P4-2005-137

Ю. В. Гапонов*

ОПИСАНИЕ МАЙОРАНОВСКИХ СВОЙСТВ НЕЙТРАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ В РАМКАХ ПАУЛИЕВСКОЙ СИММЕТРИИ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

*РНЦ «Курчатовский институт», Москва

Гапонов Ю. В. P4-2005-137

Описание майорановских свойств нейтральных частиц
в рамках паулиевской симметрии

На базе преобразований, включающих киральную $U(1)$ и паулиевскую $SU(2)$ группы, смешивающие частичные и античастичные состояния, построена математическая модель, позволяющая описывать майорановские свойства системы свободных левых и правых нейтральных фермионов одного типа. Для частиц массы нуль паулиевская симметрия — точная и ведет к сохраняющимся зарядам: киральному и обобщенному лептонному, последний — вектор в паулиевском изопространстве, различные направления в котором связываются с дираковскими или обобщенными майорановскими свойствами. В случае массы, отличной от нуля, схема описывает объединенные дираковские и майорановские свойства частиц инверсных A-B- и C-D-классов ($\eta_P^2 = \mp 1,$) с условием $M_L = -M_R$ на их майорановские массы. Для частиц C-D-классов массовое слагаемое лагранжиана и паулиевский заряд могут быть выражены через оператор обобщенного лептонного заряда. Для частиц A-B-классов эти характеристики дополнительны, при этом в дираковском случае возможно альтернативное описание частиц в терминах лептонного заряда или двух независимых майорановских полей, но в общем случае реализуются только представления второго типа, когда базовыми характеристиками служат собственные значения оператора, определяющего структуру массового слагаемого лагранжиана.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем им. В. П. Джелепова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Gaponov Yu. V. P4-2005-137

Description of Majorana Properties of Neutral Particles
in the Framework of Pauli Symmetry

A mathematical model based on Pauli transformations consisting of $U(1)$ chiral group as well as Pauli $SU(2)$ group, which mixes particle and antiparticle components of wave functions, is developed for description of Majorana properties of a system incorporating left-handed and right-handed free neutral fermions of one type. For massless fermions Pauli symmetry is exact and leads to conserved charges: chiral and generalized lepton one. The latter is a vector in Pauli isospace, different directions of which are coordinated with Dirac or generalized Majorana properties. For nonzero mass particles the scheme describes combined Dirac–Majorana properties of particles of inversion A-B and C-D classes ($\eta_P^2 = \mp 1$ consequently) with constraint conditions $M_L = \pm M_R$ on their Majorana masses. For C-D-classes particles the Lagrangian mass term and Pauli charge can be described in terms of the operator of generalized lepton charge; however, for A-B-classes particles these characteristics are complemented. In this situation there are two alternative representations in the Dirac case either in the terms of lepton charge or by two independent Majorana fields, but in the general case the representations of the second type only are realized, when eigenvalues of the operator, defining structure of the Lagrangian mass term, serve as the basic characteristics.

The investigation has been performed at the Dzhelepov Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

ВВЕДЕНИЕ

Поиск явлений, выходящих за рамки Стандартной модели (СМ) электрослабого взаимодействия, и развитие их теоретического описания составляет сейчас центральную задачу исследований физики слабых процессов. Одной из привлекательных физических идей, на проверку которых направлены такие исследования, является предположение о возможных майорановских свойствах нейтрино, основанное на гипотезе Майорана [1], согласно которой нейтрино может быть тождественно своей античастице. В рамках такой гипотезы предполагается, что лептонный заряд нейтрино не сохраняется и возможны процессы, в которых нейтрино превращается в антинейтрино, например, безнейтринный двойной бета-распад ядер. С другой стороны, майорановские свойства нейтрино могут оказаться существенными при описании явления нейтринных осцилляций, впервые предложенного Понтекорво в 50-х годах [2] по аналогии с осцилляцией K^0-мезонов и экспериментально открытого в последние годы [3–5]. Феноменологические модели для описания нейтринных осцилляций, включающие как дираковские, так и майорановские нейтрино, развивались в литературе в двух вариантах: в схемах с левыми и правыми (физическими и стерильными, по современной терминологии) нейтрино, идущими от работы [2] для одного типа частиц, и в схемах, включающих наборы только левых нейтрино разных поколений. Вначале это были электронные и мюонные нейтрино [6, 7], в последние годы — нейтрино трех (и более) поколений [8–12]. В простейшем случае первого варианта моделей массовая часть нейтринного лагранжиана включает слагаемые как дираковского, так и майорановского типа [11, 12] общего вида:

$$\begin{aligned} -2L_m(x) &= \overline{\psi}_R(x) m_D \psi_L(x) + \overline{\psi}{}^c_R(x) m_D \psi^c_L(x) + \\ &\quad + \overline{\psi}_R(x) m_R \psi^c_L(x) + \overline{\psi}{}^c_R(x) m_L \psi_L(x) + h.c. = \\ &= \overline{n^c_L}(x) \hat{M} n_L(x) + h.c.; \quad n_L(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi^c_L(x) \end{pmatrix}, \quad \hat{M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1}$$

где m_D, m_L, m_R — дираковская, левая и правая майорановские массы. Майорановские массовые слагаемые такого, феноменологического лагранжиана строятся на основе общих свойств симметрии, а конкретные расчеты в такой схеме ведутся с использованием двухкомпонентных функций $n_L(x)$ и общих унитарных преобразований, с помощью которых массовая матрица $\hat{M}$ приводится к диагональной форме. Эффективные массы m_1, m_2, получаемые в процессе диагонализации, сопоставляются с массами физических осциллирующих нейтрино:

$$
\begin{gathered}
m_{1,2} = \frac{1}{2}[(m_R + m_L) \pm \sqrt{(m_R - m_L)^2 + 4m_D^2}], \\
\psi_L(x) = \cos\theta_{md}\varphi_{1L}(x) + \sin\theta_{md}\varphi_{2L}(x), \\
\psi_R(x) = \sin\theta_{md}\varphi_{1R}(x) - \cos\theta_{md}\varphi_{2R}(x), \\
\varphi_1(x) = \varphi_1^c(x), \quad \varphi_2(x) = \varphi_2^c(x), \quad \mathrm{tg}\, 2\theta_{md} = \frac{2m_D}{m_L - m_R},
\end{gathered}
\tag{2}
$$

а модельный параметр θ_{md} задает угол смешивания, описывающий начальные левые и правые состояния как суперпозиции физических состояний 1 и 2 майорановского типа [10–12].

Формальный метод введения в (1) майорановских массовых слагаемых является достаточно общим, однако при этом основания для совместного описания майорановских и дираковских характеристик, выбора $n_L(x)$ в форме (1) и условия, при которых в результате диагонализации общая форма сводится к паре майорановских полей, остаются непроясненными. Серьезной трудностью общего подхода является отсутствие в нем сохраняющихся квантовых чисел нейтрино. В этом плане развитие существующего формализма в направлении поиска новых, нетрадиционных майорановских моделей, предлагающих отличное от принятого описание систем, включающих майорановские поля и способствующих установлению связей существующих феноменологических схем со Стандартной моделью, является сегодня одной из важных задач. Как показано ниже, новый подход в этом направлении может дать изучение модели, развивающей простейший вариант (1) майорановской схемы и реализующей ее частный случай, связанный со специальными преобразованиями, предложенными Паули в 50-х годах [13]. Использование этих преобразований позволяет ввести квантовые числа, обобщающие понятие лептонного заряда, и описывать майорановские свойства частиц, в частности, получать майорановские соотношения как условия на собственные функции базовых операторов. При этом паулиевские преобразования задают основу связи дираковских и майорановских свойств нейтральных частиц и вводят в схему ряд моментов, сближающих ее со Стандартной моделью, причем результаты принятого сегодня феноменологического описания получают новое освещение и интерпретацию, что может оказаться полезным при дальнейшем развитии теории. Хотя такая модель существенно ограничена и имеет ряд нетривиальных особенностей, связанных с ее интерпретацией, ее детальный анализ представляется полезным и, по мнению автора, может способствовать сближению принятого феноменологического подхода с СМ.

Настоящая статья посвящена развитию указанной схемы: исследованию паулиевских преобразований и описанию на их основе майорановских свойств нейтральных частиц в простой модели, когда массовая часть лагранжиана включает частицы одного сорта — левые и правые (см. также [14, 15]). Показано, что в паулиевской схеме майорановские соотношения возникают как проекционные условия для решений, описывающих свободные частицы с фиксированным квантовым числом — обобщенным лептонным зарядом или, альтернативно, произведением его и киральности, которые интерпретируются как векторы в изопространстве паулиевских преобразований. Получены известные майорановские соотношения и построены новые типы майорановских связей, обобщающие условие Майорана, установлена их связь с поведением нейтральных частиц по отношению к преобразованию пространственной инверсии. Исследованы частицы массы нуль и свободные частицы с отличными от нуля дираковскими и майорановскими массовыми слагаемыми. Подчеркнем, что развиваемая схема не претендует на анализ конкретных экспериментов, но позволяет сформировать новую точку зрения на существующий феноменологический формализм и выявить точки его возможной стыковки со Стандартной моделью электрослабого взаимодействия.

Статья построена следующим образом: в разделе 1 вводятся паулиевские преобразования, исследуются их свойства относительно дискретных P-, T-, C-операций и вводятся инверсные классы частиц относительно операции пространственного отражения, определяющие общую структуру майорановских условий. В разделе 2 построены заряды, описывающие решения для свободных безмассовых частиц, и устанавливается связь собственных функций операторов, задающих базовые представления разных инверсных классов, с обобщенными майорановскими условиями. В разделе 3 схема распространяется на массивные свободные частицы: в ней описываются и анализируются основные типы решений в случае, когда в лагранжиане присутствуют массовые слагаемые как дираковского, так и майорановского типов, связанные между собой паулиевскими преобразованиями. Раздел 4 включает обсуждение результатов и их сопоставление с обычным феноменологическим подходом.

1. ПАУЛИЕВСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ИНВЕРСНЫЕ КЛАССЫ ЧАСТИЦ

Как было впервые указано Паули [13] (см. также [16–18]), для фермионных полей массы нуль существуют преобразования, которые сохраняют коммутационные соотношения операторов поля и могут быть представлены в форме

$$\psi^{'}(x) = \mathrm{e}^{i\gamma_5\chi/2}(a\psi(x) + b\gamma_5\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(x)), \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \tag{3}$$

так что общее преобразование включает два независимых — киральное (тип II у Паули) и собственно паулиевское (тип I), последнее при $a = \mathrm{e}^{i\varphi/2}$,

$b=0$ соответствует группе фазовых преобразований. В паулиевской группе естественно вводится обобщенная функция $\Psi(x)$ и операторы $\hat{\kappa}_i$ $(i=x,y,z)$:

$$\begin{gathered}\Psi(x)=\binom{\psi(x)}{\gamma_5\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(x)},\quad \overline{\Psi(x)}=\Psi(x)^+\gamma_4=(\overline{\psi}(x),\quad \psi^T(x)\gamma_4\gamma_2\gamma_5),\\ \hat{\kappa}_x=\begin{pmatrix}0&+1\\+1&0\end{pmatrix},\quad \hat{\kappa}_y=\begin{pmatrix}0&-i\\+i&0\end{pmatrix},\quad \hat{\kappa}_z=\begin{pmatrix}+1&0\\0&-1\end{pmatrix}.\end{gathered}\tag{4}$$

В таком представлении при $a=\mathrm{e}^{i\varphi/2}\cos\theta/2$, $b=\mathrm{e}^{i\varphi/2}\mathrm{e}^{-i\phi}\sin\theta/2$ преобразование (3) приобретает вид

$$\Psi^{'}(x)=\mathrm{e}^{i\gamma_5\chi/2}\mathrm{e}^{i\hat{\kappa}_z\varphi/2}\mathrm{e}^{i(-\sin\phi\hat{\kappa}_x+\cos\phi\hat{\kappa}_y)\theta/2}\Psi(x)=S(\chi)S(\varphi)S(\phi,\ \theta)\Psi(x).\tag{5}$$

Киральные преобразования образуют $U(1)$-группу, собственно паулиевские — $SU(2)$-группу вращений в изопространстве двухкомпонентных паулиевских спиноров. Оператор $S(\chi)=\mathrm{e}^{i\gamma_5\chi/2}$ описывает киральные преобразования, $S(\varphi)=\mathrm{e}^{i\hat{\kappa}_z\varphi/2}$ — повороты на угол φ вокруг оси κ_z паулиевского изопространства, а преобразование $S(\phi,\ \theta)=S$ — поворот единичного вектора этого пространства $\vec{\kappa}$, заданного стандартными углами Эйлера ϕ и θ, в направлении вектора $\boldsymbol{\kappa}_z$:

$$S\hat{\kappa}S^+=\hat{\kappa}_z,\quad \hat{\kappa}=\cos\theta\hat{\kappa}_z+\cos\phi\sin\theta\hat{\kappa}_x+\sin\phi\sin\theta\hat{\kappa}_y.\tag{6}$$

Помимо формы (4) ниже будут использованы и другие представления двухкомпонентной обобщенной функции, при этом форма преобразований (5) должна соответственно модифицироваться.

