Р5-2005-139

В. В. Пупышев*

ЛОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ФАДДЕЕВА

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

*E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

Пупышев В. В. P5-2005-139
Ложные решения трехмерных уравнений Фаддеева

Получены в явном виде ложные решения трехмерных уравнений Фаддеева, записанных в представлении полного углового момента и полной пространственной четности. Показано, как ложные решения можно использовать в качестве эталонных для тестирования алгоритмов численного решения таких уравнений.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Pupyshev V. V. P5-2005-139
Spurious Solutions of Three-Dimensional Faddeev Equations

The spurious solutions of the three-dimensional Faddeev equations, written in the representation of total angular momentum and total spacial parity, are derived explicitly. It is shown how one can use the spurious solutions as standard ones in testing the numerical algorithms for solving these equations.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005

ВВЕДЕНИЕ

Сформулируем особо важные определения и напомним две известные дифференциальные формулировки задачи трех попарно взаимодействующих квантовых частиц p_1, p_2 и p_3.

Пусть H_0 и E — свободный гамильтониан и полная энергия этих трех частиц, а V_1, V_2, V_3 — соответствующие центральные взаимодействия между частицами p_2 и p_3, p_1 и p_3, p_1 и p_2. Пусть $H \equiv H_0 + V$ и $V \equiv V_1 + V_2 + V_3$ — полный гамильтониан и полное взаимодействие. Под полным набором ε сохраняющихся квантовых чисел, как обычно, понимается совокупность собственных чисел всех операторов, коммутирующих с полным гамильтонианом H. Далее, $\mathcal{A}^\varepsilon$ — класс функций, собственных для каждого из таких операторов, а $\mathcal{A}$ — более широкий класс функций, вообще говоря, не обладающих никакими квантовыми числами, кроме полной энергии.

В формулировке Шредингера [1] волновая функция Ψ трех частиц определяется как решение уравнения Шредингера

$$(H - E)\,\Psi = 0\,, \quad H \equiv H_0 + V\,, \quad V \equiv V_1 + V_2 + V_3. \tag{1}$$

В формулировке Фаддеева [2] сначала вычисляются три компоненты Ψ_1, Ψ_2 и Ψ_3 решения $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ системы трех уравнений Фаддеева

$$(H_0 - E)\,\Psi_i = -V_i\,\Psi = -V_i \sum_{k=1}^{3} \Psi_k\,, \quad i = 1, 2, 3, \tag{2}$$

а затем отвечающая этому решению волновая функция Ψ восстанавливается как сумма ее фаддеевских компонент:

$$\Psi = \sum_{k=1}^{3} \Psi_k\,. \tag{3}$$

Уравнения Шредингера и Фаддеева записываются в системе центра масс трех частиц в виде шестимерных дифференциальных уравнений. Редукция шестимерных уравнений Фаддеева к двумерным интегродифференциальным уравнениям Фаддеева в бисферическом базисе в случае трех тождественных частиц описана в [2], а в случае разных частиц ее подробное описание дано в обзоре [3]. Как впервые показано в работе [4], шестимерные уравнения Фаддеева с центральными парным потенциалами проектированием на базис из обычных D-функций Вигнера [5] сводятся к конечным системам трехмерных дифференциальных уравнений в представлении полного углового момента, т. е. к уравнениям Фаддеева в D-базисе.

Главный объект наших исследований — особые, а именно: ложные решения уравнений Фаддеева. Используемое нами определение ложного решения таково: *нетривиальное решение* $\{\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3\}$ *уравнений Фаддеева, сумма (3) всех компонент которого тождественно равна нулю, а каждая из них принадлежит выбранному классу функций, называется ложным решением уравнений Фаддеева в этом классе.*

Чтобы отличать ложные решения от всех остальных, компоненты Ψ_1, Ψ_2 и Ψ_3 ложного решения обозначим соответствующими символами S_1, S_2 и S_3. По определению ложному в данном классе функций решению уравнений Фаддеева отвечает тривиальное решение ($\Psi \equiv 0$) уравнения Шредингера. Поэтому уравнения Фаддеева (2) для ложных решений расщепляются на совокупность трех не связанных друг с другом свободных уравнений Шредингера для компонент ложного решения и равенство нулю суммы таких компонент:

$$(H_0 - E)\, S_i = 0\,,\; i = 1, 2, 3\,; \quad S_1 + S_2 + S_3 \equiv 0\,. \tag{4}$$

Теперь поясним, зачем необходимо знание ложных решений в явном виде. Для этого обсудим три проблемы.

Первая из них — расчет четырехчастичных систем методом кластерной редукции [6–8]. В этом методе компоненты четырехчастичной волновой функции подчиняются уравнениям Фаддеева–Якубовского, а затем заменяются конечными подсуммами их рядов по избранным собственным функциям гамильтонианов трехчастичных подсистем. К таким базисным функциям относятся и ложные решения трехчастичных уравнений Фаддеева.

Вторая и малоизученная проблема — анализ асимптотик решений уравнений Фаддеева в пределах одной, двух и трех больших по модулю констант связи парных взаимодействий. Для примера рассмотрим случай трех одинаковых констант, равных параметру λ. Пусть $V_i = \lambda\, v_i$, тогда система (2) эквивалентна системе

$$(1/\lambda)\,(H_0 - E)\,\Psi_i = v_i\,\Psi = v_i \sum_{k=1}^{3} \Psi_k\,.$$

Предположим, что при любом λ имеются регулярные решения, для которых $|H_0\,\Psi_i| \leqslant \infty$, $i = 1, 2, 3$. Тогда рассматриваемое семейство уравнений может вырождаться в систему (4), определяющую ложное решение:

$$(H_0 - E)\,\Psi_i \to 0\,, \quad \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 \to 0\,, \quad |\lambda| \to \infty\,.$$

В этом случае $\Psi_i \to S_i$, $i = 1, 2, 3$, следовательно, S_i — старший член асимптотики компоненты Ψ_i при $|\lambda| \to \infty$. Примеры такой ситуации описаны в работах [9, 10], посвященных точным решениям уравнений Фаддеева с парными взаимодействиями центробежного типа.

Третья проблема — тестирование алгоритмов численного решения уравнений Фаддеева путем решения краевых задач для известных в явном виде ложных решений и последующего сравнения вычисленных решений с ложными как с эталонными. Так как ложные решения не зависят от формы парных взаимодействий, то их можно использовать как эталонные при любых парных взаимодействиях. В этом смысле ложные решения особо значимы как универсальные эталонные решения.

Ложные решения неоднократно обсуждались в обзорах [3, 11–14] и во многих упомянутых в них оригинальных работах. Поэтому упомянем лишь наиболее интересные результаты, полученные в статьях [15–19].

Общие свойства гамильтониана H, порождающие ложные решения класса $\mathcal{A}$, и такие общие вопросы, как полнота пространства ложных и всех остальных решений уравнений Фаддеева, исследовались в работах [15–17].

Наиболее значимое для спектральной теории фаддеевских уравнений утверждение доказано в работе [17] в случае гамильтониана H с чисто дискретным спектром. В этом случае матричные операторы, соответствующие уравнениям Фаддеева и сопряженным уравнениям, имеют два типа инвариантных пространств. На пространствах первого типа спектр операторов совпадает со спектром гамильтониана H, на пространствах второго типа эти же операторы эквивалентны гамильтониану H_0.

Для уравнений Фаддеева в бисферическом базисе известны два способа построения всех ложных решений в явном виде.

Первый из них предложен в работе [18], но лишь для систем из трех тождественных частиц с нулевым полным угловым моментом. В этом способе ложное решение получается как вполне определенный перестановочный образ собственной функции гамильтониана H_0. Простое обобщение такого подхода к построению ложных решений на случай нетождественных частиц с произвольным полным угловым моментом упоминалось в обзоре [14].

Второй способ построения всех ложных решений уравнений Фаддеева в бисферическом базисе в классе $\mathcal{A}^\varepsilon$ в самом общем случае нетождественных частиц и произвольного углового момента предложен в статье [19] и реализуется решением конечных систем линейных уравнений.

Ложные решения трехмерных дифференциальных уравнений Фаддеева еще не исследовались. Этот пробел восполняет настоящая работа. В ней сначала выводятся трехмерные дифференциальные уравнения Фаддеева в представлении полных углового момента и пространственной четности, затем описывается предлагаемый метод построения ложных решений таких уравнений в явном виде и приводятся простые примеры использования ложных решений в качестве эталонных.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ ФОРМУЛЫ

Координаты. В трехмерном координатном пространстве $\mathcal{R}^3$ фиксируем правую декартову систему координат S_3 с направляющими ковариантными ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ и начальной точкой O, совпадающей с центром масс исследуемой системы $\{p_1, p_2, p_3\}$ трех частиц p_1, p_2 и p_3 с массами m_1, m_2 и m_3.

В системе S_3 стандартным образом [2] введем три $(i = 1, 2, 3)$ пары приведенных трехмерных векторов Якоби $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$. Векторы $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$ объединим в двухкомпонентный вектор-столбец $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)^T$ и в шестимерный вектор $\mathbf{r}_i \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) \in \mathcal{R}^6$ с обычными гиперсферическими координатами (r, Ω_i), где $r \equiv (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}$ — гиперрадиус, а $\Omega_i \equiv (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i)$ — набор из пяти углов: $\hat{x}_i \equiv (\theta_{x_i}, \varphi_{x_i})$ и $\hat{y}_i \equiv (\theta_{y_i}, \varphi_{y_i})$ — пары сферических углов векторов $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{y}_i$ в системе S_3, а $\varphi_i \equiv \mathrm{arctg}\,(y_i/x_i)$.

Таким образом, в $\mathcal{R}^6$ имеются три $(i = 1, 2, 3)$ якобиевские или декартовы $(\langle \mathbf{r}_i| = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i|)$ и три соответствующие им гиперсферические $(\langle \mathbf{r}_i| = \langle r_i, \Omega_i|)$ координатные представления. Переход от представления $\langle \mathbf{r}_i|$ к другому представлению $\langle \mathbf{r}_k|$, $k \neq i$, называется кинематическим преобразованием [3, 20] и характеризуется кинематическим углом:

$$\gamma_{ki} \equiv g_{ki}\, \mathrm{arctg}\, \left[\, m_j(m_1 + m_2 + m_3)/m_k m_i \,\right]^{1/2}. \tag{5}$$

По определению таких шести углов, если $(k, i) = (1, 2), (3, 1), (2, 3)$, то

$$g_{ki} = -g_{ik} = 1,\ \gamma_{ki} = -\gamma_{ik},\ 0 \leqslant \gamma_{ki} \leqslant \pi/2,\ \sum_{(k,i)} \gamma_{ki} = \pi,\ \sum_{(i,k)} \gamma_{ik} = -\pi. \tag{6}$$

Для краткости записи положим $\gamma \equiv \gamma_{ki}$, у всех координат опустим индекс i, а индекс k заменим штрихом. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\equiv \mathbf{r}_i = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i), \quad \mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}_k = (\mathbf{x}', \mathbf{y}') \equiv (\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k), \qquad (7)\\ \Omega &= (\hat{x}, \hat{y}, \varphi) \equiv \Omega(\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i), \quad \Omega' = (\hat{x}', \hat{y}', \varphi') \equiv \Omega_k = (\hat{x}_k, \hat{y}_k, \varphi_k), \end{aligned}$$

u и u' — косинусы углов θ и θ' между векторами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}'$, а $u_{xx'}$ и $u_{yy'}$ — косинусы углов $\theta_{xx'}$ и $\theta_{yy'}$ между векторами $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$.

