

P11-2005-181

С. А. Авраменко<sup>1</sup>, Ю. Лукстиньш, А. М. Соколов<sup>2</sup>,  
С. А. Хорозов

ДВА АЛГОРИТМА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИМПУЛЬСА  
ЧАСТИЦЫ В МАГНИТНОМ СПЕКТРОМЕТРЕ

---

<sup>1</sup> E-mail: avramen@sunhe.jinr.ru

<sup>2</sup> Институт ядерных исследований, Киев;  
e-mail: sokolov@kinr.kiev.ua

Авраменко С. А. и др.

P11-2005-181

Два алгоритма определения импульса частицы в магнитном спектрометре

Представлены два алгоритма определения импульса частиц в магнитном спектрометре и описана их реализация. Один основан на приближении зависимости полиномами Чебышева, другой — на полилинейной интерполяции. С помощью численного моделирования проверена согласованность алгоритмов и получена оценка их точности.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий им. В. И. Векслера и А. М. Балдина ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2005

Avramenko S. A. et al.

P11-2005-181

Two Algorithms to Determine the Momentum of a Particle in Magnetic Spectrometer

Two algorithms to determine the momentum of a particle in magnetic spectrometer are presented and their realization is described. One of them is based on approximation of dependence by Chebyshev polynomials; the other, on polylinear interpolation. Co-ordination of the two algorithms was examined and their accuracy was estimated by means of computer modeling.

The investigation has been performed at the Veksler and Baldin Laboratory of High Energies, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2005.

## ВВЕДЕНИЕ

В Лаборатории высоких энергий (ЛВЭ) создается магнитный спектрометр с пропорциональными камерами в качестве основного координатного детектора. Хотя спектрометр планируется использовать для весьма разных задач, решаемых разными группами экспериментаторов, в ряде исследований ожидаемые интервалы импульсов и углов вылета измеряемых частиц небольшие. Например, при измерении сечения перезарядки  $p(^3\text{H}, ^3\text{He})$  в зависимости от переданного импульса [1] угол вылета измеряемых ядер гелия ограничивается методическими соображениями экстраполяции сечения для нулевого угла вылета и апертурой магнита. По-видимому, максимальный угол вылета измеряемых ядер целесообразно ограничить 15 мрад. Интервал ожидаемых импульсов составляет от 3 до 4 ГэВ/с.

Дополнительно было проанализировано применение метода для более сложных задач, например, для поиска рождения и распада гиперядер  $^6_{\Lambda}\text{H}$  [2]. Одновременно могут рождаться и гиперядра  $^4_{\Lambda}\text{H}$  и  $^3_{\Lambda}\text{H}$ . Измеряемые импульсы дочерних ядер — изотопов гелия  $^6\text{He}$ ,  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$  — будут сосредоточены в интервалах 12,5–10,5, 7,8–6,5 и 5,6–4,6 ГэВ/с соответственно. Максимальный угол вылета этих ядер не превышает 30 мрад. Хотя диапазон импульсов большой, для идентификации всех трех каналов реакции (трех разных гиперядер) достаточно измерять импульс с относительной точностью 10 %.

Метод определения импульса заряженной частицы по измерениям ее траектории в магнитном поле спектрометра, предложенный Виндом и его соавторами [3], оказался удобным и используется достаточно часто [4, 5]. Идея этого метода состоит в том, что сначала рассчитывается набор возможных траекторий частиц, проходящих через магнитное поле, и определяются углы отклонения частиц для выбранных наборов параметров (в том числе и для значений импульса), а затем строится функция, выражающая импульс через наблюдаемые величины (в том числе через угол отклонения). Именно эта функция используется в ходе эксперимента для определения импульса.

В настоящей работе рассматриваются два алгоритма, реализующие указанный метод. Первый довольно точно следует подходу работы [3], его характерная особенность — применение полиномов Чебышева для приближенного представления упомянутой выше функции. Второй, более простой и наглядный, использует полилинейную интерполяцию. Для оценки точности двух указанных алгоритмов было проведено их тестирование в модельных условиях. Обработка экспериментальных данных по предложенным алгоритмам представляется простой и производится достаточно быстро.

Оба метода для заданного интервала импульсов в модельных условиях дают относительную погрешность не более 3–3,5 %.

## ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМОВ

**Первый алгоритм.** Ниже используются обозначения: переменные  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — наблюдаемые характеристики частицы на входе, до попадания в магнитное поле (координаты двух точек в двух плоскостях);  $x_5$  — импульс  $P$ ;  $x_6$  — горизонтальный угол поворота частицы ( $D$ ).

Схематично условия эксперимента изображены на рис. 1.

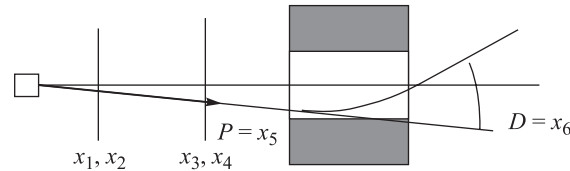


Рис. 1. Схема движения заряженной частицы в магнитном спектрометре

Предполагается, что имеется программа расчета траектории частицы в магнитном поле спектрометра, т. е. можно считать, что известна функция  $D(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ . При работе с полиномами Чебышева необходимо, чтобы аргументы принимали значения в диапазоне  $[-1, 1]$ . Этого можно достичь заменой переменной по правилу типа  $\xi = (2x - A - B)/(B - A)$ , где  $[A, B]$  — диапазон изменения переменной  $x$ . (Иногда, например при работе с функцией  $D$ , приходится выражать  $x$  через  $\xi$ :  $x = (A + B)/2 + \xi(B - A)/2$ ). Для каждого аргумента выбирается дискретная сетка:  $\xi_{1a_1}, a_1 = 1, \dots, N_1$ ;  $\xi_{2a_2}, a_2 = 1, \dots, N_2, \dots, \xi_{5a_5}, a_5 = 1, \dots, N_5$ . Для  $x_1, x_2, x_3, x_4$  сетки чебышевские (например, точки сетки  $\xi_{1a_1}$  — это нули полинома Чебышева  $T_{N_1}(X)$  степени  $N_1$ ), а для  $x_5$  сетка может быть и другого типа, например равномерная. (Она используется на промежуточном шаге для обратной интерполяции.) Для возможного диапазона значений функции  $D$  строится чебышевская сетка  $\xi_{6a_6}, a_6 = 1, \dots, N_6$ .

Дальше вычисления проводятся следующим образом. Организуются вложенные циклы по  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Внутри этих циклов выполняются два действия:

1) организуется цикл по  $a_5$ . В нем для заданного набора  $a_1, a_2, a_3, a_4$  вычисляются  $M_5$  значений  $\xi_6$ , равных нормализованной (переведенной в диапазон  $[-1, 1]$ )  $D(\xi_{1a_1}, \xi_{2a_2}, \xi_{3a_3}, \xi_{4a_4}, \xi_{5a_5})$ ;

2) организуется цикл по  $a_6$ . В нем с помощью обратной интерполяции для каждого узла сетки  $\xi_{6a_6}$  вычисляется соответствующее значение  $\xi_5$ . Эти значения накапливаются в пятимерном массиве  $\xi_{5a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}$ .

В результате получится массив значений  $\xi_{5_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}}$ , где  $a_1 = 1, \dots, N_1$ ;  $a_2 = 1, \dots, N_2$ ;  $a_3 = 1, \dots, N_3$ ;  $a_4 = 1, \dots, N_4$ ;  $a_6 = 1, \dots, N_6$ . Всего в массиве будет  $N_1 \cdot N_2 \cdot N_3 \cdot N_4 \cdot N_6$  элементов. В нем содержится информация о зависимости импульса  $\xi_5$  от наблюдаемых величин.

Введем для удобства работы с полиномами Чебышева обозначения  $i_1 = a_1 - 1 = 0, \dots, M_1$ ;  $\dots$ ,  $i_6 = a_6 - 1 = 0, \dots, M_6$  (индексы  $i$  соответствуют индексам  $a$  по правилу  $i = a - 1$ ). Требуется на основе массива значений  $\xi_{5_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}}$  построить функцию  $\xi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6)$  от непрерывных аргументов в виде ряда

$$\xi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6) = \sum_{a_1=1}^{N_1} \sum_{a_2=1}^{N_2} \sum_{a_3=1}^{N_3} \sum_{a_4=1}^{N_4} \sum_{a_6=1}^{N_6} C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6} \times \\ \times T_{i_1}(\xi_1) \cdot T_{i_2}(\xi_2) \cdot T_{i_3}(\xi_3) \cdot T_{i_4}(\xi_4) \cdot T_{i_6}(\xi_6). \quad (1)$$

