

P9-2005-114

И. Н. Киян, Р. Тарашкевич*

АНАЛИЗ ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ
АНАЛИТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ РАСЧЕТА
ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ
В ИЗОХРОННЫХ ЦИКЛОТРОНАХ

*Институт ядерной физики Польской академии наук, Краков

Киян И. Н., Тарашкевич Р. P9-2005-114
Анализ области применения аналитических формул для расчета частот свободных колебаний в изохронных циклотронах

В работе описывается выбор оптимальных аналитических формул для расчета частот свободных колебаний частиц в изохронных циклотронах $\nu_r(r)$ и $\nu_z(r)$, а также область их применения. Выбранные формулы используются во второй версии программы BORP — Betatron Oscillation Research Program (Second Release), написанной на языке C++ с использованием MS Visual C++ .NET. Рассчитываемые с помощью программы значения частот свободных колебаний применяются при оценке смоделированных режимов работы изохронного циклотрона АИС144. Аналитические формулы были выбраны путем сравнения результатов расчетов, выполненных по формулам, приведенным Т. Stambach, Y. Jongen – S. Zaremba, В. В. Кольгой, с результатами расчетов, выполненных с помощью итерационной программы CYCLOPS, разработанной М. М. Gordon. Наименьшее отклонение от результатов итерационного расчета было получено при использовании аналитических формул, приведенных В. В. Кольгой, и составило порядка $-0,5 \dots 1,5\%$ для $\nu_r(r)$ и $-5 \dots 4\%$ для $\nu_z(r)$ в диапазоне рабочих радиусов изохронного циклотрона. Так как пучок был получен, выбранные аналитические формулы могут быть успешно использованы в программе BORP SR для расчета частот свободных колебаний при оценке смоделированных режимов работы различных изохронных циклотронов.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем им. В. П. Дзепелова ОИЯИ, Дубна, и в Институте ядерной физики Польской академии наук, Краков.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Kiyan I. N., Taraszkievicz R. P9-2005-114
Analysis of the Analytic Formulae Application Area for Free Oscillation Frequency Calculation in Isochronous Cyclotrons

Selection of optimal analytic formulae for calculation of free oscillation frequencies of the particles in isochronous cyclotrons, $\nu_r(r)$ and $\nu_z(r)$, and their application area are described. The selected formulae are used in the program BORP SR — Betatron Oscillation Research Program Second Release — written in C++ with the help of MS Visual C++ .NET. The free oscillation frequencies, calculated by using the program, are used for the evaluation of the modeled regimes of the work of the АИС144 isochronous cyclotron. The analytic formulae were selected by comparing the results of the calculations performed by using formulae adduced by T. Stambach, Y. Jongen – S. Zaremba, V. V. Kolga with the results of the calculations performed by using the CYCLOPS iterative program, developed by M. M. Gordon. The least difference in the calculation results was obtained for the analytic formulae adduced by V. V. Kolga. The $\nu_r(r)$ calculation difference ranged from -0.5 to 1.5% and the $\nu_z(r)$ calculation difference ranged from -5 to 4% for the working radii of the isochronous cyclotron. As the beam was obtained, the selected analytic formulae can be successfully used in the program BORP SR for free oscillation frequency calculation during the evaluation of the modeled regimes of the work of different isochronous cyclotrons.

The investigation has been performed at the Dzelepov Laboratory of Nuclear Problems, JINR, Dubna, and at the Institute of Nuclear Physics of the Polish Academy of Sciences, Krakow.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

ВВЕДЕНИЕ

В ряде ускорителей, в том числе и в изохронных циклотронах с вариацией магнитного поля — флаттером, ускоряемая частица в процессе ускорения совершает свободные колебания в пространстве. Эти колебания обычно разделяются на радиальную и вертикальную составляющие. Частоты свободных колебаний $\nu_r(r)$ и $\nu_z(r)$ необходимо знать при оценке качества сформированного магнитного поля изохронного циклотрона. Аналитический расчет частот свободных колебаний позволяет сделать вывод о поперечной устойчивости пучка частиц с достаточной точностью, необходимой для того, чтобы сформировать пучок частиц во всем диапазоне рабочих радиусов изохронного циклотрона. Данный расчет также необходим для быстрой оценки приблизительного месторасположения резонанса Уолкиншоу $K(r) = \nu_r(r) - 2\nu_z(r)$, когда $K(r) = 0$. Вместе с тем при оценке влияния резонанса Уолкиншоу на динамику пучка требуется знание более точных значений частот свободных колебаний, которые можно рассчитать более трудоемкими итерационными методами.

