сетку. Для задачи (31)–(33) эта связь дает:

$$\xi = r\Gamma(t)^m, \quad \Delta\xi = \Delta r\Gamma(t)^m, \quad \Gamma(t) = \frac{\max_r u(t, r)}{\max_r u_0(r)}, \quad m = (\beta - \sigma - 1)/2. \quad (40)$$

На основе соотношений (40) выработана следующая стратегия адаптации. Пусть $\Delta r^{(k)}$ – шаг по пространству (длина конечного элемента) в момент времени $t = t^k$.

В LS–режиме, $m > 0$ шаг $\Delta r^{(k)}$ выбирается так, чтобы шаг $\Delta\xi^{(k)}$ был ограничен сверху: $\Delta\xi^{(k)} = \Delta r^{(k)}\Gamma(t)^m \leq \lambda h_0$. Когда условие нарушается, делается следующее:

– каждый элемент делится пополам и значения решения в новых точках находятся линейной или квадратичной интерполяцией по старым значениям;

– чтобы не увеличивать излишне число точек, сгущение сетки делается только в той части области, где решение меняется; точки сетки, где оно уже установилось с заданной точностью δ_u (в расчетах обычно $\delta_u = 10^{-7}$), отбрасываются.

Отметим особо, что условие для $\Delta\xi^{(k)}$ проверяется на каждом временном шаге, но сетка сгущается только тогда, когда оно нарушается. Тогда производится и проверка для отбрасывания точек сетки из-за установления решения.

В HS-режиме, $m < 0$ шаг $\Delta r^{(k)}$ выбирается так, чтобы шаг $\Delta\xi^{(k)}$ был ограничен снизу: $h_0/\lambda \leq \Delta\xi^{(k)} = \Delta r^{(k)}\Gamma(t)^m$. Когда условие нарушается, делается следующее:

– точки сетки, начиная с второй, отбрасываются через одну;

– длина $R(t)$ интервала интегрирования увеличивается вдвое добавлением новых элементов: $R(t^k) = 2R(t^{k-1})$. Адаптация сетки в этом случае производится с сохранением числа элементов.

Эта идея – вложение структурных свойств (геометрии, разных видов симметрий, законов сохранения) непрерывных задач при разработке дискретных методов – лежит в основе нового важного направления в вычислительной математике – геометрическое интегрирование, которому посвящено много работ и монографий (см. например [25],[26]). Достоинство предложенного подхода по сравнению с применяемыми обычно методами подвижных сеток [26] в том, что для сетки здесь не решается дополнительная дифференциальная задача.

На основе изложенного метода создан комплекс программ на языке *FORTRAN* для решения задачи (31)-(33) на множестве всех допустимых физических параметров. Создана также компьютерная система для визуализации особенностей нелинейных процессов. Комплекс программ и система визуализации используются в процессе обучения по курсам “Нелинейные математические модели” и “Математические модели и вычислительный эксперимент” в ФМИ Софийского университета.

В разделе 1.2.6 приведены результаты численного исследования сходимости и точности метода решения задачи (31)-(33) как с автомодельными, так и с неавтомодельными начальными данными.

Пример 1. Это случай $\beta = \sigma + 1$, $N = 1$, когда известно точное решение (с.ф.) (26) автомодельной задачи. Оно использовано в качестве начальных данных для параболической задачи при разных вычислительных параметрах и анализировались его автомодельные представления. Как было сказано, для **обостряющихся решений сходимости и оценка ошибки в автомодельной норме** имеет смысл вплоть до момента обострения. Зависимость этой ошибки от дискретизации по пространству и по времени показана в Таблице 1. Там содержатся также: вычисленное время обострения \tilde{T}_0 , число шагов по времени, максимум решения за это время, и относительные ошибки $e(t, \xi) = |\Theta(t, \xi) - \theta(\xi)|/\max_{\xi} \theta(\xi)$ автомодельных представлений решения $u_{a,h}(t, r)$ для $t = \tilde{T}_0$ в трех точках по r . Как показывают эти и все проведенные эксперименты, восстановление (в процессе решения параболической задачи) времени обострения, заложенном в автомодельной задаче, как и сохранение автомодельности, зависят больше всего от дискретизации по пространству.

Табл. 1. *S*-режим: $\sigma = 2, \beta = 3, N = 1, T_0 = 0.5$

h	ε	T_0	<i>NSTEP</i>	$u(T_0, 0)$	$e(T_0, 1.8)$	$e(T_0, 2.7)$	$e(T_0, 2.8)$
0.1	10^{-2}	0.507910	1262	0.13E+8	0.11E-2	0.33E-2	0.18E-3
0.05	10^{-2}	0.507077	5266	0.62E+7	0.28E-3	0.44E-3	0.11E-7
0.05	10^{-4}	0.499976	5870	0.54E+7	0.28E-3	0.44E-3	0.11E-7
0.05	10^{-6}	0.499958	9057	0.50E+7	0.28E-3	0.44E-3	0.11E-7
0.025	10^{-4}	0.499998	21737	0.31E+7	0.70E-4	0.11E-3	0.0

Пример 2. В Таблице 2 показаны некоторые результаты численного исследования эволюции второй с.ф. $\theta_2(\xi)$ при $\sigma = 2, \beta = 3.25, N = 2, T_0 = 1/(\beta - 1) = 0.4$. Они показывают, что и для немонотонных с.ф. при уменьшении шага h время t_a , до которого автомодельность сохраняется, увеличивается.

Табл. 2 *LS*-режим, $\theta_2(\xi)$: $\sigma = 2, \beta = 3.25, N = 2, T_0 = 0.4$.

h	T_0	$u_{a,m}$	t_a	t_a/T_0
0.25	0.4421401	10	0.4414948	99.85405%
0.125	0.4438751	10^2	0.4438662	99.99799%
0.0625	0.4443102	10^3	0.4443100	99.99996%
0.03125	0.4444104	2×10^4	0.4444104	99.99999%

Глава 2 посвящена исследованию автомодельных решений и их структурной устойчивости в радиально-симметричном случае.

В разделе 2.1 проведено исследование “линейных приближений” к собственным функциям при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$. Получены асимптотики решений

$$y_N(\xi) = F(-a, N/2, (\beta - \sigma - 1)\xi^2/4), \quad a = (\beta - 1)/(\beta - \sigma - 1)$$

линеаризованного уравнения (28) (N – размерность пространства):

$$Y_1(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} y_1(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} F\left(-a, \frac{1}{2}; \frac{1}{a} \frac{\beta - 1}{4} \xi^2\right) = \cos(\sqrt{\sigma}\xi)$$

$$Y_2(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} y_2(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} F\left(-a, 1.0; \frac{1}{a} \frac{\beta - 1}{4} \xi^2\right) = J_0(\sqrt{\sigma}\xi)$$

$$Y_3(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} y_3(\xi) = \lim_{a \rightarrow \infty} F\left(-a, \frac{3}{2}; \frac{1}{a} \frac{\beta - 1}{4} \xi^2\right) = \frac{\sin(\sqrt{\sigma}\xi)}{\sqrt{\sigma}\xi}.$$

где $J_0(x)$ – функция Бесселя. Отсюда для расстояний между C^1 -точками сшивания $\bar{\xi}_i$ (27) (а в пределе $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ и между C^2 -точками сшивания) получено

$$\bar{\xi}_{i+1} - \bar{\xi}_i \rightarrow \pi/\sqrt{\sigma}, \quad \beta \rightarrow \sigma + 1 + 0.$$

Исследовано также поведение точек пересечения с.ф. θ_i с пространственно-однородным решением $\theta(\xi) \equiv 1$ и поведение констант α_i в (27), (29) при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$. На основе результатов даны рекомендации по использованию “линейных приближений”.

В разделе 2.2 исследована и уточнена структура с.ф. *LS*-режима при переходе к *S*-режиму.

1. Показано, что структура с.ф. при $N > 1$ и $\beta \sim \sigma + 1, \beta > \sigma + 1$ существенно отличается от структуры с.ф. при $N = 1$. При $N = 1$ максимумы с.ф. увеличиваются с удалением от центра симметрии [20], а при $N > 1$ вычислительным экспериментом было обнаружено, что при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ первый, центральный максимум с.ф. становится больше других (такие с.ф. были названы потом [12] с.ф. “с перетяжкой”).

2. Различен и переход LS -режима к S -режиму. При $N = 1$ переход $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$ "непрерывен" — с.ф. $\theta_k(\xi)$ LS -режима стремится к с.ф. S -режима, составленной из k элементарных решений (26) (Рис. 1а). При $N > 1$ такого "непрерывного" перехода нет.