Паулиевские преобразования тесно связаны с дискретными операциями пространственной инверсии (P), изменения знака времени (T) и зарядового сопряжения (C), которые вводятся соотношениями [19]:

$$\begin{gathered}(\psi(x))^P=\hat{P}\psi(Px),\quad (\overline{\psi}(x))^P=\overline{\psi}(Px)\hat{P}^{-1},\quad (P\mathbf{x}=-\mathbf{x},\ Px_4=x_4),\\ (\psi(x))^T=\hat{T}\overline{\psi}^T(Tx),\quad (\overline{\psi}(x))^T=\psi^T(Tx)\hat{T}^{-1},\quad (T\mathbf{x}=\mathbf{x},\ Tx_4=-x_4),\\ (\psi(x))^C=\hat{C}\overline{\psi}^T(x),\quad (\overline{\psi}(x))^C=\psi^T(x)(\hat{C}^{-1})^T,\\ \hat{P}=\eta_P\gamma_4,\quad \hat{T}=\eta_T\gamma_2\gamma_5,\quad \hat{C}=\gamma_2\gamma_4,\quad |\eta_P|^2=|\eta_T|^2=1.\end{gathered}\tag{7}$$

(Для операции зарядового C-сопряжения выбрана редуцированная форма с $\eta_C=1$, более общая, включающая фазовый множитель $\eta_C\neq 1$, будет обсуждаться позже.)

Найдем условия сохранения формы паулиевских преобразований при этих дискретных операциях, для чего используем их развернутую форму, включающую вместо трех независимых параметров $(a,\ b,\ \chi)$ — четыре:

$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$, связанных дополнительными соотношениями [13]:

$$\begin{gathered}
\psi^{'}(x) = a_1\psi(x) + a_2\gamma_5\psi(x) + b_1\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(x) + b_2\gamma_5\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(x),\\
a_1 = a\cos(\chi/2),\ a_2 = ia\sin(\chi/2),\\
b_1 = ib\sin(\chi/2),\ b_2 = b\cos(\chi/2),\\
|a_1|^2 + |a_2|^2 + |b_1|^2 + |b_2|^2 = 1,\\
a_1a_2^* + a_1^*a_2 + b_1b_2^* + b_1^*b_2 = 0, \quad a_2b_2 - a_1b_1 = 0.
\end{gathered} \tag{8}$$

Применяя к (8) операцию пространственной инверсии, получим

$$\begin{multline}
\psi^{'}(Px) = a_1\psi(Px) - a_2\gamma_5\psi(Px) - b_1\eta_P^2\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(Px) + \\
+ b_2\eta_P^2\gamma_5\gamma_2\gamma_4, \overline{\psi}^T(Px),
\end{multline} \tag{9}$$

так что преобразования (8) сохраняют форму при условиях

$$a_2 = -a_2 = 0, \quad b_1(1+\eta_P^2) = 0, \quad b_2(1-\eta_P^2) = 0. \tag{10}$$

Аналогично, при изменении знака времени

$$\begin{multline}
\psi^{'}(Tx) = a_1^*\psi(Tx) + a_2^*\gamma_5\psi(Tx) + b_1^*\eta_T^2\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(Tx) + \\
+ b_2^*\eta_T^2\gamma_5\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(Tx),
\end{multline} \tag{11}$$

и условие сохранения формы преобразований дает связи

$$a_1 = a_1^*, \quad a_2 = a_2^*, \quad b_1^*\eta_T^2 = b_1, \quad b_2^*\eta_T^2 = b_2. \tag{12}$$

Наконец, для операции зарядового C-сопряжения

$$\psi^{'}(x) = a_1^*\psi(x) - a_2^*\gamma_5\psi(x) + b_1^*\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(x) - b_2^*\gamma_5\gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(x), \tag{13}$$

и для сохранения формы преобразований необходимо

$$a_1 = a_1^*, \quad a_2 = -a_2^*, \quad b_1^* = b_1, \quad b_2^* = -b_2. \tag{14}$$

Естественным физическим условием на общую форму паулиевских преобразований можно считать ее сохранение при комбинированной CTP-операции [19, 20]. Применяя последовательно (9), (11), (13), легко показать, что они ведут к следующим соотношениям между параметрами b_1, b_2 и фазами P- и T-преобразований — η_P и η_T:

$$b_1(1+\eta_P^2/\eta_T^2) = 0, \quad b_2(1+\eta_P^2/\eta_T^2) = 0, \tag{15}$$

(на a_1, a_2 ограничений нет) или для параметра b соответственно

$$b(1+\eta_P^2/\eta_T^2)=0, \qquad \eta_P^2/\eta_T^2=-1 \quad b\neq 0. \tag{16}$$

(на a ограничений нет). Оно согласуется с известным условием на фазы дискретных преобразований, принимаемым для физических частиц в современной теории, где предполагается подобие дискретных свойств античастиц и частиц [19], что дает $\eta_P^2=-1,\ \ \eta_T^2=+1$. Фермионы с условием $\eta_P^2=-1$ называют частицами инверсных A-B-классов ($\eta_P=+i$ — A-класс, $\eta_P=-i$ — B-класс) [21]. Однако для майорановских частиц априори нельзя исключить также иной выбор фаз инверсии (о котором впервые упоминал Рака [22], см. также [23–24]), когда $\eta_P^2=1$. Такие частицы относят к инверсным C-D-классам ($\eta_P=+1$ — C-класс , $\eta_P=-1$ — D-класс) [21], для них $\eta_P^2=1,\ \ \eta_T^2=-1$*.

Исследование сохранения формы паулиевских преобразований (3) при дискретных операциях (7) с учетом инверсных классов частиц приводит к следующим результатам:

для инверсных A-B-классов, к которым обычно относят физические частицы, условия сохранения при P-, T- и C-преобразованиях раздельно таковы:

$$\begin{gathered}
P(CT)\text{-сохранение:}\ \ \chi=0,\ \ b=0,\ \ a\text{ — произвольное }(\theta=0);\\
\chi=\pi,\ \ a=0,\ \ b\text{ — произвольное }(\theta=\pi);\\
T(CP)\text{-сохранение:}\ \ \chi=0,\ \ a,b\text{ — действительные }(\varphi=0,\phi=0,\pi);\\
\chi=\pi,\ \ a,b\text{ — мнимые }(\varphi=\pi,\ \phi=0,\pi);\\
C(TP)\text{-сохранение:}\ \ \chi\text{ — произвольные,}\\
a\text{ — действительные, }\ b\text{ — мнимые, }\ (\varphi=0,\ \phi=\pm\pi/2);
\end{gathered} \tag{17}$$

для альтернативного случая частиц C-D-классов:

$$\begin{gathered}
P(CT)\text{-сохранение:}\\
\chi=0,\ \ a,b\text{ — произвольное }(\varphi,\ \phi,\ \theta\text{ — произвольные});\\
T(CP)\text{-сохранение:}\\
\chi=0,\ \ a\text{ — действительные, }\ b\text{ — мнимые }(\varphi=0,\ \phi=\pm\pi/2);\\
\chi=\pi,\ \ a\text{ — мнимые; }\ b\text{ — действительные }(\varphi=\pi,\ \phi=\pm\pi/2);\\
C(TP)\text{-сохранение:}\ \ \chi\text{ — произвольные,}\\
a\text{ — действительные, }\ b\text{ — мнимые, }\ (\varphi=0,\ \phi=\pm\pi/2).
\end{gathered} \tag{18}$$

---

*К сожалению, в литературе нет устоявшейся системы обозначений инверсных классов частиц. Так в монографии [21] введены принятые здесь обозначения, а в статье [23] — обратные им. В настоящей работе использованы обозначения [21], в них физические частицы относятся к инверсным A-B-классам, а гипотетические — к C-D-классам.

Очевидно, что за исключением двух специальных случаев ($\chi = 0, \pi$) киральные преобразования не сохраняют P- и CP-четность, а для чисто паулиевских поворотов особенности поведения системы при дискретных $P(CT)$- и $T(CP)$-операциях существенно зависят от инверсного класса частиц, в частности, для частиц C-D-классов такие преобразования сохраняют пространственную четность, а для A-B — не сохраняют. Условия C-сохранения не зависят от инверсного класса частиц и киральных преобразований.

Как будет продемонстрировано ниже, инверсные классы нейтральных частиц играют важную роль при описании их майорановских свойств. Действительно, рассмотрим достаточно общие соотношения майорановского типа, выбирая их в виде

$$\begin{gathered}\psi^c(x,\zeta) = \lambda \mathrm{e}^{i\phi}\psi(x,\zeta) \quad (A), \quad \psi^c(x,\zeta) = \lambda \mathrm{e}^{i\phi}\gamma_5\psi(x,\zeta) \quad (B), \\ \big(\psi^c(x,\zeta) = \gamma_2\gamma_4\overline{\psi}^T(x,\zeta), \\ \lambda \text{ — действительное число, } \zeta \text{ — квантовые числа}\big).\end{gathered} \tag{19}$$

Первое из них — обобщение известного условия Майорана (случай $\lambda = 1$ отмечен, например, в [25]), второе — его аналог, исследуемый далее наряду с майорановским. Легко показать, что (A) реализуется для частиц инверсных A-B-классов (см., например, [8]), а (B) — для частиц C-D-классов. Аналогично, анализ комбинаций:

$$\overline{\psi}(x)\psi^c(x) \pm \overline{\psi}^c(x)\psi(x), \quad (A), \quad \overline{\psi}(x)\gamma_5\psi^c(x) \pm \overline{\psi}^c(x)\gamma_5\psi(x), \quad (B), \tag{20}$$

показывает, что (20) (A) являются скалярными для A-B- и псевдоскалярными для C-D-классов, тогда как (20) (B) — скалярными для C-D-, но псевдоскалярными для A-B-классов. В тех случаях, когда условие (19) (A) или комбинации типа (20) (A) используются в майорановских моделях [10–12], в них, очевидно, неявно вносится условие принадлежности частиц к инверсным A-B-классам. Введение наряду с (19) (A) условий (19) (B) устраняет это ограничение и позволяет далее строить майорановские схемы как для частиц инверсных A-B-, так и C-D-классов. Для последних майорановские условия должны выбираться в форме (19) (B), при этом скалярные массовые слагаемые майорановского типа будут описываться комбинациями типа (20) (B).

2. МАЙОРАНОВСКИЕ СВОЙСТВА НЕЙТРАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ МАССЫ НУЛЬ

Найдем сохраняющиеся заряды, определяемые общей группой паулиевских преобразований (3) для безмассового фермионного поля. Представим лагранжиан такого поля через обобщенные функции (4) в виде

$$L_0(x) = -\frac{1}{2}[\overline{\Psi}(x)\gamma_\mu\partial_\mu\Psi(x)], \quad \Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \gamma_5\psi^c(x) \end{pmatrix} \tag{21}$$

(здесь и далее функции вторично квантованы). Отметим, что обобщенная функция $\Psi(x)$ включает в нижней компоненте γ_5 и этим отличается от формы, используемой обычно в майорановских моделях. Подчеркнем, что такая форма обобщенной функции является универсальной, то есть сохраняется при паулиевских преобразованиях (5). Инвариантность лагранжиана (21) к киральной и фазовой группам преобразований (последняя — подгруппа паулиевских) приводит к двум типам сохраняющихся зарядов — киральному и лептонному. Первый — киральный имеет вид

$$Q^{CH} = \frac{1}{2}\int d^3x[\Psi^+(x)\gamma_5\Psi(x)] = \frac{1}{2}\int d^3x[\psi^+(x)\gamma_5\psi(x)+ \\ + \psi^{c+}(x)\gamma_5\psi^c(x)]. \tag{22}$$

Собственные значения кирального заряда определяются оператором γ_5 — квантовым числом киральности $\rho = \pm 1$ ($\gamma_5\Psi_\rho(y) = \rho\Psi_\rho(y)$). Для частиц нулевой массы киральный заряд описывает при $\rho = +1$ — левые частичные состояния и античастичные состояния правых частиц, при $\rho = -1$ — правые частичные состояния и античастичные состояния левых частиц:

$$\Psi_{+1}(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) \\ \psi_L^c(x) \end{pmatrix}; \quad \Psi_{-1}(x) = \begin{pmatrix} \psi_R(x) \\ -\psi_R^c(x) \end{pmatrix}; \\ \psi_L^c(x) = (\psi_R(x))^c, \quad \psi_R^c(x) = (\psi_L(x))^c. \tag{23}$$

Заряд, связанный с фазовой $U(1)$-подгруппой паулиевской $SU(2)$-группы (3), — это лептонный (нейтринный) заряд:

$$Q^L = Q_z^P = \frac{1}{2}\int d^3x[\Psi^+(x)\hat{\kappa}_z\Psi(x)] = \frac{1}{2}\int d^3x[\psi^+(x)\psi(x) - \psi^{c+}(x)\psi^c(x)]. \tag{24}$$

Из представления лептонного заряда Q^L в обобщенных функциях следует, что в паулиевском изопространстве он z-компонента вектора и, следовательно, при паулиевских поворотах преобразуется как вектор. Этот вектор паулиевского изопространства, который, как будет показано далее, играет в нашей схеме роль обобщенного лептонного заряда, назовем паулиевским — Q^P. Собственные значения заряда Q_z^P задаются собственными значениями оператора $\hat{\kappa_z}$, $q_z = \pm 1$ ($\hat{\kappa}_z\Psi_{q_z}(y) = q_z\Psi_{q_z}(y)$), они не зависят от киральности частиц, поскольку Q_z^P коммутирует с Q^{CH}. Выбирая в качестве операторов пару $Q^{CH}; Q_z^P$, получим следующий набор базовых собственных функций с квантовыми числами $(\rho,\ q_z)$ ($\rho = \pm 1$ $(L,\ R)$, $q_z = \pm 1$):

$$
\begin{gathered}
(\Psi_0)_{+1,+1}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0L}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
(\Psi_0)_{+1,-1}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{0L}^c(x) \end{pmatrix},\ (\Psi_0)_{-1,+1}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0R}(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
(\Psi_0)_{-1,-1}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\psi_{0R}^c(x) \end{pmatrix},\ (\Psi_0)_{q_z}(x) = \sum_\rho (\Psi_0)_{\rho,q_z}(x), \\
Q_z^P(q_z) = \int d^3x (\Psi_0)_{q_z}^+(x) \hat{\kappa}_z (\Psi_0)_{q_z}(x), \\
\int d^3x (\Psi_0)_{q_z}^+(x)(\Psi_0)_{q_z'}(x) = \delta_{q_z,q_z'}.
\end{gathered}
\tag{25}
$$

При этом верхние и нижние компоненты функций (25) суть разные собственные функции Q_z^P, а сами обобщенные функции как целое — собственные функции кирального заряда.