Возникает вопрос: как вычислять коэффициенты  $C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6}$ ? Способ их получения, в котором и используется свойство ортогональности полиномов Чебышева, описанное в работе [6] и рассмотренное в [7] и в приложении, поясним на простом примере. Пусть функция одной переменной представлена в виде

$$\xi(\xi_1) = \sum_{a_1=1}^{N_1} C_{a_1} \cdot T_{i_1}(\xi_1), \quad (2)$$

где  $i_1 = a_1 - 1$ , и нам известны значения  $\xi$  на чебышевской сетке аргументов  $\xi_{1_{a_1}}$ ,  $a_1 = 1, \dots, N_1$ . Для этих значений из (2) получим систему уравнений, которую удобно записать в векторной форме:

$$\xi = \sum_{a_1=1}^{N_1} C_{a_1} \cdot T_{i_1}, \quad (3)$$

где  $\xi$  — вектор левой части, а  $T_{i_1}$  — вектор значений полинома Чебышева с номером  $i_1$  на сетке аргументов  $\xi_{1_{a_1}}$ ,  $a_1 = 1, \dots, N_1$ .

Выберем какой-нибудь номер  $a$ . Умножим скалярно обе части (3) на  $T_i$  ( $i = a - 1$ ). Получим

$$(\xi, T_i) = \sum_{a_1=1}^{N_1} C_{a_1} \cdot (T_{i_1}, T_i).$$

Но правая часть равна  $C_a$  в силу ортонормированности полиномов Чебышева на выбранной нами сетке [8, 9]. Значит, мы получаем выражение для коэффициентов  $C_{a_1}$ :

$$C_{a_1} = (\xi, T_{i_1})$$

или, в развернутом виде,

$$C_{a_1} = \sum_{n_1=1}^{N_1} \xi_{n_1} \cdot T_{i_1, n_1}. \quad (4)$$

Итак, чтобы получить коэффициент  $C_{a_1}$  для некоторого фиксированного  $a_1$ , надо вектор значений  $\xi$  на чебышевской сетке аргументов умножить скалярно на вектор значений полинома Чебышева с номером  $i_1 = a_1 - 1$  на той же сетке аргументов  $\xi_{1, n_1}$ ,  $n_1 = 1, \dots, N_1$ ,  $T_{i_1, n_1} = T_{i_1}(\xi_{1, n_1})$ . Аналогичные, но громоздкие выкладки можно провести и для коэффициентов  $C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6}$  из выражения (1).

Процесс вычисления  $C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6}$  можно записать в виде одной формулы (индексы  $i$  в правой части соответствуют индексам  $a$  в левой части по правилу  $i = a - 1$ ):

$$C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6} = \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{n_3=1}^{N_3} \sum_{n_4=1}^{N_4} \sum_{n_6=1}^{N_6} \xi_{5_{n_1 n_2 n_3 n_4 n_6}} \times \\ \times T_{i_6, n_6} \cdot T_{i_4, n_4} \cdot T_{i_3, n_3} \cdot T_{i_2, n_2} \cdot T_{i_1, n_1}. \quad (5)$$

Программно вычисления по формуле (5) реализуются как пять вложенных друг в друга циклов. При этом мы получаем только одно значение коэффициента  $C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6}$  для определенного набора значений  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_6$ . Для их перебора надо организовать еще пять циклов (дополнительных вычислений в них нет, только перебор параметров). Внутри этих циклов расположены первые пять, всего получается десять вложенных циклов. В результате получим массив коэффициентов  $C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6}$ , где  $a_1 = 1, \dots, N_1$ ,  $a_2 = 1, \dots, N_2$ ,  $\dots$ ,  $a_4 = 1, \dots, N_4$ ,  $a_6 = 1, \dots, N_6$ , что дает возможность пользоваться формулой (1).

**Второй алгоритм.** По структуре алгоритм подобен первому, поэтому мы в основном сохраним обозначения, но укажем изменения в их значении. Для каждого аргумента  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  выбирается равномерная дискретная сетка  $\xi_{1, a_1}$ ,  $a_1 = 1, \dots, N_1$ ,  $\xi_{2, a_2}$ ,  $a_2 = 1, \dots, N_2, \dots, \xi_{5, a_5}$ ,  $a_5 = 1, \dots, N_5$ . Для возможного диапазона значений функции  $D$  строится равномерная сетка  $\xi_{6, a_6}$ ,  $a_6 = 1, \dots, N_6$ .

