

P11-2005-143

П. Х. Атанасова*, Т. Л. Бояджиев**

ПОСТРОЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ КРИВЫХ
ДЛЯ СИММЕТРИЧНЫХ ДВУХСЛОЙНЫХ
ДЖОЗЕФСОНОВСКИХ КОНТАКТОВ

Направлено в журнал «Вестник Российского университета
дружбы народов»

* E-mail: poli@jinr.ru

** E-mail: todorlb@jinr.ru

Построение критических кривых для симметричных двухслойных джозефсоновских контактов

Проведено численное моделирование критических зависимостей вида «ток–магнитное поле» в двухслойном симметричном стеке индуктивно связанных джозефсоновских контактов. Для этой цели переходы из сверхпроводящего в резистивный режим работы отдельных слоев контакта математически интерпретируются как бифуркации статических распределений магнитного потока в слое при изменении приложенного магнитного поля и внешнего тока [1, 2]. Каждому распределению в конкретном слое ставится в соответствие регулярная задача Штурма–Лиувилля, собственные значения которой позволяют судить о парциальной устойчивости или неустойчивости распределения. Критические зависимости для каждого из слоев строятся как огибающие бифуркационных кривых, соответствующих конкретным распределениям. С математической точки зрения эффект «синхронизации критических токов» (current locking), обнаруженный недавно в эксперименте [3, 4], может быть обусловлен наличием точек разрыва непрерывности парциальных критических кривых.

Настоящая работа представляет собой текст доклада авторов на XLI Всероссийской конференции по проблемам математики, информатики, физики и химии (апрель 2005 г., Москва).

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Modelling of the Critical Dependences in Two-Layer Josephson Junctions

A numerical modelling of the critical current as a function of applied magnetic field in a two-layer symmetric inductive coupled Josephson stack is presented. For this purpose, the crossovers between superconducting and resisting regimes of each of the layers are mathematically interpreted as bifurcations of the magnetic flux in the layer [1, 2]. A magnetic configuration in one of the layers corresponds to a partial scalar Sturm–Liouville problem, the eigenvalues of which are related to the stability of the system. A critical curve of the layer is obtained as an envelope curve of the bifurcation curves corresponding to different magnetic field distributions. From a mathematical point of view, some of the effects, revealed in experiment [3, 4], are connected with discontinuity points in partial critical curves.

The work represents the report of the authors at the XLI All-Russia Conference on Problems of Mathematics, Computer Science, Physics and Chemistry, April 2005, Moscow.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Свойства многослойных (и в частности двухслойных) индуктивно связанных джозефсоновских контактов (далее используем сокращение ДК) во внешних магнитных полях исследовались за последнее время многими авторами (см., например, [3–10]). Такие структуры могут быть скомпонованы с использованием, например, $\text{Nb}-(\text{Al}/\text{AlO}_x-\text{Nb})_n$ джозефсоновских контактов [8]. Многослойные ДК представляют, с одной стороны, значительный интерес с точки зрения практических применений, например, в качестве высокочастотных осцилляторов. С другой стороны, модели связанных ДК описываются сложными нелинейными системами дифференциальных уравнений, что позволяет ставить и изучать теоретически ряд новых физических эффектов, не имеющих места для «традиционных» однослойных ДК.

На рис. 1 показана схема двухслойного ДК. Контакт состоит из трех сверхпроводящих электродов толщиной Δ_1 , Δ_m и Δ_2 соответственно, раз-

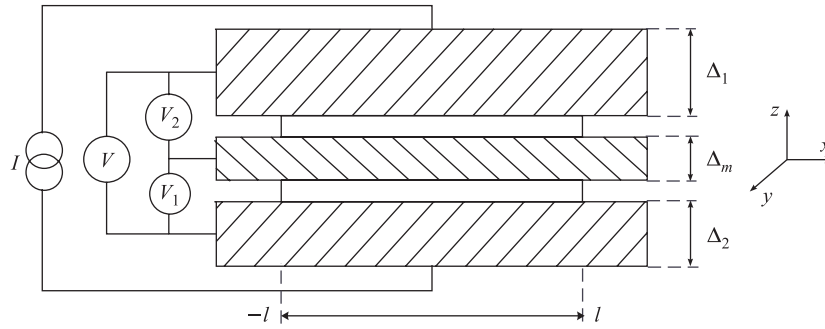


Рис. 1. Схема двухслойного ДК

деленных барьерными слоями, толщина которых намного меньше толщины электродов. Структура находится в однородном статическом магнитном поле h_B , направленном по оси y (все используемые здесь и ниже величины безразмерны; о способах приведения к безразмерному виду см. [8, 11]).