Перейдем к $SU(2)$-группе произвольных чисто паулиевских преобразований. Общей формой преобразований является (5) при $\chi = 0$, включающая $S(\varphi)$ и $S(\phi,\ \theta)$. Лагранжиан (21) инвариантен к ним, а сохраняющийся заряд получается из (24) поворотом $S^+ = S^+(\phi,\ \theta)$:

$$
\begin{aligned}
Q^P &= \frac{1}{2}\int d^3x \Psi^+(x)\hat{\kappa}\Psi(x) = \cos\theta Q_z^P + \sin\theta\cos\phi Q_x^P + \sin\theta\sin\phi Q_y^P, \\
Q_x^P &= \frac{1}{2}\int d^3x \Psi^+(x)\hat{\kappa}_x\Psi(x) = \frac{1}{2}\int d^3x[\psi^+(x)\gamma_5\psi^c(x) + \psi^{c+}(x)\gamma_5\psi(x)]; \\
Q_y^P &= \frac{1}{2}\int d^3x \Psi^+(x)\hat{\kappa}_y\Psi(x) = -\frac{i}{2}\int d^3x[\psi^+(x)\gamma_5\psi^c(x) - \psi^{c+}(x)\gamma_5\psi(x)].
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Существенным моментом развиваемой теории является присутствие в этом сохраняющемся обобщенном лептонном Q^P-заряде слагаемых Q_x^P и Q_y^P, в которых смешаны частичные и античастичные компоненты $\Psi(x)$. Исследуем эту особенность.

Предположим, что в обобщенном лептонном заряде присутствуют только x- и y-компоненты. Паулиевский поворот, связывающий заряды Q^P и Q_z^P и их решения, отвечает (5) при $\theta = \pi/2$. Он преобразует $\hat{\kappa}$ в $\hat{\kappa}_z$, а собственные функции $\Psi_q(x)$ представления, где диагонален $\hat{\kappa}$, в $(\Psi_0)_{q_z}(x)$ базового представления, где диагонален $\hat{\kappa}_z$:

$$
\begin{gathered}
S\hat{\kappa}S^+ = \hat{\kappa}_z; \\
S^+\hat{\kappa}_z S = \hat{\kappa}_z S^2 = \hat{\kappa}_z i(\cos\phi\hat{\kappa}_y - \sin\phi\hat{\kappa}_x) = \cos\phi\hat{\kappa}_x + \sin\phi\hat{\kappa}_y = \hat{\kappa}; \\
\hat{\kappa}\Psi(x) = q\Psi(x),\quad S\Psi(x) = \Psi_0(x),\quad \hat{\kappa}_z\Psi_0(x) = q_z\Psi_0(x),
\end{gathered}
\tag{27}
$$

Собственные значения обобщенного заряда Q^P определяются собственными значениями оператора $\hat{\kappa}$ ($\hat{\kappa}\Psi_q(y) = q\Psi_q(y),\ q = \pm 1$), где q — обобщенное квантовое число, которое в предшествовавшем случае определялось величиной q_z. Из явного вида операторов $\hat{\kappa}_x, \hat{\kappa}_y$ и представления $\Psi(x)$ через $\psi(x),\ \psi^c(x)$ (21) следует, что уравнение на собственные значения $\hat{\kappa}$ ведет к следующим связям верхней и нижней компонент собственных функций Q^P:

$$\Psi_q(x) = \begin{pmatrix} \psi_q(x) \\ \gamma_5\psi_q^c(x) \end{pmatrix},\ \gamma_5\psi_q^c(x) = \mathrm{e}^{i\phi}\psi_q(x),\ (q = +1),$$
$$\gamma_5\psi_q^c(x) = -\mathrm{e}^{i\phi}\psi_q(x),\ (q = -1). \tag{28}$$

Заметим, что эти соотношения прямо сопоставляются с обобщенными майорановскими условиями (19) (B) при $\lambda = \pm 1$. Действительно, выберем первое из соотношений (28), отвечающее значению $q = +1$. Оно совпадает с обобщенным майорановским (19) (B) условием для частиц инверсных C-D-классов при $\lambda = +1$ и, следовательно, для частиц C-D-классов решения $q = +1$ совпадают с майорановскими решениями при $\lambda = +1$. Если в теории оставить только фиксированное собственное значение $q = +1$, то решения $q = -1$ автоматически отбрасываются и число степеней свободы уменьшается вдвое. При этом майорановское условие (19) (B) будет выступать как проекционное, отбирающее одно из собственных значений и одну из собственных функций оператора $\hat{\kappa}$.

Возможна альтернативная ситуация, когда выбирается второе из соотношений (28), выделяющее решения $q = -1$ и отбрасывающее $q = +1$. Для частиц инверсных C-D-классов оно совпадает с майорановским условием (19) (B) при $\lambda = -1$ и его использование вновь уменьшает число степеней свободы вдвое. Такие решения дополняют майорановские $\lambda = +1$ до полного набора, так же как дираковские античастичные дополняют частичные — их можно назвать дополнительными майорановскими. Итак, для частиц C-D-классов майорановские условия (19) (B) при $\lambda = \pm 1$ суть проекционные условия, выделяющие решения с обобщенным зарядом $q = \pm 1$. Сам заряд (26) в этом случае имеет укороченный вид:

$$Q^P = \cos\psi Q_x^P + \sin\psi Q_y^P = \frac{1}{2}\int d^3x\Psi^+(x)\hat{\kappa}\Psi(x) =$$
$$= \frac{1}{2}\int d^3x[\psi^+(x)\mathrm{e}^{-i\phi}\gamma_5\psi^c(x) + \psi^{c+}(x)\mathrm{e}^{+i\phi}\gamma_5\psi(x)] \tag{29}$$

и является скаляром для частиц инверсных C-D-классов, но псевдоскаляром для частиц инверсных A-B-классов. Это позволяет рассматривать заряд Q^P как физическую величину, подходящую для описания частиц инверсных C-D-классов.

Рассмотрим частицы инверсных A-B-классов, для которых майорановские условия имеют общий вид (19) (A). По аналогии с предыдущим можно ожидать, что и в этом случае майорановские связи будут возникать как следствие паулиевских преобразований, однако должны отвечать иному выбору формы обобщенной функции, отличающейся от (21). Действительно, в стандартной майорановской схеме (1), используемой для описания майорановских частиц инверсных A-B-классов, роль двухкомпонентной обобщенной функции фактически играет величина $n_L + n_R^c = \binom{\psi_L(x)+\psi_R^c(x)}{\psi_R(x)+\psi_L^c(x)}$, построенная из зарядово-четных комбинаций левых и правых компонент. Можно показать, что общая универсальная форма такого типа, сохраняющаяся при произвольных кирально-паулиевских преобразованиях, отвечает двухкомпонентным функциям, построенным по такой же схеме из зарядово-четных или зарядово-нечетных $(\eta = \pm 1)$ комбинаций левых и правых компонент $\psi(x)$ и $\psi^c(x)$. Новая форма обобщенной функции $\Phi(x)$ и соответствующая ей новая форма лептонного заряда Q_z^P будут

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \psi_L(x) + \eta\psi_R^c(x) \\ \psi_R(x) + \eta\psi_L^c(x) \end{pmatrix}, \quad Q^L = Q_z^P = \frac{1}{2}\int d^3x \Phi^+(x)\hat{\kappa}_z\gamma_5\Phi(x), \tag{30}$$

при этом форма паулиевских преобразований (5) модифицируется и получает вид

$$\Phi^{'}(x) = \mathrm{e}^{i\gamma_5\chi/2}\mathrm{e}^{i\kappa_z\gamma_5\varphi/2}\mathrm{e}^{i\eta(\cos\phi\kappa_y - \sin\phi\kappa_x\gamma_5)\theta/2}\Phi(x) = \\ = S(\chi)S'(\varphi)S'(\phi,\theta)\Phi(x). \tag{31}$$

Функции $\Phi(x)$ задаются в таком представлении квантовыми числами произведения кирального и лептонного зарядов $Q^{CH}Q_z^P$ и зарядовой четностью $\eta = \pm 1$, так что по-прежнему существует четыре собственных функции — суперпозиции базовых функций (25). Действительно, поскольку в новом представлении оператор киральности γ_5 не меняется, а оператор лептонного заряда включает произведение $\hat{\kappa}_z\gamma_5$, то наряду с ними можно ввести оператор $\hat{\kappa}_z$, интерпретируя его (и его квантовые числа) как их произведения, и использовать последние для частиц инверсных A-B-классов как альтернативу описанию в терминах лептонного заряда. Базовые функции, аналогичные (25), с фиксированным собственным значением κ_z и определенной зарядовой четностью $(\Phi_0)_{\kappa_z,\eta}(x)$, построенные как комбинации вида (30) из $\psi_{0\rho}(x)$ и $\psi_{0\rho}^c(x)$, и соответствующий им лептонный заряд имеют в таком представлении вид

$$(\Phi_0)_{+1,\eta}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{0L}(x)+\eta\psi_{0R}^c(x) \\ 0 \end{pmatrix}, \ (\Phi_0)_{-1,\eta}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{0R}(x)+\eta\psi_{0L}^c(x) \end{pmatrix}, \\ \eta = \pm 1, \quad Q_z^P(\kappa_z) = \int d^3x (\Phi_0)^+_{\kappa_z,\eta}(x)\hat{\kappa}_z\gamma_5(\Phi_0)_{\kappa_z,\eta}(x), \tag{32}$$

$$\int d^3x(\Phi_0)^+_{\kappa_z,\eta}(x)(\Phi_0)_{\kappa'_z,\eta}(x)=\delta_{\kappa_z,\kappa'_z}. \tag{32}$$

При этом частичные состояния определенной киральности и зарядово-сопряженные им античастичные состояния противоположной киральности получают общую характеристику κ_z: собственные функции $\hat{\kappa}_z$ с квантовым числом $\kappa_z=+1$ включают левые частичные и зарядово-сопряженные им правые античастичные состояния, а $\kappa_z=-1$ — правые частичные и соответствующие левые античастичные состояния. В состояниях с фиксированными собственными значениями (κ_z,η) лептонный заряд q_z обращается в нуль. Существенно, что собственные значения $\kappa_z=\pm1$ позволяют различить группу левых (физических) частиц (правых античастиц) и группу правых (стерильных) частиц (левых античастиц), тогда как собственные значения оператора лептонного заряда $\kappa_z\rho=q_z=\pm1$ отличают группу частиц (левых или правых) от античастиц (правых или левых соответственно). При паулиевском повороте $S'^+(\phi,\theta=\pi/2)$ собственные функции (32) с квантовым числом κ и обобщенный лептонный заряд приобретают вид

$$\begin{gathered}\Phi_{+1,\eta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_{0L}(x)+\eta\psi^c_{0R}(x)\\ \eta\mathrm{e}^{i\gamma_5\phi}(\psi_{0L}(x)+\eta\psi^c_{0R}(x))\end{pmatrix};\\ \Phi_{-1,\eta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\eta\mathrm{e}^{-i\gamma_5\phi}(\psi_{0R}(x)+\eta\psi^c_{0L}(x))\\ \psi_{0R}(x)+\eta\psi^c_{0L}(x)\end{pmatrix};\\ Q^P(\kappa)=\int d^3x\Phi^+_{\kappa,\eta}(x)\hat{\kappa}\gamma_5\Phi_{\kappa,\eta}(x),\quad \hat{\kappa}=\eta(\cos\phi\hat{\kappa}_x+\sin\phi\hat{\kappa}_y\gamma_5).\end{gathered} \tag{33}$$

При этом возникают связи между верхними и нижними компонентами собственных функций с фиксированным κ, аналогичные (28):

$$\begin{gathered}\Phi_{\kappa,\eta}(x)=\begin{pmatrix}\psi_{\kappa L}(x)+\eta\psi^c_{\kappa R}(x)\\ \psi_{\kappa R}(x)+\eta\psi^c_{\kappa L}(x)\end{pmatrix},\ \psi^c_{\kappa L(R)}(x)=\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\kappa L(R)}(x),\ (\kappa=+1);\\ \psi^c_{\kappa L(R)}(x)=-\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\kappa L(R)}(x),\ (\kappa=-1),\ \psi^c_{\kappa}(x)=\kappa\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\kappa}(x).\end{gathered} \tag{34}$$

Они совпадают с майорановскими условиями (19) (A) с $\lambda=\pm1$, предложенными в [24], а при $\phi=0,\ \kappa=+1$ приводят к классическому майорановскому условию тождественности волновых функций частиц и античастиц [1]. Очевидно, и в этом случае обобщенный лептонный заряд в состояниях с фиксированным квантовым числом $\kappa=\pm1$ обращается в нуль.