2.1. Для фиксированного σ и некоторого $\beta_j^* = \beta_j^*(\sigma, N)$ центральный (первый) минимум с.ф. с четными номерами $\theta_{2j}^{(N)}$, $j = 1, 2, \dots$, становится равным нулю и для $\beta < \beta_j^*(\sigma, N)$ все с.ф. $\theta_{2j}^{(N)}(\xi)$ аннулируются в некоторой области около начала координат (Рис. 1б):

$$\theta_{2j}^{(N)}(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_j^* = \xi_j^*(\sigma, \beta, N), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (\theta_{2j}^{(N)})^\sigma (\theta_{2j}^{(N)})'(\xi_j^*) = 0,$$

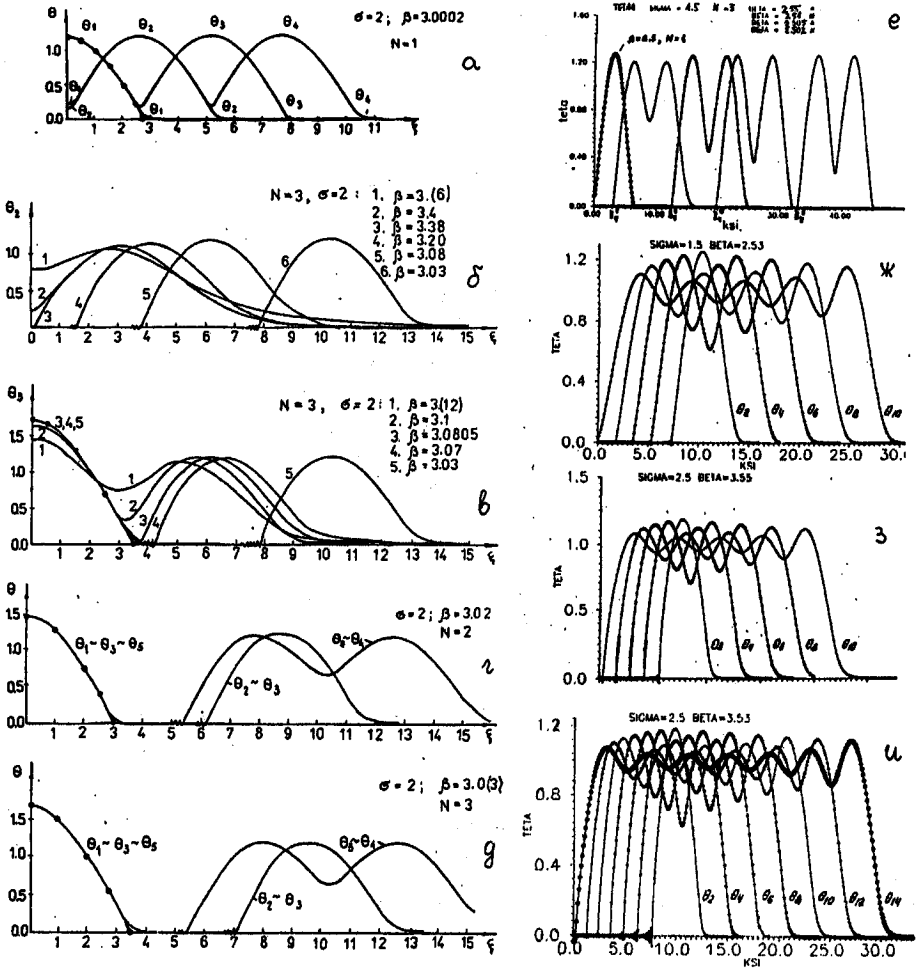


Рис. 1. Поведение с.ф. при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$

при этом ξ_j^* растут при $\beta \rightarrow \sigma+1+0$. Все максимумы $\theta_{2j}^{(N)}(\xi)$ стремятся к максимуму с.ф. S -режима при тем же σ и $N = 1$. Таким образом с.ф. $\theta_{2j}^{(N)}(\xi)$, “уходя на бесконечность” при $\beta \rightarrow \sigma+1+0$, стремится к с.ф. S -режима при $N = 1$ и того же σ , состоящей из j элементарных решений (26) (Рис. 1е).

2.2. Для фиксированного σ существует такое значение $\beta_j^{**} = \beta_j^{**}(\sigma, N)$, что при $\sigma+1 < \beta < \beta_j^{**}$ с.ф. $\theta_{2j+1}^{(N)}(\xi)$, $j = 1, 2, \dots$ распадается на две части: центральная, которая стремится к с.ф. S -режима для соответствующего значения N ($\theta^{(N)}(\xi)$), и вторая, которая совпадает с с.ф. $\theta_{2j}^{(N)}(\xi)$, “уходящей на бесконечность” при $\beta \rightarrow \sigma+1+0$. Для фиксированных σ, N всегда $\beta_j^{**} < \beta_j^*$ (Рис. 1в-1д).

Согласно описанному “сценарию” перехода LS - к S -режиму, при $\beta \rightarrow \sigma+1+0$ остается только первая с.ф. LS -режима, которая стремится к единственной с.ф. S -режима. Этот “сценарий” является результатом детального вычислительного эксперимента.

Так в процессе этого исследования найдены с.ф. новой структуры – с.ф. “с петляжкой” и с.ф. с левым фронтом.

Существование с.ф. с левым фронтом было подтверждено асимптотическим анализом – получена асимптотика с.ф. в окрестности левого фронта $\xi \rightarrow \xi^* + 0$:

$$\theta(\xi) \sim C(\xi - \xi^*)^\alpha, \quad \alpha = 1/\sigma, \quad C = ((\beta - \sigma - 1)\sigma\xi^*/2)^{1/\sigma}.$$

3. Собственные функции с левым фронтом представляют собой тела вращения с “пустотой” в центре. Численные эксперименты показывают, что при $\beta \rightarrow \sigma+1+0$ радиусы “пустот” увеличиваются и четные с.ф. $\theta_{2j}^{(N)}$, $j = 1, 2, \dots$ “выстраиваются” так, что разности этих радиусов стремятся к одной и той же величине. Гипотеза автора о ней: $\rho = \rho(\sigma) = 2\sqrt{\sigma+1}/\sigma = L_S/\pi$ (Рис. 1ж – 1и).

Полученные новые типы решений инициировали исследования других авторов [12]-[14] другими методами (методом динамической аналогии, бифуркационным анализом). Их исследования подтвердили существование этих новых решений, и в частности [14] описанного выше сценария.

В разделе 2.2.3 исследован аналитически предельный случай $\sigma \rightarrow 0$, $\beta = \sigma + 1$. Показано, что при $\sigma \rightarrow 0+$ автомодельное решение S -режима стремится к автомодельному решению с конечной энергией соответствующего линейного уравнения $u_t = u_{xx} + u$, $x \in \mathbb{R}_+$, $t > 0$.

В разделе 2.3 исследовано существование с.ф. и структурная устойчивость а.р. LS -режима при переходе параметра β через некоторые пороговые значения, получившие название “критические экспоненты” (см. [27] и ссылки там), когда свойства решений как автомодельной, так и параболической задачи, меняются существенно. До сих пор обнаружены следующие критические экспоненты:

$$\begin{aligned} \beta_f &= \sigma + 1 + 2/N \text{ (экспонента Фуджита);} \\ \beta_s &= (\sigma + 1)(N + 2)/(N - 2), \quad N \geq 3 \text{ (экспонента Соболева);} \\ \beta_u &= (\sigma + 1)(1 + 4/(N - 4 - 2\sqrt{N - 1})), \quad N \geq 11; \quad \beta_u = \infty, \quad N < 11; \end{aligned}$$

$$\beta_p = 1 + \frac{3(\sigma + 1) + (\sigma^2(N - 10)^2 + 2\sigma(5\sigma + 1)(N - 10) + 9(\sigma + 1)^2)^{1/2}}{N - 10}, \quad N \geq 11.$$

В разделе 2.3.1 исследована структурная устойчивость неограниченных решений с конечной энергией для параметров $\beta > \beta_f = \sigma + 1 + 2/N$, когда автомодельное

решение (5) $u_a(t, r) \notin L_1(\mathbb{R}^N)$. В этом случае качественная теория нестационарного осреднения “амплитуда – полуширина” предсказывает автомодельное поведение амплитуды решения задачи (31)–(33) и возможное неавтомодельное поведение полуширины [16]. Там был поставлен вопрос: какое инвариантное или ПАР описывает асимптотическую ($t \rightarrow T_0^-$) стадию процесса? Численное исследование стало возможным благодаря адаптации сетки. Показано, что а.р. (5), соответствующее $\theta_1(\xi)$, структурно устойчиво: во всех экспериментах с финитными начальными данными, обеспечивающими неограниченность решений, на асимптотической стадии они стремятся к автомодельному.

В разделе 2.3.2 конструированы численно решения а.з. при соотношениях параметров за критическими экспонентами $\beta \geq \beta_s$, $N \geq 3$; $\beta \geq \beta_u$, $N \geq 11$; $\beta > \beta_p$, $N \geq 11$. Таким образом конструктивно установлено существование решений а.з. при $\beta \geq \beta_u$, $N \geq 11$, что является открытой проблемой [27]. Показано тоже, что соответствующие им автомодельные решения структурно устойчивые, что подтверждает гипотезу из [27].