Организуются вложенные циклы по  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Внутри этих циклов выполняются два действия:

1) организуется цикл по  $a_5$ . В нем для заданного набора  $a_1, a_2, a_3, a_4$  вычисляются  $M_5$  значений  $\xi_6$ , равных нормализованной  $D(\xi_{1, a_1}, \xi_{2, a_2}, \xi_{3, a_3}, \xi_{4, a_4}, \xi_{5, a_5})$ ;

2) организуется цикл по  $a_6$ . В нем с помощью обратной интерполяции для каждого узла сетки  $\xi_{6, a_6}$  вычисляется соответствующее значение  $\xi_5$ . Эти



## РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕСТИРОВАНИЯ АЛГОРИТМОВ

**Тестирование первого алгоритма.** Тестирование включало в себя проверку правильной работы алгоритма и программы и проверку точности восстановления импульса.

Для проверки правильной работы алгоритма брались произвольные аналитические функции пяти аргументов. Для данной конкретной функции вычислялись ее значения на каждой из сеток  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6$  в нулях полиномов Чебышева. На каждой из сеток степень полинома была 8–12. Далее, как изложено выше, получали пятимерный массив  $\xi^5 a_1, a_2, a_3, a_4, a_6$  и на его основе каждый элемент массива  $C_{a_1, a_2, a_3, a_4, a_6}$ . Теперь уже возможна свертка по формуле (1), чтобы получать значения функции  $\xi^5$  от произвольного набора аргументов  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_6$ . Интервал значений для каждого аргумента выбирался различным. В каждом интервале генератором случайных чисел разыгрывались конкретные  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_6^0$ , которые, конечно, нормировались на интервал  $[-1, 1]$ . По формуле (1) вычислялось значение аппроксимирующей функции и сравнивалось с точным значением аналитической функции. Аналитические функции брались достаточно произвольно. В качестве примера на рис. 2 показана относительная ошибка вычисления для функции  $\exp(-0,23 \cdot x_1 + 0,001 \cdot x_2) \cdot x_3 \cdot x_4^2 - 45 \cdot x_2 \cdot x_4 \cdot x_6^2$ . Интервалы

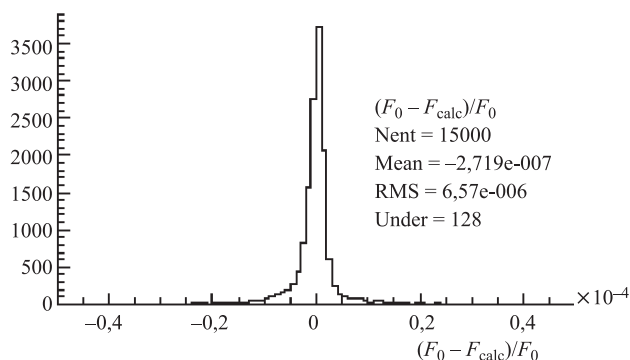


Рис. 2. Относительная ошибка восстановления произвольной аналитической функции

$x_i$  были  $[-4,1 \div -8]$ ,  $[-34,7 \div -25,2]$ ,  $[-10,5 \div 35,5]$ ,  $[-45 \div -15]$ ,  $[-13,3 \div 27,8]$  для  $x_1, x_2 \dots x_6$  соответственно. Степень полиномов Чебышева 8–12. Значения этой функции менялись в пределах от  $-400000$  до  $50000$ .

Вторая проверка — восстановление импульса по координатам  $x_1, \dots, x_6$ . Координатные сетки  $x_1$  и  $x_2$  соответствовали горизонтальной и вертикальной координатам на срезе мишени,  $x_3$  и  $x_4$  соответствовали горизонтальной и вертикальной координатам на входе в магнит,  $x_6$  — горизонтальный угол поворота частицы в магнитном поле. Через точки — нули полиномов Чебы-