Представленная в работе оценка различных аналитических формул позволяет выбрать из рассматриваемых вариантов наиболее точный. Выбранные аналитические формулы используются в программе Betatron Oscillation Research Program Second Release (BORP SR)* для быстрого аналитического расчета частот свободных колебаний. Программа представляет собой один из расчетных модулей программного комплекса, установленного на сервере изохронного циклотрона АІС144 в Циклотронном отделе (ЦО) Института ядерной физики Польской академии наук (ИЯФ ПАН) в Кракове. Этот программный комплекс используется при моделировании режимов работы изохронного циклотрона. Рассчитанные с помощью программы BORP SR значения частот свободных колебаний используются при компьютерной отладке полученных режимов работы, когда идет подстройка токов в концентрических катушках коррекции на рассчитанном уровне тока главной катушки изохронного циклотрона. Программа BORP SR написана на языке C++ с использованием Visual C++ .NET для Windows 32. Целями создания программы были: во-первых, использование ее для расчетов в качестве отдельного модуля с дружественным графическим интерфейсом пользователя ввиду отсутствия других программ с аналогичным набором возможностей, во-вторых, использование

*Киян И. Н., Ворожцов С. Б., Тарашкевич Р. Описание программы расчета частот бетатронных колебаний (Betatron Oscillation Research Program — BORP). Сообщение ОИЯИ Р9-2002-171. Дубна, 2002.

ее для расчетов в комплексе с другими программами, применяющимися при моделировании режимов работы изохронного циклотрона АИС144.

В программный комплекс, установленный на сервере изохронного циклотрона АИС144, входит шесть расчетных модулей, написанных на языке С++ с использованием Visual С++ .NET для Windows 32, и одна реляционная база данных изохронного циклотрона, написанная на Transact SQL для СУБД MS SQL Server 2000.

Описания некоторых расчетных модулей из данного программного комплекса были опубликованы в виде сообщений ОИЯИ*.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

При расчете частот свободных колебаний могут быть использованы различные аналитические формулы. Формулы, опубликованные Т. Stammbach в [1], имеют следующий вид:

$$\nu_r^2(r) = 1 + k(r) - k(r)F^*(r) + 3(1 + \operatorname{tg}^2\zeta(r))F^*(r); \quad (1)$$

$$\nu_z^2(r) = -k(r) + k(r)F^*(r) + (1 + 2\operatorname{tg}^2\zeta(r))F(r), \quad (2)$$

где

$$F(r) = \frac{\sum_{k=0}^{N_p-1} B_k^2(r, \theta_k)}{N_p} - B_0^2(r);$$

$$F^*(r) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{n>0} \frac{B_n^2(r)}{n^2}}{B_0^2(r)}, \quad n = iN, \quad i = 1 \div 5;$$

*Киян И. Н., Ворожцов С. Б., Тарашкевич Р. Описание программы расчета среднего магнитного поля изохронного циклотрона с учетом флаттера (Cyclotron Analytic Model Program — САМР). Сообщение ОИЯИ Р9-2002-170. Дубна, 2002.

Киян И. Н., Ворожцов С. Б., Тарашкевич Р. Описание программы расчета частот бетатронных колебаний (Betatron Oscillation Research Program — ВОРР). Сообщение ОИЯИ Р9-2002-171. Дубна, 2002.

Киян И. Н., Ворожцов С. Б., Тарашкевич Р. Описание программы расчета замкнутых равновесных орбит изохронного циклотрона (Equilibrium Orbit Research Program — EОРР). Сообщение ОИЯИ Р9-2003-109. Дубна, 2003.