В разделе 2.4 разработанные для радиально-симметричных задач (9), (16), (17) и (31)–(33) методы обобщены на случай системы нелинейных уравнений с источниками, которая описывает процессы теплопроводности и горения двухкомпонентной среды:

$$\begin{cases} u_{1t} = x^{1-N}(x^{N-1}u_1^{\sigma_1}u_{1x})_x + u_1^{\beta_1}u_2^{\gamma_2}, & x \in R_+^1, N = 1, 2, 3, \\ u_{2t} = x^{1-N}(x^{N-1}u_2^{\sigma_2}u_{2x})_x + u_1^{\gamma_1}u_2^{\beta_2}, & \sigma_i > 0, \beta_i > 1, \gamma_i \geq 0, i = 1, 2. \end{cases} \quad (41)$$

Система допускает неограниченные автомодельные решения $u_a = (u_{1a}, u_{2a})$

$$u_{1a} = g_1(t)\theta_1(\xi) = (1-t/T_0)^{m_1}\theta_1(\xi), \quad \xi = x/(1-t/T_0)^n, \quad (42)$$

$$u_{2a} = g_2(t)\theta_2(\xi) = (1-t/T_0)^{m_2}\theta_2(\xi), \quad m_i < 0, i = 1, 2,$$

$$m_i = \alpha_i/p, \quad \alpha_i = \gamma_i + 1 - \beta_i, \quad i = 1, 2, \quad p = (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) - \gamma_1\gamma_2,$$

$$n = (m_1\sigma_1 + 1)/2 = (m_2\sigma_2 + 1)/2, \quad \sigma_1(\gamma_2 + 1 - \beta_2) = \sigma_2(\gamma_1 + 1 - \beta_1), \quad 0 < Nn < -m_i, \quad i = 1, 2.$$

Функции $\theta_1(\xi)$, $\theta_2(\xi)$ удовлетворяют системе автомодельных уравнений

$$\begin{cases} L_1(\theta_1, \theta_2) \equiv -\xi^{1-N}(\xi^{N-1}\theta_1^{\sigma_1}\theta_1') + n\xi\theta_1' - m_1\theta_1 - \theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\gamma_2} = 0, \\ L_2(\theta_1, \theta_2) \equiv -\xi^{1-N}(\xi^{N-1}\theta_2^{\sigma_2}\theta_2') + n\xi\theta_2' - m_2\theta_2 - \theta_1^{\gamma_1}\theta_2^{\beta_2} = 0 \end{cases} \quad (43)$$

и краевым условиям

$$f_i'(\xi) = (m_i/n) (f_i(\xi)/\xi), \quad \xi = l \gg 1, \quad i = 1, 2 \quad (44)$$

В уравнениях (43) без ограничения общности положено $T_0 = 1$. Поведение автомодельных решений при $t \rightarrow T_0$ зависит от знака параметра n : $n < 0$ – HS режим с обострением; $n = 0$ – S режим с обострением; $n > 0$ – LS режим с обострением.

Системы (41) и (43) называются системами с сильной обратной связью, если $p < 0$, и системами с слабой обратной связью, если $p > 0$.

В случае $N = 1$ автомодельное решение (42) и задача (43), (44) рассматривались в работах Курдюмова С.П., Куркиной Е.С., Малинецкого Г.Г. и Тельковской О.В.. При

численном построении с.ф. для конкретных параметров использованы разностные методы и метод стрельбы.

Для построения с.ф. и детального исследования структурной устойчивости автомодельных решений при $N = 1, 2, 3$ здесь использованы обобщения методов, изложенных в Главе 1. Сформулируем основные результаты:

- структурно устойчивыми являются только а.р. с двумя компонентами простой структуры систем с сильной обратной связью;
- все другие а.р. метаустойчивы.

Таким образом показана принципиальная возможность применения разработанных методов для исследования процессов самоорганизации в широких классах нелинейных диссипативных сред, описываемых системами типа реакция–диффузия.

В Главе 3 исследуется асимптотическое поведение сингулярных по времени решений трех классов полулинейных параболических уравнений с источниками

$$u_t = r^{1-N}(r^{N-1}u_r)_r + Q(u), \quad r \in \mathbb{R}_+, \quad t > 0, \quad N = 1, 2, 3 \quad (45)$$

$$Q(u) = (1+u) \ln^\beta(1+u), \quad \beta > 1, \quad Q(u) = u^\beta, \quad \beta > 1, \quad Q(u) = e^u.$$

Условия существования неограниченных решений таких уравнений изучаются с 1966 г. и этой проблеме посвящено большое количество работ (см. обзор в книге [28]). Случай полулинейных уравнений, где из-за недостаточности диффузии не возникает сложных структур, оказался более трудный для исследования, чем квазилинейный случай. Причина этому – несуществование точных инвариантных решений (кроме тривиальных гомотермических) вообще или для некоторых размерностей N пространства. В этих случаях асимптотическое поведение неограниченных решений описывается **приближенными автомодельными решениями (ПАР)**, которые являются точными а.р. других уравнений – уравнений типа Гамильтона-Якоби. Это означает, что на асимптотической стадии, при $t \rightarrow T_0^-$, параболическое уравнение вырождается в уравнении первого порядка. Строгие результаты о вырождении на асимптотической стадии уравнения (45) получены в основном для $N = 1$ и при ограничениях на начальные возмущения. Поэтому **численное исследование, особенно при $N > 1$, является актуальной задачей.**

В разделе 3.1 исследуется уравнение с источником $Q(u) = (1+u) \ln^\beta(1+u)$, которое не имеет нетривиальных инвариантных решений с обострением [16,17]. Это единственное полулинейное уравнение, для которого до сих пор найдены аналоги трех режимов с обострением: *HS*–режим: $1 < \beta < 2$; *S*–режим: $\beta = 2$; *LS*–режим: $\beta > 2$. В начале [16] качественными методами было показано, что асимптотическое поведение его неограниченных решений описывается автомодельными решениями

$$v(t, r) = \exp\{(T_0 - t)^{-1/(\beta-1)}\theta(\xi)\} - 1, \quad \xi = r(T_0 - t)^{-m/(\beta-1)}, \quad m = (\beta - 2)/2, \quad (46)$$

$$(\theta')^2 - \frac{m}{\beta-1}\theta'\xi - \frac{1}{\beta-1}\theta + \theta^\beta = 0, \quad \theta(\xi) = \cos^2(\xi/2), \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \quad \text{при } \beta = 2 \quad (47)$$

уравнения первого порядка типа Гамильтона-Якоби $v_t = v_r^2/(1+v) + (1+v) \ln^\beta(1+v)$.

Уже имеются строгие результаты [29] об асимптотической устойчивости ПАР (46). При достаточно ограничительных предположениях [29] на начальное возмущение доказано, что при $\beta = 2$, $N = 1$ область эффективной локализации $L_{SL} = [-\pi, \pi]$. Для $\beta = 2$ и $N > 1$ нет такого точного результата – доказано только, что решение

растет неограничено в сфере $B \supseteq \{r \leq \pi\}$. Нами показана численно (раздел 3.1.3) структурная устойчивость ПАР (46) при практически произвольных начальных данных во всех трех режимах. В S -режиме ($\beta = 2$) все численные эксперименты подтверждают сходимость автомодельных представлений к точному решению (47) для произвольных начальных данных при $N = 1$ и для достаточно больших при $N = 2, 3$ (чтобы обеспечить неограниченность решения, см. [16]). Показано также, что при $\beta = 2$, $N > 1$ неограниченное решение эффективно локализовано в сфере радиуса π : $\omega_L = \{r \leq \pi\}$. Кроме того показано: если начальное возмущение нецентрального, достаточно далеко от центра симметрии и с достаточно большой энергией, то тепловая энергия не расплывается и горение локализовано эффективно в кольцевой области толщиной 2π , что является новым результатом (Рис. 2).

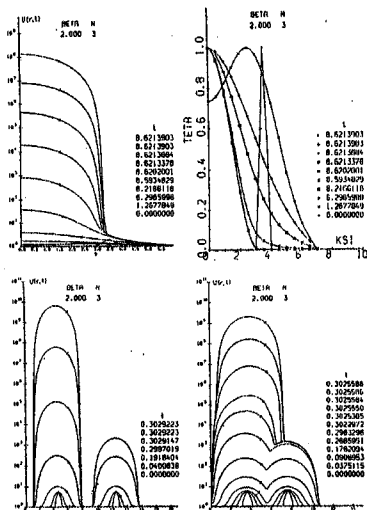


Рис. 2. $\beta = 2$, $N = 3$

Методом конечных элементов с концентрацией матрицы массы, интерполированием нелинейных коэффициентов и динамической адаптацией сетки решалась численно как оригинальная задача (для переменной u), так и трансформированная, для $U(t, r) = \ln(1 + u(t, r))$ (раздел 3.1.2).

В разделе 3.2 исследовано асимптотическое поведение решений уравнения с источником $Q(u) = u^\beta$. При $1 < \beta \leq 1 + 2/N$, $u_0 \neq 0$, задача Коши имеет только неограниченные решения, но их асимптотика существенно отличается от той, которую следует ожидать по аналогии с квазилинейным случаем. Автомодельная задача, которая получается по этой аналогии, не имеет решения при $1 < \beta \leq \beta_s = (N + 2)/(N - 2)_+$.