Если оба слоя «работают» в джозефсоновском режиме (при заданном h_B ток, проходящий через структуру, меньше некоторого критического значения), то напряжения, измеряемые на слоях, $V_1(t) = 0$ и $V_2(t) = 0$ (см. рис. 1). Если один или оба слоя вышли на резистивный режим [11], то $V_1(t) \neq 0$ и/или $V_2(t) \neq 0$ и по закону Ома полное напряжение $V(t)$, измеряемое на структуре,

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t). \quad (1.1)$$

Здесь напряжения на отдельных слоях определяются в соответствии с соотношениями Джозефсона

$$V_i(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \phi_{i,t}(t, x) dx, \quad i = 1, 2, \quad (1.2)$$

где $\phi_i(t, x)$ — зависящая от времени t и координаты x разность фаз волновых функций сверхпроводников i -го слоя. При подходящей нормировке [1, 11] величину $\phi_i(t, x)$ можно интерпретировать как безразмерный магнитный поток. Нижним индексом t обозначено дифференцирование по времени.

Отметим, что в случае модели с емкостным взаимодействием между слоями (см., например, работу [10] и цитированную там литературу) вместо (1.2) следует использовать обобщенные соотношения Джозефсона.

Математически в рамках линейной теории устойчивости переход одного из слоев ДК с джозефсоновского в резистивный режим будем рассматривать [12] как бифуркацию некоторого статического распределения магнитного потока в слое при изменении внешнего магнитного поля и внешнего тока. При этом устойчивым относительно малых пространственно-временных возмущений статическим распределениям соответствует джозефсоновский режим слоя (показание соответствующего вольтметра на рис. 1 равно нулю). При заданном внешнем магнитном поле h_B всякому устойчивому статическому распределению соответствует некий максимальный (критический) ток, при достижении которого распределение теряет устойчивость (имеет место бифуркация распределения) и переходит в зависящее от времени неустойчивое распределение. Если в слое нет других устойчивых энергетически более выгодных статических распределений с большим критическим током, то в результате на слое/контакте возникает ненулевое напряжение в силу формулы (1.2).

Отметим, что в рамках традиционной модели одномерного длинного ДК такой подход был впервые предложен в классической работе [1].

Нелинейная краевая задача, соответствующая модели индуктивно связанных слоев, может быть записана в виде

$$-A \varphi_{xx} + J_z(\varphi) + \Gamma = 0, \quad (1.3a)$$

$$\varphi_x(\pm l) = H. \quad (1.3b)$$

В уравнениях (1.3) и далее по тексту нижним индексом x обозначена операция дифференцирования по пространственной координате. При подходящем выборе единиц величина $\varphi(x) = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ есть 2-вектор статических магнитных потоков в «нижнем» $\varphi_1(x)$ и «верхнем» $\varphi_2(x)$ слоях (верхний индекс T используется для операции транспонирования).

Элементы симметрической квадратной 2-матрицы A определяются через физические константы материалов электродов и их толщин Δ_1 , Δ_m и Δ_2

(явные выражения приведены в [8]). Далее ограничимся рассмотрением модели двухслойного ДК, отдельные слои которого идентичны и, в частности, $\Delta_1 = \Delta_m = \Delta_2$. Тогда матрица $A(s)$ зависит только от константы связи s [4, 8] между слоями

$$A(s) = \frac{1}{1-s^2} \begin{pmatrix} 1 & -s \\ -s & 1 \end{pmatrix},$$

где $s \in (-1, 0]$. Вектор плотностей токов Джозефсона в отдельных слоях контакта определяется как $J_z(\varphi) = (\sin \varphi_1, \sin \varphi_2)^T$. 2-вектор $\Gamma = \gamma (1, 1)^T$, где для простоты в дальнейшем предполагаем внешний ток $\gamma = \text{const}$, 2-вектор $H = h_B(1, 1)^T$. Отметим, что решения (1.3) зависят гладким образом как от физической координаты x , так и от параметров l, s, h_B и γ , т. е. $\varphi = \varphi(x, p)$, где через $p \equiv \{l, s, h_B, \gamma\}$, $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^4$, обозначен 4-вектор параметров модели.