Киян И. Н., Ворожцов С. Б., Тарашкевич Р. Описание базы данных изохронного циклотрона. Сообщение ОИЯИ Р9-2004-123. Дубна, 2004.

$$k(r) = r \frac{\sum_{k=0}^{N_p-1} \frac{dB_k(r, \theta_k)}{dr}}{\sum_{k=0}^{N_p-1} B_k(r, \theta_k)};$$

$$\text{tg}\zeta(r) = \frac{r}{NB_N^2(r)} \left(H_N(r) \frac{dG_N(r)}{dr} - G_N(r) \frac{dH_N(r)}{dr} \right)$$

— это функция флаттера, функция редуцированного флаттера, индекс поля и тангенс угла спиральности магнитной структуры. $B_0(r)$, N_p , i , N , $H_n(r)$, $G_n(r)$, $B_n(r)$ — это среднее магнитное поле, число азимутальных точек, число высших гармоник, периодичность магнитной структуры и коэффициенты Фурье соответственно.

Формулы, опубликованные Y. Jongen, S. Zarembo в [2], имеют следующий вид:

$$\nu_r^2(r) = 1 + k(r) + \frac{3N^2}{(N^2 - 1)(N^2 - 4)} (1 + \text{tg}^2\zeta(r)) F(r); \quad (3)$$

$$\nu_z^2(r) = -k(r) + \frac{N^2}{N^2 - 1} (1 + 2\text{tg}^2\zeta(r)) F(r). \quad (4)$$

Формулы, опубликованные В. В. Кольгой в [3] и впоследствии доработанные им, значительно отличаются от приведенных выше и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \nu_r^2(r) = & (1 + k) \left(1 + \frac{3\varepsilon_N^2 r^2 \varphi_N'^2}{2N^2} \right) + \frac{\varepsilon_N^2}{2(N^2 - 4k - 4)} \times \\ & \times \left(2 - \frac{N^2}{2(N^2 - k - 1)} + \frac{r\varepsilon_N'}{\varepsilon_N} + k \right)^2 + \frac{0,7\varepsilon_N^2}{N^2 - k - 1} + \frac{\varepsilon_N'^2 r^2}{2N^2} + \frac{\varepsilon_N \varepsilon_N'' r^2}{2(N^2 - k - 1)}; \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu_z^2(r) = & -k + \frac{\varepsilon_N^2 N^2}{2(N^2 - k - 1)} + \frac{2N^2 \varepsilon_{2N}^2}{4N^2 - k - 1} + \frac{\varepsilon_N'^2 r^2}{2N^2} - \\ & - \frac{\varepsilon_N \varepsilon_N' r(1 + k + k^2 - s)}{(1 + k)(N^2 - k - 1)} - \frac{\varepsilon_N \varepsilon_N'' r^2}{2(N^2 - k - 1)} + \frac{\varepsilon_N^2 r^2 \varphi_N'^2}{2} \left(\frac{N^2}{N^2 - k - 1} + 1 \right) + \\ & + \frac{\varepsilon_{2N}^2 r^2 \varphi_{2N}'^2}{8N^2} \left(\frac{4N^2}{4N^2 - k - 1} + 1 \right); \quad (6) \end{aligned}$$

где

$$B_0(r); \quad B_0'(r) = \frac{dB_0(r)}{dr}; \quad B_0''(r) = \frac{d^2B_0(r)}{dr^2}; \quad s = \frac{r^2 B_0''(r)}{2B_0(r)}$$

— это среднее поле, его производные, а также расчетный коэффициент соответственно;

$$\varepsilon_N = \frac{B_N(r)}{B_0(r)}; \quad \varepsilon_{2N} = \frac{B_{2N}(r)}{B_0(r)}; \quad \varphi_N; \quad \varphi_{2N};$$

$$\varepsilon'_N = \frac{d\varepsilon_N(r)}{dr}; \quad \varepsilon''_N = \frac{d^2\varepsilon_N(r)}{dr^2}; \quad \varphi'_N = \frac{d\varphi_N(r)}{dr}; \quad \varphi'_{2N} = \frac{d\varphi_{2N}(r)}{dr}$$

— это нормированные средним полем амплитуды основной и высшей гармоник, их фазы и соответствующие производные.