шева на  $x_{1i}, x_{2j}, x_{3m}, x_{4n}$  ( $i = 1, \dots, N_1, j = 1, \dots, N_2$  и т.д.) — и затем через магнитное поле осуществлялась проводка частиц с импульсами от 1300 до 3700 МэВ/с с шагом 10 МэВ/с. Таким образом находились углы поворота, т.е. получали зависимость: угол поворота — импульс (для фиксированных  $x_1 \dots x_4$ ). По этим углам поворота линейной интерполяцией в точках  $x_{6r}$  — нулях полиномов Чебышева ( $x_6$  — это горизонтальный угол поворота) — вычислялся импульс. Так заполнялись все точки сеток  $x_1 \dots x_6$ , т.е. массив  $\xi 5a_1, a_2, a_3, a_4, a_6$ , и по нему вычислялся массив  $C_{a_1 a_2 a_3 a_4 a_6}$  для использования в формуле (1) при непрерывных значениях аргументов. Сама проверка заключалась в следующем. Равномерно разыгрывались: точка  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  в мишени, точка  $(y_1, z_1)$  на срезе магнита (т.е. на  $x_3^0$  и  $x_4^0$  в наших обозначениях) и модуль импульса  $P_0$  от 1750 до 2750 МэВ/с. Точки в пространстве определяют направляющий вектор частицы. По нему определяются все три компоненты  $P_0$  и точки  $(y_2, z_2)$  на срезе мишени (т.е.  $x_1^0$  и  $x_2^0$  в наших обозначениях). Проводим частицу в магнитном поле и находим угол поворота (т.е.  $x_6^0$ ). По формуле (1), зная  $x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, x_6^0$ , вычисляем импульс  $P_{\text{calc}}$ . На рис. 3 и 4 приведены абсолютная и относительная ошибки между истинным значением  $P_0$  и его вычисленным по (1) значением  $P_{\text{calc}}$ .

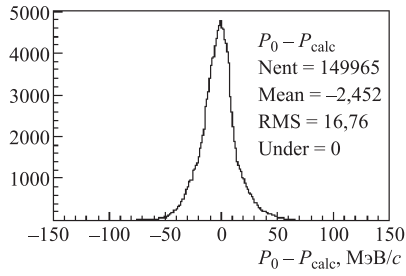


Рис. 3. Абсолютная ошибка восстановления импульса

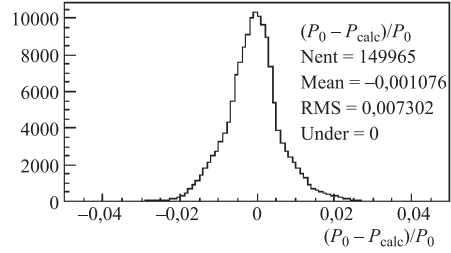


Рис. 4. Относительная ошибка восстановления импульса

**Тестирование второго алгоритма.** Важный этап тестирования — выбор модельной функции, задающей зависимость между величинами  $x_1, x_2, x_3, x_4, P = x_5$  на входе и углом поворота  $D = x_6$ . Желательно, чтобы такая функция была подобна реальной зависимости, а необходимое требование — строго монотонная зависимость  $D$  от  $P$  при фиксированных  $x_1, x_2, x_3, x_4$  (условие существования обратной функции). Брался, в частности, вариант

$$D(x_1, x_2, x_3, x_4, P) = d \cdot 0,3 \cdot Z \cdot B/P + (x_4 - x_2)/L + f(x_1, x_3),$$

где  $d$  — продольный размер области магнитного поля;  $Z$  — заряд частицы;  $B$  — напряженность магнитного поля;  $L$  — расстояние между пропорциональными камерами;  $f$  моделирует слабую зависимость  $D$  от  $x_1$  и  $x_3$ .

Моделирование проводилось по следующей схеме: многократно генерировались различные наборы параметров на входе и по ним определялся угол  $D$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, P \Rightarrow D,$$

затем к измеряемым величинам добавлялась погрешность и определялся импульс  $P$

$$x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3, x_4 + \xi_4, D + \xi_6 \Rightarrow P.$$

Сравнение полученного значения и значения  $P$  на входе позволяет судить о точности определения импульса рассматриваемым методом. При нулевом уровне погрешностей мы получим оценку ошибки метода. Тестирование показывает, что ошибка метода зависит, в основном, от подробности сеток  $\xi_{1a_1}, a_1 = 1, \dots, M_1, \xi_{2a_2}, a_2 = 1, \dots, M_2, \dots, \xi_{5a_5}, a_5 = 1, \dots, M_5$  и, особенно, от  $\xi_{6a_6}, a_6 = 1, \dots, M_6$ . (Это связано с тем, что диапазон значений функции  $D$  определяется по всему набору возможностей и для каждого конкретного случая оказывается взятым с запасом). Результаты тестов для второго алгоритма представлены в виде диаграммы на рис. 5.