Краевая задача (1.3) может рассматриваться как необходимые условия экстремума функционала полной энергии контакта

$$F[\varphi] = F_1 + F_2 + F_{12}. \quad (1.4)$$

Здесь F_1 и F_2 — энергии невзаимодействующих слоев:

$$F_i[\varphi_i] = \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2} \varphi_{i,x}^2 + 1 - \cos \varphi_i + \gamma \varphi_i \right) dx - h_B \Delta \varphi_i, \quad (1.5)$$

а энергия связи F_{12} вычисляется как

$$F_{12}[\varphi_1, \varphi_2] = \frac{s}{1-s^2} \int_{-l}^l \left[\frac{s}{2} (\varphi_{1,x}^2 + \varphi_{2,x}^2) - \varphi_{1,x} \varphi_{2,x} \right] dx + \frac{s}{1+s} h_B (\Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2). \quad (1.6)$$

Здесь и ниже величины $\Delta \varphi_i = \varphi_i(l) - \varphi_i(-l)$ — координаты 2-вектора полного магнитного потока $\Delta \varphi = (\Delta \varphi_1, \Delta \varphi_2)^T$. Областью определения функционала (1.4) является множество всех гладких на отрезке $[-l, l]$ 2-вектор-функций $\varphi(x)$, концы которых лежат на вертикальных прямых $x = -l$ и $x = l$.

Парциальная устойчивость распределений в слоях ДК. Для изучения парциальной устойчивости распределений магнитного потока в i -м слое исследуется [12] характер экстремума суммы $F_i + F_{12}$ энергии слоя (1.5) и энергии взаимодействия (1.6). При этом каждое распределение порождает

регулярную задачу Штурма–Лиувилля (ЗШЛ) с условиями Неймана на концах

$$-a_{ii}\psi_{i,xx} + q_i(x)\psi_i = \mu_i\psi_i, \quad (1.7a)$$

$$\psi_{i,x}(\pm l) = 0, \quad (1.7b)$$

$$\int_{-l}^l \psi_i^2(x) dx - 1 = 0, \quad (1.7c)$$

потенциал которой определяется через решение $\varphi_i(x)$ как $q_i(x) = \cos \varphi_i(x)$. На конечном отрезке $[-l, l]$ задача вида (1.7) имеет ограниченный снизу дискретный спектр. При этом каждому собственному значению (СЗ) μ_{in} отвечает единственная собственная функция (СФ) $\psi_{in}(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, для которой выполнено условие нормировки (1.7c). Число нулей $\psi_{in}(x)$ на отрезке $[-l, l]$ равно номеру n . В частности, собственные функции $\psi_{i0}(x)$, соответствующие минимальным СЗ μ_{i0} , не имеют нулей при $x \in [-l, l]$. Бифуркационная зависимость «ток–магнитное поле» (бифуркационная кривая) для распределения $\varphi_i(x)$ представляет собой геометрическое место точек на плоскости $\mathcal{P}_{h\gamma} \subset \mathbb{R}^2$, таких, что

$$\mu_{i0}(h_B, \gamma) = 0. \quad (1.8)$$

Для фиксированного h_B в слое могут существовать несколько статических распределений с различными критическими токами. Критическим током слоя при заданном h_B будем называть наибольший из всех критических токов отдельных распределений. Геометрическое место точек с наибольшим критическим током будем, соответственно, называть критической кривой (КК) слоя. Ясно, что КК для каждого слоя представляет собой огибающую бифуркационных кривых (БК) для отдельных распределений в слое [12].