Так как столбцы $(\mathbf{x}, \mathbf{y})^T$ и $(\mathbf{x}', \mathbf{y}')^T$ кинематически связаны:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}' \\ \mathbf{y}' \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} +c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \quad c \equiv \cos\gamma, \quad s \equiv \sin\gamma, \tag{8}$$

то все гиперуглы набора Ω' можно представить функциями $\Omega' = \Omega'(\Omega; \gamma)$ параметра γ и гиперуглов набора Ω. По той же причине длины x' и y' векторов $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$, углы θ', φ' и косинусы $u_{xx'}$ и $u_{yy'}$ нетрудно выразить как функции параметра γ, длин x, y векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и угла θ или же как функции гиперрадиуса r, угла φ и косинуса u. В переменных $q = (x, y, \theta)$ имеем

$$\begin{aligned}
x'(q;\gamma) &= \left[(cx)^2 + 2cs\,xy\,\cos\theta + (sy)^2\right]^{1/2}, \qquad (9)\\
y'(q;\gamma) &= \left[(cx)^2 - 2cs\,xy\,\cos\theta + (sy)^2\right]^{1/2}, \\
\theta'(q;\gamma) &= \arccos\left\{\left[\,(c^2 - s^2)\,xy\,\cos\theta - cs\,(x^2 - y^2)\,\right]/[x'(q;\gamma)y'(q;\gamma)]\right\} \\
u_{xx'}(q;\gamma) &\equiv \cos\theta_{xx'} = -(\,cx + sy\,\cos\theta\,)/x'(q;\gamma), \\
u_{yy'}(q;\gamma) &\equiv \cos\theta_{yy'} = (\,sx\,\cos\theta - cy\,)/y'(q;\gamma),
\end{aligned}$$

а в переменных $q = (r, \varphi, u)$ —

$$\begin{aligned}
x'(q;\gamma) &= r\left[(c\cos\varphi)^2 + cs\,u\,\sin 2\varphi + (s\sin\varphi)^2\right]^{1/2}, \qquad (10)\\
y'(q;\gamma) &= r\left[(c\cos\varphi)^2 - cs\,u\,\sin 2\varphi + (s\sin\varphi)^2\right]^{1/2}, \\
\varphi'(q;\gamma) &= \arccos\left\{[\cos(\gamma - \varphi)]^2 + cs\,(u - 1)\,\sin 2\varphi\right\}^{1/2} \\
u'(q;\gamma) &\equiv \cos\theta_{x'y'} = \left[\,(c^2 - s^2)\,u\,\sin 2\varphi - 2cs\,\cos 2\varphi\,\right]/\sin 2\varphi'(q;\gamma), \\
u_{xx'}(q;\gamma) &\equiv \cos\theta_{xx'} = -(\,c\,\cos\varphi + s\,u\,\sin\varphi\,)/\cos\varphi'(q;\gamma), \\
u_{yy'}(q;\gamma) &\equiv \cos\theta_{yy'} = (\,s\,u\,\cos\varphi - c\,\sin\varphi\,)/\sin\varphi'(q;\gamma).
\end{aligned}$$

Предположим, что $u \neq \pm 1$. Введем в $\mathcal{R}^3$ две $(t = x, y)$ правые, декартовы и «подвижные» системы координат S_3^t с ортами $\mathbf{e}_1^t, \mathbf{e}_2^t, \mathbf{e}_3^t$. Пусть начальные точки O^x, O^y и O систем S_3^x, S_3^y и S_3 совпадают и

$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_1^x > 0,\ \mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_2^x = 0,\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_3^x = x; \qquad \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1^y < 0,\ \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2^y = 0,\ \mathbf{y}\cdot\mathbf{e}_3^y = y.$$

Тогда орты $\mathbf{e}_2^x$ и $\mathbf{e}_2^y$ коллинеарны нормали $\mathbf{N} \equiv \mathbf{x}\times\mathbf{y}$ к плоскости $\mathcal{P}$ трех частиц и эта плоскость совпадает с плоскостями $\mathcal{P}_{13}^t$ ортов $\mathbf{e}_1^t$ и $\mathbf{e}_3^t$, $t = x, y$.

Система S_3^y получается поворотом системы S_3^x вокруг орта $\mathbf{e}_2^x = \mathbf{e}_2^y$ на угол θ между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Так как в S_3 ориентация этих векторов задана углами $\hat{x} = (\theta_x, \varphi_x)$ и $\hat{y} = (\theta_y, \varphi_y)$, а в S_3^t — углами $\hat{x}^t$ и $\hat{y}^t$:

$$\begin{aligned}
\hat{x}^t &= (\theta_x^x, \varphi_x^x) = (0, 0),\ \hat{y}^t = (\theta_y^x, \varphi_y^x) = (\theta, 0),\ t = x; \qquad (11)\\
\hat{x}^t &= (\theta_x^y, \varphi_x^y) = (\theta, \pi),\ \hat{y}^t = (\theta_y^y, \varphi_y^y) = (0, 0),\ t = y,
\end{aligned}$$

то переход $S_3 \to S_3^t$ определяется углами Эйлера [5] $\omega^t = (\varphi_t, \theta_t, \gamma^t)$, где

$$\cos\gamma^t = \operatorname{ctg}\theta\,\cos\theta_t - \operatorname{cosec}\theta\,\cos\theta_{t'}, \quad t, t' = x, y, \quad t' \neq t.$$

Вследствие (8) и (11) в системах S_3^x и S_3^y векторы $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{y}'$ имеют углы

$$\begin{aligned}
(\hat{x}')^x &= (\theta_{x'}^x, \varphi_{x'}^x) = (\theta_{xx'}, \varphi_{x'}^x), \quad \varphi_{x'}^x = \pi(\operatorname{sign}\gamma + 1)/2, \\
(\hat{y}')^x &= (\theta_{y'}^x, \varphi_{y'}^x) = (\theta, \pi)\,; \qquad (12)\\
(\hat{x}')^y &= (\theta_{x'}^y, \varphi_{x'}^y) = (\theta_{yx'}, 0)\,, \\
(\hat{y}')^y &= (\theta_{y'}^y, \varphi_{y'}^y) = (\theta_{yy'}, \varphi_{y'}^y), \quad \varphi_{y'}^y = \pi(\operatorname{sign}\gamma + 1)/2.
\end{aligned}$$

Угловые базисы. В качестве угловых базисных функций [5] в задаче трех частиц наиболее часто используются сферические функции

$$Y_{c\delta}(\hat{q}) = (2\pi)^{-1/2}\,\exp(i\delta\varphi_q)\,\Theta_{c\delta}(\cos\theta_q), \quad \hat{q} = \hat{x}, \hat{y}, \tag{13}$$

бисферические гипергармоники

$$\langle \hat{x}, \hat{y} | \ell m a b\rangle \equiv \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y}) \equiv \sum_{\alpha} C^{\ell m}_{a\alpha b\beta}\, Y_{a\alpha}(\hat{y})\, Y_{b\beta}(\hat{x}), \tag{14}$$

гипергармоники

$$\begin{aligned} Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega) &\equiv W_{Lab}(\varphi)\,\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y}), \\ W_{Lab}(\varphi) &\equiv N_{Lab}\,(\sin\varphi)^a\,(\cos\varphi)^b\,P^{(a+1/2, b+1/2)}_n(\cos 2\varphi), \end{aligned} \tag{15}$$

D-функции Вигнера $D^{\ell *}_{mm'}$ и D^{σ}-функции [21]:

$$D^{\ell\sigma *}_{mn'}(\omega^t) \equiv \left[\frac{2\ell + 1}{16\pi^2(1 + \delta_{n'0})}\right]^{1/2} \left[D^{\ell *}_{mn'}(\omega^t) + \sigma(-1)^{\ell - n'} D^{\ell *}_{m,-n'}(\omega^t)\right]. \tag{16}$$

В формулах (14)–(16) обозначения стандартные: $\Theta_{a\alpha}$ — нормированные присоединенные полиномы Лежандра, $P^{(a,b)}_n$ — полиномы Якоби и $C^{\ell m}_{a\alpha b\beta}$ — коэффициенты Клебша–Гордана, N_{Lab} — известные множители, δ_{ab} — символ Кронекера; а индексы могут принимать только следующие значения:

$$\begin{aligned} \ell &= 0, 1, \dots; \quad m = -\ell, -\ell + 1, \dots, \ell; \quad |a - b| \le \ell \le a + b; \\ L &= a + b + 2n, \quad n = 0, 1, \dots; \quad \alpha = -a, -a + 1, \dots a; \\ \sigma &= \pm(-1)^{\ell}, \quad \mu(\sigma) \equiv [1 - (-1)^{\ell}\sigma]/2, \quad n' = \mu(\sigma), \mu(\sigma) + 1, \dots, \ell. \end{aligned}$$

Система S^y_3 получается переходом $S_3 \to S^x_3 \to S^y_3$, причем второй переход — поворот системы S^x_3 на угол θ вокруг орта $\mathbf{e}^x_2$. Поэтому используя известную формулу, описывающую результирующий поворот [5], получаем

$$D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t) = \sum_{m'' = \mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma *}_{mm''}(\omega^q)\, d^{\ell\sigma t}_{m''m'}(u), \; t \ne q = x, y; \tag{17}$$

$$d^{\ell\sigma t}_{m''m'}(u) \equiv \left[\frac{2\ell + 1}{16\pi^2(1 + \delta_{m'0})}\right]^{1/2} D^{\ell\sigma *}_{m''m'}(0, \theta, 0) \begin{cases} (-1)^{m' + m''}, & t = x, \\ 1, & t = y. \end{cases}$$

Бисферические гармоники (14) — известные суммы [25] по D^{σ}-функциям:

$$\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y}) = \sum_{m' = \mu(\sigma)}^{\ell} \langle D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t) | \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}, \hat{y})\rangle\, D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t), \tag{18}$$

где

$$\langle D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^t)|\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x},\hat{y})\rangle \quad = \quad \left\{ \begin{array}{rl} T^{\ell m'}_{ab}\,\Theta_{am'}(u), & t=x, \\ (-1)^{m'}\,T^{\ell m'}_{ba}\Theta_{bm'}(u), & t=y, \end{array} \right. \tag{19}$$

а $T^{\ell m'}_{ab}$ — коэффициенты Ченга–Фано [22]:

$$T^{\ell m'}_{ab} \equiv \left\{ [1+\sigma(-1)^{a+b}]/[1+\delta_{m'0}] \right\}^{1/2} (-1)^{a+m'}\, C^{b0}_{a-m'\ell m'}. \tag{20}$$