Качественный анализ [16] показал, что пространственно-временная структура $u(t, x)$ при $t \rightarrow T_0^-$ описывается ПАР

$$u_a^*(t, r) = (T_0 - t)^{-\beta-1} \theta^*(\eta), \quad \eta = \frac{r}{\sqrt{(T_0 - t) |\ln(T_0 - t)|}}, \quad (48)$$

$$\theta^*(\eta) = \{\beta - 1 + ((\beta - 1)\eta)^2 / (4\beta)\}^{-\beta-1} \quad (49)$$

которое является точным а.р. уравнения $v_t + x v_x \{2(T_0 - t) |\ln(T_0 - t)|\}^{-1} = v^\beta$.

Строгое доказательство этого результата дано в [30] для $N = 1$ и при ограничениях на начальные данные. Для $N > 1$ строгого доказательства нет. Численным экспериментом нами показана структурная устойчивость ПАР (48), (49) для $N = 1, 2, 3$ при практически произвольных начальных данных.

В разделе 3.3 исследовано асимптотическое поведение решений уравнения с источником $Q(u) = e^u$ (модель воспламенения твердого горючего). Задача Коши имеет

В разделе 3.3 исследовано асимптотическое поведение уравнения с источником $Q(u) = e^u$ (модель воспламенения твердого горючего). Задача Коши имеет только неограниченные решения, но уравнение (45) при $N = 1, 2$ не имеет точных инвариантных неограниченных решений, кроме гомотермического $u_H = -\ln(T_0 - t)$. Качественный анализ [16] показал, что асимптотическое поведение неограниченных решений описывается ПАР

$$u_a^*(t, r) = -\ln(T_0 - t) + \theta^*(\eta), \quad \eta = \frac{r}{\sqrt{(T_0 - t)|\ln(T_0 - t)|}}, \quad \theta^*(\eta) = \ln\left(\left(1 + \frac{\eta^2}{4}\right)^{-1}\right) \quad (50)$$

которое является точным а.р. уравнения $v_t + xv_x\{2(T_0 - t)|\ln(T_0 - t)|\}^{-1} = e^v$.

Строгое доказательство для $N = 1$ и при ограничениях на начальные данные дано в [30]; для $N = 2$ нет строгого доказательства. Численным экспериментом нами показана структурная устойчивость ПАР (50) для $N = 1, 2$ при практически произвольных начальных данных.

Отметим, что ПАР (48), (50) существенно отличаются от а.р., рассматриваемых до сих пор. Это отличие, во-первых, в зависимости автомодельной переменной η от произведения $(T_0 - t)|\ln(T_0 - t)|$, и, во-вторых, в структуре ПАР (50), которое является суммой гомотермического решения и функции $\theta^*(\eta)$. Разработанные численные методы (отметим особо адаптацию сетки, согласованную с ПАР) работают достаточно хорошо и при наличии этих особенностей и дают возможность установить структурную устойчивость ПАР (48), (50) на достаточно больших компактах $|\eta| \leq \eta^*$

Глава 4 посвящена исследованию новых способов организации в двумерной нелинейной теплопроводной среде.

В разделе 4.1 построены численно инвариантные решения, которые описывают направленное распространение тепла и горения в нелинейной анизотропной среде со степенными коэффициентами теплопроводности

$$u_t = (u^{\sigma_1} u_{x_1})_{x_1} + (u^{\sigma_2} u_{x_2})_{x_2} + u^\beta, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \sigma_1 > 0, \quad \sigma_2 > 0, \quad \beta > 1. \quad (51)$$

В работе [31], (см. тоже [17]) методами группового анализа установлено, что уравнение (51) допускает неограниченное инвариантное решение

$$u_a(t, x_1, x_2) = (1 - t/T_0)^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \xi_i = x_i (1 - t/T_0)^{-m_i/(\beta-1)}$$

$m_i = (\beta - \sigma_i - 1)/2$, $i = 1, 2$. Функция $\theta(\xi)$ удовлетворяет нелинейному эллиптическому уравнению (в нем положено $T_0 = 1/(\beta - 1)$):

$$L(\theta) \equiv \sum_{i=1}^2 \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\theta^{\sigma_i} \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \right) + \frac{\beta - \sigma_i - 1}{2} \xi_i \frac{\partial \theta}{\partial \xi_i} \right) + \theta - \theta^\beta = 0. \quad (52)$$

Характер распространения тепла определяется соотношением между величинами β , $(\sigma_1 + 1)$, $(\sigma_2 + 1)$. По аналогии с радиально-симметричным случаем в каждом направлении ξ_i рассматриваем три типа соотношений:

- $1 < \beta < \sigma_i + 1$ - HS -режим с обострением;
- $1 < \beta = \sigma_i + 1$ - S -режим с обострением;
- $\sigma_i + 1 < \beta$ - LS -режим с обострением.

В разделе 4.1.1 поставлена краевая задача для уравнения (52), приведена итерационная схема на основе НАМН и построены начальные приближения.

Для $LS - S - (LS - HS -)$ режимов использовались начальные приближения

$$\tilde{\theta}_i(\xi_1, \xi_2) = \theta_{i,0}^{(1)}(\xi_1)\theta_0(\xi_2), \quad i = 1, 2, \dots, k_1,$$

которые являются произведением одномерных приближений (27) для $LS-$ и (25) для $S - (HS -)$ режимов.

Метод решения параболической задачи обсуждается в разделе 4.1.2. И здесь основной момент при реализации МКЭ – это трансформации Кирхгофа:

$$p_\alpha(u) = \int_0^u \lambda_\alpha(\omega) d\omega, \quad \lambda_\alpha(\omega) = \omega^{\sigma_\alpha}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Они, вместе с последующей интерполяцией нелинейных функций $p_\alpha(u)$ и $q(u) = u^\beta$ позволяют перенести нелинейность задачи на векторы $\bar{p}_\alpha(\bar{U})$ и $\bar{q}(\bar{U})$ в системе ОДУ

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \tilde{M}^{-1} \{K_1 \bar{p}_1(\bar{U}) + K_2 \bar{p}_2(\bar{U})\} + \bar{q}(\bar{U}), \quad \bar{U}(0) = \bar{U}_0 \quad (53)$$

относительно $\bar{U}(t) = \{U_1(t), \dots, U_n(t)\}^T$, что очень важно для эффективности метода в двумерном случае.

Метод реализован в виде комплекса программ, который представляет собой развитие Пакета прикладных программ TERMO для решения тепловых задач методом конечных элементов, созданного в ИМИ БАН и предназначенного для решения двумерных стационарных и нестационарных задач теплопроводности (электро- и магнитостатики, диффузии, фильтрации) для кусочно-неоднородных сред.

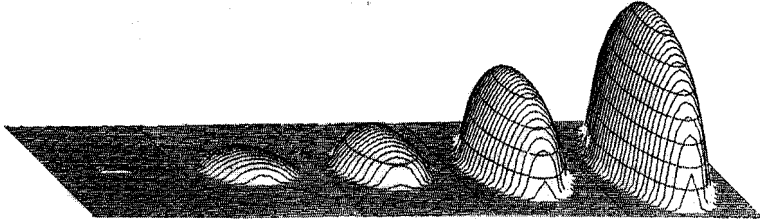


Рис. 3. $HS - S-$ режим: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2, \beta = 3$.

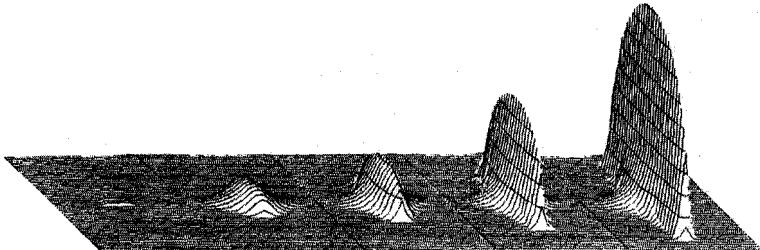


Рис. 4. $HS - LS-$ режим: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 1, \beta = 3$.

В разделе 4.1.3 приведены три типа решений, отвечающие одним и тем же начальным данным:

$$u(0, x_1, x_2) = u_0(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & (x_1, x_2) \in \Omega_1 \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_1 \end{cases}, \quad \Omega_1 = \{0 \leq x_1 \leq b_1, 0 \leq x_2 \leq b_2\}.$$

- $HS - S$ -режим: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 2, \beta = \sigma_2 + 1 = 3$ (Рис. 3). По направлению x_1 тепловой фронт за конечное время T_0 достигает бесконечности (S -режим), а в направлении x_2 тепло распространяется лишь до некоторой глубины L_S , после чего происходит остановка фронта (S -режим). Носитель решения представляет выпуклую область.

- $HS - LS$ -режим: $\sigma_1 = 3, \sigma_2 = 1, \beta = 3$ (Рис. 4). По направлению x_1 тепловой фронт за конечное время T_0 достигает бесконечности (S -режим), а в направлении x_2 происходит сокращение эффективной глубины прогрева (LS -режим). На финальной стадии решение представляет собой бесконечно прогретую линию, вне которой температура конечна.