2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА БИФУРКАЦИОННЫХ ТОЧЕК

Для расчета БК вида (1.8) удобно применять алгоритм, предложенный в работах [13]. Будем рассматривать уравнения (1.3) и (1.7) при фиксированных значениях длины $2l$ и параметра связи между слоями s как единую систему для неизвестных функций $\varphi(x)$ и $\psi_i(x)$, зависящую от трех параметров h_B , γ и μ_i . В систему входят три дифференциальных уравнения второго порядка. Следовательно, для того чтобы система была замкнутой, необходимо задать два из этих трех параметров.

В «тривиальном» случае задаем величины h_B и γ . Тогда система расщепляется на две независимые подсистемы относительно переменных $\varphi(x)$ и $(\psi_i(x), \mu_i)$, что эквивалентно проверке устойчивости решения $\varphi(x)$.

В остальных двух случаях, при заданных γ и μ_i или h_B и μ_i , система должна рассматриваться как нелинейная задача на собственные значения со спектральным параметром h_B или γ соответственно. Величину $\mu_i \geq -1$ можно задавать достаточно произвольно, но точкам бифуркации нулевого порядка [2, 12] соответствует значение $\mu_i = 0$.

Пусть в качестве спектрального выбран параметр h_B . Предполагая существование изолированного решения $\varphi(x), \psi_i(x), h_B$, для решения указанной выше задачи целесообразно применять итерационный алгоритм, основанный на непрерывном аналоге метода Ньютона [14].

Пусть $(\varphi^0(x), \psi_i^0(x), h_B^0)$ — начальное приближение к точному решению. Тогда:

1) на n -й итерации ($n = 1, 2, \dots$) решаем линейные краевые задачи (индекс итераций опускаем для упрощения записи)

$$-AU_{xx} + Q(x)U = A\varphi_{xx}(x) - J_z(\varphi(x)) - \Gamma, \quad (2.1a)$$

$$U_x(\pm l) = h_B - \varphi_x(\pm l), \quad (2.1b)$$

$$-AV_{xx} + Q(x)V = 0, \quad (2.1c)$$

$$V_x(\pm l) = 1 \quad (2.1d)$$

относительно 2-вектор-функций $U(x) = (U_1(x), U_2(x))^T$ и $V(x) = (V_1(x), V_2(x))^T$. Здесь 2-матрица $Q(x) = \text{diag}(\cos\varphi_1(x), \cos\varphi_2(x))$;

2) вычисляем скалярные функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ как решения линейных краевых задач

$$\begin{aligned} & -a_{ii}\Psi_{xx} + [\cos\varphi_i(x) - \mu_i]\Psi^n = \\ & = a_{ii}\psi_{xx}(x) + [\cos\varphi(x) - \mu_i]\psi(x) + \sin\varphi_i(x)\psi_i(x)U(x), \end{aligned} \quad (2.2a)$$

$$\Psi_x(\pm l) = -\psi_{i,x}(\pm l); \quad (2.2b)$$

$$-a_{ii}\Phi_{xx} + [\cos\varphi_i(x) - \mu_i]\Phi = \sin\varphi_i(x)\psi_i(x)V(x), \quad (2.2c)$$

$$\Phi_x(\pm l) = 0; \quad (2.2d)$$

3) из уравнения

$$\chi = \left(2 \int_{-l}^l \psi V_1 dx \right)^{-1} \left(1 - \int_{-l}^l \psi^2 dx - 2 \int_{-l}^l \psi U_1 dx \right) \quad (2.3)$$

вычисляем приращение H бифуркационного параметра h_B на текущей итерации;

4) очередное приближение к точному решению находим по формулам

$$\varphi^n(x) = \varphi^{n-1}(x) + \tau_n [U^n(x) + \chi^n V^n(x)], \quad (2.4)$$

$$\psi^n(x) = \psi^{n-1}(x) + \tau_n [\Psi^n(x) + \chi^n \Phi^n(x)], \quad (2.5)$$

$$h_B^n = h_B^{n-1} + \tau_n \chi^n. \quad (2.6)$$

Итерационный параметр τ_n вычислялся по формуле Ермакова–Калиткина [15].