Найдем общий вид решений с фиксированным обобщенным лептонным зарядом, включающим, помимо x- и y-, также и z-компоненту, для частиц инверсных C-D-классов, для чего используем паулиевские преобразования (5), связывающие Q^P_z с общей формой заряда (26). Из явной формы Q^P вытекают следующие майорановские связи типа (19) (B), обобщающие (28), связывающие частичные и античастичные компоненты $\Psi_q(x)$ при определенных q:

$$\begin{aligned} \psi_q^c(x) &= \mathrm{tg}\,(\theta/2)\mathrm{e}^{i\phi}\gamma_5\psi_q(x),\ \ (q=1); \\ \psi_q^c(x) &= -\,\mathrm{ctg}\,(\theta/2)\mathrm{e}^{i\phi}\gamma_5\psi_q(x),\ \ (q=-1). \end{aligned} \tag{35}$$

Собственные функции обобщенного заряда получаются паулиевским преобразованием $S^+ = S^+(\phi,\ \theta)$, переводящим $\hat{\kappa}_z$ в $\hat{\kappa}$, а $(\Psi_0)_{q_z}(x)$ в собственные функции оператора $\hat{\kappa}$: $\Psi_q(x) = S^+(\Psi_0)_{q_z}(x)$. Нормировка обобщенной функции как целого при поворотах не нарушается, однако вклады, вносимые в нее частичными и античастичными компонентами, могут быть разными, при этом входящая в соотношение (19) величина $\lambda(\theta) \neq 1$. Собственные значения ρ не меняются, а q_z переходят в квантовые числа q собственных функций $\Psi_q(x)$, сохраняя значения. Для собственных функций $\Psi_{\rho,q}(x)$ при фиксированных $q = \pm 1$ получаем следующий вид основного $(q = +1)$ и дополнительного $(q = -1)$ решений:

$$\begin{aligned} \Psi_{+1,+1}(x) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\psi_{0L}(x) \\ \mathrm{e}^{i\phi}\sin(\theta/2)\psi_{0L}(x) \end{pmatrix}; \\ \Psi_{-1,+1}(x) &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)\psi_{0R}(x) \\ \mathrm{e}^{i\phi}\sin(\theta/2)\psi_{0R}(x) \end{pmatrix};\quad (q=+1), \\ \Psi_{+1,-1}(x) &= \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-i\phi}\sin(\theta/2)\psi_{0L}^c(x) \\ \cos(\theta/2)\psi_{0L}^c(x) \end{pmatrix}; \\ \Psi_{-1,-1}(x) &= \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-i\phi}\sin(\theta/2)\psi_{0R}^c(x) \\ -\cos(\theta/2)\psi_{0R}^c(x) \end{pmatrix};\quad (q=-1), \end{aligned} \tag{36}$$

$$\Psi_{\rho,q}(x)=\begin{pmatrix} \psi_{\rho,q}(x) \\ \gamma_5\psi_{\rho,q}^c(x) \end{pmatrix},\ \Psi_q(x)=\sum_\rho \Psi_{\rho,q}(x),\ Q^P(q)=\int d^3x\Psi_q^+(x)\hat{\kappa}\Psi_q(x).$$

Легко убедиться, что для этих собственных функций выполнены соотношения (35). Таким образом, для частиц инверсных C-D-классов и в общем случае значение $q = +1$ обобщенного лептонного заряда Q^P задает решения, описывающие смесь частичных и обобщенных майорановских состояний, удовлетворяющих майорановскому условию (19) (B) с $\lambda(\theta) = \mathrm{tg}(\theta/2)$, а $q = -1$ — смесь античастичных и дополнительных майорановских состояний с тем же майорановским условием при $\lambda'(\theta) = -\,\mathrm{ctg}(\theta/2) = -1/\lambda(\theta)$.

В случае частиц инверсных A-B-классов общий случай получается из (32) преобразованием $S'^+(\phi,\theta)$. Общая форма собственных функций $\Phi_{\kappa,\eta}(x)$ $(\eta = \pm 1)$ с квантовыми числами $\kappa = \pm 1$, совпадающими с κ_z, и соответствующего обобщенного лептонного заряда:

$$\Phi_{+1,\eta}(x) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2)(\psi_{0L}(x) + \eta\psi_{0R}^c(x)) \\ \eta\mathrm{e}^{i\gamma_5\phi}\sin(\theta/2)(\psi_{0L}(x) + \eta\psi_{0R}^c(x)) \end{pmatrix}; \tag{37}$$

$$\Phi_{-1,\eta}(x) = \begin{pmatrix} -\eta \mathrm{e}^{-i\gamma_5\phi}\sin(\theta/2)(\psi_{0R}(x)+\eta\psi^c_{0L}(x)) \\ \cos(\theta/2)(\psi_{0R}(x)+\eta\psi^c_{0L}(x)) \end{pmatrix}; \tag{37}$$

$$Q^P(\kappa) = \int d^3x \Phi^+_{\kappa,\eta}(x)\hat{\kappa}\gamma_5\Phi_{\kappa,\eta}(x), \ \ \hat{\kappa} = \cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta(\cos\phi\hat{\kappa}_x + \sin\phi\hat{\kappa}_y\gamma_5).$$

Очевидно, что и в общем случае в состояниях с фиксированными κ, η обобщенный лептонный заряд равен нулю. Легко показать, что связи между верхними и нижними компонентами собственных функций с фиксированным κ в этом случае ведут к соотношениям

$$\begin{gathered} \psi^c_{\kappa L}(x) = \mathrm{tg}\,(\theta/2)\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\kappa L}(x), \\ \psi^c_{\kappa R}(x) = \mathrm{ctg}\,(\theta/2)\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\kappa R}(x), \quad (\kappa=+1); \\ \psi^c_{\kappa L}(x) = -\,\mathrm{ctg}\,(\theta/2)\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\kappa L}(x), \\ \psi^c_{\kappa R}(x) = -\,\mathrm{tg}\,(\theta/2)\mathrm{e}^{i\phi}\psi_{\kappa R}(x), \quad (\kappa=-1). \end{gathered} \tag{38}$$

При этом решения $\kappa = +1$ удовлетворяют общим майорановским условиям (19) (A) с $\lambda(\theta) = \mathrm{tg}\,(\theta/2)$ для L- и $\lambda(\theta) = \mathrm{ctg}\,(\theta/2)$ для R-компонент, а $\kappa = -1$ — им же с $\lambda'(\theta) = -1/\lambda(\theta)$. При $\theta = \pi/2$ они переходят в соотношение $\psi^c(x) = \pm\mathrm{e}^{i\phi}\psi(x)$, полученное выше в (34), а при $\phi = 0$ в случае $\kappa = +1$ — в классическое условие Майорана: $\psi^c(x) = \psi(x)$ [1].

Таким образом, в майорановской схеме, основанной на паулиевских преобразованиях, у нейтральных частиц массы нуль возникает новая характеристика — обобщенный лептонный заряд, который интерпретируется как вектор в изопространстве паулиевских преобразований. Он расширяет понятие лептонного (нейтринного) заряда и позволяет описывать решения определенного лептонного заряда ($\theta = 0$) или обобщенного майорановского типа ($\theta = \pi/2$), а также промежуточные случаи, отвечающие различным значениям углового параметра паулиевских преобразований θ. Для частиц инверсных A-B-классов обобщенную волновую функцию удобно выбирать в универсальном виде (30), тогда обобщенный лептонный заряд имеет форму (37), а зарядово-сопряженные компоненты собственных функций с фиксированными значениями обобщенного лептонного заряда и киральности удовлетворяют майорановским соотношениям (38) общего вида (19) (A). При этом базовые состояния частицы задаются парой квантовых чисел κ, η, первое из которых имеет смысл произведения лептонного заряда и киральности, а второе — зарядовой четности, причем в состояниях с фиксированным значением этих квантовых чисел обобщенный лептонный заряд обращается в нуль. Для частиц инверсных C-D-классов обобщенную волновую функцию можно выбирать в универсальном виде (4), тогда обобщенный лептонный заряд имеет форму (26), а зарядово-сопряженные компоненты собственных функций с фиксированным значением обобщенного лептонного заряда удовлетворяют майорановским соотношениям (35) общего вида (19) (B), при этом состояния частицы задаются квантовыми числами лептонного заряда q и киральности ρ.

Эти первые результаты анализа паулиевской схемы являются достаточно общими и показывают целесообразность ее применения и в случае отличия от нуля массовых слагаемых лагранжиана типа (1), для которого свойства новых характеристик типа обобщенного лептонного заряда и произведения его и киральности необходимо более детально проанализировать. Что же касается конкретно частиц массы нуль, то, в силу инвариантности лагранжиана такой системы к полной группе паулиевских преобразований, все направления в киральном и паулиевском подпространствах в этом случае равноценны и при использовании обобщенных двухкомпонентных функций описание частиц в различных представлениях, связанных между собой паулиевскими преобразованиями, является эквивалентным.

3. МАЙОРАНОВСКИЕ СВОЙСТВА МАССИВНЫХ НЕЙТРАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Перейдем к случаю массивных свободных нейтральных частиц и исследуем особенности описания их майорановских свойств в схеме общих паулиевских преобразований. Принципиально возможны два пути реализации такой программы: более строгий подход в рамках калибровочной схемы системы основных фермионных полей, включающей хиггсовские бозоны, со спонтанным нарушением базовой симметрии, вводящим массовые слагаемые фермионов, и более формальный, феноменологический подход, в котором постулируется взаимосвязь дираковских и обобщенных майорановских решений в рамках паулиевских преобразований. Реализация первого принципиально возможна, однако его развитие требует введения ряда новых понятий и их детального анализа и по этой причине будет представлена автором в отдельной работе. В настоящей статье используется феноменологический подход, опирающийся на предположение об универсальности механизма нарушения паулиевской симметрии, при этом механизм выясняется при анализе дираковского случая, когда результат спонтанного нарушения начальной симметрии, ведущий к возникновению в лагранжиане дираковского массового слагаемого, известен априори.

Действительно, предположим, что общая паулиевская симметрия существует в базовой схеме безмассовых частиц и нарушается с введением массовых слагаемых дираковского и майорановского типов, причем механизм нарушения носит универсальный характер. Будем отталкиваться от дираковского случая, как частного случая общей схемы, когда спонтанное нарушение симметрии, приводящее к возникновению дираковского массового слагаемого лагранжиана, происходит по известному нам механизму Хиггса, в рамках которого масса появляется как вакуумное среднее хиггсовского поля. Гипотеза универсальности механизма нарушения предполагает, что вакуумные средние хиггсовских полей, отвечающие различным частным случаям спонтанного нарушения паулиевской симметрии, после нарушения по-прежнему остаются связанными между собой паулиевскими преобразованиями, что позволяет формально распространить механизм нарушения с дираковского на общий случай массивных частиц, лагранжиан которых включает массовые члены как дираковского, так и майорановского типа. В результате возникает феноменологический вариант развиваемого подхода, универсально описывающий объединенные дираковские и майорановские свойства свободных массивных нейтральных частиц, в основных деталях совпадающий со стандартным феноменологическим подходом, принятым в майорановских моделях. Сопоставление результатов этого подхода с общими майорановскими моделями, рассматриваемыми в литературе (например, [8–12]), позволяет прояснить его специфику, выяснить место развиваемой схемы среди майорановских моделей и выявить те стороны существующего феноменологического описания, которые могут быть развиты в направлении возможного сближения со Стандартной моделью электрослабого взаимодействия. Вместе с тем развитый подход имеет ряд особенностей, связанных с интерпретацией результатов, что заставляет рассматривать его как перспективную модель, позволяющую сделать определенный новый шаг в описании майорановских свойств свободных частиц, но не предлагающую окончательных решений.

Разовьем такой феноменологический подход, опираясь на анализ дираковского случая и последующее применение паулиевских преобразований, сначала для частиц инверсных C-D-классов, используя результаты раздела 2. Дираковский лагранжиан, дираковское уравнение и лептонный заряд в обобщенных функциях (4) имеют в этом случае вид

$$
\begin{gathered}
L_D(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}[\overline{\Psi}_D(x)\hat{\kappa}_z\Psi_D(x)], \quad \Psi_D(x) = \begin{pmatrix} \psi_D(x) \\ \gamma_5\psi^c_D(x) \end{pmatrix}, \\
(\gamma_\mu\partial_\mu + M\hat{\kappa}_z)\Psi_D(x) = 0, \quad Q^P_z = \frac{1}{2}\int d^3x \Psi^+_D(x)\hat{\kappa}_z\Psi_D(x).
\end{gathered} \tag{39}
$$

Отметим, что выражение лептонного заряда через обобщенные дираковские функции $\Psi_D(x)$ аналогично (24) для фермионов массы нуль и, следовательно, нечувствительно к механизму спонтанного нарушения, вводящему массу. Инвариантность лагранжиана к киральной группе и к группе чисто паулиевских преобразований нарушена, источником нарушений является массовое слагаемое лагранжиана, которое, однако, не нарушает инвариантность к фазовой подгруппе паулиевских поворотов вокруг оси z, так что существует сохраняющийся лептонный заряд Q_z^P. Лептонный заряд инвариантен к киральным преобразованиям и так же, как массовое слагаемое, сопоставлен с z-осью паулиевского изопространства. Таким образом, в дираковском случае спонтанное нарушение симметрии, вводящее массу, ведет к появлению в паулиевском изопространстве выделенного направления — оси z, с которым одновременно сопоставлен лептонный заряд q_z.