Как известно [3, 23, 24], любая гипергармоника $Y^{\ell m}_{La'b'}$, зависящая от гиперуглов Ω', выраженных через гиперуглы Ω и кинематический угол γ, представима в виде конечной суммы

$$Y^{\ell m}_{La'b'}(\Omega'(\Omega;\gamma)) = Y^{\ell m}_{La'b'}(\Omega'(\Omega;\gamma)) = \sum_{ab} \langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega), \tag{21}$$

в которой коэффициенты Рейнала–Реваи $\langle ab|K(\gamma)|a'b'\rangle_{L\ell}$ подчиняются соотношениям унитарности:

$$\sum_{ab} \langle a'b'|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell}\, \langle ab|K(-\gamma)|a''b''\rangle_{L\ell} = \delta_{a'a''}\,\delta_{b'b''}, \tag{22}$$

и формуле сложения:

$$\langle a'b'|K(\gamma_1+\gamma_2)|a''b''\rangle_{L\ell} = (-1)^L \sum_{ab} \langle a'b'|K(\gamma_1)|ab\rangle_{L\ell}\, \langle ab|K(\gamma_2)|a''b''\rangle_{L\ell}. \tag{23}$$

Поэтому трехмерные вектор-столбцы

$$\mathbf{Y}^{\ell mg}_{Lab} \equiv \Big(Y^{\ell mg}_{Lab}(\Omega_1), Y^{\ell mg}_{Lab}(\Omega_2), Y^{\ell mg}_{Lab}(\Omega_3) \Big)^T, \quad g=u,s,v,$$

с компонентами

$$\begin{aligned} Y^{\ell mu}_{Lab}(\Omega_i) &\equiv (1/3)Y_{Lab}(\Omega_i) + (1/3)\sum_{k\neq i}\sum_{a'b'} \langle a'b'|K(\gamma_{ki})|ab\rangle_{L\ell}\, Y_{La'b'}(\Omega_i), \\ Y^{\ell ms}_{Lab}(\Omega_i) &\equiv Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i) - Y^{\ell mu}_{Lab}(\Omega_i)\,, \\ Y^{\ell mv}_{Lab}(\Omega_i) &\equiv \sum_{k\neq i} \operatorname{sign}\gamma_{ki} \sum_{a'b'} \langle a'b'|K(\gamma_{ki})|ab\rangle_{L\ell}\, Y^{\ell m}_{La'b'}(\Omega_i), \quad i=1,2,3, \end{aligned} \tag{24}$$

в общем случае ортонормированы:

$$\langle \mathbf{Y}^{\ell mg}_{Lab}|\mathbf{Y}^{\ell mg}_{L'a'b'}\rangle = \delta_{LL'}\delta_{aa'}\delta_{bb'}\,\delta_{gg'}\,, \quad g=u,s,v;\; g'=u,s,v. \tag{25}$$

Если массы трех частиц равны, то функции $Y^{\ell mu}_{Lab}$ с четным или нечетным индексом b — известные в методе гипергармоник [23] симметричные $(Y^{\ell m+}_{Lab})$

или антисимметричные ($Y_{Lab}^{\ell m-}$) относительно любых перестановок частиц гипергармоники:

$$Y_{Lab}^{\ell m\pm}(\Omega_i) \quad \equiv \quad (1/3) \sum_{a'b'} \left[\delta_{aa'} \, \delta_{bb'} + 2 \, \langle a'b' | K(\pi/3) | ab \rangle_{L\ell} \right] Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega_i), \qquad (26)$$

где b и b' — одновременно четные или нечетные, если берется знак плюс или минус; функции $Y_{Lab}^{\ell ms}$ не обладают такой симметрией; функции $Y_{Lab}^{\ell mv}$ — тривиальные: $Y_{Lab}^{\ell mv}(\Omega_i \equiv 0, \forall \Omega_i$.

Операторы. Пусть $\mathbf{l}_x$ и $\mathbf{l}_y$ — операторы угловых моментов, сопряженные векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, а $\mathbf{l} \equiv \mathbf{l}_x + \mathbf{l}_y = l_1 \mathbf{e}_1 + l_2 \mathbf{e}_2 + l_3 \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{L}$ — операторы полного углового момента и гипермомента и, наконец, P — оператор инверсии $\mathbf{r} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \to -\mathbf{r} = (-\mathbf{x}, -\mathbf{y})$.

Отметим, что D^σ-функции, в отличие от D-функции Вигнера $D_{mm'}^{\ell *}$, являются собственными функциями оператора инверсии: $(P - \sigma) \, D_{mm'}^{\ell \sigma *} = 0$, а собственное число σ обычно называется пространственной четностью.

Для свободного гамильтониана H_0 верны два ($t = x, y$) представления:

$$H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\ell m \sigma} \sum_{m''=m-1}^{m+1} |D_{mm''}^{\ell \sigma *}(\omega^t)\rangle \, H_{0m''m}^{\ell \sigma t}(x, y, \theta) \, \langle D_{mm''}^{\ell \sigma *}(\omega^t)|. \qquad (27)$$

Доказательство в случае $t = x$, когда S^x — подвижная система, детально описано в обзоре [21] и основано на представлении $\mathbf{l}_x = \mathbf{l} - \mathbf{l}_y$. В случае $t = y$, когда S^y — подвижная система, доказательство дается аналогичным способом, но используется представление $\mathbf{l}_y = \mathbf{l} - \mathbf{l}_x$. В обоих ($t = x, y$) случаях

$$\begin{aligned} H_{0mm}^{\ell \sigma t}(x, y, \theta) \quad &= \quad -\partial_x^2 - (2/x)\partial_x - \partial_y^2 - (2/y)\partial_y + \\ &+ \quad (r/xy)^2 \, Q_{mm}(\theta) + [\ell(\ell+1) - m^2]/t^2 \, , \\ H_{0mm'}^{\ell \sigma t}(x, y, \theta) \quad &= \quad (\gamma_{mm'}^{\ell \sigma}/t^2) \, Q_{mm'}(\theta), \quad m' = m \pm 1; \end{aligned} \qquad (28)$$

где для сокращения записи введены коэффициенты

$$\begin{aligned} \gamma_{m',m'+1}^{\ell \sigma} \quad &\equiv \quad \left\{ \left[1 + \delta_{m'0} \, \sigma \, (-1)^\ell \right] \, [\ell(\ell+1) - m'(m'+1)] \right\}^{1/2}, \\ \gamma_{m',m'-1}^{\ell \sigma} \quad &\equiv \quad (1 - \delta_{m'0}) \, \left\{ \left[1 + \delta_{m'1} \, \sigma \, (-1)^\ell \right] \, [\ell(\ell+1) - m'(m'-1)] \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

и операторы

$$\begin{aligned} Q_{m'm'} \quad &\equiv \quad -\frac{1}{\sin\theta} \, \partial_\theta (\sin\theta \, \partial_\theta) + \left(\frac{m'}{\sin\theta} \right)^2, \\ Q_{m',m'\pm1} \quad &\equiv \quad \mp \partial_\theta + (m' \mp 1) \operatorname{ctg}\theta. \end{aligned} \qquad (29)$$

В координатах x, y и $u \equiv \cos\theta$ операторы $H^{\ell\sigma t}_{0mm'}$, $m' = m, m \pm 1$, действуют на любую функцию $(xy\sin\theta)^{-1} f$ по правилам

$$
\begin{gathered}
\left[H^{\ell\sigma t}_{0mm'}(x,y,u)(xy\sin\theta)^{-1} + (xy\sin\theta)^{-1}\tilde{H}^{\ell\sigma t}_{0mm'}(x,y,u)\right] f(x,y,u) = 0, \\
\tilde{H}^{\ell\sigma t}_{0mm}(x,y,u) \equiv \partial^2_x + \partial^2_y + [(x^2+y^2)/(xy)^2]\,\tilde{Q}_{mm}(u) + \frac{m^2 - \ell(\ell+1)}{t^2}, \\
\tilde{H}^{\ell\sigma t}_{0mm'}(x,y,u) \equiv [\gamma^{\ell\sigma}_{mm'}/t^2]\tilde{Q}_{mm'}(u), \\
\tilde{Q}_{mm}(u) \equiv (1-u^2)\partial^2_u + \frac{1-m^2}{1-u^2}, \\
\tilde{Q}_{m',m'\pm1}(u) = (1-u^2)^{1/2}\left(\mp\partial_u - \frac{m'u}{1-u^2}\right),
\end{gathered}
\tag{30}
$$

а координатах r, φ и u — по правилам

$$
\begin{gathered}
\left[\, H^{\ell\sigma t}_{0mm'}(r,\varphi,u)(xy\sin\theta)^{-1} + (xy\sin\theta)^{-1}\tilde{H}^{\ell\sigma t}_{0mm'}(r,\varphi,u)\right] f(r,\varphi,u) = 0, \\
\tilde{H}^{\ell\sigma t}_{0mm}(r,\varphi,u) \equiv \partial^2_r + r^{-1}\partial_r - (2/\sin 2\varphi)^2\,\tilde{Q}_{mm}(u) + \frac{m^2-\ell(\ell+1)}{(qr)^2}, \\
\tilde{H}^{\ell\sigma t}_{0mm'}(r,\varphi,u) \equiv [\gamma^{\ell\sigma}_{mm'}/(rq)^2]\,\tilde{Q}_{mm'}(u),
\end{gathered}
\tag{31}
$$

где $q = \cos\varphi$ при $t = x$ и $q = \sin\varphi$ при $t = y$.

В квантовой механике [1] свободным уравнением Шредингера для системы $\{p_1, p_2, p_3\}$ трех частиц называется уравнение

$$
H_0(\mathbf{r})\,\Psi(\mathbf{r}) = E\,\Psi(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \mathcal{R}^6, \tag{32}
$$

где число E — полная энергия системы, а Ψ — отвечающая ее собственная функция свободного гамильтониана H_0.