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФОРМУЛ ДЛЯ РАСЧЕТА ЧАСТОТ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

С помощью комплекса программ, установленного на сервере изохронного циклотрона АИС144 в ИЯФ ПАН в Кракове, был смоделирован режим работы для ускорения пучка протонов исходя из следующих данных:

Тип частиц:	протоны
Радиус «bump»:	$R_{\text{bmp}} = 8$ см
Радиус вывода:	$R_{\text{out}} = 61,5$ см
Частота ВЧ-генератора:	$F_{\text{rf}} = 23310000$ Гц
Напряжение на дуантах:	$V_{\text{dnt}} = 50$ кВ

При моделировании режима работы были использованы аналитические формулы для расчета частот свободных колебаний, выбор которых обосновывается ниже. В результате эксперимента, проведенного 16 декабря 2004 г. на изохронном циклотроне АИС144, был получен пучок протонов во всем диапазоне рабочих радиусов.

На рис. 1 показан ток этого пучка. Величина тока соответствует наилучшим значениям, полученным для аналогичных режимов работы изохронного циклотрона АИС144.

Для смоделированного режима работы было сформировано соответствующее магнитное поле, которое и было взято для тестирования различных аналитических формул расчета частот свободных колебаний. На рис. 2 изображено среднее магнитное поле, рассчитанное с учетом флаттера (кривая 1) и реально полученное на сформированном магнитном поле (кривая 2). Как видно из графика, для тестирования приведенных выше аналитических формул и определения области их применения было взято изохронное магнитное поле.

Тестирование различных аналитических формул расчета частот свободных колебаний производилось с помощью программы CYCLOPS [7], использующей трудоемкие итерационные методы расчета.

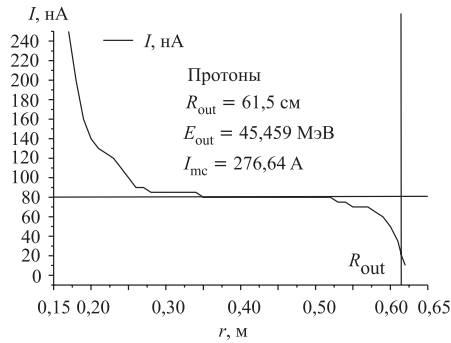


Рис. 1. Ток полученного пучка протонов

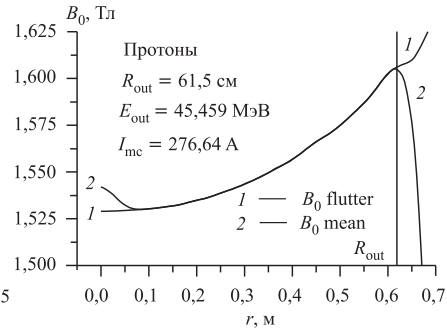


Рис. 2. Среднее магнитное поле

На рис.3 представлены результаты расчетов частот радиальных и вертикальных свободных колебаний, выполненных с помощью программы CYCLOPS.

Как видно из графика, величина частоты радиальных свободных колебаний $\nu_r(r)$ близка к единице, а частота вертикальных свободных колебаний $\nu_z(r)$ больше нуля во всем диапазоне рабочих радиусов изохронного циклотрона, что говорит о соответствующей поперечной устойчивости полученного пучка протонов. Данные значения частот радиальных и вертикальных свободных колебаний использовались в качестве тестовых при оценке результатов расчетов, выполненных по различным аналитическим формулам.

На рис.4 представлены результаты расчетов частот радиальных свободных колебаний, выполненных с помощью программы CYCLOPS и по различным аналитическим формулам на конечных радиусах ускорения, где сказывается влияние краевого поля.