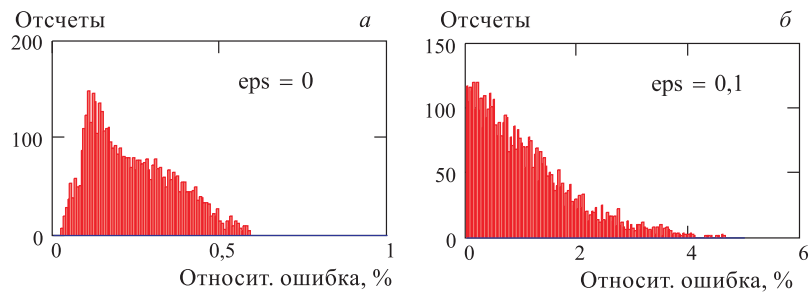


Рис. 5. Распределение относительной ошибки в определении импульса для второго алгоритма в отсутствие погрешности в измеряемых величинах (погрешность метода) (а) и при наличии погрешности в измеряемых величинах ( $\pm \text{eps}$  для  $x_1, \dots, x_4$  и  $\pm \text{eps} \cdot 10^{-3}$  для  $x_6$ ) (б)

Из рис. 5 видно, что для второго алгоритма ошибка метода при выбранных сетках (5, 10, 10, 20, 40, 100 точек для сеток  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$  соответственно) не превышает 0,5%. При моделировании погрешности на уровне 1,0 мм при измерении координат точек  $x_1, x_2, x_3, x_4$  и соответствующей погрешности измерения угла  $D$  получаем, что относительная погрешность определения импульса обычно не превосходит 3–3,5%.

Можно сделать вывод, что оба реализующих рассмотренный метод алгоритма показывают согласованные результаты. При этом первый алгоритм требует более долгих вычислений.

Метод для заданного интервала импульсов в модельных условиях дает относительную погрешность не более 3–3,5%. Потенциально есть возможность несколько увеличить точность определения импульса за счет выбора более подробных сеток, но остается составляющая погрешности, обусловленная ошибками при измерении наблюдаемых величин.

Отметим, что применение рассмотренного подхода предполагает, что магнитное поле при измерениях не отличается существенно от поля, используемого при расчете траекторий.

### Приложение ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА НА СИСТЕМЕ ТОЧЕК

В работе [3] говорится, что полиномы Чебышева  $T_j(x) = \cos(j \cdot \arccos(x))$  ортонормированны на системе точек

$$X_a = \cos(\pi \cdot (2a - 1)/2N), a = 1, \dots, N,$$

т. е.

$$(T_j, T_k) = \sum_{a=1}^N T_j(X_a) \cdot T_k(X_a) = \delta_{jk}. \quad (1)$$

Индексы  $j$  и  $k$  не указаны, но правильные их значения  $j = 0, \dots, N-1, k = 0, \dots, N-1$ . Поэтому при вычислении сумм, в которых участвуют полиномы Чебышева, надо использовать для индекса  $a_i$  не диапазон  $a_i = 1, \dots, N_i$ , как это делается в [1], а диапазон  $a_i = 0, \dots, N_i-1$ .

Заметим, что точки  $X_a$  — это нули полинома Чебышева  $T_N(X)$  степени  $N$ . Поэтому можно сказать, что в [3] используется замечательное свойство полиномов Чебышева — *полиномы  $T_0(X), T_1(X), \dots, T_{N-1}(X)$  образуют ортогональную систему на сетке из нулей полинома Чебышева  $T_N(X)$* . Где найти подтверждение этому свойству? Во многих руководствах по численным методам [8–11], в которых рассматриваются и полиномы Чебышева и ортогональность функций на системах точек, о свойстве (1) вообще не упоминается. Посмотрим книги, специально посвященные интересующей нас теме — ортогональным полиномам и полиномам Чебышева [12, 13]. В них о свойстве (1) не упоминается! Наконец в [14], в пункте 11.7 «Свойства ортогональности многочленов Чебышева», обнаруживается

**Лемма 1.** Пусть  $T_n(x_a) = \cos n\theta_a = 0 \quad (n > 0), \quad (2)$

$$x_a = \cos \theta_a, \quad \theta_a = \pi \cdot (2a + 1)/2n, \quad a = 0, \dots, n - 1, \quad (3)$$

$$S_{j,k} = (T_j, T_k) = \sum_{a=0}^{n-1} T_j(x_a) \cdot T_k(x_a) = \sum_{a=0}^{n-1} \cos j\theta_a \cdot \cos k\theta_a. \quad (4)$$

$$\text{Тогда } S_{j,k} = \begin{cases} 0, & j, k < n, \quad j \neq k, \\ n, & j = k = 0, \\ n/2, & 0 < j = k < n. \end{cases} \quad (5)$$

Это в точности то, что надо. К сожалению, доказательство леммы 1 в [14] не приводится. Естественно, возникает желание ее доказать. Важные для построения доказательства соотношения удалось найти в [15] в главе, посвященной численному интегрированию (численное интегрирование имеет глубокую идейную связь с задачей интерполяции).