Для сравнения там приведен также S -режим: $\sigma_1 = \sigma_2 = \beta - 1 = 2$.

В разделе 4.2 исследуются автомодельные решения двумерной модели тепловых структур в полярных координатах:

$$u_t = \frac{1}{r}(ru^\sigma u_r)_r + \frac{1}{r^2}(u^\sigma u_\varphi)_\varphi + u^\beta, \quad t > 0, 0 < r < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (54)$$

Методом инвариантно-группового анализа С.Р. Свиричевским было установлено, (см. тоже [17]), что оно допускает инвариантные решения следующего вида:

$$u_a(t, r, \varphi) = (1 - \frac{t}{T_0})^{-\frac{1}{\beta-1}} \theta(\xi, \phi), \quad \xi = r(1 - \frac{t}{T_0})^{\frac{m}{\beta-1}}, \quad \phi = \varphi + \frac{C_0}{\beta-1} \ln(1 - \frac{t}{T_0}), \quad (55)$$

Здесь C_0 - параметр семейства решений. Функция $\theta(\xi, \phi) \geq 0$ удовлетворяет нелинейному эллиптическому уравнению (как и раньше, положено $T_0 = 1/(\beta - 1)$):

$$L(\theta) \equiv -\frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \xi}) - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \phi} (\theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \phi}) + m \xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - C_0 \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + \theta - \theta^\beta = 0. \quad (56)$$

Из (55) при $C_0 \neq 0$ непосредственно следует

$$\xi e^{s\phi} = r e^{s\varphi} = \text{const}, \quad s = (\beta - \sigma - 1)/2C_0 = m/C_0. \quad (57)$$

Это означает, что траектории неоднородностей в среде (например, локальных максимумов) будут логарифмическими спиралями при $\beta \neq \sigma + 1$ или окружностями при $\beta = \sigma + 1$. Направление движения для фиксированного C_0 , например $C_0 > 0$, зависит от соотношения σ и β : при $\beta > \sigma + 1$ - к центру (скручивающиеся спирали), при $\beta < \sigma + 1$ - от центра (раскручивающиеся спирали).

Случай $C_0 = 0$ рассматривался в работах [32],[33]. Там впервые конструированы радиально-несимметричные с.ф. горения среды в LS -режиме. В HS -режиме до сих пор были получены только радиально-симметричные с.ф.. Причина этому - решения автомодельной задачи всегда искались при условии

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \theta(\xi, \phi) = \theta_H^0 \equiv 0.$$

Изменение идеологии – искать решения а.з., которые на бесконечности стремятся не к тривиальному решению $\theta \equiv 0$, а к гомотермическому $\theta \equiv \theta_H \equiv 1$:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \theta(\xi, \phi) = \theta_H \equiv 1.$$

дало возможность получить два новых класса с.ф. в HS -режиме – радиально несимметричные с.ф. сложной симметрии при $C_0 = 0$ и спиральные с.ф. при $C_0 \neq 0$. Изменение идеологии было подсказано в процессе тщательного исследования (аналитического и численного) решений линеаризованного относительно $\theta_H \equiv 1$ автомодельного уравнения и их эволюции во времени.

Раздел 4.2.1 посвящен радиально-несимметричным с.ф. в LS -режиме при $C_0 = 0$. На основе метода линеаризации и сшивания с асимптотикой в работах [32],[33] предложен эффективный способ определения начальных приближений ($EiMm$) для решения автомодельной задачи итерационным методом. Проведенные там эксперименты показали: структура с.ф. не всегда следует структуре начальных приближений; итерационный процесс сходится не при всех начальных приближениях. Там был поставлен вопрос о создании более эффективного итерационного метода и это обусловило наше исследование.

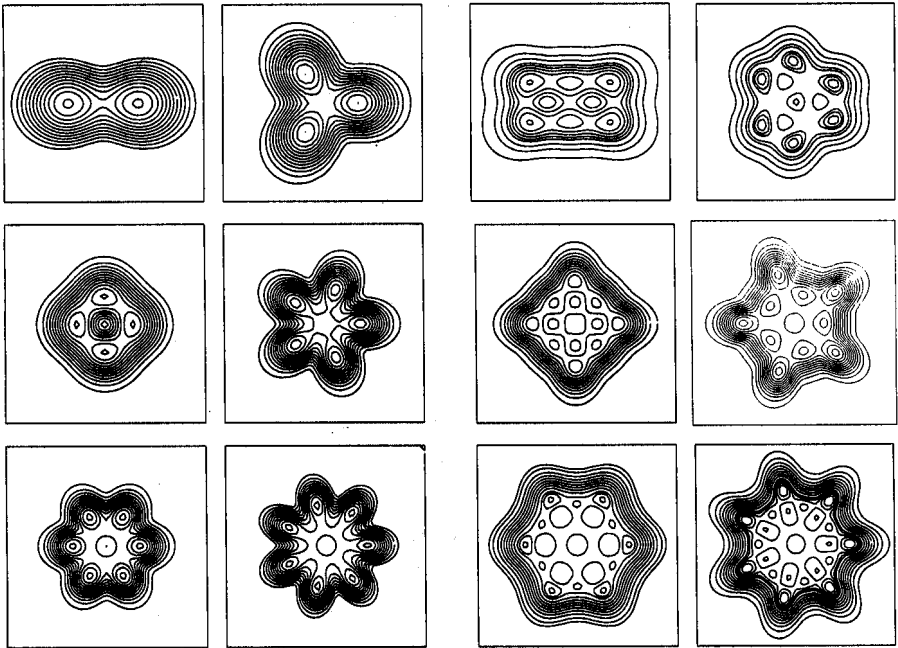


Рис. 5. $\sigma = 2$, $\beta = 3.25$. слева: $E1Mm$, $m = 2, \dots, 7$; справа: $E2Mm$, $m = 2, \dots, 7$

Используя обобщенные на случай полярных координат методы из **Раздела 4.1** и способ получения линейных приближений из [33], нами были сконструированы

с.ф. для разных значений параметров σ и β и разной степени симметрии. В некоторых случаях однако итерационный процесс сходил к радиально-симметричным с.ф. Впоследствии в диссертации М. Колевой были предложены и реализованы начальные приближения, число и поведение которых в области немонотонности тоже самое, как у предложенных в [33], но различающиеся от них процедурой сшивания с асимптотикой – сшивание проводилось по окружности, а не по лучам. С их помощью удалось получить радиально-несимметричные с.ф. в тех случаях, когда прежними приближениями это не удавалось. На Рис. 5 слева показаны изолинии с.ф. E_1M_m для $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$, а справа – изолинии с.ф. E_2M_m , $m = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ для значений параметров $\sigma = 2$, $\beta = 3.25$.

Отметим следующее:

- как и в работе [33], при $m > 1$ наблюдалось раздвоение некоторых максимумов начальных приближений, при этом для данного значения m оно происходило для двух видов начальных приближений (на Рис. 5. это E_2M_2 и E_2M_3);

- при одном и том же наборе параметров нам удалось получить большее количество с.ф., чем в работе [33].

- исследование эволюции во времени радиально-несимметричных с.ф. LS -режима показало, что соответствующие им автомодельные решения **метаустойчивые**. Они сохраняют свою структуру (в смысле (15)) до времени T , очень близкое к времени обострения T_0 . После этого сложная тепловая структура вырождается в одну или несколько простых структур, соответствующих самой простой (в общем случае радиально-симметричной) с.ф. с теми же параметрами σ, β .

Разделы 4.2.2-4.2.7 посвящены конструированию радиально-несимметричных с.ф. в HS -режиме.

Задача о численной реализации “спиральных” инвариантных решений была поставлена в 1984 г. Как отмечалось в [34], на пути к её решению были существенные трудности. Во первых, считалось, что линеаризация автомодельного уравнения здесь не дает желаемого результата, потому что в полученном линейном уравнении нельзя сделать разделения переменных. Во вторых, не была известна асимптотика решений автомодельного уравнения (56) на бесконечности.

Для преодоления этих проблем сделано следующее.