По определению в представлении $\langle\mathbf{r}| = \langle\mathbf{x},\mathbf{y}|$

$$
\begin{aligned}
H_0(\mathbf{x},\mathbf{y}) &\equiv -\triangle_x - \triangle_y = \\
&= -x^{-2}\partial_x(x^2\partial_x) - y^{-2}\partial_y(y^2\partial_y) + x^{-2}\mathbf{l}^2_x(\hat{x}) + y^{-2}\mathbf{l}^2_y(\hat{y}),
\end{aligned}
\tag{33}
$$

а в представлении $\langle\mathbf{r}| = \langle r, \Omega|$

$$
H_0(r,\Omega) = -r^{-5}\partial_r(r^5\partial_r) + r^{-2}\mathbf{L}^2(\Omega). \tag{34}
$$

Ограниченное всюду в $\mathcal{R}^6$ решение Ψ уравнения (32) называют регулярным, а тождественно равное нулю — тривиальным. Как известно, любая гипергармоника $Y^{\ell m}_{Lab}$ является собственной функцией оператора H_0. Поэтому фундаментальное решение $\Psi = \Psi^{\varepsilon}_0$ уравнения (32)

$$\Psi^{\varepsilon}_0(\mathbf{r}) = r^{-2}\, Z_{L+2}(z)\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega), \quad z \equiv r\sqrt{E}, \quad \varepsilon = \{L, a, b, \ell, m, \sigma\}, \tag{35}$$

обладает тем же набором квантовых чисел ε, что и гипергармоника $Y^{\ell m}_{Lab}$ и содержит решение Z_ν, $\nu = L+2$, уравнения Бесселя

$$\left(z^2\, \partial^2_z + z\, \partial_z + z^2 - \nu^2 \right) Z_\nu(z) = 0. \tag{36}$$

Следовательно, при $E < 0$ не существует никакого регулярного решения Ψ, отличного от тривиального, а при $E \geq 0$ фундаментальное регулярное решение дается формулой (35), в которой Z_{L+2} — регулярная функция Бесселя J_{L+2}. Любое регулярное решение уравнения (32) можно представить линейной комбинацией функций (35) и некоторых коэффициентов B^L_{ab}. Например, решение $\Psi = \Psi^{\varepsilon}_0$ с квантовыми числами $\varepsilon = \{L, \ell, m, \sigma\}$ — сумма

$$\Psi^{\varepsilon}_0(\mathbf{r}) = r^{-2}\, J_{L+2}(z) \sum_{ab} B^L_{ab}\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega)\,, \quad (-1)^{a+b} = \sigma, \tag{37}$$

а, решение Ψ^{ε} с квантовыми числами $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\}$ — ряд

$$\Psi^{\varepsilon}_0(\mathbf{r}) = r^{-2} \sum_{L} \sum_{ab} B^L_{ab}\, J_{L+2}(z)\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega). \tag{38}$$

2. ТРЕХМЕРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФАДДЕЕВА

Пусть правые декартовы и «подвижные» системы координат $S^{x'}_3$ и $S^{y'}_3$ получены поворотами системы S_3 углы Эйлера $\omega^{x'} = (\varphi_{x'}, \theta_{x'}, \gamma^{x'})$ и $\omega^{y'} = (\varphi_{y'}, \theta_{y'}, \gamma^{y'})$, где

$$\cos\gamma^t = \mathrm{ctg}\,\theta\, \cos\theta_t - \mathrm{cosec}\,\theta\, \cos\theta_{t'}, \quad t \neq t' = x', y',$$

или же как последовательности двух поворотов $S_3 \to S^x_3 \to S^{x'}_3$ и $S_3 \to S^y_3 \to S^{y'}_3$, вторые из которых — повороты систем S^x_3 и S^y_3, соответственно на углы $\theta_{xx'}$ и $\theta_{yy'}$ вокруг коллинеарных ортов $\mathbf{e}^x_2$ и $\mathbf{e}^y_2$. Поэтому для функции $D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^{t'})$, $t' = x', y'$, описывающих результирующий поворот, имеет место разложение типа (17):

$$D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\varphi_{t'}, \theta_{t'}, \gamma^{t'}) = \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma *}_{mm''}(\varphi_t, \theta_t, \gamma^t)\, d^{\ell\sigma *}_{m''m'}(u_{tt'}), \tag{39}$$

где $t = x$ и $t' = x'$ или $t = y$ и $t' = y'$ и, как и прежде, $u_{tt'} \equiv \cos\theta_{tt'}$.

Далее вместо принятых ранее сокращенных обозначений $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_i$, $\mathbf{y} \equiv \mathbf{y}_i$ и $\mathbf{x}' \equiv \mathbf{x}_k$, $\mathbf{y}' \equiv \mathbf{y}_k$, u, u' придется использовать полные обозначения с индексами. Для $t = x, y$ положим $\omega_i^t \equiv (\varphi_{t_i}, \theta_{t_i}, \gamma_i^t) = \omega^t$ и $u_{ik}^t \equiv \cos\theta_{ik}^t$, поэтому $u_{ik}^x = u_{xx'}$, а $u_{ik}^y = u_{yy'}$. Стоит особо отметить, что в рассматриваемом случае центральных парных взаимодействий полный гамильтониан H системы трех частиц всегда коммутирует с тремя операторами $\mathbf{l}^2$, l_3 и P. Поэтому полный набор ε сохраняющихся квантовых чисел состоит из собственных значений этих трех операторов $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\}$.

Уравнения Фаддеева в D-базисе. В работе [4] решения $\{\Psi_1^\varepsilon, \Psi_2^\varepsilon, \Psi_3^\varepsilon\}$, $\varepsilon = \{\ell, m\}$, уравнений Фаддеева (2) раскладывались по D-функциям и использовались только системы $S_3^{x_i}$:

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \sum_{m'=-\ell}^{\ell} \Psi_{im'}^{\ell m}(q_i)\, D_{mm'}^{\ell}(\omega_i^x), \quad q_i = (x_i, y_i, \theta_i), \quad i = 1, 2, 3. \qquad (40)$$

Поэтому впервые выведенные авторами уравнения

$$\sum_{m''=m'-1}^{m'+1} \Big[H_{m'm''}^{\ell}(q_i) + \delta_{m'm''}(V_i(x_i) - E) \Big]\, \Psi_{im''}^{\ell m}(q_i) = \qquad (41)$$

$$= -V_i(x_i) \sum_{k\neq i} \sum_{m''=-\ell}^{\ell} D_{m'm''}^{\ell}(0, \theta_{ki}^x, 0)\, \Psi_{km''}^{\ell m}(q_k(q_i; \gamma_{ki}))$$

являются уравнениями Фаддеева в D-базисе или же в представлении полного углового момента. При данном $\ell > 0$ в этих уравнениях $i = 1, 2, 3$, но $m' = -\ell, \ldots, \ell$, поэтому их число равно $3(2\ell + 1)$, а компоненты Ψ_i^ε и их сумма

$$\Psi^\varepsilon \equiv \Psi_1^\varepsilon + \Psi_2^\varepsilon + \Psi_3^\varepsilon \qquad (42)$$

не обладают определенной пространственной четностью σ.

Уравнения Фаддеева в D^σ-базисе. Так как сохраняется набор квантовых чисел $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\}$, то уравнения Фаддеева могут иметь всюду регулярные в $\mathcal{R}^6$ решения такие, что компоненты $\Psi_i = \Psi_i^\varepsilon$ и их сумма $\Psi = \Psi^\varepsilon$ являются собственными функциями операторов $\mathbf{l}^2$, l_3 и P.

Запишем искомые компоненты $\Psi_i = \Psi_i^\varepsilon$ в гиперсферических координатах $\mathbf{r}_i = (r, \Omega_i)$ как D^σ-ряды

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = 2\,[r^2 \sin 2\varphi_i\,(1 - u_i^2)^{1/2}]^{-1} \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} U_{im'}^{\varepsilon t}(r, \varphi_i, u_i)\, D_{mm'}^{\ell\sigma *}(\omega_i^t), \qquad (43)$$

где $t = x_i$ или $t = y_i$ при каждом $i = 1,2,3$, а функции $U^{\varepsilon t}_{im'}$ называются приведенными D^σ-компонентами. Применив к рядам (43) правила (9) и (39), находим для их суммы (42) три $(i = 1,2,3)$ представления в виде D^σ-рядов

$$
\begin{aligned}
\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) \quad &= \quad 2[r^2 \sin 2\varphi_i (1-u_i^2)^{1/2}]^{-1} \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} U^{\varepsilon t}_{m'}(q_i)\, D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega_i^t)\,, \qquad (44)\\
U^{\varepsilon t}_{m'}(q_i) \quad &\equiv \quad U^{\varepsilon t}_{im'}(q_i) + \sum_{k\neq i} \left[\frac{\sin 2\varphi_i}{\sin 2\varphi_k(q_i;\gamma_{ki})}\right] \left[\frac{1-u_i^2}{1-u_k^2(q_i;\gamma_{ki})}\right]^{1/2} \times \\
&\times \quad \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} d^{\ell\sigma}_{m'm''}(u^t_{ki})\, U^{\varepsilon t}_{km''}(q_k(q_i;\gamma_{ki})).
\end{aligned}
$$

В исходных шестимерных уравнениях (2), записанных в собственных представлениях $\langle \mathbf{r}_i| = \langle r, \Omega_i|$, все искомые компоненты $\Psi_i = \Psi_i^\varepsilon$ и их сумму $\Psi = \Psi^\varepsilon$ заменим D^σ-рядами (43) и (44). Затем, используя свойства (27) и (31) оператора H_0, спроецируем полученные уравнения на их собственные D^σ-базисы и получим трехмерные уравнения Фаддеева в координатах $q_i \equiv (r, \varphi_i, u_i)$

$$
\sum_{m''=m'-1}^{m'+1} \left[\tilde{H}^{\ell\sigma t}_{0m'm''}(q_i) + \delta_{m'm''}E\right] U^{\varepsilon t}_{im''}(q_i) = V_i(r\cos\varphi_i)\, U^{\varepsilon t}_{m'}(q_i). \qquad (45)
$$

Аналогичным способом редуцируем исходные уравнения (2), записанные в собственных «декартовых» координатах $\mathbf{r}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$. Рассмотрим два варианта редукции. В первом варианте компоненты Ψ_i^ε представим рядами

$$
\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i) = \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega_i^t)\, \Psi^{\varepsilon t}_{im'}(x_i, y_i, \theta_i), \qquad (46)
$$

а их сумму (42) выразим по правилам (39):

$$
\begin{aligned}
\Psi^\varepsilon(q_i) \quad &= \quad \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} \Psi^{\varepsilon t}_{m'}(q_i)\, D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega_i^t), \quad q_i = (x_i, y_i, \theta_i), \qquad (47)\\
\Psi^{\varepsilon t}_{m'}(q_i) \quad &\equiv \quad \Psi^{\varepsilon t}_{im'}(q_i) + \sum_{k\neq i} \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} d^{\ell\sigma *}_{m'm''}(u^t_{ki})\, \Psi^{\varepsilon t}_{km''}(q_k(q_i;\gamma_{ki})).
\end{aligned}
$$

Во втором варианте компоненты Ψ_i^ε заменим рядами типа (43):

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_i) = \Big[x_i y_i (1-u_i^2)^{1/2} \Big]^{-1} \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega_i^t)\, U^{\varepsilon t}_{im'}(x_i,y_i,u_i). \qquad (48)$$