Как видно из рис.4, наблюдается хорошее соответствие между результатами расчетов по аналитической формуле, приведенной В.В.Кольгой, и результатами расчетов, выполненных с помощью программы CYCLOPS.

На рис.5 представлен график с тремя кривыми относительных отклонений частот радиальных свободных колебаний. Расчет производился по формуле

$$\delta_{rX} = \frac{(\nu_{rX} - \nu_r)}{\nu_r} \cdot 100\%,$$

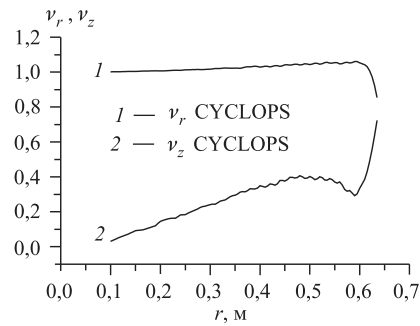


Рис. 3. Частоты радиальных и вертикальных свободных колебаний

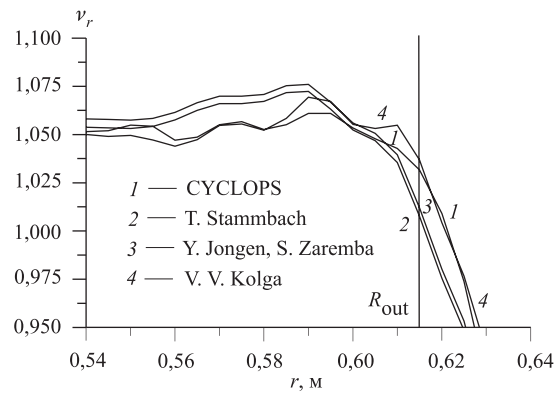


Рис. 4. Частоты радиальных свободных колебаний

где ν_{rX} для $X = 1, 2, 3$ — это частоты радиальных свободных колебаний, рассчитанные по аналитическим формулам, приведенным Т. Stambach, Y. Jongen – S. Zarembo и В. В. Кольгой соответственно, а ν_r — это частота радиальных свободных колебаний, рассчитанная с помощью программы CYCLOPS.

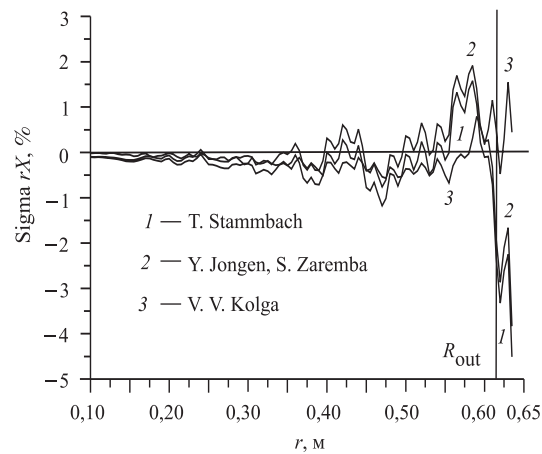


Рис. 5. Относительные отклонения частот радиальных свободных колебаний δ_{rX}

Из рис. 5 видно, что значение δ_{rX} на конечных радиусах ускорения для частоты радиальных свободных колебаний, рассчитанной по формуле, приведенной В. В. Кольгой, по крайней мере в два раза лучше по абсолютной величине, чем в двух остальных случаях. Данное значение находится в пределах от $-0,5$ до $+1,5\%$ в диапазоне рабочих радиусов от 13 до 63 см. Точность расчета частоты радиальных свободных колебаний по аналитической

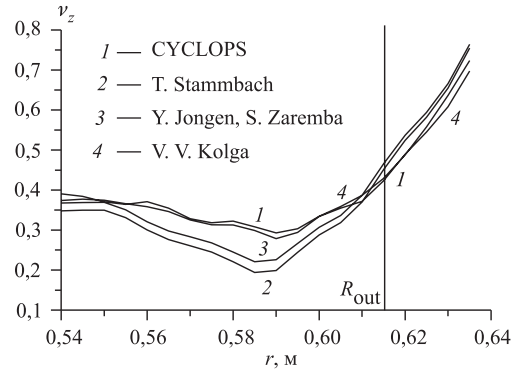


Рис. 6. Частоты вертикальных свободных колебаний

формуле, приведенной В. В. Кольгой, обуславливается использованием слагаемого, содержащего ε''_N .