Для численного решения линейных краевых задач (2.1) и (2.2) применялась разностная схема на основе метода сплайн-коллокации [16]. Теоретическая оценка точности схемы $O(h^4)$ на равномерной сетке с шагом h доказана численным путем с использованием правила Рунге. Отметим, что дифференциальные выражения в левых частях (2.1) и (2.2) одинаковы, что позволяет обращать только один раз матрицы линейных систем алгебраических уравнений, полученных вследствие дискретизации.

3. НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 показаны некоторые из парциальных БК для контакта длиной $2l = 10$ с параметром взаимодействия $s = -0, 3$. Как было указано выше, для построения парциальной КК слоя необходимо найти огибающую всех БК.

На рис. 3 сравниваются полученные в численном эксперименте КК при коэффициенте взаимодействия между слоями $s = -0, 3$ и двух длинах $2l = 10$ и $2l = 7$ контакта. В отличие от случая единичного ДК, на парциальных КК имеются точки разрыва непрерывности, представляющие собой скачки максимального критического тока γ для некоторых значений магнитного поля h_B . На рис. 3 скачки отмечены вертикальными прямыми. Отметим, что при увеличении длины контакта ($2l = 10$) число скачков тока растет, а их структура становится сложнее. Однако экспериментальное наблюдение некоторых из скачков, возможно, будет затруднительным ввиду их незначительной амплитуды.

Структура БК и возникновение точек разрыва непрерывности КК демонстрируется на рис. 4–6. Для описания решений используем обозначения: M — мейснеровское решение, Φ^n — n -флюксонный вихрь, B — бризер (подробности изложены в нашей работе [12]). Число вихрей (флюксонов) в распределении $\varphi_i(x)$ вычисляется по формуле [2, 12]

$$n[\varphi_i] = \frac{1}{2l\pi} \int_{-l}^l \varphi_i(x) dx.$$

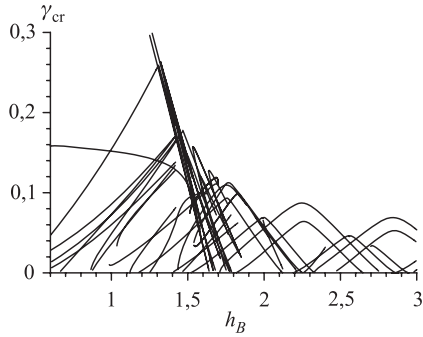


Рис. 2. Некоторые парциальные бифуркационные кривые в случае $2l = 10$ и $s = -0,3$

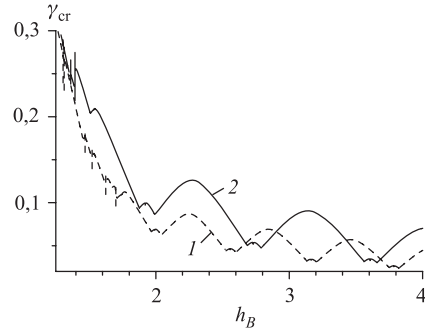


Рис. 3. Парциальные КК первого слоя ДК при $s = -0,3$ для $2l = 10$ (1) и $2l = 7$ (2)