а для их суммы (42) по тем же правилам (39) найдем представление

$$\begin{aligned}
\Psi^\varepsilon(q_i) \quad &= \quad \Big[x_i y_i \,(1-u_i)^{1/2} \Big]^{-1} \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} U^{\varepsilon t}_{m'}(q_i)\, D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega_i^t)\,, \qquad (49)\\
U^{\varepsilon t}_{m'}(q_i) \quad &\equiv \quad U^{\varepsilon t}_{im'}(q_i) + \sum_{k\neq i} (x_i y_i / x_k y_k)\ \big[(1-u_i^2)/(1-u_k^2) \big]^{1/2} \times \\
&\times \sum_{m''=\mu(\sigma)}^{\ell} d^{\ell\sigma *}_{m'm''}(u^t_{ki})\, U^{\varepsilon t}_{km''}(q_k(q_i;\gamma_{ki})), \quad q_i \equiv (x_i,y_i,u_i).
\end{aligned}$$

Далее заменим в уравнениях (2) компоненты $\Psi_i = \Psi_i^\varepsilon$ и их сумму $\Psi = \Psi^\varepsilon$ представим рядами (46) и (47) или же рядами (48) и (49). Для проецирования полученных соотношений используем равенства (27)–(29) или же равенства (27) и (30). В итоге получим конечные системы уравнений: для D^σ-компонент $\Psi^{\varepsilon t}_{im''}(q_i)$, $q_i \equiv (x_i,y_i,\theta_i)$, — систему

$$\sum_{m''=m'-1}^{m'+1} \Big[H^{\ell\sigma t}_{0m'm''}(q_i) - \delta_{m'm''} E \Big]\, \Psi^{\varepsilon t}_{im''}(q_i) = -V_i(x_i)\, \Psi^{\varepsilon t}_{m'}(q_i), \qquad (50)$$

а для приведенных D^σ-компонент $U^{\varepsilon t}_{im''}(q_i)$, $q_i \equiv (x_i,y_i,u_i)$, — систему

$$\sum_{m''=m'-1}^{m'+1} \Big[\tilde{H}^{\ell\sigma t}_{0m'm''}(q_i) + \delta_{m'm''} E \Big]\, U^{\varepsilon t}_{im''}(q_i) = V_i(x_i)\, U^{\varepsilon t}_{m'}(q_i). \qquad (51)$$

Выведенные системы уравнений (45), (50) и (51) являются системами дифференциальных уравнений Фаддеева в D^σ-базисе или в представлении полных углового момента и пространственной четности. Так как $m' = \mu(\sigma),\ldots,\ell$, то число уравнений каждой из этих трех систем равно $3\,[\ell-\mu(\sigma)]$ и при $t=x$, и в случае $t=y$.

Уравнения (45) в гиперсферических координатах (r,φ_i,u_i) удобны для вывода их точных решений и исследования асимптотических разложений парциальных компонент $U^{\varepsilon t}_{im'}$ вблизи точки тройного удара ($r \to 0$), а с вычислительной точки зрения привлекательны тем, что функции $d^{\ell\sigma *}_{mm'}$ не зависят от аргумента r.

Как отмечалось в статье [25], анализ асимптотических разложений фаддеевских компонент Ψ_i^ε вблизи точки столкновения $(x_i \to 0\,, y_i > 0)$ двух частиц p_j и p_k оказывается более простым, если использовать уравнения (50), $t = y$, в «декартовых» координатах $q_i = (x_i, y_i, \theta_i)$.

3. ЛОЖНЫЕ РЕШЕНИЯ

По определению ложное решение $\{S_1, S_2, S_3\}$ обращает в нуль и левую и правую части уравнений Фаддеева:

$$[\,H_0(\mathbf{r}_i) - E\,]\; S_i(\mathbf{r}_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3; \tag{52}$$

$$S_i(\mathbf{r}_i) + \sum_{k \neq i} S_k(\mathbf{r}_k(\mathbf{r}_i; \gamma_{ki})) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{53}$$

Основная задача такова: доказать, что в любом классе $\mathcal{A}^\varepsilon$, $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\}$ ложные решения существуют всегда, и получить явные выражения всех ложных решений через коэффициенты Рейнала–Реваи. Ключевыми для предлагаемого ниже доказательства нетривиальной совместности системы уравнений (52), (53) в классе функций $\mathcal{A}^\varepsilon$ будут соотношения (21)–(23) и тот факт, что в этом классе индексы a и b любой базисной гипергармоники $Y_{Lab}^{\ell m}$ принимают все допустимые при данных L, ℓ и σ значения. Отметив, что число $N = N(L, \ell, \sigma)$ всех пар (a, b) этих индексов конечно и зависит от L, ℓ и σ, приступим к доказательству.

В качестве фундаментального решения каждого $(i = 1, 2, 3)$ из уравнений (52) используем соответствующую функцию

$$S_i^L(\mathbf{r}_i) = \Psi_0^{\varepsilon L}(\mathbf{r}_i) = r^{-2}\, J_{L+2}(r\sqrt{E})\, \sum_{ab} B_{iab}^L\, Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \tag{54}$$

где коэффициенты B_{iab}^L пока не определены, а индексы a и b пробегают все возможные при данных L, ℓ, m и σ значения. Вследствие правила (21) из всех функций (54) системе (53) удовлетворяют только те функции, чьи коэффициенты B_{iab}^L подчиняются однородной системе линейных уравнений

$$B_{iab}^L + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell}\, B_{ka'b'}^L = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{55}$$

где число пар $\{a, b\}$ и пар $\{a', b'\}$ равно N. Поэтому матрица $\mathbf{M}^L$ этой системы имеет конечную размерность: $\dim \mathbf{M}^L = 3N < \infty$. Далее, $\operatorname{rank} \mathbf{M}^L = N$, потому что, благодаря свойствам (22) и (23) оператора K, все уравнения (55) удовлетворяются при любых B_{2ab}^L и B_{3ab}^L, если для всех a и b положить

$$B_{1ab}^L = -\sum_{k=2}^{3} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{k1}) | a'b' \rangle_{L\ell}\, B_{ka'b'}^L. \tag{56}$$

Поэтому исследуемая система (55) имеет $\dim \mathbf{M}^L - \operatorname{rank} \mathbf{M}^L = 2N$ линейно независимых решений. Найдем их нормальную фундаментальную совокупность [26], последовательно полагая все коэффициенты B^L_{2ab} и B^L_{3ab}, кроме одного из них, равными нулю. Сначала для удобства записи введем сокращенные обозначения. Пусть $\{a,b\}^N_{n=1}$ — некоторая выбранная последовательность всех разных пар $\{a,b\}$ индексов a и b. Номер n или n' элемента $\{a,b\}$ или $\{a',b'\}$ этой последовательности используем для обозначения совокупности индексов a и b или a' и b'. Например, $Y^{\ell m}_{Ln} \equiv Y^{\ell m}_{Lab}$, $n = 1, \ldots, N$. Определим расширенную последовательность $\{a,b\}^{2N}_{f=1}$. Пусть ее элемент с номером $f \leqslant N$ или $f > N$ — элемент последовательности $\{a,b\}^N_{n=1}$ с номером $n = f$ или $n = f - N$. Номер f или f' элемента $\{a,b\}$ или $\{a',b'\}$ расширенной последовательности используем для обозначения совокупности индексов a и b или a' и b'. Например, $Y^{\ell m}_{Lf} \equiv Y^{\ell m}_{Lab}$, если $f = 1, \ldots, N$, но $Y^{\ell m}_{Lf} \equiv Y^{\ell m}_{L,N-f}$, если $f = N+1, \ldots, 2N$.

Теперь можно записать равенства (56) как

$$B^L_{1n} = -\sum_{k=2}^{3} \sum_{n'=1}^{N} \langle n|K(\gamma_{k1})|n'\rangle_{L\ell}\, B^L_{kn'},$$

затем ввести три столбца $\mathbf{B}^L_i$, $i = 1,2,3$, и столбец $\mathbf{B}^L$:

$$\mathbf{B}^L_i \equiv (B^L_{i1}, \ldots, B^L_{iN})^T, \quad \mathbf{B}^L \equiv (\mathbf{B}^{LT}_1, \mathbf{B}^{LT}_2, \mathbf{B}^{LT}_3)^T$$

и, наконец, определить частное решение $\mathbf{B}^L = \mathbf{B}^{Lf}$ системы (56) как

$$\begin{aligned} B^{Lf}_{1n} &\equiv -\langle n|K(\gamma_{k1})|f\rangle_{L\ell}/\sqrt{2} = -\langle f|K(-\gamma_{k1})|n\rangle_{L\ell}/\sqrt{2}, \\ B^{Lf}_{2n} &= \delta_{nf}/\sqrt{2}, \quad B^{Lf}_{3n} = \delta_{n+N,f}/\sqrt{2}, \quad n = 1,2,\ldots,N. \end{aligned} \tag{57}$$

Все столбцы $\mathbf{B}^{Lf}$, $f = 1, \ldots, 2N$, образуют нормальную совокупность фундаментальных решений $\left\{\mathbf{B}^{Lf}\right\}$ системы (56). Столбцы $\mathbf{B}^{Lf}$ и $\mathbf{B}^{Lf'}$ при $f, f' \leqslant N$ или $f, f' > N$ ортонормированы:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{Lf} \cdot \mathbf{B}^{Lf'} \equiv \left(\mathbf{B}^{Lf}\right)^T \mathbf{B}^{Lf'} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{n=1}^{N} B^{Lf}_{in}\, B^{Lf'}_{in} = \\ = 2^{-1} \sum_{n=1}^{N} \left[\langle f|K(\gamma_{k1})|n\rangle_{L\ell}\, \langle n|K(-\gamma_{k1})|f'\rangle_{L\ell} + \delta_{fn}\, \delta_{f'n}\right] = \delta_{ff'}, \end{aligned}$$

где $k = 2$ при $f, f' \leq N$ и $k = 3$ при $f, f' > N$, а сумма от произведений матричных элементов оказалась равной $\delta_{ff'}$, благодаря соотношению ортогональности (22). Если же $f \leqslant N$, но $f' > N$ или наоборот $f > N$, но

$f' \leqslant N$, то столбцы $\mathbf{B}^{Lf}$ и $\mathbf{B}^{Lf'}$ неортогональны. Действительно, так как $\gamma_{12} + \gamma_{31} = \pi - \gamma_{23}$, то по формуле сложения (23) имеем

$$2\,\mathbf{B}^{Lf} \cdot \mathbf{B}^{Lf'} = \sum_{n=1}^{N} [\langle f|K(\gamma_{12})|n\rangle_{L\ell} \langle n|K(\gamma_{31})|f'\rangle_{L\ell}\,] = \langle f|K(\gamma_{23})|f'\rangle_{L\ell}.$$

Положив $B^{L}_{iab} = B^{Lf}_{in}$ в формулах (54), получаем отвечающее столбцу $\mathbf{B}^{Lf}$ нормальное фундаментальное ложное решение

$$\mathbf{S}^{Lf} = (S^{Lf}_1, S^{Lf}_2, S^{Lf}_3)^T, \quad S^{Lf}_i(\mathbf{r}_i) = r^{-2}\, J_{L+2}(r\sqrt{E}) \sum_{ab} B^{Lf}_{iab}\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i). \tag{58}$$