Опираясь на гипотезу об универсальности механизма нарушения, предположим, что и в общем случае массивной нейтральной частицы нарушение киральной и паулиевской симметрии, вводящее массовые слагаемые как дираковского, так и майорановского типа, происходит так, что в киральном и паулиевском подпространствах появляются выделенные направления, заданные соответственно киральным χ и эйлеровскими углами ϕ, θ. Переход к общей схеме осуществляется преобразованием (5) лагранжиана (39), что дает для него и обобщенного лептонного заряда выражения

$$L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\overline{\Psi}(x)\hat{\kappa}\mathrm{e}^{i\gamma_5\chi}\Psi(x), \quad Q^P = \frac{1}{2}\int d^3x\Psi^+(x)\hat{\kappa}\Psi(x),$$
$$\hat{\kappa} = \cos\theta\hat{\kappa}_z + \cos\phi\sin\theta\hat{\kappa}_x + \sin\phi\sin\theta\hat{\kappa}_y. \tag{40}$$

Как видно из этих выражений, при таком обобщении массовое слагаемое и паулиевский заряд включают общий оператор $\hat{\kappa}$, который можно интерпретировать как вектор в пространстве паулиевских преобразований, построенном на базовых векторах $\boldsymbol{\kappa}_x$, $\boldsymbol{\kappa}_y$, $\boldsymbol{\kappa}_z$, имеющий строго определенную ориентацию, задаваемую углами поворота. Сохраняющийся обобщенный заряд связан с подгруппой паулиевских поворотов вокруг оси этого вектора, не меняющих его направления, а оператор, определяющий структуру массового слагаемого общего лагранжиана, включает его наряду с фактором, описывающим повороты в киральном подпространстве.

Сопоставим общий результат (40) со стандартным майорановским подходом [10–11]. Введем левые (L)- и правые (R)-компоненты функций (напомним, что для массивных частиц киральность не является точным квантовым числом) и операцию обобщенного зарядового GC-сопряжения заряда (26), определяемую соотношениями

$$(\psi_L(x))^{gc} = \psi_R^{gc}(x) = \mathrm{e}^{-i(\chi+\phi)}\psi_R^c(x) = \mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R^{rc}(x),$$
$$(\psi_R(x))^{gc} = \psi_L^{gc}(x) = \mathrm{e}^{+i(\chi-\phi)}\psi_L^c(x) = \mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L^{rc}(x), \tag{41}$$
$$(\psi_L^c(x))^{gc} = \mathrm{e}^{-i(\chi-\phi)}\psi_R(x), \quad (\psi_R^c(x))^{gc} = \mathrm{e}^{+i(\chi+\phi)}\psi_L(x).$$

В обобщенную GC-операцию входит два фазовых фактора: универсальный, зависящий от угла ϕ, который фактически эквивалентен введению общего фазового сомножителя $\eta_C = \mathrm{e}^{-i\phi}$ в определение операции зарядового сопряжения (7) (ему соответствует $\psi^{rc}(x)$), и дополнительный, зависящий от киральных характеристик частицы, учитывающий, что этот фазовый фактор η_C у левых и правых частиц может быть различным. Как показывает сопоставление исследуемой схемы с существующими майорановскими моделями [10–12, 26], такое различие может быть связано в ней с нарушением CP-четности.

В таких обозначениях лагранжиан (40) и отвечающий ему сохраняющийся обобщенный заряд Q^P принимают, независимо от инверсного класса частиц, следующий вид:

$$\begin{aligned} L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\{\cos\theta(\mathrm{e}^{+i\chi}\overline{\psi}_R(x)\psi_L(x) + \mathrm{e}^{-i\chi}\overline{\psi}^{rc}_L(x)\psi^{rc}_R(x) + \\ + \mathrm{e}^{-i\chi}\overline{\psi}_L(x)\psi_R(x) + \mathrm{e}^{+i\chi}\overline{\psi}^{rc}_R(x)\psi^{rc}_L(x)) + \sin\theta(\overline{\psi}_R(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\psi^{rc}_L(x) + \\ + \overline{\psi}^{rc}_L(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x) - \overline{\psi}^{rc}_R(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x) - \overline{\psi}_L(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\psi^{rc}_R(x))\} = \\ = L_0(x) - \frac{M}{2}\{\cos\theta(\mathrm{e}^{+i\chi}\overline{\psi}_R(x)\psi_L(x) + \mathrm{e}^{+i\chi}\overline{\psi}^{gc}_L(x)\psi^{gc}_R(x) + \\ + \mathrm{e}^{-i\chi}\overline{\psi}_L(x)\psi_R(x) + \mathrm{e}^{-i\chi}\overline{\psi}^{gc}_R(x)\psi^{gc}_L(x)) + \\ + \sin\theta(\overline{\psi}_R(x)\psi^{gc}_L(x) + \overline{\psi}^{gc}_L(x)\psi_R(x) - \overline{\psi}^{gc}_R(x)\psi_L(x) - \overline{\psi}_L(x)\psi^{gc}_R(x))\}, \end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned} Q^P = \frac{1}{2}\int d^3x[\cos\theta(\psi^+_L(x)\psi_L(x) - \psi^{rc+}_L(x)\psi^{rc}_L(x) + \psi^+_R(x)\psi_R(x) - \\ - \psi^{rc+}_R(x)\psi^{rc}_R(x)) + \sin\theta(\psi^+_L(x)\psi^{rc}_L(x) + \psi^{rc+}_L(x)\psi_L(x) - \\ - \psi^+_R(x)\psi^{rc}_R(x) - \psi^{rc+}_R(x)\psi_R(x))] = \frac{1}{2}\int d^3x[\cos\theta(\psi^+_L(x)\psi_L(x) - \\ - \psi^{gc+}_L(x)\psi^{gc}_L(x) + \psi^+_R(x)\psi_R(x) - \psi^{gc+}_R(x)\psi^{gc}_R(x)) + \sin\theta(\psi^+_L(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\psi^{gc}_L(x) + \\ + \psi^{gc+}_L(x)\mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x) - \psi^+_R(x)\mathrm{e}^{i\chi}\psi^{gc}_R(x) - \psi^{gc+}_R(x)\mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x))]. \end{aligned}$$

При этом соответствующие уравнения, обобщающие уравнение Дирака, будут:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu\partial_\mu\psi_L(x) + M\cos\theta\mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x) - M\sin\theta\psi^{gc}_R(x) = 0, \\ \gamma_\mu\partial_\mu\psi_R(x) + M\cos\theta\mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x) + M\sin\theta\psi^{gc}_L(x) = 0, \\ \gamma_\mu\partial_\mu\psi^{gc}_L(x) + M\cos\theta\mathrm{e}^{+i\chi}\psi^{gc}_R(x) + M\sin\theta\psi_R(x) = 0, \\ \gamma_\mu\partial_\mu\psi^{gc}_R(x) + M\cos\theta\mathrm{e}^{-i\chi}\psi^{gc}_L(x) - M\sin\theta\psi_L(x) = 0. \end{aligned} \tag{43}$$

(вторая пара уравнений GC сопряжена первой). Легко убедиться, что при зарядовом GC-сопряжении лагранжиан (42) сохраняет свою форму, а знак Q^P изменяется на противоположный. Сохранение обобщенного заряда можно проверить также непосредственно, если, используя уравнения (43), построить сохраняющийся ток, четвертой компонентой которого является обобщенный заряд Q^P. Отметим особенность массовых слагаемых общего лагранжиана и обобщенного заряда (42), характерных для исследуемой модели: их дираковские части (пропорциональные $\cos\theta$), являются скалярными по отношению к операции пространственного отражения независимо от инверсных классов описываемых частиц, однако аналогичные свойства майорановских членов (пропорциональных $\sin\theta$) этих характеристик существенно зависят от последних. Если для частиц инверсных C-D-классов майорановские слагаемые являются скалярами, то для частиц A-B-классов слагаемые массового лагранжиана, пропорциональные $\sin\theta\cos\chi$, ведут себя как псевдоскаляры, пропорциональные $\sin\theta\sin\chi$ — как скаляры, а майорановские слагаемые обобщенного заряда, пропорциональные $\sin\theta$, псевдоскалярны. Этот факт приобретает особое значение при интерпретации исследуемой модели.

Лагранжиан (42) можно сопоставить с общей формой лагранжианов майорановских моделей [11, 26], в которых операция зарядового C-сопряжения вводится универсально, независимо от киральности частиц, фактически через $\psi^{rc}(x)$. Сопоставление показывает, что такой лагранжиан отвечает специальному случаю системы, включающей левые и правые майорановские частицы одного сорта с равными по величине, но противоположными по знаку левыми и правыми комплексными майорановскими массами $M_R = -M_L = M\sin\theta e^{i\chi}$ и комплексной дираковской массой $M_D = M\cos\theta e^{i\chi}$, при этом величина $|M_{L(R)}|^2 + |M_D|^2 = M^2$ — инвариант группы паулиевских преобразований. Таким образом переход от общих майорановских моделей к схеме на базе паулиевских преобразований выделяет среди них специальный случай, когда майорановские левая и правая массы равны и противоположны по знаку. Частный случай $\chi = 0,\ \pi$ отвечает сохранению CP-четности, отличие χ от этих значений означает нарушение CP-инвариантности (при CPT-сохранении), и в соответствии с (41) ведет к тому, что операция зарядового сопряжения, заданная в общей форме, для левых и правых частиц будет включать различные фазовые факторы $\eta_{C,\ L(R)}$. Это факт, характерный для исследуемой схемы, автоматически учитывается в ней переходом от стандартной операции зарядового C-сопряжения, не зависящей от киральности частиц, к операции обобщенного зарядового GC-сопряжения (41).

Поскольку лагранжиан (42) инвариантен по отношению к операции обобщенного зарядового GC-сопряжения, логично использовать в общем случае не обычные зарядово-сопряженные функции, а GC-функции (41). В терминах этих функций лагранжиан (40) и соответствующий ему обобщенный лептонный заряд для массивных нейтральных частиц C-D-классов описываются выражениями

$$L(x)=L_0(x) - \frac{M}{2}\{\overline{\Psi}^{gc}(x)\hat{\kappa}\Psi^{gc}(x)\},\ Q^P=\frac{1}{2}\int d^3x\{\Psi^{gc+}(x)\hat{\kappa}\Psi^{gc}(x)\},$$
$$\hat{\kappa} = \cos\theta\hat{\kappa}_z + \sin\theta\hat{\kappa}_x, \quad \Psi^{gc}(x) = e^{i\hat{\kappa}_z\gamma_5\chi/2}\begin{pmatrix}\psi(x)\\ \gamma_5\psi^{gc}(x)\end{pmatrix}, \tag{44}$$

которые в явной форме уже не зависят от углового параметра ϕ, введенного в определение зарядового GC-сопряжения. Случай $\chi = 0$ отвечает сохранению CP-четности, так что фазовый параметр $\mathrm{e}^{i\kappa_z\gamma_5\chi/2}$ учитывает нарушение CP-инвариантности, которое может быть непосредственно связано с майорановскими частями структуры массового оператора и обобщенного лептонного заряда Q^P. Характерной особенностью паулиевского описания частиц в терминах GC-функций для инверсных C-D-классов является то, что массовое слагаемое лагранжиана и обобщенный лептонный заряд задаются общим вектором κ, так что диагонализация, которая используется при получении майорановских решений в стандартном подходе [10–12], в таких GC-функциях будет для них проходить одновременно.

Переходя к изучению частиц инверсных A-B-классов, выберем, в соответствии с результатами раздела 2, обобщенную функцию в виде (30) и вновь рассмотрим дираковский случай. Тогда дираковский лагранжиан, уравнения Дирака и лептонный заряд приобретают вид, отличный от (39):

$$
\begin{gathered}
L_D(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}[\overline{\Phi_D}(x)\hat{\kappa}_x\Phi_D(x)],\ \ \Phi_D(x) = \begin{pmatrix}\psi_{DL}(x) + \eta\psi^c_{DR}(x)\\ \psi_{DR}(x) + \eta\psi^c_{DL}(x)\end{pmatrix}, \\
(\gamma_\mu\partial_\mu + M\hat{\kappa}_x)\Phi_D(x) = 0,\quad Q^P_z = \frac{1}{2}\int d^3x\Phi^+_D(x)\hat{\kappa}_z\gamma_5\Phi_D(x).
\end{gathered} \tag{45}
$$

Как в предшествовавшем случае, массовое слагаемое лагранжиана нарушает киральную и общую паулиевскую симметрию, но инвариантно по отношению к фазовой подгруппе последней, связанной с поворотами вокруг оси z паулиевского изопространства. Однако это изопространство должно в этом случае строиться на векторах $\gamma_5\kappa_x,\ \kappa_y,\ \gamma_5\kappa_z$, сопоставляемых с осями $x,\ y,\ z$ соответственно. Общая форма паулиевских поворотов в таком изопространстве приобретает вид (31), а выражение для лептонного заряда включает теперь, в соответствии с (30), оператор $\gamma_5\hat{\kappa}_z$. Выбор последнего в качестве базового фиксирует лептонный заряд, при этом собственное значение $q = \kappa_z\rho = +1$ описывает левые и правые частичные состояния, а $q = \kappa_z\rho = -1$ — правые и левые античастичные. Фактически такой выбор соответствует общепринятому, дираковскому представлению массивного нейтрино (так называемое «дираковское» нейтрино). При этом обобщенные собственные функции с фиксированным зарядом:

$$
\begin{gathered}
\hat{\kappa}_z\gamma_5\Phi_{Dq}(x) = q\Phi_{Dq}(x),\quad \Phi_{D,q=+1}(x) = \begin{pmatrix}\psi_{DL}(x)\\ \psi_{DR}(x)\end{pmatrix}, \\
\Phi_{D,q=-1}(x) = \begin{pmatrix}\eta\psi^c_{DR}(x)\\ \eta\psi^c_{DL}(x)\end{pmatrix}, \\
Q^L(q) = \int d^3x\Phi^+_{Dq}(x)\hat{\kappa}_z\gamma_5\Phi_{Dq}(x) = q = \pm1,\quad (q = \kappa_z\rho).
\end{gathered} \tag{46}
$$

Как видно из этих выражений, при выборе лептонного заряда базовым оператором собственные функции вида (45) не имеют формы, свойственной диагональному представлению. При обсуждении частиц массы нуль было выяснено, что для частиц инверсных A-B-классов такая форма возникает, если в качестве базового использовать произведение операторов лептонного заряда и киральности $\hat{\kappa}_z$. Покажем, что, опираясь на паулиевские преобразования, можно перейти к другому представлению дираковского случая, в котором этот оператор задает массовое слагаемое лагранжиана.