1. Предложено (**Раздел 4.2.3**) подходящее (комплекснозначное) разделение переменных

$$Y_k(\xi, \phi) = R_k(\xi)e^{ik\phi}, \quad k \neq 0, \quad k - \text{целое (для периодичности)} \quad (58)$$

в линеаризованном относительно гомотермического решения автомодельном уравнении

$$\frac{1}{\xi}(\xi y_\xi)_\xi + \frac{1}{\xi^2}y_{\phi\phi} - \frac{\beta - \sigma - 1}{2}\xi y_\xi + C_0 y_\phi + (\beta - 1)y = 0. \quad (59)$$

Для функции $R_k(\xi)$ получено уравнение:

$$R_k'' + \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\beta - \sigma - 1}{2}\xi \right) R_k' + \left(-\frac{k^2}{\xi^2} + C_0 k i + \beta - 1 \right) R_k = 0 \quad (60)$$

2. Рассмотрены ограниченные в т. $\xi = 0$ решения уравнения (60) при $k > 0$:

$$\beta = \sigma + 1: R_k(\xi) = J_k(z), \quad z = (\sigma + C_0 k i)^{1/2} \xi,$$

$J_k(z)$ – функция Бесселя первого рода порядка k ,

$$\beta \neq \sigma + 1 : R_k(\xi) = \xi^k {}_1F_1(a, b; z), \quad a = -\frac{\beta - 1 + C_0 k i}{\beta - \sigma - 1} + \frac{k}{2}, \quad b = 1 + k, \quad z = \frac{\beta - \sigma - 1}{4} \xi^2,$$

${}_1F_1(a, b; z)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

3. На основании свойств функций $J_k(z)$ и ${}_1F_1(a, b; z)$ установлено:

- можно рассматривать только случай $k > 0, C_0 > 0$;
- если $\beta = \sigma + 1$ (и $C_0 k \neq 0$) или $\beta > \sigma + 1$, то $|R_k(\xi)| \rightarrow \infty$ когда $\xi \rightarrow \infty$;
- если $\beta < \sigma + 1$, то $|R_k(\xi)| \rightarrow 0$, когда $\xi \rightarrow \infty$.

4. Обосновано, что без ограничения общности можно использовать только реальную часть

$$y_k(\xi, \varphi) = |R_k(r)| \cos(\arg(R_k(\xi) + k\varphi))$$

частных решений (58) линейного уравнения (59).

5. Исследована геометрическая структура решений $y_k(\xi, \varphi)$ в зависимости от параметров σ, β, C_0 и k . Самый существенный результат: **линии уровня функций $y_k(\xi, \varphi)$ при $\beta < \sigma + 1$ ($\beta > \sigma + 1$) и при больших ξ близки к логарифмическим спиральям с параметром $s(-s)$, определенным в (57).** Этот факт дал возможность вывести асимптотику с.ф. $\theta(\xi, \varphi)$ из асимптотики решений $y_k(\xi, \varphi)$:

$$y_k(\xi, \varphi) \sim c \xi^{(\beta-1)/m} \cos k \left(\varphi + \frac{1}{s} \ln \xi \right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad c = c(k, \sigma, \beta, C_0). \quad (61)$$

6. Предложены “линейные приближения” к с.ф. HS -режима:

$$\tilde{\theta}_k(r, \varphi) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 + \alpha y_k(r, \varphi), & 0 \leq r < r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 1, & r \geq r_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right\}, \quad (62)$$

α, r_0 – константы. В экспериментах r_0 выбиралось так, чтобы круг $V_{r_0}(0)$ был телом спирали для $\delta = 0.01$.

7. Чтобы установить как близки “линейные приближения” к с.ф., была исследована их эволюция во времени и асимптотика при $t \rightarrow T_0^-$ (Раздел 4.2.4). Использовано **автомодельное представление** $\Theta(t, \xi, \varphi)$ решения $u(t, r, \varphi)$, соответствующего начальным данным $u_0(r, \varphi)$, согласованное с автомодельным законом (55) при $C_0 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \Theta(t, \xi, \varphi) &= u(t, r, \varphi) / \Gamma(t), \quad \xi = r \Gamma(t)^m, \quad \phi = \varphi - C_0 \ln(\Gamma(t)), \\ \Gamma(t) &= \max_{\Omega} u(t, r, \varphi) / \max_{\Omega} u_0(r, \varphi), \quad \bar{\Omega} = [0, \infty) \times [0, 2\pi) \end{aligned} \quad (63)$$

Численные эксперименты, проведенные для широкого набора физических и вычислительных параметров, показали, что при $\alpha \ll 1$ приближения (62) близки с.ф.: они сохраняют свою структуру до времени, близкое к \tilde{T}_0 , при этом \tilde{T}_0 очень близко к времени обострения а.р., отвечающих тем же параметрам σ, β . И это вполне естественно – линеаризация “уничтожает” S и LS -режимы (линеаризованное уравнение имеет линейную диффузию и линейный источник, т.е. для его решений полуширина будет увеличиваться, как это имеет место в HS -режиме).

8. Асимптотика (61) предсказывает следующую асимптотику с.ф. $\theta(\xi, \phi) = \theta_k(\xi, \phi)$, $k = 1, 2, \dots$:

$$\theta_k(\xi, \phi) \sim 1 + \gamma \xi^{(\beta-1)/m} \cos k \left(\phi + \frac{1}{s} \ln \xi \right), \quad \xi \rightarrow \infty, \quad \gamma = \alpha c \quad (64)$$

и такую аппроксимацию:

$$\bar{\theta}_k(\xi, \phi) = 1 + \alpha y_k(\xi, \phi), \quad \alpha = \text{const.} \quad (65)$$

9. Из (64) выведено граничное условие третьего рода при $\xi = l \gg 1$:

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \xi} = \frac{\theta_k - 1}{m^* \xi} - \frac{\gamma k}{s \xi^{(m^*-1)/m^*}} \sin k \left(\phi + \frac{1}{s} \ln \xi \right), \quad m^* = m/(\beta - 1). \quad (66)$$

При решении задачи о спиральных с.ф. возникла идея поиска в случае $C_0 = 0$ сложных немонотонных волн HS -режима, выходящих на гомотермический фон при $\xi \rightarrow \infty$. Для единообразного рассмотрения автомодельная задача ставится в области $\bar{\Omega} = [0, l] \times [0, \omega]$, где $\omega = \pi/k$ для $C_0 = 0$ и $\omega = 2\pi/k$ для $C_0 \neq 0$, с условиями симметрии при $C_0 = 0$:

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \phi}(\xi, 0) = \frac{\partial \theta_k}{\partial \phi}(\xi, \frac{\pi}{k}) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad (67)$$

с условиями периодичности при $C_0 \neq 0$

$$\theta_k(\xi, 0) = \theta_k(\xi, \frac{2\pi}{k}), \quad \frac{\partial \theta_k}{\partial \phi}(\xi, 0) = \frac{\partial \theta_k}{\partial \phi}(\xi, \frac{2\pi}{k}), \quad 0 \leq \xi \leq l, \quad (68)$$

и с условием симметрии в нуле. Задача замыкается краевым условием (66) при $C_0 \neq 0$ и краевым условием

$$\frac{\partial \theta_k}{\partial \xi} = \frac{\theta_k - 1}{m^* \xi}, \quad m^* = m/(\beta - 1)$$

при $C_0 = 0$. В Разделе 4.2.5 изложен численный метод решения автомодельной задачи, в Разделе 4.2.6 – параболической задачи.

Раздел 4.2.7 содержит результаты численного исследования асимптотического поведения радиально несимметричных волн в HS -режиме. Одновременно продемонстрированы надежность и хорошая точность методов решения как эллиптической, так и параболической задачи.

Все проведенные численные эксперименты демонстрируют высокую точность восстановления времени обострения T_0 и метаустойчивость этих волн. Эволюция во времени пяти с.ф., отвечающих одним и тем же параметрам $\sigma = 2$ и $\beta = 2.4$, показана и анализирована. Первые две с.ф. отвечают параметру $C_0 = 0$, остальные три – $C_0 = 1$. Точное время обострения равняется $T_0 = 1/(\beta - 1) = 0.714285$.

Здесь приведена эволюция двух с.ф.. На Рис. 6, ($t = 0$), показаны поверхность и линии уровня с.ф. с одним максимумом, одним минимумом и с одной осью симметрии, вычисленной из начального приближения (65), где $k = 1$, $\alpha = 1$. При $t > 0$ показаны линии уровня решения параболической задачи на четырех временных слоях. Время обострения, найденное в счете, $\tilde{T}_0 = 0.714475$. Для $0 \leq t \leq 0.7108 = 99.49\% \tilde{T}_0$ движение максимума следует автомодельному закону

$$r(t) = r(0)(1 - t/T_0)^{\frac{m}{\beta-1}} \approx r(0)\Gamma(t)^{-m}.$$

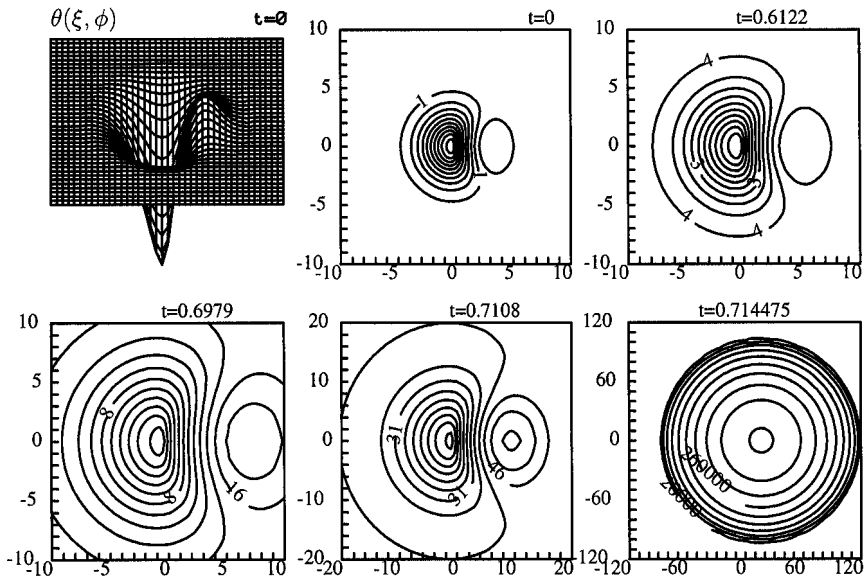


Рис. 6. Эволюция сложной волны HS -режима: $\sigma = 2$, $\beta = 2.4$, $C_0 = 0$, $k = 1$.