В классе $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ базис таких решений является полным. Для любого ложного в этом классе решения $\mathbf{S}^{\varepsilon} \equiv (S^{\varepsilon}_1, S^{\varepsilon}_2, S^{\varepsilon}_3)^T$ верно разложение

$$\mathbf{S}^{\varepsilon} = \sum_{L} \sum_{f=1}^{2N} C_{Lf}\, \mathbf{S}^{Lf}, \quad C_{Lf} \equiv \int_{\mathcal{R}^6} r^5\, dr\, d\Omega\, \left(\mathbf{S}^{Lf*}\right)^T \mathbf{S}^{\varepsilon} \tag{59}$$

и, наоборот, при любых коэффициентах C_{Lf} совокупность $\{S^{\varepsilon}_1, S^{\varepsilon}_3, S^{\varepsilon}_3\}$ компонент суммы $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ является ложным решением системы уравнений Фаддеева (2). Фаддеевские компоненты S^{ε}_i любой конечной суммы $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ — конечные бисферические и гиперсферические ряды

$$\begin{aligned}
S^{\varepsilon}_i(\mathbf{r}_i) &= 2r^{-2}\,\mathrm{cosec}\, 2\varphi_i \sum_{ab} U^{\ell}_{iab}(r,\varphi_i)\, \mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}(\hat{x}_i, \hat{y}_i),\\
U^{\ell}_{iab}(r,\varphi_i) &= (1/2)\sin 2\varphi_i \sum_{L} J_{L+2}(r\sqrt{E}) \sum_{f=1}^{2N} C_{Lf}\, B^{Lf}_{iab}\, W_{Lab}(\varphi_i);\\
S^{\varepsilon}_i(\mathbf{r}_i) &= r^{-2} \sum_{L} \sum_{ab} U^{\ell}_{iLab}(r)\, Y^{\ell m}_{Lab}(\Omega_i),\\
U^{\ell}_{iLab}(r) &= J_{L+2}(r\sqrt{E}) \sum_{f=1}^{2N} C_{Lf}\, B^{Lf}_{iab},
\end{aligned}$$

где функции $\mathcal{Y}^{\ell m}_{ab}$, $Y^{\ell m}_{Lab}$ и W_{Lab} определены формулами (13)–(15).

Используя (18)–(20), компоненты S^{ε}_i можно представить как D^{σ}-ряды:

$$\begin{aligned}
S^{\varepsilon}_i(\mathbf{r}_i) &= r^{-2} \sum_{m'=\mu(\sigma)}^{\ell} U^{\varepsilon x}_{im'}(r,\theta_i,\varphi_i)\, D^{\ell\sigma *}_{mm'}(\omega^x),\\
U^{\varepsilon x}_{im'}(r,\theta_i,\varphi_i) &= \sum_{L} J_{L+2}(\sqrt{E}r) \sum_{f=1}^{2N} C_{Lf} \sum_{ab} B^{Lf}_{iab} T^{\ell m'}_{ab}\, \Theta_{am}(\theta_i) W_{Lab}(\varphi_i).
\end{aligned} \tag{60}$$

При любых центральных взаимодействиях V_i совокупность $\{U^{\varepsilon x}_{im'}\}$ всех $(m' = \mu(\sigma), \ldots, \ell)$ проекций $U^{\varepsilon x}_{im'}$ компонент S^{ε}_i на D^{σ}-базис является ложным и точным решениями системы (45).

Получим два других представления ложных решений. Для этого уже найденную нормальную ФСР $\{\mathbf{B}^L\}$ системы (55) обозначим символом $\{{}_1\mathbf{B}^L\}$. При ее выводе независимыми считались коэффициенты B^L_{kn}, $k = 2, 3$. Полагая теперь независимыми коэффициенты B^L_{kn}, $k = 1, 3$ или же коэффициенты B^L_{kn}, $k = 2, 3$, аналогичным образом определим еще две нормальные ФСР $\{{}_2\mathbf{B}^L\}$ и $\{{}_3\mathbf{B}^L\}$, состоящие из $2N$ столбцов ${}_2\mathbf{B}^{Lf}$ и, соответственно, ${}_3\mathbf{B}^{Lf}$, $f = 1, \ldots, 2N$. Столбец ${}_2\mathbf{B}^{Lf}$ имеет элементы

$$ {}_2B^{Lf}_{1n} = \delta_{nf}/\sqrt{2}, \; {}_2B^{Lf}_{2n} \equiv -\langle n|K(\gamma_{k2})|f\rangle_{L\ell}/\sqrt{2}, \; {}_3B^{Lf}_{3n} = \delta_{n+N,f}/\sqrt{2}, $$

а элементы столбца ${}_3\mathbf{B}^{Lf}$ таковы:

$$ {}_3B^{Lf}_{1n} = \delta_{nf}/\sqrt{2}, \; {}_3B^{Lf}_{2n} = \delta_{n+N,f}/\sqrt{2}, \; {}_3B^{Lf}_{3n} = -\langle n|K(\gamma_{k3})|f\rangle_{L\ell}/\sqrt{2}, $$

где $n = 1, \ldots, N$. Для каждого $f = 1, \ldots, N$ введем две линейные комбинации $\mathbf{B}^{Lfs}$ и $\mathbf{B}^{Lfv}$ трех столбцов ${}_i\mathbf{B}^{Lf}$:

$$ \mathbf{B}^{Lfs} \equiv \sum_{i=1}^{3} \left[{}_i\mathbf{B}^{Lf} + {}_i\mathbf{B}^{L,f+N} \right], \quad \mathbf{B}^{Lfv} \equiv \sum_{i=1}^{3} (-1)^{i-1} \left[{}_i\mathbf{B}^{Lf} - {}_i\mathbf{B}^{L,f+N} \right]. $$

По построению столбцы $\mathbf{B}^{Lfs}$, $f = 1, \ldots, N$ состоят из элементов B^{Lfs}_{in}, $i = 1, 2, 3$, $n = 1, \ldots, N$ и линейно независимы, а столбцы $\mathbf{B}^{Lfv}$ имеют элементы B^{Lfv}_{in}, $i = 1, 2, 3$, $n = 1, \ldots, N$ и также линейно независимы. Следовательно, подстановка $B^L_{iab} = B^{Lfs}_{iab}$ или $B^L_{iab} = B^{Lfv}_{iab}$ в формулы (54) дает компоненты фундаментальных ложных решений двух типов

$$ S^{Lfg}_i(\mathbf{r}_i) = r^{-2}\, J_{L+2}(z)\, Y^{\ell mg}_{Lf}(\Omega_i), \quad g = s, v; \quad f = 1, \ldots, N, $$

где $Y^{\ell mg}_{Lf} \equiv Y^{\ell mg}_{Lab}$ — суммы гипергармоник (24). В силу свойств (25) таких сумм при любых коэффициентах C^s_{Lf} и C^v_{Lf} суммы

$$ \mathbf{S}^g = r^{-2} \sum_L J_{L+2}(z) \sum_{f=1}^{N} C^g_{Lf} \mathbf{Y}^{\ell mg}_{Lf}, \quad g = s, v, \tag{61} $$

являются ортогональными ложными решениями ($\mathbf{S}^s \cdot \mathbf{S}^v = 0$) разных типов, а любое ложное решение $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ можно представить их суммой $\mathbf{S}^{\varepsilon} = \mathbf{S}^s + \mathbf{S}^v$.

Сформулируем доказанную теорему существования: *В любом классе* $\mathcal{A}^{\varepsilon}$ *множество* $\mathcal{A}^{\varepsilon s}$ *ложных решений не пустое, любой элемент* $\mathbf{S}^{\varepsilon}$ этого множества — *сумма* (59) *или сумма* $\mathbf{S}^{\varepsilon} = \mathbf{S}^s + \mathbf{S}^v$ *слагаемых* (61).

Теперь как частные случаи рассмотрим случай двух и трех тождественных частиц и выделим подмножества $\mathcal{A}^{\varepsilon s\pm} \subset \mathcal{A}^{\varepsilon s}$ ложных решений, все элементы $\mathbf{S}^{\varepsilon\pm}$ которых подчиняются условиям перестановочной симметрии.

Пусть для определенности частицы p_2 и p_3 — одинаковые, а p_1 и p_2 — разные. Тогда $\gamma_{12} = \gamma_{31}$, но $\gamma_{12} \neq \gamma_{23}$, а компоненты $S_i^{\varepsilon\pm}$ искомых ложных решений $\mathbf{S}^{\varepsilon\pm}$ подчиняются не только системе уравнений (52), (53), но и аналогам известных условий перестановочной симметрии [2]:

$$
\begin{gathered}
S_1^{\varepsilon\pm}(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) = \pm S_1^{\varepsilon\pm}(-\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), \\
S_3^{\varepsilon\pm}(\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3) = \pm P_{23} S_2^{\varepsilon\pm}(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) = \pm S_2^{\varepsilon\pm}(-\mathbf{x}_3, \mathbf{y}_3).
\end{gathered}
$$

где P_{ij} — оператор перестановки частиц p_i и p_j. Из всех фундаментальных решений (54) подсистемы (52) этим дополнительным условиям удовлетворяют только решения с коэффициентами $B_{iab}^L \equiv B_{iab}^{L\pm}$, такими что $B_{2ab}^{L\pm} = \pm(-1)^b B_{3ab}^{L\pm}$ при любых a и b, но $B_{1ab}^{L+} = 0$ при нечетном b и $B_{1ab}^{L-} = 0$ при четном b. Этими свойствами обладают все компоненты $B_{iab}^{Lf\pm}$ линейных комбинаций $\mathbf{B}^{Lf\pm}$, составленных из фундаментальных решений $\mathbf{B}^{Lf}$ системы (55) по правилам

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{B}^{Lf\pm} & \equiv & \mathbf{B}^{L,f+N} \pm (-1)^b \, \mathbf{B}^{Lf}, \quad f = \{a, b\} = 1, \ldots, N; \\
B_{1a'b'}^{Lf\pm} & = & -[(-1)^{b'} \pm 1] \langle a'b' | K(\gamma_{12}) | ab \rangle_{L\ell} / 2\sqrt{2}, \\
B_{2a'b'}^{Lf\pm} & = & \pm(-1)^b B_{3a'b'}^{Lf\pm}, \quad B_{3a'b'}^{Lf\pm} = \delta_{a'a} \delta_{b'b} / \sqrt{2}.
\end{array}
\tag{62}
$$

Поэтому имеется N фундаментальных ложных решений $\mathbf{S}^{Lf\pm}$, $f = 1, \ldots, N$,

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{S}^{Lf\pm} & = & \mathbf{S}^{L,f+N} \pm (-1)^b \, \mathbf{S}^{Lf}; \\
S_i^{Lf\pm} & = & r^{-2} J_{L+2}(z) \sum\limits_{a'b'} B_{ia'b'}^{Lf\pm} Y_{La'b'}(\Omega_i), \quad i = 1, 2, 3,
\end{array}
\tag{63}
$$

а натянутая на них линейная оболочка является искомым множеством $\mathcal{A}^{\varepsilon s+}$ или $\mathcal{A}^{\varepsilon s-}$ ложных решений, симметричных или антисимметричных относительно перестановки двух частиц.