Прежде всего отметим, что в (45) по сравнению с (39) оператор, задающий массовое слагаемое, отличается от оператора заряда — он включает $\hat{\kappa}_x$ и должен сопоставляться с осью x паулевского изопространства, тогда как лептонный заряд — с осью z. В результате массовое слагаемое и лептонный заряд одновременно не диагонализуются и возникает альтернатива: использовать в качестве базовой характеристики либо лептонный заряд, либо массовый оператор, приводя последний к диагональной форме.

Следуя вторым путем, преобразуем лагранжиан так, чтобы дираковское массовое слагаемое перешло в диагональную форму, для чего используем паулиевский поворот $S'^{+}(\theta = \eta\pi/2, \phi = 0)$. Возникает представление дираковского случая, альтернативное (45):

$$L_D(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\overline{\Phi}_{MD}(x)\hat{\kappa}_z\Phi_{MD}(x), \;\; (\gamma_\mu\partial_\mu + M\hat{\kappa}_z)\Phi_{MD}(x) = 0,$$

$$Q^P = -\frac{1}{2}\int d^3x\Phi^+_{MD}(x)\hat{\kappa}_x\gamma_5\Phi_{MD}(x),$$

$$\Phi_{MD}(x) = \mathrm{e}^{i\kappa_y\pi/4}\Phi_D(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_{DL}(x) + \psi_{DR}(x) + \eta\psi^c_{DR}(x) + \eta\psi^c_{DL}(x)\\ \psi_{DR}(x) - \psi_{DL}(x) + \eta\psi^c_{DL}(x) - \eta\psi^c_{DR}(x)\end{pmatrix}. \tag{47}$$

В покомпонентных обозначениях (43) дираковский лагранжиан остается неизменным, так что по отношению к преобразованию, связывающему альтернативные представления (45) и (47), он инвариантен. В представлении (47) собственные значения оператора $\hat{\kappa}_z$ различают решения $\kappa_z = +1$ при дополнительных условиях $\psi^c_{D\rho}(x) = \eta\psi_{D\rho}(x)$ $(\rho = L,\ R)$, и решения $\kappa_z = -1$ при условиях $\psi^c_{D\rho}(x) = -\eta\psi_{D\rho}(x)$, дополняющие предшествующие до полного набора. Собственные функции с определенными значениями $\kappa_z = \pm1$ и зарядовой четности $\eta = \pm1$ имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi_{+1,\eta}(x) &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\psi_{DL}(x) + \psi_{DR}(x) + \eta\psi^c_{DR}(x) + \eta\psi^c_{DL}(x)\\ 0\end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix}\psi_{DL}(x) + \psi_{DR}(x)\\ 0\end{pmatrix}, \quad \psi^c_{D\rho}(x) = \eta\psi_{D\rho}(x),\end{aligned} \tag{48}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{-1,\eta}(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{DR}(x) - \psi_{DL}(x) + \eta\psi^c_{DL}(x) - \eta\psi^c_{DR}(x)\end{pmatrix} = \\
= \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{DR}(x) - \psi_{DL}(x)\end{pmatrix}, \quad \psi^c_{D\rho}(x) = -\eta\psi_{D\rho}(x).
\end{aligned}
\tag{48}
$$

(Выражения (47) отвечают вторично-квантованной форме, для собственных функций нормировка, при учете дополнительных майорановских условий, изменяется). Легко убедиться, что в состояниях с фиксированным значением $\kappa_z = \pm 1$ обобщенный лептонный заряд равен нулю. При этом решение $\kappa_z = +1$ при $\eta = +1$ — классическое майорановское решение для волновых функций $\psi_D(x)$, построенное Майорана в основополагающей работе [1], где он использовал тот факт, что при специальном выборе γ_μ-матриц (когда матрица зарядового сопряжения $C = I$) это решение действительно (см. детали в [1]).

Завершая анализ дираковского случая, отметим, что инвариантность лагранжиана к фазовым преобразованиям $S(\varphi)$ (5) ведет к инвариантности дираковских решений к заменам:

$$
\begin{aligned}
\psi_D(x) &\to \psi_D(x), \\
\psi^c_D(x) &\to \mathrm{e}^{-i\varphi}\psi^c_D(x),
\end{aligned}
\tag{49}
$$

при произвольных углах φ.

Используем теперь гипотезу универсальности механизма образования массовых слагаемых лагранжиана и изучим последовательно майорановские схемы, возникающие при применении к дираковскому описанию общих кирально-паулиевских преобразований в каждом из альтернативных случаев выбора базового оператора. Лагранжиан и обобщенный лептонный заряд, получаемые из (45) преобразованием (31) $S'^{+}(\phi,\ \theta)S^{+}(\chi)$, имеют общий вид:

$$
\begin{aligned}
L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\overline{\Phi}(x)[\cos\theta\hat{\kappa}_x - \eta\sin\theta\hat{\kappa}_z\mathrm{e}^{i\hat{\kappa}_z\gamma_5\phi}]\mathrm{e}^{i\gamma_5\chi}\Phi(x), \\
Q^P = \frac{1}{2}\int d^3x\Phi^{+}(x)[\cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta\hat{\kappa}_x\mathrm{e}^{i\hat{\kappa}_z\gamma_5\phi}]\gamma_5\Phi(x), \\
\Phi(x) = \begin{pmatrix}\psi_L(x) + \eta\psi_R(x) \\ \psi_R(x) + \eta\psi_L(x)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

При введении зарядово-сопряженных GC-функций (41) эти выражения упрощаются:

$$\begin{aligned}
&L(x) = L_0(x) - \frac{M}{2}\overline{\Phi}^{gc}(x)[\cos\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y) - \eta\sin\theta\hat{\kappa}_z]\Phi^{gc}(x),\\
&Q^P = \frac{1}{2}\int d^3x\Phi^{gc+}(x)[\cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\gamma_5\Phi^{gc}(x),\\
&\Phi^{gc}(x) = \begin{pmatrix}\psi_L(x) + \eta\psi_R^{gc}(x)\\ \psi_R(x) + \eta\psi_L^{gc}(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_L(x) + \eta e^{-i(\chi+\phi)}\psi_R^c(x)\\ \psi_R(x) + \eta e^{i(\chi-\phi)}\psi_L^c(x)\end{pmatrix} =\\
&\qquad = e^{i\hat{\kappa}_z\gamma_5\phi/2}e^{-i\phi/2}e^{i\gamma_5\chi/2}e^{-i\hat{\kappa}_z\chi/2}\Phi(x).
\end{aligned} \tag{51}$$

При этом паулиевские преобразования (31) для GC-функций модифицируются:

$$\Phi'^{gc}(x) = e^{i\eta(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\theta/2}e^{i\hat{\kappa}_z\gamma_5\varphi/2}e^{i\gamma_5\chi/2}\Phi^{gc}(x) = \\ = S'(\chi,\theta)S'(\varphi)S'(\chi)\Phi^{gc}(x). \tag{52}$$

Существенно, что результаты (51) в явной форме включают теперь только углы χ и θ и входящие в них выражения могут вновь интерпретироваться как векторы в базовом паулиевском изопространстве, построенном на операторах κ_x, κ_y, κ_z, ассоциируемых с осями x, y, z, что является важной особенностью обобщенных GC-функций. В дираковском случае (45) вектор, отвечающий обобщенному заряду, ориентирован по оси z, переход к общему случаю отвечает его паулиевскому повороту в этом изопространстве. При этом операторы, определяющие структуру обобщенного лептонного заряда и массового слагаемого лагранжиана, дополнительны и связаны соотношением

$$[\cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\gamma_5[\cos\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y) - \eta\sin\theta\hat{\kappa}_z] = \\ = i(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\gamma_5. \tag{53}$$

Собственные функции обобщенного заряда, возникающие из (46) при повороте (31), приобретают вид

$$\begin{aligned}
&\Phi_q(x) = S^+(\phi,\theta)S^+(\chi)\Phi_{Dq}(x),\\
&\Phi_{q=+1}(x) = \begin{pmatrix}\psi_L(x) + \eta\psi_R^c(x)\\ \psi_R(x) + \eta\psi_L^c(x)\end{pmatrix} =\\
&= \begin{pmatrix}e^{-i\chi/2}\cos(\theta/2)\psi_{DL}(x) - \eta e^{-i\chi/2}e^{i\phi}\sin(\theta/2)\psi_{DR}(x)\\ e^{+i\chi/2}\cos(\theta/2)\psi_{DR}(x) + \eta e^{+i\chi/2}e^{i\phi}\sin(\theta/2)\psi_{DL}(x)\end{pmatrix},\\
&\text{так что при } q = +1;\quad \psi_q^c(x) = \mathrm{tg}\,(\theta/2)e^{i\phi}\gamma_5\psi_q(x).
\end{aligned} \tag{54}$$

$$
\begin{gathered}
\Phi_{q=-1}(x)=\begin{pmatrix}\psi_L(x)+\eta\psi^c_R(x)\\ \psi_R(x)+\eta\psi^c_L(x)\end{pmatrix}=\\
=\begin{pmatrix}-\mathrm{e}^{-i\chi/2}\mathrm{e}^{-i\phi}\sin(\theta/2)\psi^c_{DL}(x)+\eta\mathrm{e}^{-i\chi/2}\cos(\theta/2)\psi^c_{DR}(x)\\ \mathrm{e}^{+i\chi/2}\mathrm{e}^{-i\phi}\sin(\theta/2)\psi^c_{DR}(x)+\eta\mathrm{e}^{+i\chi/2}\cos(\theta/2)\psi^c_{DL}(x)\end{pmatrix},\\
\text{так что при } q=-1;\quad \psi^c_q(x)=-\operatorname{ctg}(\theta/2)\mathrm{e}^{i\phi}\gamma_5\psi_q(x).
\end{gathered}
\tag{54}
$$

$$
\begin{gathered}
Q^P(q)=\int d^3x\Phi^+_q(x)\hat{\kappa}\gamma_5\Phi_q(x)=q=\pm1,\\
(\hat{\kappa}=\cos\theta\hat{\kappa}_z+\eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x+\sin\chi\hat{\kappa}_y)).
\end{gathered}
$$

Как следует из этих соотношений, для построенных функций, являющихся собственными функциями обобщенного лептонного заряда с квантовыми числами $q=\pm1$, выполняются модифицированные майорановские условия (35), характерные для частиц инверсных C-D-классов, при том, что вид обобщенной функции выбран в форме (30). Это показывает, что фиксация инверсного класса частиц в действительности обусловлена не формой обобщенной функции, как предполагалось в предшествующем разделе, а выбором базового оператора представления. Это можно доказать и в общем виде, отталкиваясь от паулиевских преобразований (3).

Исследуем теперь общий случай альтернативного описания, опирающегося на майорановское представление обобщенной функции, выбранное в форме, обобщающей (47) с учетом кирального угла χ:

$$
\begin{gathered}
\Phi_M(x)=\mathrm{e}^{i(\cos\chi\kappa_y-\sin\chi\kappa_x)\pi/4}\Phi(x)=\\
=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_L(x)+\mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x)+\eta\psi^c_R(x)+\eta\mathrm{e}^{-i\chi}\psi^c_L(x)\\ \psi_R(x)-\mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x)+\eta\psi^c_L(x)-\eta\mathrm{e}^{+i\chi}\psi^c_R(x)\end{pmatrix}.
\end{gathered}
\tag{55}
$$

Проводя соответствующие киральное и паулиевское преобразования, найдем лагранжиан и обобщенный заряд в форме:

$$
\begin{gathered}
L(x)=L_0(x)-\frac{M}{2}\overline{\Phi}_M(x)[\cos\theta\hat{\kappa}_z\mathrm{e}^{i(\cos\chi\hat{\kappa}_x+\sin\chi\hat{\kappa}_y)\chi}\\
+\eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x+\sin\chi\hat{\kappa}_y)\mathrm{e}^{-i(\cos\chi\hat{\kappa}_x+\sin\chi\hat{\kappa}_y)\gamma_5\phi}]\mathrm{e}^{i\gamma_5\chi}\Phi_M(x),\\
Q^P=-\frac{1}{2}\int d^3x\Phi^+_M(x)[\cos\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x+\sin\chi\hat{\kappa}_y)\\
-\eta\sin\theta\mathrm{e}^{i(\cos\chi\hat{\kappa}_x+\sin\chi\hat{\kappa}_y)\chi}\mathrm{e}^{-i(\cos\chi\hat{\kappa}_x+\sin\chi\hat{\kappa}_y)\gamma_5\phi}\hat{\kappa}_z]\gamma_5\Phi_M(x),
\end{gathered}
\tag{56}
$$