На рис. 6 представлены результаты расчетов частот вертикальных свободных колебаний, выполненных с помощью программы CYCLOPS и по различным аналитическим формулам на конечных радиусах ускорения, где сказывается влияние краевого поля. Как видно из графика, наблюдается хорошее соответствие между результатами расчетов по аналитической формуле, приведенной В. В. Кольгой, и результатами расчетов, выполненных с помощью программы CYCLOPS.

На рис. 7 представлен график с тремя кривыми относительных отклонений частот вертикальных свободных колебаний. Расчет производился по формуле

$$\delta_{zX} = \frac{(\nu_{zX} - \nu_z)}{\nu_z} \cdot 100 \%,$$

где ν_{zX} для $X = 1, 2, 3$ — это частоты вертикальных свободных колебаний, рассчитанные по аналитическим формулам, приведенным Т. Stammbach, Y. Jongen – S. Zaremba и В. В. Кольгой соответственно, а ν_z — это частота вертикальных свободных колебаний, рассчитанная с помощью программы CYCLOPS.

Из рис. 7 видно, что значение δ_{zX} на конечных радиусах ускорения для частоты вертикальных свободных колебаний, рассчитанной по формуле, приведенной В. В. Кольгой, по крайней мере в десять раз лучше по абсолютной величине, чем в двух остальных случаях. Данное значение находится в пределах от -5 до $+4\%$ в диапазоне рабочих радиусов от 13 до 63 см. Точность расчета частоты вертикальных свободных колебаний по аналитической формуле, приведенной В. В. Кольгой, обуславливается использованием слагаемого, содержащего ε''_N .

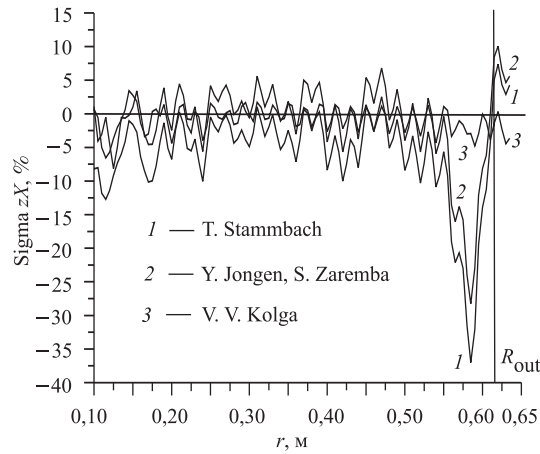


Рис. 7. Относительные отклонения частот вертикальных свободных колебаний δ_{zX}

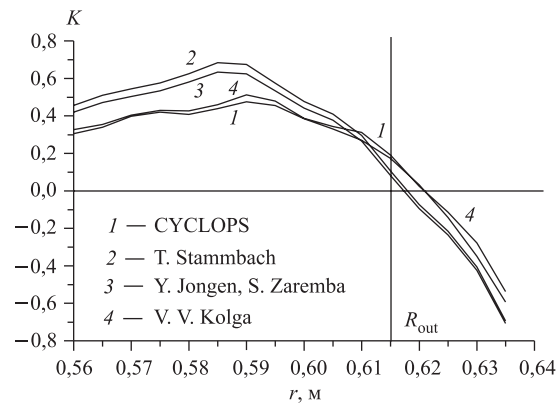


Рис. 8. Резонанс Уолкиншоу

На рис. 8 представлены результаты оценки месторасположения резонанса Уолкиншоу $K(r) = \nu_r(r) - 2\nu_z(r)$, когда $K(r) = 0$. Оценка выполнена на основе расчета частот свободных колебаний с помощью программы CYCLOPS и по различным аналитическим формулам на конечных радиусах ускорения, где сказывается влияние краевого поля. Как видно из графика, наиболее точный результат аналитической оценки месторасположения резонанса Уолкиншоу получается при использовании для расчета частот свободных колебаний формул, приведенных В.В.Кольгой. При этом точность аналитиче-