Пусть теперь все три частицы тождественные, N^+ или $N^- = N - N^+$ — число гипергармоник $Y_{Lab}^{\ell m}$ с четными или нечетными b, а индекс $f = 1, \ldots, N^\pm$ нумерует все разные пары $\{a, b\}$ с четным или нечетным b. В этом случае $|\gamma_{ki}| = \pi/3$ для всех $k \neq i$, а все компоненты $S_i^{\varepsilon\pm}$ искомых ложных решений $\mathbf{S}^{\varepsilon\pm}$ симметричны или антисимметричны относительно перестановок любых двух частиц:

$$
S_3^{\varepsilon\pm} = \pm P_{23} \, S_2^{\varepsilon\pm}, \quad S_3^{\varepsilon\pm} = \pm P_{13} \, S_1^{\varepsilon\pm}, \quad S_2^{\varepsilon\pm} = \pm P_{12} \, S_1^{\varepsilon\pm}.
$$

При выборе знака плюс (минус) таким условиям удовлетворяют только те фундаментальные решения (54) подсистемы (52), у которых $B_{iab}^L \equiv B_{iab}^{L\pm}$, где

$B^L_{iab}=0$ при нечетном (четном) b и $B^{L\pm}_{1ab}=B^{L\pm}_{2ab}=B^{L\pm}_{3ab}\neq 0$ в противном случае. Эти свойства имеют все компоненты $B^{Lf\pm}_{iab}$ линейных комбинаций $\mathbf{B}^{Lf\pm}$, составленных из решений ${}_i\mathbf{B}^{Lf}$ системы (55) по правилам

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{Lf\pm} &\equiv \sum_{i=1}^{3}\left({}_i\mathbf{B}^{Lf}+{}_i\mathbf{B}^{L,N+f}\right), \quad f=(a,b)=1,\ldots,N^{\pm};\\
B^{Lf\pm}_{ia'b'} &= 2\,\delta_{aa'}\delta_{bb'}-[1+(-1)^{b+b'}]\,\langle a'b'|K(\pi/3)|ab\rangle_{L\ell}, \quad i=1,2,3.
\end{aligned}$$

Заменив B^L_{iab} на $B^{Lf\pm}_{iab}$ в суммах (54) и используя определения (24), получаем все фундаментальные ложные решения

$$\mathbf{S}^{Lf\pm}_i=r^{-2}J_{L+2}(z)\,\mathbf{Y}^{\ell ms}_{Lab}, \quad f=\{a,b\}=1,\ldots N^{\pm}.$$

Линейная оболочка всех решений $\mathbf{S}^{Lf+}$ или $\mathbf{S}^{Lf-}$ является искомым множеством $\mathcal{A}^{\varepsilon s+}$ или $\mathcal{A}^{\varepsilon s-}$ ложных решений, симметричных или антисимметричных относительно любой перестановки в системе трех частиц.

Примеры ложных решений класса $\mathcal{A}^{\varepsilon}$. Пусть $\ell=0$ и $L=0$. При таких ℓ и L существует всего одна гипергармоника $Y^{\ell m}_{Lab}=\pi^{-3/2}$, $a=b=0$. Эта гипергармоника инвариантна относительно кинематического преобразования $(Y^{\ell m}_{Lab}=K(\gamma)Y^{\ell m}_{Lab})$ и поэтому $\langle 00|K(\gamma_{ki})|00\rangle_{L\ell}=1$ при всех $k\neq i$. Следовательно, матрица $\mathbf{M}^0$ системы (55) имеет размерность, равную трем, а все ее элементы равны единице. Значит нормальная ФСР этой системы состоит из двух столбцов B^{Lf}, $f=1,2$:

$$\mathbf{B}^{L1}=(1/\sqrt{2})(-1,1,0)^T, \quad \mathbf{B}^{L2}=(1/\sqrt{2})(-1,0,1)^T$$

и согласно (58) имеется два фундаментальных ложных решения:

$$\mathbf{S}^{Lf}=(1/4\pi)\,r^{-2}\,J_2(\sqrt{E}\,r)\,\mathbf{B}^{Lf}, \quad f=1,2.$$

Их линейные комбинации (59) имеют вид

$$\mathbf{S}^{\varepsilon}=[1/(4\pi\sqrt{2})]\,r^{-2}\,J_2(\sqrt{E}\,r)\,(\,-C_{L2}-C_{L3},C_{L2},C_{L3})^T\,, \tag{64}$$

не зависят от масс частиц и являются примером двухпараметрического множества ложных решений с параметрами C_{L2} и C_{L3}.

Пусть теперь три частицы тождественные, а $\ell=0$. Тогда полный набор сохраняющихся квантовых чисел $\varepsilon=\{\ell,m,\sigma\}=\{0,0,1\}$. Согласно (60), (62) и (63) фундаментальное ложное решение $\mathbf{S}^{Lf+}$ с индексами $L=2$ и $f=\{a=0,b=0\}$ имеет компоненты

$$S^{Lf+}_i(\mathbf{r}_i)=2\,[r^2\sin 2\varphi_i(1-u_i^2)^{1/2}]^{-1}\,U^{\varepsilon x}_{im'}(r,\varphi_i,u_i), \quad i=1,2,3, \tag{65}$$

а их D^{σ}-проекции $U^{\varepsilon x}_{im'}$, $m'=0$, функционально одинаковые:

$$U^{\varepsilon x}_{im'}(r,\varphi_i,u_i)=J_4(z)(1-u_i^2)^{1/2}\left[\sin 4\varphi_i+(\sqrt{3}/4)(\sin 2\varphi_i)^2\,u_i\right] \tag{66}$$

и удовлетворяют системе трехмерных уравнений Фаддеева (45).

4. ПРОСТЕЙШИЕ ЭТАЛОННЫЕ ЗАДАЧИ

Сравнительный анализ сплайн-алгоритмов численного решения двумерных уравнений Фаддеева дан в недавнем обзоре [14]. Наиболее простой из них — алгоритм $4''$. Для его реализации используется регулярная сетка, разложение по нормализованной системе базисных сплайнов [27] и формулы дифференцирования повышенной точности. Этот алгоритм несложно обобщить на трехмерный случай.

Простые эталонные краевые задач для трехмерных уравнений Фаддеева в литературе неизвестны. Этот пробел несложно восполнить, используя ложные решения таких уравнений, как эталонные. Для примера рассмотрим систему трех тождественных частиц с нулевым полным угловым моментом ($\ell = 0$) и центральными парными взаимодействиями, сформулируем две эталонные краевые задачи, опишем трехмерные аналоги алгоритма $4''$ и результаты их тестирования.

Так как $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\} = \{0, 0, 1\}$, то D^σ-ряд каждой фаддеевской компоненты Ψ_i^ε содержит одну равную константе функцию $D_{mm'}^{\ell\sigma *}$ с $\ell, m, m' = 0$:

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = 2r^{-5/2} \operatorname{cosec} 2\varphi_i \operatorname{cosec} \theta_i \, F(r, \varphi_i, \theta_i) \, D_{00}^{01*}(\omega_i^x), \quad i = 1, 2, 3,$$

а приведенная D^σ-компонента F подчинена трехмерному уравнению

$$\begin{aligned} \left[\tilde{H}_{00}^{01}(r, \varphi, \theta) + E - V_1(r\cos\varphi) \right] F(r, \varphi, \theta) = \\ = V_1(r\cos\varphi) \sum_{k=2,3} \left\{ \frac{\sin 2\varphi}{\sin 2\varphi_k} \frac{\sin\theta}{\sin\theta_k} \, F(r, \varphi_k, \theta_k) \right\}. \end{aligned} \tag{67}$$

Здесь для краткости записи введен оператор $\tilde{H}_{mm'}^{\ell\sigma}$:

$$\tilde{H}_{00}^{01}(r, \varphi, \theta) \equiv \partial_r^2 + r^{-2}(1/4 + \partial_\varphi^2) + (2/r\sin 2\varphi)^2 \left[\partial_\theta^2 - \operatorname{ctg}\theta \, \partial_\theta + (\sin\theta)^{-2} \right],$$

приняты обозначения $\varphi \equiv \varphi_1$, $\theta \equiv \theta_1$, а φ_k и θ_k являются функциями (10) аргументов φ, $u = \cos\theta$ и кинематических углов $\gamma = \pm\pi/3$.

Далее уравнение (67) исследуем в конечном ($R < \infty$) параллелепипеде

$$\mathcal{B}^3 \equiv \{(r, \varphi, \theta) : r \in [0, R], \, \varphi \in [0, \pi/2], \, \theta \in [0, \pi]\}.$$

На его ребрах $[0, R]$, $[0, \pi/2]$ и $[0, \pi]$ введем регулярные сетки $\triangle_r$, $\triangle_\varphi$, $\triangle_\theta$ с узлами $r_i = hi$, $\varphi_j = gj$, $\theta_k = fk$ и шагами h, g и f:

$$\triangle_r : r_i = hi, \, i = 0, 1, \dots N, \, r_N = R; \quad \triangle_\varphi : gj, \, j = 0, 1, \dots M, \, \varphi_M = \pi/2$$

$$\triangle_\theta : \theta_k = fk, \, k = 0, 1, \dots, K, \, \theta_K = \pi.$$

Определим соответствующие регулярные расширенные сетки:

$$\delta_r : r_i = hi,\, i = -3, \ldots N+3, ; \quad \delta_\varphi : \varphi_j = gi,\, j = -3, \ldots M+3, ;$$

$$\delta_\theta : \theta_k = fk,\, k = -3, \ldots, K+3,$$

и полные системы $\{B_i^r(r)\}_{i=-1}^{N+1}$, $\{B_j^\varphi(\varphi)\}_{j=-1}^{M+1}$ и $\{B_k^\theta(\theta)\}_{k=-1}^{K+1}$ нормализованных кубических базисных сплайнов класса $\mathcal{C}^2$ с узлами на таких сетках. Пусть $\triangle_{r\varphi\theta} \equiv \triangle_r \times \triangle_\varphi \times \triangle_\theta$ — трехмерная сетка в $\mathcal{B}^3$, тогда любой трехмерный сплайн $S = X$ класса $\mathcal{C}^2$ с узлами на этой сетке — сумма

$$X(r,\varphi,\theta) = \sum_{n=-1}^{N+1} \sum_{m=-1}^{M+1} \sum_{k=-1}^{K+1} X_{nmk}\, B_n^r(r)\, B_m^\varphi(\varphi)\, B_k^\theta(\theta), \tag{68}$$

где X_{nmk} — однозначно определяемые числовые коэффициенты. Узлы сетки $\triangle_{r\varphi\theta}$ или ее любого расширения, лежащие внутри параллелепипеда $\mathcal{B}^3$, называем внутренними, а узлы, принадлежащие его поверхности, — граничными.