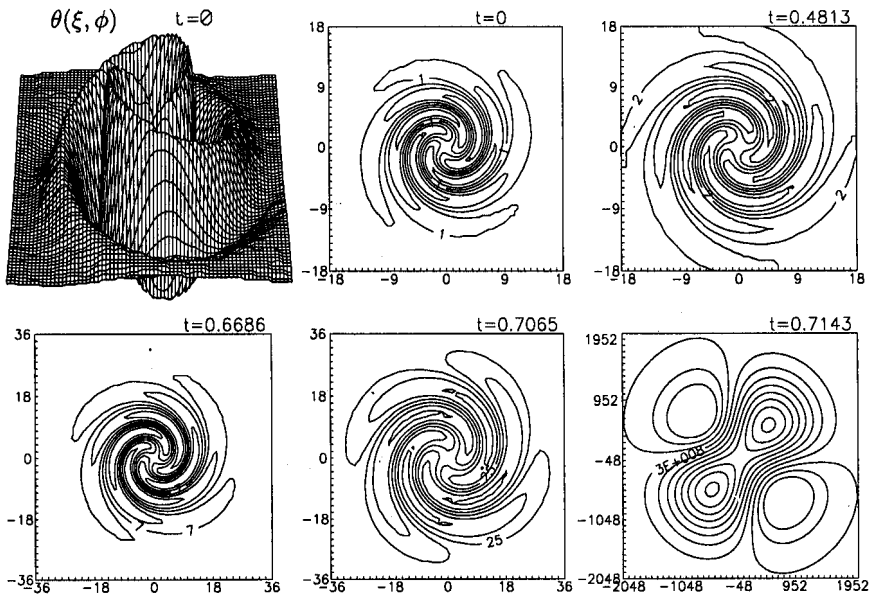


Рис. 7. Эволюция двухвуканной спиральной волны: $\sigma = 2$, $\beta = 2.4$, $C_0 = 1$, $k = 2$.

На асимптотической стадии фон решения замирает, сложная волна вырождается в радиально симметричную, развивающуюся на этом фоне. Автомодельные представления $\Theta(t, \xi, \phi)$ решения $u(t, \xi, \varphi)$ стремятся к радиально-симметричной с.ф. с конечным носителем, отвечающей тем же параметрам σ и β . Отметим, что это происходит при $t > 99.49\% \tilde{T}_0$. Следовательно, сложная волна, соответствующая этой с.ф., является **метаустойчивой**.

Для двухрукавной спиральной волны (Рис. 7) $\tilde{T}_0 = 0.71428579$ еще ближе к точному T_0 . Движение максимума и минимума следует автомодельному закону до времени $t = 0.7065 = 98.91\% \tilde{T}_0$. Вырождаясь на асимптотической стадии, волна переходит через стадию волны сложной симметрии, перед тем как выродится в радиально-симметричную.

Отметим, что существование континуума решений а.з. в радиально-симметричном случае и HS -режима, которые выходят на гомотермическое решение θ_H при $\xi \rightarrow \infty$, было отмечено в [16], но этому результату не было уделено достойное внимание. Оказывается, именно такие решения а.з. определяют найденные здесь спиральные волны.

Вопрос о существовании спиральных структур в LS -режиме (скручивающиеся спирали) пока остается открытым. Хотя "хребты" линейных приближений к с.ф. LS -режима при $\xi \rightarrow \infty$ стремятся тоже к автомодельным (см. п.5. выше), но их амплитуда стремится к бесконечности. Остается неясным с какой асимптотикой надо шивать линейные приближения. Автор считает, что в задаче нахождения спиральных структур в LS -режиме надо отказаться от условия ограниченности с.ф. при $\xi = 0$. На эту идею наводят другие решения линеаризованного уравнения (логарифмическое решение вырожденного гипергеометрического уравнения с особенностью в нуле), а также и некоторые физические соображения.

3 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

1. Предложена, исследована и реализована общая методика решения нелинейных автомодельных задач, основанная на непрерывном аналоге метода Ньютона и методе конечных элементов. Она дает возможность автоматизировать процесс вычислений (включая случай неединственности решений) и единообразно решать краевые задачи для нелинейных ОДУ второго порядка, систем таких уравнений и нелинейных эллиптических уравнений второго порядка.

Предложена, исследована и реализована общая методика решения нелинейных параболических задач с сингулярными по времени решениями, основанная на методе конечных элементов с концентрацией матрицы массы и интерполированием нелинейных коэффициентов. Реализованы адаптивные динамические сетки по пространству, согласованные с автомодельным или приближенным автомодельным законом.

2. В радиально-симметричном случае исследовано поведение собственных функций горения нелинейной среды при стремлении LS -режима к S -режиму, когда организация среды существенно усложняется. Показано существенное различие плоского и

радиально-симметричного случаев. Найдены два новых типа собственных функций – “с перетяжкой” и с левым фронтом. На основе детального численного исследования предложен сценарий поведения сложных собственных функций (четных и нечетных) при стремлении к S -режиму.

Исследовано асимптотическое поведение локализованных обостряющихся решений параболической задачи в LS -режиме, когда автомодельное решение не принадлежит $L_1(R^N)$. Численно показано, что и в этом случае монотонное по r автомодельное решение структурно устойчиво.

Конструированы численно решения автомодельной задачи при соотношениях параметров за критическими экспонентами. Показано, что соответствующие им монотонные по r автомодельные решения структурно устойчивы, подтверждая таким образом гипотезу Галактионова и Вазкеса.

3. Конструированы численно собственные функции горения двухкомпонентной нелинейной среды в радиально-симметричном случае и исследована структурная устойчивость соответствующих автомодельных решений. Показано, что в LS -режиме структурно устойчивыми являются только автомодельные решения простой структуры (с монотонными по r компонентами) систем с сильной обратной связью.

4. Численно исследовано асимптотическое поведение обостряющихся решений полулинейных уравнений с различными нелинейными источниками в радиально-симметричном случае. Подтверждены результаты качественного анализа о том, что асимптотическая стадия эволюции обостряющихся решений описывается приближенными автомодельными решениями (точными автомодельными решениями уравнений первого порядка типа Гамильтона-Якоби). В случае источника $(1+u)ln^2(1+u)$ показано, что обостряющиеся решения эффективно локализованы в сфере радиуса π или в кольцевой области толщиной 2π .

5. Численно реализованы инвариантные решения, которые описывают направленное распространение тепла и горения в двумерной нелинейной анизотропной среде со степенными коэффициентами теплопроводности. Так конструктивным образом подтверждено их существование.

6. Расширено понятие собственной функции горения нелинейной среды введением в рассмотрение инвариантных решений, которые стремятся к нетривиальному гомотермическому решению, а не к нулю на бесконечности. Это дало возможность получить радиально-несимметричные сложные волны в HS -режиме и численно реализовать инвариантные решения, которые описывают распространение спиральных волн в нелинейной изотропной среде. Таким образом показано, что усложнение организации среды может происходить не только в LS -режиме за счет локализованных во вне и сходящихся к центру структур, но и в HS -режиме за счет метаустойчивых расходящихся волн горения сложной структуры, в том числе раскручивающихся спиральных волн.