В терминах обобщенных GC-функций они приобретают вид

$$
L(x)=L_0(x)-\frac{M}{2}\overline{\Phi}^{gc}_M(x)[\cos\theta\hat{\kappa}_z+\eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x+\sin\chi\hat{\kappa}_y)]\Phi^{gc}_M(x),
$$

$$Q^P = -\frac{1}{2}\int d^3x \Phi_M^{gc+}(x)[\cos\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y) - \eta\sin\theta\hat{\kappa}_z]\gamma_5\Phi_M^{gc}(x),$$

$$\hat{\kappa} = \cos\theta\hat{\kappa}_z + \eta\sin\theta(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y),$$

$$\Phi_M^{gc}(x) = \mathrm{e}^{-i(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)\gamma_5\phi/2}\mathrm{e}^{-i\phi/2}\mathrm{e}^{+i(\cos\chi\hat{\kappa}_x+\sin\chi\hat{\kappa}_y)\chi/2}\mathrm{e}^{+i\gamma_5\chi/2}\Phi_M(x) =$$

$$= \mathrm{e}^{i(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\pi/4}\Phi^{gc}(x) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\psi_L(x) + \mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x) + \eta\psi_R^{gc}(x) + \eta\mathrm{e}^{-i\chi}\psi_L^{gc}(x)\\ \psi_R(x) - \mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x) + \eta\psi_L^{gc}(x) - \eta\mathrm{e}^{i\chi}\psi_R^{gc}(x)\end{pmatrix}. \qquad (57)$$

Последнее соотношение одновременно устанавливает связь представлений (51) и (57). Отметим, что по сравнению с (51) произошла взаимная замена операторов, описывающих структуру обобщенного лептонного заряда и массового члена лагранжиана. Базовым оператором, задающим данное представление, является оператор $\hat{\kappa}$, определяющий структуру массового слагаемого, получаемый из оператора $\hat{\kappa}_z$ паулиевским преобразованием. Собственные функции этого оператора с квантовыми числами κ строятся из собственных функций дираковского типа (48) с $\kappa_z = \kappa$ тем же преобразованием, что дает

$$\hat{\kappa}\Phi_\kappa(x) = \kappa\Phi_\kappa(x), \quad \Phi_\kappa(x) = S^+(\phi,\theta)S^+(\chi)\Phi_{D\kappa_z}(x),$$

$$\Phi_{M\kappa=+1}^{gc}(x) = \begin{pmatrix}\psi_L(x) + \mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x) + \eta\psi_R^{gc}(x) + \eta\mathrm{e}^{-i\chi}\psi_L^{gc}(x)\\ \psi_R(x) - \mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x) + \eta\psi_L^{gc}(x) - \eta\mathrm{e}^{i\chi}\psi_R^{gc}(x)\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-i\chi/2}\cos(\theta/2)(\psi_{DL}(x) + \psi_{DR}(x))\\ \mathrm{e}^{+i\chi/2}\eta\sin(\theta/2)(\psi_{DL}(x) + \psi_{DR}(x))\end{pmatrix},$$

так что при $\kappa = +1$;

$$\psi_{\kappa L}^c(x) = \eta\,\mathrm{tg}\,(\eta\theta/2 + \pi/4)\psi_{\kappa L}(x),$$
$$\psi_{\kappa R}^c(x) = \eta\,\mathrm{ctg}\,(\eta\theta/2 + \pi/4)\psi_{\kappa R}(x); \qquad (58)$$

$$\Phi_{M\kappa=-1}^{gc}(x) = \begin{pmatrix}\psi_L(x) + \mathrm{e}^{-i\chi}\psi_R(x) + \eta\psi_R^{gc}(x) + \eta\mathrm{e}^{-i\chi}\psi_L^{gc}(x)\\ \psi_R(x) - \mathrm{e}^{+i\chi}\psi_L(x) + \eta\psi_L^{gc}(x) - \eta\mathrm{e}^{i\chi}\psi_R^{gc}(x)\end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-i\chi/2}\eta\sin(\theta/2)(\psi_{DL}(x) - \psi_{DR}(x))\\ \mathrm{e}^{+i\chi/2}\cos(\theta/2)(\psi_{DR}(x) - \psi_{DL}(x))\end{pmatrix},$$

так что при $\kappa = -1$;

$$\psi_{\kappa L}^c(x) = -\eta\,\mathrm{ctg}\,(\eta\theta/2 + \pi/4)\psi_{\kappa L}(x),$$
$$\psi_{\kappa R}^{gc}(x) = -\eta\,\mathrm{tg}\,(\eta\theta/2 + \pi/4)\psi_{\kappa R}(x).$$

Как видно из этих соотношений, для собственных функций реализуются майорановские соотношения, не зависящие от кирального угла, характерные для инверсных A-B-классов, связывающие зарядово-сопряженные собственные функции $\psi^c_{\kappa,\rho}(x)$ с $\psi_{\kappa,\rho}(x)$ с теми же квантовыми числами κ,ρ. Представления (51) и (57) суть две взаимосвязанных, альтернативных формы описания майорановских лагранжианов, причем выбор базового оператора представления определяется инверсным классом частиц: для A-B-классов это — оператор (57), задающий структуру массовых слагаемых, для C-D-классов — обобщенный лептонный заряд (51). При этом базовый оператор массового типа в (57) есть произведение базового оператора обобщенного лептонного заряда в (51) и оператора киральности γ_5. Подчеркнем еще раз важное свойство представления обобщенных GC-функций: паулиевские преобразования интерпретируются в базовом паулиевском изопространстве, построенном на векторах κ_x, κ_y, κ_z, как повороты вокруг осей, направление которых задается в нем эйлеровскими углами χ,θ. Первый из них определяет степень нарушения CP-симметрии, второй — вклад майорановских массовых или зарядовых слагаемых по отношению к их дираковским частям.

Изложенная общая схема позволяет по-новому взглянуть на стандартную процедуру диагонализации майорановских лагранжианов, используемую в литературе [10–12], в рамках которой в качестве базового выбирается оператор, задающий структуру массового слагаемого. Как было показано, такой выбор с необходимостью предопределен тем, что в литературе исследуются частицы инверсных A-B-классов. Частный случай общих майорановских моделей, соответствующий изложенной схеме, может быть получен из (57), если в нем соотношениями $\sin 2\theta_{md} = -\eta\sin\theta$; $\cos 2\theta_{md} = \cos\theta$; $(2\theta_{md} = -\eta\theta)$ ввести аналог параметра майорановских моделей θ_{md} (2). Тогда лагранжиан и обобщенный заряд (57) становятся:

$$\begin{aligned} L(x) &= L_0(x) - \frac{M}{2}\overline{\Phi}^{gc}_M(x)[\cos 2\theta_{md}\hat{\kappa}_z + \sin 2\theta_{md}(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\Phi^{gc}_M(x), \\ Q^P &= \frac{\eta}{2}\int d^3x \Phi^{gc+}_M(x)[\sin 2\theta_{md}\hat{\kappa}_z - \cos 2\theta_{md}(\cos\chi\hat{\kappa}_x + \sin\chi\hat{\kappa}_y)]\gamma_5\Phi^{gc}_M(x), \end{aligned} \tag{59}$$

а соответствующие выражения переходят в (47) при $\theta_{md} = \chi = \phi = 0$. Общая форма лагранжиана, подобная (59), обычно рассматривается в майорановских моделях, при этом лагранжиан преобразуется с использованием специальных унитарных преобразований, которые подбираются так, чтобы массовое слагаемое приобрело диагональную форму [9–12]. В паулиевской схеме это преобразование есть обратное паулиевское преобразование, переводящее (59) в (47), которое в базовом изопространстве интерпретируется как поворот, преобразующий общую форму в майорановское представление дираковского случая, где существует два взаимно-дополнительных майорановских поля с условиям $\psi^c(x) = \pm\psi(x)$:

$$\Phi'_D(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ -\gamma_5\Phi_2(x) \end{pmatrix} = S'(\chi,\theta)\Phi^{gc}(x) = \mathrm{e}^{i(\cos\chi\hat{\kappa}_y - \sin\chi\hat{\kappa}_x)\theta_{md}}\Phi^{gc}(x) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_{md} & \mathrm{e}^{-i\chi}\sin\theta_{md} \\ -\mathrm{e}^{i\chi}\sin\theta_{md} & \cos\theta_{md} \end{pmatrix}\Phi^{gc}(x) =$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_{md}(\phi_L(x) + \eta\phi_R^{gc}(x)) + \mathrm{e}^{-i\chi}\sin\theta_{md}(\eta\phi_R(x) + \phi_L^{gc}(x)) \\ \cos\theta_{md}(\eta\phi_R(x) + \phi_L^{gc}(x)) - \mathrm{e}^{+i\chi}\sin\theta_{md}(\phi_L(x) + \eta\phi_R^{gc}(x)) \end{pmatrix}. \quad (60)$$

При этом явный вид обобщенной функции адекватен используемому в литературе. Тем самым становится очевидным, что методика диагонализации массового слагаемого лагранжиана, используемая в стандартном подходе, применяемом обычно при анализе майорановских лагранжианов, в схеме паулиевских преобразований для частиц инверсных A-B-классов эквивалентна поворотам в паулиевском изопространстве, переводящем систему координат этого пространства в положение, когда ось z направлена вдоль вектора, определяющего структуру массового слагаемого начального дираковского лагранжиана. Вектор, задающий зарядовую характеристику, перепендикулярен ему, так что средний лептонный заряд в состояниях, соответствующих собственным значениям массового оператора, равен нулю.

Интересно также сопоставить полученные общие уравнения с результатами Кейса, полученными в работе [27]. Как легко убедиться, при $\chi = \phi = 0$, $\theta = \pi/2$, $\psi_R(x) = 0$ уравнения (43) переходят в уравнения Кейса. Анализ этой работы показывает, что в ней практически использовались те же условия, что и в настоящей, в частности, важную роль играло требование сохранения коммутаторов поля. В то же время автор ограничился исследованием случая инверсных A-B-классов и дополнительно требовал скалярности сохраняющегося лептонного заряда. Однако, как следует из результатов, изложенных выше, последнее автоматически сужает круг разрешенных моделей до дираковского случая, поскольку дополнительные майорановские массовые слагаемые для частиц инверсных A-B-классов имеют псевдоскалярный характер и такому условию не удовлетворяют. По сравнению с работой Кейса в исследованную модель наряду с частицами A-B-классов был включен анализ случая инверсных C-D-классов и допускалась возможность не только скалярных, но и псевдоскалярных слагаемых базовых характеристик зарядового и массового типа.

4. РЕЗЮМЕ, ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Итак, на базе преобразований, предложенных Паули, включающих киральную $U(1)$ и собственно паулиевскую $SU(2)$ группу, смешивающую частичные и античастичные состояния, построена математическая модель, позволяющая описывать майорановские свойства системы нейтральных свободных массивных фермионов, включающей левые и правые состояния частиц одного флейвора. Среди майорановских схем такого типа она выделена тем, что соответствует специальному случаю, отвечающему равным, но противоположным по знаку левой и правой майорановским массам ($M_L = -M_R$) при произвольной дираковской, при этом возможная комплексность дираковской и майорановских масс может быть связана с нарушением CP-инвариантности. В представленном варианте модель не претендует на анализ конкретных экспериментов, однако позволяет с новой точки зрения взглянуть на существующий феноменологический формализм майорановских нейтрино, поскольку, с одной стороны, отвечает простейшей майорановской схеме, используемой для описания свойств нейтрино вне рамок Стандартной модели электрослабого взаимодействия, а с другой, демонстрирует ряд особенностей, сближающих ее с последней.

Как известно, в основе СМ лежит представление о существовании базовой симметрии системы частиц массы нуль, спонтанным образом нарушаемой при введении масс. В исследуемой модели эту роль играет общая паулиевская (кирально-паулиевская) симметрия, при этом тот факт, что в ней объединены частичные и античастичные состояния, становится основой для установления между ними связей майорановского типа. Для частиц массы нуль эта симметрия ведет к существованию двух типов сохраняющихся зарядов: кирального и обобщенного лептонного — последний можно интерпретировать как вектор в трехмерном изопространстве паулиевских преобразований. Нарушение симметрии, вводящее в лагранжиан массовые слагаемые, приводит к появлению в этом пространстве выделенного направления, которое, с одной стороны, коррелирует с вектором, описывающим обобщенный лептонный заряд, определяемый инвариантными поворотами относительно этого направления, а с другой, связано со структурой массовых слагаемых этого лагранжиана. При этом слагаемые лагранжиана или обобщенного паулиевского заряда, отвечающие дираковскому типу, могут быть сопоставлены с осью z этого изопространства, а слагаемые майорановского типа — с осями x и y. Гипотеза универсальности механизма спонтанного нарушения базовой симметрии позволяет, используя паулиевские преобразования, установить связь между конкретными частными лагранжианами, отвечающими различным направлениям, фиксированным выбором вакуумных средних, и тем самым, отталкиваясь от известной структуры массовых членов и лептонного заряда в дираковском случае, построить явную форму массовых слагаемых и обобщенного лептонного заряда для любого выделенного направления паулиевского и кирального подпространств.

Существенным и принципиально новым моментом развитой модели является учет свойств исследуемых частиц по отношению к операции пространственного отражения — их инверсных классов, что позволяет в рамках этой модели исследовать как майорановские свойства частиц инверсных A-B-классов с условием $\eta_P^2 = -1$ (обычно предполагаемым для физических частиц), так и майорановские свойства гипотетических частиц инверсных C-D-классов с условием $\eta_P^2 = +1$, до сих пор в литературе не рассматривавшихся. Дифференциация частиц по инверсным классам несущественна в дираковском случае, когда лептонный заряд и массовые члены лагранжиана являются скалярами относительно операции пространственного отражения, независимо от инверсного класса частиц. Однако аналогичные свойства майорановских слагаемых, возникающих в обобщенном лептонном заряде и массовых членах лагранжиана общего вида, отвечающего произвольному выделенному направлению в паулиевском изопространстве, существенно зависят от инверсных классов исследуемых частиц. Для гипотетических частиц C-D-классов они всегда скаляры, но для физических частиц A-B-классов могут иметь как скалярный, так и псевдоскалярный характер, что необходимо учитывать при переходе к конкретным приложениям модели. Однако, несмотря на эту особенность, изучение этой модели представляется интересным и полезным, тем более, что указанная проблема характерна не только для нее, но и для всех майорановских схем типа (1), включающих левые и правые частицы одного флейвора. Возможно, это обстоятельство играет определенную роль в ряду трудностей, возникающих при попытках связать существующую феноменологическую теорию майорановских нейтрино с СМ. Этот факт подчеркивает необходимость детального изучения связи майорановских свойств частиц и их инверсных классов, на что и было обращено особое внимание в данной работе.