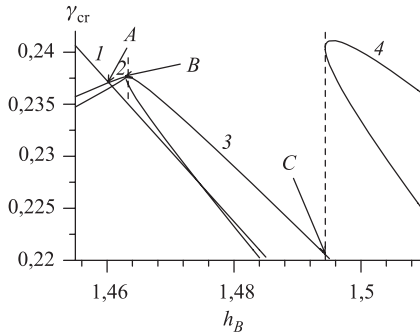


Рис. 4. Нарушения непрерывности парциальной КК для $2l = 7$ и $s = -0,2$

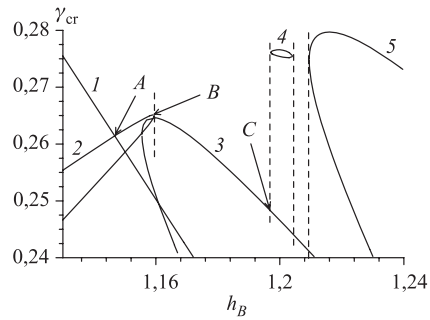


Рис. 5. Нарушения непрерывности парциальной КК для $2l = 7$ и $s = -0,5$

При малых h_B доминирует БК, обозначенная номером 1. Она соответствует симметричному решению ($\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$) вида (M, M) . При нарастании поля h_B в точке A происходит непрерывный переход на бифуркационную кривую 2. В отличие от точки A в точке B имеется скачок максимального критического тока с бифуркационной кривой 2 на БК с номером 3. При дальнейшем увеличении поля h_B в точке C снова имеется скачок с бифуркационной кривой 3 на бифуркационную кривую 4. Решения, соответствующие указанным кривым 2, 3, 4 и 5, несимметричны ($\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$) и представляют собой некоторые из пар вида (M, Φ) , (Φ, M) , (M, B) или (B, M) .

При возрастании величины $|s|$ области существования по параметрам h_B и γ решение 4 также увеличивается, что показано на рис. 6. При этом соответствующая БК 4 пересекается с БК 5 в точке D (см. рис. 6), в результате

чего структура скачков меняется. Отметим, что при небольших значениях параметра связи s решения, соответствующие БК 4 (рис. 5, 6), не обнаружены в численном эксперименте, что говорит о наличии бифуркаций решений задачи (1.3) по параметру s .

На рис. 7 демонстрируется влияние параметра связи s на частичную КК. Видно, что с уменьшением значения $|s|$ критические кривые сдвигаются направо, а амплитуда скачков критического тока быстро уменьшается. Тем самым КК при уменьшении $|s|$ стремятся к положению, соответствующему независимым слоям ($s = 0$).

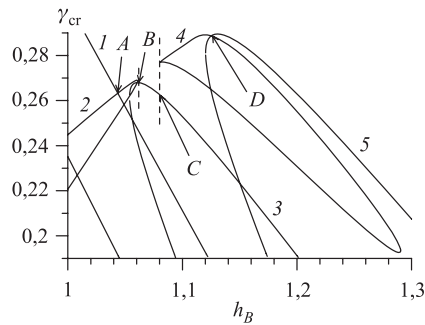


Рис. 6. Нарушения непрерывности частичной КК для $2l = 7$ и $s = -0,6$

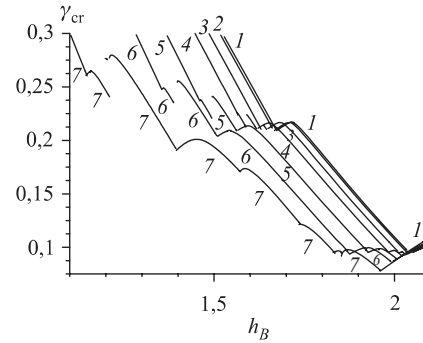


Рис. 7. КК ДК при разных значениях параметра s для $2l = 7$: 1 — $s = 0$; 2 — $s = -0,01$; 3 — $s = -0,05$; 4 — $s = -0,1$; 5 — $s = -0,2$; 6 — $s = -0,3$; 7 — $s = -0,5$

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В настоящей работе для моделирования устойчивости и бифуркаций конфигураций магнитного потока в симметричном двухслойном ДК применяются методы теории частичной устойчивости. Численным путем построены бифуркационные кривые для ряда распределений в ДК. КК каждого слоя рассматривается как огибающая БК для отдельных распределений. С математической точки зрения эффекты, обнаруженные в эксперименте [3, 4], могут быть обусловлены наличием точек разрыва непрерывности частичных критических кривых, положение которых зависит от выбора модели и значений параметров.

Отметим, что методы настоящей работы легко переносятся на более сложные слоистые сверхпроводящие структуры.