ской оценки находится в пределах $\pm 0,05$ мм. Так как резонанс Уолкиншоу в изохронных циклотронах может располагаться как до, так и после радиуса вывода, то быстрая аналитическая оценка его месторасположения имеет большое значение при компьютерной отладке моделируемого режима работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате тестирования аналитических формул расчета частот свободных колебаний, приведенных Т. Stambach, Y. Jongen – S. Zaremba и В. В. Кольгой, которое было проведено с помощью программы CYCLOPS, использующей итерационные методы расчета, в качестве оптимальных были выбраны формулы, приведенные В. В. Кольгой. Расхождение результатов аналитических и итерационных расчетов было в пределах от $-0,5$ до $+1,5\%$ для $\nu_r(r)$ и от -5 до $+4\%$ для $\nu_z(r)$ в диапазоне рабочих радиусов от 13 до 63 см. Выбранные аналитические формулы были использованы в программе расчета частот свободных колебаний BORP SR. Достигнутая точность аналитических расчетов достаточна для оценки соответствия частот свободных колебаний областям их допустимых значений, а также для оценки месторасположения резонанса Уолкиншоу. Другими словами, программа BORP SR может быть успешно использована при моделировании режимов работы, когда требуется оценить поперечную устойчивость пучка во всем диапазоне рабочих радиусов изохронного циклотрона.

Программа BORP SR написана на языке C++ с использованием Visual C++ .NET для Windows 32 в стандарте Single Document Interface (SDI), что обеспечивает ее удобный графический интерфейс взаимодействия с пользователем. Пользовательский интерфейс программы BORP SR, включающий в себя стандартную систему Help, соответствует пользовательскому интерфейсу ее предыдущей версии*.

Программа BORP SR может быть использована как для расчетов фокусирующих свойств циклотронов с прямыми секторами, так и для расчетов фокусирующих свойств циклотронов со спиральными секторами.

Конечным итогом моделирования режима работы, приведенного в качестве примера, явился пучок протонов, полученный в диапазоне рабочих радиусов в результате успешного эксперимента, проведенного 16 декабря 2004 года на изохронном циклотроне АИС144. Эксперимент доказал целесообразность использования и определил область применения выбранных аналитических формул для расчета частот свободных колебаний.

*См. примеч. на с. 1.

Благодарности. Авторы выражают свою глубокую признательность начальнику ЦО ИЯФ ПАН в Кракове д-ру Мареку Талаху за постоянное внимание к работе по созданию программного обеспечения сервера изохронного циклотрона АИС144.

Авторы также выражают свою глубокую благодарность старшему научному сотруднику НЭОНУ ЛЯП д-ру Е. В. Самсонову за расчет частот свободных колебаний, выполненный им с помощью программы CYCLOPS.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stammbach T.* Cyclotrons. Joint Universities Accelerator School. Archamps, 1997.
2. *Jongen Y., Zarembo S.* Cyclotron Magnet Calculation // CERN Accelerator School, CERN 96-02. 1996. P. 139.
3. *Кольга В. В.* Исследование движения заряженных частиц в релятивистском циклотроне. Автореф. дис. . . . канд. физ.-мат. наук, 2138. Дубна, 1965.
4. *Ливингуд Дж.* Принципы работы циклических ускорителей. М.: ИИЛ, 1963.
5. *Gordon M. M.* Computation of closed orbits and basic focusing properties for sector-focused cyclotrons and the design of CYCLOPS // Particle Accelerators. 1984. V. 16. P. 39.

Получено 20 июля 2005 г.

Редактор *А. Н. Шабашова*

Подписано в печать 22.09.2005.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,62. Уч.-изд. л. 0,78. Тираж 270 экз. Заказ № 55021.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/