В случае трех тождественных частиц шестимерные уравнения Фаддеева (2) имеют ложное решение (65) с $L = 2$ и D^σ-компонентой (66). Ей в координатах (r,φ,θ) соответствует функция

$$F(r,\varphi,\theta) = \sqrt{r}\, J_4(\sqrt{E}r)\, \sin\theta \left[\sin 4\varphi + (\sqrt{3}/4)\,(\sin 2\varphi)^2\, \cos\theta\right], \tag{69}$$

которая при любых $E, R > 0$ и V_1 является точным и ложным решением уравнения (67), удовлетворяющим на гранях $r = 0$; $\varphi = 0, \pi/2$; $\theta = 0, \pi$ параллелепипеда $\mathcal{B}^3$ равенствам

$$\partial_r F|_{r=0} = 0,\, \partial_r^n F^n|_{r=0} = 0; \quad \partial_\varphi^n F|_{\varphi=0,\pi/2} = 0; \quad \partial_\theta^n F|_{\theta=0,\pi};\, n = 0, 2. \tag{70}$$

Эталонная задача на собственное значение. Пусть $R = j_{4,1}$ — первый нуль функции Бесселя J_4. Тогда функция (69) равна нулю на грани $r = R$ параллелепипеда $\mathcal{B}^3$, если $E = 1$. Следовательно, при любом потенциале V_1 в этом параллелепипеде уравнение (67) с условиями (70) и $F = 0$, $r = R = j_{4,1}$, имеет точное решение (E, F), где $E = 1$, а F — функция (69). Пусть $\triangle^1_{r\varphi\theta}$ — расширение сетки $\triangle_{r\varphi\theta}$ дополнительными узлами $(\bar{r}_{N-1}, \varphi_j, \theta_k)$, где $\bar{r}_{N-1}$ — средняя точка отрезка $[r_{N-1}, r_N]$, а $j = 0, \ldots, M$, $k = 0, \ldots, K$.

Обобщим алгоритм $4''$ на трехмерный случай: в граничных условиях (70) и $F = 0$, $r = R$, записанных граничных узлах сетки $\triangle^1_{r\varphi\theta}$, и в уравнении (67), записанном во всех ее внутренних узлах, заменим искомую функцию F сплайном (69), а ее производные — производными такого сплайна, вычисленными по формулам дифференцирования повышенной точности:

$$\begin{aligned}
\partial_r^2 F(r_i,\varphi_j,\theta_k) &\to 12^{-1}\sum_{p=i-1}^{i+1}\partial_r^2 X(r_p,\varphi_j,\theta_k)[1+9\delta_{pi}], \\
\partial_\varphi^2 F(r_i,\varphi_j,\theta_k) &\to 12^{-1}\sum_{s=j-1}^{j+1}\partial_\varphi^2 X(r_i,\varphi_s,\theta_k)[1+9\delta_{sj}], \\
\partial_\theta^2 F(r_i,\varphi_j,\theta_k) &\to 12^{-1}\sum_{t=k-1}^{k+1}\partial_\theta^2 X(r_i,\varphi_j,\theta_t)[1+9\delta_{tk}].
\end{aligned} \tag{71}$$

В итоге для столбца $\mathbf{X}$ искомых коэффициентов X_{ijk} получится дискретный аналог $(\mathbf{A}-E)\,\mathbf{X}=0$ краевой задачи (67), (70). Ожидаемая точность такого аналога $|F-X|=\tau_{444}=O(h^4+g^4+f^4)$ всюду в $\mathcal{B}^3$, а его матрица $\mathbf{A}$ существенно разрежена.

Основной вывод выполненного в случаях $V_1=x^{-1},\exp(-x)/x,x^2$ численного анализа полученного дискретного аналога состоит в том, что в любом из этих случаев при измельчении сетки $\triangle_{r\varphi\theta}$ вычисляемое минимальное собственное значение $\tilde{E}$ быстро сходится к точному $E=1$ сверху. Например, $\tilde{E}-E=1\cdot 10^{-3};\ 2\cdot 10^{-5};\ 2\cdot 10^{-7}$ соответственно при $N,M,K=10;20;40$. Эти факты — одна из иллюстраций эффективности описанного выше трехмерного сплайн-алгоритма $4''$. Обсудим другую задачу.

Эталонная задача на собственную функцию. Пусть $E,R,\alpha>0$, а $\sqrt{E}R\gg 1$. Выполним в (69) замену

$$J_4(\sqrt{E}r)\to\cos\alpha\,J_4(\sqrt{E}r)+\sin\alpha\,Y_4(\sqrt{E}r).$$

Полученная функция F при любых E,R,δ и $V_1(x)$ — точное, но нерегулярное при $r=0$ ложное решение уравнения (67) в $\mathcal{B}^3$ с условиями

$$\partial_\varphi^n F|_{\varphi=0,\pi/2}=0;\quad \partial_\theta^n F|_{\theta=0,\pi};\quad n=0,2, \tag{72}$$

и двумя асимптотическими граничными условиями:

$$\begin{aligned}
F(r,\varphi,\theta) &\sim -(12/E)^2\pi^{-1}r^{-7/2}\cos\alpha, \qquad r\to 0; \\
F(r,\varphi,\theta) &\sim (2/\pi\sqrt{E})^{1/2}\sin(\sqrt{E}r+\alpha-\pi/4), \quad r\to R.
\end{aligned} \tag{73}$$

Пусть $\triangle^4_{r\varphi\theta}$ — расширение сетки $\triangle_{r\varphi\theta}$ узлами $(\bar{r}_n,\varphi_j,\theta_k)$, где $\bar{r}_i$ — средняя точка отрезка $[r_i,r_{i+1}]$, а $n=0,1,N-2,N-1$; $j=0,\ldots,M$ и $k=0,\ldots,K$.

Адаптируем алгоритм $4''$ для дискретизации поставленной краевой задачи (67), (72), (73). Для этого подчиним ей, но лишь на сетке $\triangle^4_{r\varphi\theta}$, сплайн (69) вместо искомого решения F по следующим правилам. Для всех производных сплайна используем формулы дифференцирования повышенной точности (71). Условия (72) запишем в соответствующих граничных узлах. Первое из условий (73) запишем во всех внутренних узлах $(r_1, \varphi_j, \theta_k)$ и $(\bar r_n, \varphi_j, \theta_k)$, $n = 0, 1$, второе — во всех внутренних узлах $(r_{N-1}, \varphi_j, \theta_k)$ и $(\bar r_n, \varphi_j, \theta_k)$, $n = N-2, N-1$, а уравнение (67) — во всех остальных внутренних узлах $(r_i, \varphi_j, \theta_k)$, $i = 2, \ldots, N-2$. В итоге для столбца $\mathbf{X}$ искомых коэффициентов X_{ijk} выведем дискретный аналог $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{Q}$ краевой задачи (67), (72), (73). Матрица $\mathbf{A}$ и столбец $\mathbf{Q}$ такого аналога зависят от двух параметров E и α, а его ожидаемая точность $|F - X| = \tau_{444} = O(h^4 + g^4 + f^4)$ всюду в $\mathcal{B}^3$. Основной вывод численного анализа задачи $\mathbf{A}\,\mathbf{X} = \mathbf{Q}$, выполненного при $E = 1$, $R = 20$, $\delta = \pi/4$ в случаях $V_1 = 1/x$, $\exp(-x)/x$, x^2 состоит в том, что в любом из этих случаев при измельчении сетки $\triangle_{r\varphi\theta}$ вычисляемая собственная функция X во всех внутренних узлах сетки $\triangle^4_{r\varphi\theta}$ быстро сходится к точной функции F. Например, в этих узлах $||F|/(|X| + 10^{-12})| - 1| \approx 10^{-2}$; $2 \cdot 10^{-4}$; $3 \cdot 10^{-6}$ соответственно при $N, M, K = 10; 20; 40$. Эти факты подтверждают эффективность предложенного трехмерного аналога сплайн-алгоритма $4''$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем основные результаты работы.

Выведены уравнения Фаддеева (45), (50) и (51) в представлении полного углового момента и полной пространственной четности.

Показано, что в случае центральных взаимодействий такие уравнения всегда имеют ложные решения, обладающие наперед заданным полным набором ε трех сохраняющихся квантовых чисел: $\varepsilon = \{\ell, m, \sigma\}$.

Предложен и проиллюстрирован элементарными примерами простой способ построения ложных решений как линейных комбинаций нормальных фундаментальных ложных решений.

Сформулированы простейшие эталонные трехмерные краевые задачи, для которых полученные ложные решения являются точными.

На примере этих задач описаны простые сплайн-алгоритмы численного решения трехмерных уравнений Фаддеева и расчетами проиллюстрирована быстрая сходимость этих алгоритмов при измельчении равномерных сеток.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 04-02-16828).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М: Наука, 1974.

2. *Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д.* Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.

3. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 1999. Т. 30. С. 1562.
4. *Kostrykin V. V., Kvitsinsky A. A., Merkuriev S. P.* // Few-Body Systems. 1989. V. 6. P. 97.
5. *Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. М.: Наука, 1975.
6. *Яковлев С. Л., Филихин И. Н.* // ЯФ. 1993. Т. 56. С. 24.
7. *Яковлев С. Л., Филихин И. Н.* // ЯФ. 1995. Т. 58. С. 817.
8. *Яковлев С. Л., Филихин И. Н.* // ЯФ. 1997. Т. 60. С. 1926.
9. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2001. Т. 128. С. 268.
10. *Пупышев В. В.* // ЯФ. 2003. Т. 66. С. 64.
11. *Adhikari S. K., Glöckle W.* // Phys. Rev. C. 1979. V. 19. P. 616.
12. *Levin F. S.* // Ann. Phys. (NY). 1980. V. 130. P. 139.
13. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 2002. Т. 33. С. 844.
14. *Пупышев В. В.* // ЭЧАЯ. 2004. Т. 35. С. 257.
15. *Evans J. W.* // J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 1672.
16. *Evans J. W., Hoffman D. K.* // J. Math. Phys. 1981. V. 22. P. 2858.
17. *С. Л. Яковлев.* // ТМФ. 1995. Т. 102. С. 323.
18. *Руднев В. А., Яковлев С. Л.* // ЯФ. 1995. Т. 58. С. 1762.
19. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 1996. Т. 107. С. 501.
20. *Smith F. T.* // J. Chem. Phys. 1959. V. 31. P. 1352.
21. *Виницкий С. И., Пономарев Л. И.* // ЭЧАЯ. 1982. Т. 13. С. 1336.
22. *Chang E. S., Fano U.* // Phys. Rev. A. 1972. V. 6. P. 173.
23. *Джибути Р. И., Крупенникова Н. Б.* Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
24. *Raynal J., Revai J.* // Nuovo Cim. A. 1970. V. 68. P. 612.
25. *Пупышев В. В.* // ТМФ. 2003. Т. 136. С.90.
26. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.
27. *Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л.* Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.

Получено 14 сентября 2005 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 10.11.2005.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,76. Тираж 315 экз. Заказ № 55092.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@pds.jinr.ru
www.jinr.ru/publish/