Благодарности. Авторы благодарны проф. Л. Н. Булаевскому (Лос-Аламос, США), проф. Э. Голдобину (Тюбинген, Германия), проф. Е. П. Жидкову и проф. И. В. Пузынину (ОИЯИ, Дубна, Россия), а также проф. Л. Лилову (Софийский университет Св. Кл. Охридского, Болгария) за стимулирующие дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gal'pern Yu. S., Filippov A. T.* Bounded Soliton States in Inhomogeneous Junctions // *Sov. Phys. JETP.* 1984. V. 59. P. 894.
2. *Бояджиев Т. Л.* Численное исследование критических режимов в нелинейных полевых моделях физики. Дис. . . . д-ра физ.-мат. наук. Дубна, 2002.
3. *Nevirkovets I. P., Evetts J. E., Blamire M. G.* Transition from single junction to double junction behavior in Sisis-type Nb-based devices // *Phys. Lett. A.* 1994. V. 187. P. 119; *Goldobin E., Kohlstedt H., Ustinov A. V.* Tunable phase locking of stacked Josephson flux-flow oscillators // *Appl. Phys. Lett.* 1996. V. 68(2). P. 250–252.
4. *Goldobin E., Ustinov A. V.* Current locking in magnetically coupled long Josephson junctions // *Phys. Rev. B.* 1999. V. 59(17). P. 11532–11538.
5. *Bulaevskii L. N. et al.* Time-dependent equations for phase differences and a collective mode in Josephson-coupled layered superconductors // *Phys. Rev. B.* 1994. V. 50. P. 12831–12834; *Bulaevskii L. N. et al.* // *Phys. Rev. B.* 1996. V. 53. P. 14601–14610.
6. *Kleiner R. et al.* // *Phys. Rev. B.* 1994. V. 50. P. 3942–3952.
7. *Бояджиев Т. Л., Павлов Д. В., Пузынин И. В.* Вычисление бифуркаций стабильных состояний в двухслойных неоднородных джозефсоновских переходах. Сообщение ОИЯИ P5-89-173. Дубна, 1989.
8. *Sakai S., Bodin P., Pedersen N. F.* Fluxons in thin-film superconductor-insulator superlattices // *J. Appl. Phys.* 1993. V. 73, No. 5. P. 2411–2418.
9. *Krasnov V. M., Winkler D.* Static and dynamic properties of stacked Josephson junctions: Analytic solution // *Phys. Rev. B.* 1997. V. 56. P. 9106–9115.
10. *Tachiki M., Machida M.* Current understanding of Josephson plasma theory and experiments in HTSC // *Physica C.* 2000. V. 341–348. P. 1493–1498.
11. *Licharev K. K.* Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. Gordon and Breach. New York, 1986. P. 634.
12. *Атанасова П. Х., Димова С. Н., Бояджиев Т. Л.* Численное моделирование критических зависимостей для двухслойных джозефсоновских контактов. Сообщение ОИЯИ P11-2005-16. Дубна, 2005.

13. *Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В.* Ньютоновский алгоритм вычисления критических параметров в одномерном неоднородном джозефсоновском переходе. Сообщение ОИЯИ Р11-88-409. Дубна, 1988;
Бояджиев Т.Л., Павлов Д.В., Пузынин И.В. Применение непрерывного аналога метода Ньютона для вычисления бифуркационных кривых в джозефсоновских переходах // Сб. тр. конф. по численным методам и их применению, София, 1988.
14. *Zhidkov E. P., Makarenko G. I., Puzynin I. V.* Continuous analog of the Newton method in non-linear physical problems // *Sov. J. Particles Nucl.* 1973. V. 4, No. 1. AIP. P. 53;
Puzynin I. V. et al. The generalised continuous analog of Newton method for numerical study of some nonlinear quantum-field models // *Physics of Elementary Particles and Atomic Nuclei.* 1999. V. 30, No 1. P. 97.
15. *Ермаков В.В., Калиткин Н.Н.* Оптимальный шаг и регуляризация метода Ньютона // *ЖВМиМФ.* 1981. Т. 21, № 2. С. 491.
16. *Бояджиев Т.Л.* Сплайн-коллокационная схема повышенного порядка точности. Сообщение ОИЯИ Р2-2002-101. Дубна, 2002.

Получено 28 сентября 2005 г.

Корректор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 03.11.2005.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 0,9. Тираж 310 экз. Заказ № 55083.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@pds.jinr.ru

www.jinr.ru/publish/