**Доказательство леммы 1.** Заметим, что скалярное произведение

$$S_{j,k} = \sum_{a=0}^{n-1} \cos j\theta_a \cdot \cos k\theta_a \quad (6)$$

обладает свойством симметрии  $S_{j,k} = S_{k,j}$ . Поэтому всегда можно перейти к записи, в которой первый индекс не меньше второго. Без ущерба для общности можно считать, что  $j \geq k$ . Это условие сделает выкладки удобнее. Скалярное произведение  $S_{j,k}$  можно, используя известную тригонометрическую формулу

$$\cos j\theta \cdot \cos k\theta = 1/2[\cos(j+k)\theta + \cos(j-k)\theta], \quad (7)$$

записать в виде

$$S_{j,k} = 1/2 \left[ \sum_{a=0}^{n-1} \cos(j+k)\theta_a + \sum_{a=0}^{n-1} \cos(j-k)\theta_a \right] = 1/2[S_{j+k,0} + S_{j-k,0}]. \quad (8)$$

Индексы  $j$  и  $k$  могут принимать значения  $0 \leq k \leq j < n$ .

1. Рассмотрим случай  $0 \leq k < j < n$ . (Он может наблюдаться при  $n \geq 2$ .) Докажем, что  $S_{j,k} = 0$ . Для этого достаточно доказать, что равны нулю оба слагаемых в правой части (8). В рассматриваемом случае  $1 \leq j+k < 2n-2$ ,  $1 \leq j-k < n$ . Значит, достаточно будет доказать, что

$$S_{m,0} = \sum_{a=0}^{n-1} \cos m\theta_a = 0 \quad \text{для } m = 1, 2, \dots, 2n-1. \quad (9)$$

Рассмотрим кроме  $n$  точек  $\theta_a = \pi(2a+1)/2n$ ,  $a = 0, \dots, n-1$ , лежащих на верхней половине единичной окружности, симметричные им точки  $\theta_a = \pi(2a+1)/2n$ ,  $a = -n, \dots, -1$ , лежащие на нижней половине единичной

окружности. Заметим, что симметричные точки составляют  $n$  пар со свойством  $\theta_a = -\theta_{-(1+a)}$ ,  $a = 0, \dots, n-1$ . Применим общую нумерацию всех точек:  $\theta_a = \pi(2a+1)/2n$ ,  $a = -n, \dots, n-1$ . В силу четности функции  $\cos$  и нечетности функции  $\sin$

$$\sum_{a=-n}^{n-1} \cos m\theta_a = 2S_{m,0}, \quad \sum_{a=-n}^{n-1} \sin m\theta_a = 0. \quad (10)$$

Поэтому, используя соотношение  $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$ , мы можем записать

$$2S_{m,0} = \sum_{a=-n}^{n-1} \cos m\theta_a = \sum_{a=-n}^{n-1} \exp(im\theta_a). \quad (11)$$

Слагаемые в последнем выражении составляют конечную геометрическую прогрессию. Воспользуемся известной формулой для суммы  $N$  членов геометрической прогрессии  $A_1, A_2, \dots, A_N$

$$S_N = (A_N q - A_1)/(q - 1). \quad (12)$$

В нашем случае

$$A_1 = \exp(im\theta_{-n}) = \exp(im\pi(1-2n)/2n),$$

$$q = \exp(im\pi 2/2n),$$

$$A_N = \exp(im\theta_{n-1}) = \exp(im\pi(2n-1)/2n),$$

$$A_n q = \exp(im\pi(1+2n)/2n).$$

Заметим, что функция  $\exp(it)$  периодическая с периодом  $2\pi$ . Аргументы, входящие в выражение для  $A_n q$  и  $A_1$ , отличаются на величину  $m\pi(1+2n)/2n - m\pi(1-2n)/2n = m2\pi$ , равную целому числу периодов. Следовательно,  $A_n q = A_1$ , а  $S_N = 0$ . Итак, доказано, что

$$2S_{m,0} = \sum_{a=-n}^{n-1} \cos m\theta_a = \sum_{a=-n}^{n-1} \exp(im\theta_a) = 0, \quad (13)$$