Публикации по теме диссертации:

- [Д01] М.И. Бакирова, С.Н. Боршукова, В.А. Дородницын, С.Р. Свищевский. О направленном распространении тепла в нелинейной анизотропной среде //Препринт ИПМ АН СССР, No 182, 1985, 12 стр.
- [Д02] S.N. Dimova-Borshukowa. Numerical analysis of the directed heat diffusion in a nonlinear anisotropic medium. Proc. ICCM, Tokyo, 1986, VIII, 78-82.
- [Д03] Бакирова М.И., Димова С.Н., Дородницын В.А., Курдюмов С.П., Самарский А.А., Свищевский С.Р., Инвариантные решения уравнений теплопроводности, описывающие направленное распространение горения и спиральные волны в нелинейной среде, *ДАН СССР*, 299 (2), 1988, 346–350.
- [Д04] С.Н. Димова, М.С. Касчиев, С.П. Курдюмов. Численный анализ одномерных собственных функций горения нелинейной среды. I. Численный метод и эксперименты. Препринт ОИЯИ, Дубна, P11-88-473, 1988, 16 стр.
- [Д05] С.Н. Димова, М.С. Касчиев, С.П. Курдюмов. Численный анализ одномерных собственных функций горения нелинейной среды. II. Некоторые предельные случаи. Препринт ОИЯИ, Дубна, P11-88-831, 1988, 15 стр.
- [Д06] С.Н. Димова, М.С. Касчиев. Численный анализ двумерных собственных функций горения нелинейной анизотропной среды. Сообщения ОИЯИ, Дубна, P11-88-876, 1988, 9 стр.
- [Д07] С.Н. Димова, М.С. Касчиев. Численный анализ двумерных собственных функций горения нелинейной среды. Proc. Intern. Conf. Numerical Methods and Applications, Sofia, 1988, Publ. House BASci, Sofia, 1989, 121-125.
- [Д08] S.N. Dimova, M.S. Kastchiev, S.P.Kurdiumov. Structure of the onedimensional eigen functions of a nonlinear heat-conducting medium. Proc. Intern. Conf. Numerical Methods and Applications, Sofia, 1988, Publ. House BASci, Sofia, 1989, 126-130.
- [Д09] С.Н. Димова, Касчиев М.С., Курдюмов С.П., Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае, *ЖВМ и МФ*, 1989, 29 (6), 61–73.
- [Д10] S.N. Dimova, V.A. Galaktionov, D.I. Ivanova. Numerical analysis of blow-up and degeneracy of a semilinear heat equation. Сообщения ОИЯИ, Дубна, E11-89-785, 1989, 20 стр.
- [Д11] Д.И. Иванова, С.Н. Димова, М.С. Касчиев. Численный анализ одномерных собственных функций горения нелинейной среды. III. Сообщения ОИЯИ, Дубна, P11-90-11, 1990, 15 стр.

- [Д12] **S.N. Dimova**, D.I. Ivanova. Finite element method with special mesh refinement for analysis of single point blow-up solutions. *Сообщения ОИ-ЯИ*, Дубна, Е11-91-39, 1991, 14 стр.
- [Д13] М.Г. Колева, **С.Н. Димова**, М.С. Касчиев. Исследование собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах методом конечных элементов. *Сообщения ОИЯИ*, Дубна, P11-91-552, 1991, 15 стр.
- [Д14] **С.Н. Димова**, М.С. Касчиев, М.Г. Колева. Анализ собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах методом конечных элементов. *Математическое моделирование*, т.4, 3, 1992, 74-83.
- [Д15] **S.N. Dimova**, D.P. Vasileva. On the numerical realization of blow-up spiral wave solutions of a nonlinear heat-transfer equation. *Доклады БАН*, 46, N 5, 1993, 31-34.
- [Д16] **S.N. Dimova**, D.P. Vasileva. Numerical realization of blow-up spiral wave solutions of a nonlinear heat-transfer equation. *Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow*, 4, N 6, 1994, 497-511.
- [Д17] **S.N. Dimova**, M.S. Kastchiev, M.G. Koleva, D.P. Vasileva. Numerical analysis of nonradially symmetric structures, arising in nonlinear reaction-diffusion processes. In: *Programming and Mathematical Methods for Solving Physical Problems*, World Scientific, 1994, 251-256.
- [Д18] **С.Н. Димова**, Касчиев М.С., Колева М.Г., Василева Д.П., Численное исследование радиально-несимметричных структур в нелинейной теплопроводной среде, *Доклады РАН*, Москва, 338 (4), 1994, 461-464.
- [Д19] **S.N. Dimova**, D.P. Vasileva. Lumped-mass finite element method with interpolation of the nonlinear coefficients for a quasilinear heat transfer equation. *Numerical Heat Transfer, Part B*, 28, 1995, 199-215.
- [Д20] **S.N. Dimova**, M.S. Kastchiev, M.G. Koleva, D.P. Vasileva. Numerical analysis of the blow-up regimes of combustion of two-component nonlinear heat-conducting medium. *ЖВМ и МФ*, 35 (3), 1995, 303-319.
- [Д21] **S.N. Dimova**, M.S. Kastchiev, M.G. Koleva, D.P. Vasileva. Numerical analysis of radially nonsymmetric blow-up solutions of a nonlinear parabolic problem. *J. Comp. Appl. Math.*, 97, 1998, 81-97.
- [Д22] **S.N. Dimova**, Т.Р. Chernogorova. Asymptotically self-similar blow-up for a quasilinear parabolic equation beyond some critical exponents//*Доклады БАН*, 53, N 12, 2000, 21-24

Список цитируемой литературы

- [1] Hacken G. *Synergetics.*, Springer, 1977.
- [2] Князева Е. Н., Курдюмов С. П. *Законы эволюции и самоорганизации сложных систем*, М.: Наука, 1994.
- [3] Гленсдорф П., Пригожин И. *Термодинамическая теория структур, устойчивости, флуктуаций*, М.: Мир, 1973.
- [4] Самарский А. А., Дородницын В. А., Курдюмов С. П., Попов Ю. П. *ДАН СССР*, т. 216, 6, 1974, стр.1254.
- [5] Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Михайлов А. П., Самарский А. А. *Препринт ИПМат., Москва*, 74, 1976, стр.67.
- [6] Nuckolls J., Wood L., Thiessen A., Zimmerman G., *Nature*, v.239, no.5368, 1972, p.139
- [7] Змитренко Н. В., Курдюмов С. П. Михайлов А. П., Самарский А. А. *Письма в ЖЭТФ*, т. 26, 9, 1977, стр.620-624.
- [8] Волосевич П.П., Дегтярев Л.М., Курдюмов С.П., *Физика плазмы*, т.2, 6, 1976, стр.883-897.
- [9] Тихонов А. Н. и др. *ДАН СССР*, т.173, 4, 1967, стр.808.
- [10] Самарский А. А., Соболев И. М. *ЖВМ и МФ*, т.3, 4, 1963, стр.18-28.
- [11] Wilhelmsson H., Lazaro E. *Reaction-diffusion Problems in the Physics of Hot Plasmas*. IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 2001.
- [12] Тельковская О. В. *Препринт ИАЭ, Москва*, 5021/1, 1990, 15 стр.
- [13] Гуревич М. И., Тельковская О. В. *Препринт ИАЭ, Москва*, 5565/1, 1992.
- [14] Куркина Е. С., Курдюмов С. П., *Доклады РАН*, т.395, 6, 2004, стр.743-748.
- [15] Калашников А. С., *Успехи Мат. наук*, 42, 1987, 135-176.
- [16] Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. *Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений*, М.: Наука, 1987.
- [17] Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. *Совр. пробл. матем. Новейшие достижения*. Т. 28. ВИНТИ АН СССР, М., 1986, стр.95-206.
- [18] Курдюмов С. П. *Современные проблемы матем. физики и вычислительной математики*. М.: Наука, 1983, стр.217-243.

- [19] Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. *Препринт ИПМатем, Москва* 106, 1977.
- [20] Адъятов М. М., Клоков Ю. А., Михайлов А. П. *ДУ*, т. 19, 7, 1983, стр.1107–1114.
- [21] Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. *ДАН СССР*, 1980, т.251, 3, стр.587–591.
- [22] Eriksson K., Thomee V. *Math. Comp.*, v.42, 166, 1984, pp.345–367.
- [23] Пузынин И. В., Пузынина Т. П. *КФКИ-74-34, Будапешт*, 1974, стр.93–100.
- [24] Дородницын В. А. *Групповые свойства разностных уравнений*. М.: МАКС Пресс, 2000.
- [25] E. Hairer, C. Lubich, G. Wanner. *Geometric Numerical Integration. Structure-preserving Algorithms for ODE*. Springer 2002.
- [26] C. J. Budd, W. Huang, R. D. Russell. *SIAM J. Sci. Comp.*, v.17, 2, 1996, pp.305–327.
- [27] Galaktionov V. A., Vazquez J. L. *Comm. Pure Appl. Math.*, v.L, 1997, pp.1–67.
- [28] Bebernes J., Eberly D. *Mathematical problems from combustion theory*. Appl. Math. Sci. 83, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [29] Galaktionov V. A., Vazquez J. L. *J. Differ. Eq.*, v.127, 1, 1996, pp.1–40.
- [30] Herrero M. A., Velazquez J. L. L. *Ann. Inst. Henry Poincare*, 10, 1993, pp.131–189.
- [31] Дородницын В. А. *ЖВМ и МФ*, т.22, 6, 1982, стр.1393–1400.
- [32] Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. *ДАН СССР*, т.274, 5, 1984, стр.1071–1075.
- [33] Потапов А. Б. *Препринт ИПМат., Москва*, 8, 1986.
- [34] Ахромеева Т. С., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., Самарский А. А. *Нестационарные структуры и диффузионный хаос*, М.: Наука, 1992.
- [35] Жидков Е. П., Пузынин И. В., *ЖВМ и МФ*, 2, 1969, стр.442–447.

Макет *Н. А. Киселевой*

Подписано в печать 14.09.2004.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,25. Уч.-изд. л. 3,8. Тираж 100 экз. Заказ № 54591.

**Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.**

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/