Другим важным новым моментом исследуемой модели является введение в ней операции обобщенного зарядового GC-сопряжения, относительно которой общий лагранжиан модели инвариантен, а обобщенный лептонный заряд меняет знак. Особенностью такой операции является учет возможного различия универсальных фазовых множителей в определении операции C-сопряжения для левых и правых частиц, вводимого дополнительным фазовым фактором, зависящим от киральных характеристик. Использование операции обобщенного зарядового сопряжения позволяет ввести GC-функции, в терминах которых базовые характеристики общих случаев паулевской схемы интерпретируются векторами изопространства паулиевских преобразований, включающих как повороты, ответственные за введение майорановских слагаемых зарядов и лагранжианов, так и киральные повороты, связываемые в исследованной модели с нарушением CP-четности.

Важнейшим частным случаем исследуемой схемы является дираковский случай, на базе которого, используя гипотезу универсальности механизма образования массы и паулиевские преобразования, можно построить все остальные. Особенностью описания дираковского случая является его независимость от инверсного класса частиц и связанная с этим возможность альтернативного выбора базовых операторов представлений, определяющих решения нейтральных свободных частиц, что соответствует хорошо известной дилемме описания нейтринных полей: как дираковской частицы («дираковское нейтрино»), частичное и античастичное состояния которой различаются лептонным зарядом, или как майорановской частицы («майорановское нейтрино»), для которой решения в обобщенных функциях эквивалентны двум майорановским полям разной зарядовой четности с условиями $\psi^c(x) = \pm\psi(x)$. Существенно, что в исследованной модели эти два поля образуют полный набор решений, аналогичный паре частица–античастица, так что каждое из майорановских полей можно представить как суперпозицию последних и обратно. При этом в «дираковском» описании лептонный заряд задается оператором, связываемым с вектором вдоль оси z паулиевского изопространства, а дираковское массовое слагаемое сопоставлено с вектором, направленным по оси x. В «майорановском» представлении, наоборот, с осью z оказывается сопоставлен оператор, задающий структуру массового слагаемого, интерпретируемый как произведение оператора лептонного заряда и киральности, а вектор лептонного заряда связывается с осью x. В группе паулиевских поворотов существует специальное преобразование (предложенное Майорана [1]), которое сохраняет покомпонентную форму дираковского лагранжиана, но преобразует его выражение в обобщенных функциях из «дираковского» представления в «майорановское» — в обычной дираковской схеме его относят к унитарным преобразованиям, сохраняющим форму дираковского лагранжиана. В паулиевском изопространстве это преобразование интерпретируется как поворот на $\pi/2$ вектора, сопоставляемого с дираковским массовым слагаемым, из направления вдоль оси x в направлении оси z, причем после поворота среднее значение лептонного заряда в собственных майорановских состояниях обращается в нуль. Тем самым стандартная феноменологическая майорановская схема, вводящая в аналогичном случае пару независимых (дираковского и майорановского) решений, получает в исследованной модели наглядное представление в паулиевском изопространстве, а эти решения оказываются двумя разными представлениями дираковского случая, связанными между собой паулиевским преобразованием, отвечающим повороту осей z и x изопространства на 90° вокруг оси y.

Если особенностью дираковского случая является то, что он нечувствителен к инверсному классу частиц, то в общем случае, отличном от дираковского, именно эта зависимость оказывается существенной и фактически задает характеристики и интерпретацию описываемой модели в целом. Наиболее простым является случай гипотетических частиц инверсных C-D-классов, когда дополнительные слагаемые майорановского типа, возникающие при выборе выделенного направления паулиевского изопространства, отличного от оси z, сохраняют скалярный характер при любых паулиевских преобразованиях. При этом в качестве базового оператора, задающего представление волновых функций, следует выбирать обобщенный лептонный заряд, описываемый вектором вдоль выделенного направления. Для частиц массы нуль базовые собственные функции задаются двумя квантовыми числами: обобщенным лептонным зарядом и киральностью, для массивных частиц — только первым. Явный вид функций получается из дираковских паулиевским преобразованием, связывающим выделенное направление с осью z, при этом между компонентами обобщенных собственных функций возникают связи, обобщающие аналогичные соотношения майорановского типа. По сравнению с стандартными майорановскими они модифицированы и содержат дополнительно матрицу γ_5. Хотя частицы инверсных C-D-классов в существующих майорановских схемах не анализировались — предполагалось, что инверсные классы нейтрино аналогичны таковым для заряженных лептонов (что, однако, экспериментально не исследовано) — изучение этого случая интересно, поскольку демонстрирует возможность существования майорановских частиц со свойствами, отличными от классических, введенных в [1].

Для частиц инверсных A-B-классов ситуация принципиально иная. В настоящей работе для детального анализа ситуации использовалась универсальная форма обобщенной волновой функции (30), поскольку она близка к форме, используемой в существующих майорановских моделях, а ее базовые характеристики в терминах обобщенных GC-функций наглядно интерпретируются векторами паулиевского изопространства, однако фактически выводы не зависят от выбора формы обобщенной волновой функции. Показано, что для частиц A-B-классов массы нуль в качестве базового следует выбирать оператор, составленный из произведения операторов обобщенного лептонного заряда и киральности с квантовыми числами, определяемыми этим произведением и зарядовой четностью. В общем случае частиц отличной от нуля массы в качестве базового должен быть выбран оператор, задающий структуру массовых слагаемых смешанного дираковско-майорановского типа, который, оказывается, связан с тем же произведением киральности и обобщенного лептонного заряда, при этом в состояниях с фиксированным значением его квантовых чисел среднее значение обобщенного заряда обращается в нуль. Конкретная форма этого оператора получается из его дираковской формы при паулиевских поворотах, его собственные функции — тем же преобразованием из соответствующих собственных функций дираковского типа. При этом между компонентами собственных функций возникают связи, эквивалентные майорановским соотношениям, по форме обобщающими классическую майорановскую. Последняя отвечает дираковскому частному случаю при параметре паулиевских преобразований $\theta = 0$. Таким образом, в исследованной модели майорановские соотношения не постулируются априори, а возникают как следствие выбора базовых операторов и паулиевских преобразований, связывающих операторы этого типа с их дираковской формой.

Итак, в настоящей модели выбор универсального базового оператора, подходящего для описания произвольных направлений паулиевского изопространства, оказывается жестко связанным с инверсным классом частиц: для частиц A-B-классов это — оператор, задающий структуру массовых слагаемых, для C-D-классов — оператор обобщенного заряда. Этот факт подчеркивает особую роль оператора, описывающего массовые слагаемые лагранжиана — для физических частиц инверсных A-B-классов он является единственным универсальным оператором, устанавливающим связи различных конкретных описаний, связанных с определенными выделенными направлениями в паулиевском изопространстве. Выбор базового оператора предопределяет форму майорановских соотношений: для оператора, задающего структуру массовых слагаемых, они обобщают связь волновых функций частиц и античастиц, предложенную Майорана, для обобщенного лептонного заряда — соответствуют модифицированным майорановским соотношениям частиц инверсных C-D-классов.

В целом исследованная модель показывает, что в рамках современной феноменологической схемы описания майорановских свойств нейтральных частиц существует принципиальная возможность введения групп симметрии паулиевского типа, обобщения понятия лептонного квантового числа и использования специальных квантовых чисел, построенных на этой базе, для описания майорановских свойств частиц — чего нет в обычном феноменологическом подходе. При этом в паулиевской схеме обобщенный заряд и массовые слагаемые лагранжиана могут интерпретироваться как векторы в паулиевском изопространстве, а майорановские соотношения не постулируются, а суть проекционные условия для собственных функций базовых операторов, их форма обусловлена выбором последних, получается как следствие паулиевских преобразований и зависит от инверсного класса исследуемых частиц.

Исследованная модель имеет ряд нетривиальных особенностей: по сравнению с общими майорановскими моделями она существенно редуцирована (ограничена требованием $M_L = -M_R$), а физическая интерпретация майорановских слагаемых массовых членов лагранжиана и обобщенного лептонного заряда, возникающих для частиц инверсных A-B-классов (физических) в общем случае, отвечающем произвольному выделенному направлению в паулиевском изопространстве, должна учитывать, что они могут иметь псевдоскалярный характер. Вместе с тем отмеченные выше положительные моменты модели показывают, что она развивает майорановскую схему в направлении сближения со Стандартной моделью и возможна ее дальнейшая модификация в этом направлении.

Отметим, что поскольку в рамках изученной модели описания частиц инверсных C-D- и A-B-классов оказываются принципиально различными, рассмотренная модель ставит интересный вопрос: к какому инверсному классу следует относить физические нейтрино? Принадлежат ли ли они к строго определенному инверсному классу или могут обладать смешанными свойствами? Ответ на него требует дальнейших исследований.

В настоящей работе изложен вариант майорановской теории, включающий левые и правые состояния частиц одного сорта. Альтернативная схема для состояний различного флейвора [6, 7] будет представлена в отдельной работе.

Автор выражает искреннюю благодарность Е. П. Велихову за постоянный интерес и поддержку в работе, Б. В. Данилину, Г. В. Домогацкому, Ю. В. Линде, С. В. Семенову и В. А. Рубакову за полезные и стимулирующие дискуссии, а также ЛЯП ОИЯИ за плодотворное обсуждение на семинаре. Работа поддержана грантом № 14 за 2003–2005 гг. РНЦ «Курчатовский институт» по фундаментальным исследованиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Majorana E.* // Nuovo Cim. 1937. V. 14. P. 171 (русский перевод: Майорана Э. // ЭЧАЯ. 2003. V. 34. P. 242).
2. *Понтекорво Б. М.* // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. С. 549; ЖЭТФ. 1958. Т. 34. С. 247.
3. *SNO Collab.* // Phys. Rev. Lett. 2002. V. 89. P. 011301;
   SNO Collab. // Phys. Rev. Lett. 2004. V. 92. P. 181301.
4. *Eguchi K. et al. (KamLand Collab.).* hep-ex/0212021, Phys. Rev. Lett. 2003. V. 90. P. 021802-1.
5. *Fukuda Y. et al. (SuperKamiokande Collab.)* // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 1562.
6. *Maki Z., Nakagawa M., Sakata S.* // Prog. Theor. Phys. 1962. V. 28. P. 870.
7. *Понтекорво Б. М.* // ЖЭТФ. 1967. Т. 53. С. 1717; Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. С. 281;
   Gribov V., Pontecorvo B. // Phys. Lett. B. 1969. V. 28. P. 463.
8. *Eliezer S., Ross D. A.* // Phys. Rev. D. 1974. V. 10. P. 3088;
   Bilenki S. M., Pontecorvo B. // Phys. Lett. B. 1976. V. 61. P. 248;
9. *Bilenki S. M., Pontecorvo B.* // Lett. Nuovo. Cim. 1973. V. 17. P. 569;
   Fritzsh H., Menkovsky P. // Phys. Lett. B. 1976. V. 62. P. 72;
10. *Биленький С. М., Понтекорво Б. М.* // УФН. 1977. Т. 123. С. 181;
    Биленький С. М. Препринт ОИЯИ 32-83-441. Дубна, 1983.
11. *Боум Ф., Фогель П.* Физика массивных нейтрино. М.: Мир, 1990;
    Комминс Ю., Буксбаум Ф. Слабые взаимодействия лептонов и кварков М.: Энергоатомиздат, 1987.

12. *Щепкин М. Г.* // УФН. 1984. Т. 143. С. 513.

13. *Pauli W.* // Nuovo Cim. 1957. V. VI. P. 20.

14. *Гапонов Ю. В.* Препринт РНЦ «Курчатовский институт» ИАЭ-6307/1, М., 2004.

15. *Гапонов Ю. В.* // ДАН. 2004. Т. 399. С. 334.

16. *Pursey W.* // Nuovo Cim. 1957. V. 6. P. 266.

17. *Enz C. P.* // Ibid. P. 250.

18. *Нишиджима К.* Фундаментальные частицы. М.: Мир, 1965.

19. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1969.

20. *Паули В.* // Нильс Бор и развитие физики. ИИЛ, М.: 1958. С. 46.

21. *Мэтьюс П.* Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц. М.: ИИЛ. 1959. С. 73.

22. *Racah G.* // Nuovo Cim. 1937. V. 14. P. 322.

23. *Yang C. N., Tiomno J.* // Phys. Rev. 1950. V. 79. P. 495.

24. *Жарков Г. Ф.* // ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 492.

25. *Akhmedov E. Kh.* Preprint FISIST/1-2000/CFIF, hep-ph/0001264.

26. *Rosen S. P.* // Phys. Lett. 1982. V. 48. P. 842.

27. *Case K. M.* // Phys. Rev. 1957. V. 107. P. 307.

Получено 13 сентября 2005 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 6.12.2005.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,87. Уч.-изд. л. 2,59. Тираж 350 экз. Заказ № 55136.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/