а значит, верно и условие (9), которое мы хотели доказать:

$$S_{m,0} = \sum_{a=0}^{n-1} \cos m\theta_a = 0, \quad m = 1, 2, \dots, 2n-1. \quad (14)$$

Отметим, что для  $m = 2n$  формула (12) не применима, так как  $q$  становится равным единице. Возвращаясь к (8), делаем вывод, что

$$S_{j,k} = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq k < j < n. \quad (15)$$

В силу коммутативности скалярного произведения, т. е. свойства  $S_{j,k} = S_{k,j}$ , ортогональность будет и для общего случая:

$$S_{j,k} = 0 \quad \text{при} \quad j, k < n, \quad j \neq k. \quad (16)$$

2. Рассмотрим случай  $j = k = 0$ . Из (6) получим

$$S_{0,0} = \sum_{a=0}^{n-1} \cos 0 \cdot \cos 0 = n. \quad (17)$$

3. Рассмотрим случай  $0 < j = k < n$ . Из выражения (8), учитывая (14) и (17), получим

$$S_{j,j} = 1/2[S_{2j,0} + S_{0,0}] = 1/2[0 + n] = n/2. \quad (18)$$

Итак, лемма 1 доказана.

Остается отметить, что норма полиномов Чебышева, определенная через скалярное произведение (6), равна

$$\|T_0\| = (S_{0,0})^{1/2} = n^{1/2}, \quad \|T_k\| = (S_{k,k})^{1/2} = (n/2)^{1/2}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (19)$$

Соответственно, ортонормированная система полиномов Чебышева будет иметь вид

$$\bar{T}_0(x) = \sqrt{\frac{1}{n}}, \quad \bar{T}_k(x) = \sqrt{\frac{2}{n}} T_k(x), \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (20)$$

Именно для них верно утверждение из работы [3], с которого мы начали свое рассмотрение.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Afanasiev S. V. et al.* Investigation of charge exchange reactions on a hydrogen target (proposal) // JINR Rapid Commun. 1995. V. 69, No. 1. P. 47–52.
2. *Batusov Yu. A. et al.* Investigation of the neutron halo hypernucleus  ${}^6_{\Lambda}\text{H}$  // Proc. of the XVII Intern. Baldin Seminar on High Energy Physics Problems «Relativistic Nuclear Physics and Quantum Chromodynamics», Dubna, 2004. Dubna, 2005. V. II, P. 282–290.
3. *Lechanoine C., Martin M., Wind H.* Method for Efficient Magnetic Analysis in an Inhomogeneous Field // Nucl. Instr. Meth. 1969. V. 69. P. 122–124.
4. *Ажгирей Л. С. и др.* Процедура восстановления импульса для нефокусирующего спектрометра с широкоапертурным анализирующим магнитом и неоднородным магнитным полем // Краткие сообщения ОИЯИ. 1999. № 2(94)-99. С. 5–15.

5. *Alkhozov G. D., Kravtsov A. V., Prokofiev A. N.* Momentum Reconstruction for Particles Registered by the Forward Spectrometer of the SPES4- $\pi$  Set-up. Preprint 2246. Gatchina, 1998.
6. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. М.: Физматлит, 1961.
7. *Соколов А. М.* Определение импульса частицы в магнитном спектрометре по методу Винда. Препринт КИЯИ-04-4. Киев, 2004.
8. *Гутер Р. С., Овчинский Б. В.* Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. М.: Наука, 1970.
9. *Волков Е. А.* Численные методы. М.: Наука, 1982.
10. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966.
11. *Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З.* Численные методы анализа. М.: Наука, 1967.
12. *Суэтин П. К.* Классические ортогональные многочлены. М.: Наука, 1976.
13. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М.: Наука, 1983.
14. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. М.: Мир, 1980.
15. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. Т. 1. М.: Наука, 1975.

Получено 18 ноября 2005 г.

Корректор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 26.01.2006.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,94. Уч.-изд. л. 1,14. Тираж 310 экз. Заказ № 55198.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@pds.jinr.ru](mailto:publish@pds.jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)