

P17-2006-70

Т. Л. Бояджиев¹, Е. Г. Семерджиева², Ю. М. Шукринов^{1,3,*}

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ДЖОЗЕФСОНОВСКИЕ КОНТАКТЫ

Направлено в «Журнал технической физики»

¹ Объединенный институт ядерных исследований, Дубна

² Пловдивский университет, Пловдив, Болгария

³ Физико-технический институт, Душанбе

* E-mail: shukrinv@thsun1.jinr.ru

Бояджиев Т. Л., Семерджиева Е. Г., Шукринов Ю. М.
Эквивалентные джозефсоновские контакты

P17-2006-70

При помощи однопараметрического семейства преобразований координаты устанавливается соответствие между классами джозефсоновских контактов с экспоненциально изменяющейся шириной и квазиодномерными прямоугольными контактами с переменной толщиной барьерного слоя. Численно исследуются зависимости «критический ток – магнитное поле» для моделей джозефсоновских контактов с шунтовой и резистивной микронеоднородностями и контакта с экспоненциально изменяющейся шириной. Сопоставление критических кривых демонстрирует возможность замены распределенной неоднородности в контакте локальной неоднородностью на одном из его концов, что с технологической точки зрения может иметь определенные преимущества. Показано, что критические кривые контактов с неоднородностями на концах и с экспоненциально изменяющейся шириной не содержат участков, обусловленных смешанными флюксон-антифлюксонными распределениями магнитного потока. Возможно, этот факт объясняет отмеченное в работах ряда авторов уменьшение ширины линии излучения осциллятора на движущихся флюксонах (flux flow oscillator).

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.
Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2006

Boyadjiev T. L., Semerdjieva E. G., Shukrinov Yu. M.
Equivalent Josephson Junctions

P17-2006-70

The correspondence between classes of Josephson junctions with exponentially varying width and quasi 1D rectangular junctions with varying thickness of barrier layer is established by one-parametric group of coordinate transformation. The dependencies «critical current – magnetic field» for models of Josephson junction with shunt and resistive inhomogeneities and junction with exponentially varying width are investigated numerically. Comparison of the critical curves demonstrates the possibility to replace distributed inhomogeneity by local inhomogeneity at the end of junction. It might have some advantage from technological point of view. It's shown that critical curves of junctions with inhomogeneities at the ends of junctions and junctions with exponentially varying width have not the parts created by mixed fluxon-antifluxon distributions of magnetic flux. Probably this fact explains the narrowing of radiation linewidth of the flux flow oscillator noted in some papers.

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2006

Одним из интересных как с теоретической, так и с точки зрения приложений направлений в физике длинных джозефсоновских контактов (ДК), развиваемым интенсивно в последние годы, является исследование влияния токов, обусловленных внешним полем или геометрией, на движение вихрей в контактах. Такие токи возникают, например, в ДК с переменной в плоскости барьерного слоя шириной [1–8]. Однонаправленное движение флюксонов, вызванное дополнительным «геометрическим» током, обладает определенными преимуществами при создании осцилляторов, основанных на движении флюксонов [1, 2, 9–11]. В частности [1, 2], экспоненциальное изменение ширины контакта обеспечивает лучшее согласование импеданса с выходной нагрузкой и позволяет избежать хаотических режимов, присущих прямоугольным контактам.

В настоящей работе при помощи численного эксперимента построены и сравниваются зависимости «критический ток-магнитное поле» для длинных ДК с экспоненциально изменяющейся шириной (EJJ) и прямоугольных ДК либо с резистивной неоднородностью (RJJ) на правом конце, либо с шунтовой неоднородностью (SJJ) на левом конце. В RJJ-контактах с неоднородностью, расположенной в окрестности центра, смешанные флюксон-антифлюксонные распределения могут быть устойчивыми за счет пиннинга на неоднородности [12]. Такой пиннинг приводит к нарушению монотонности убывания экстремумов критической кривой с увеличением внешнего магнитного поля, что наблюдалось экспериментально, например, в [13, 14] для ДК с решеткой неоднородностей в барьерном слое. Однако в EJJ-контактах смешанные распределения оказываются всегда неустойчивыми, а экстремумы критической кривой убывают равномерно, что видно из результатов как численного, так и физического экспериментов. По-видимому, отсутствие вклада в критические кривые смешанных распределений в EJJ-контактах объясняет улучшенный спектр излучения [1, 2] таких ДК в сравнении с прямоугольными. Результаты работы [15] показывают, что критические кривые прямоугольных контактов с резистивной неоднородностью на конце обладают аналогичными свойствами.

Рассмотрим длинный ДК с экспоненциально изменяющейся на отрезке $x \in [0, L]$ шириной. Здесь L — длина контакта (все используемые величины стандартным образом приведены к безразмерному виду [16]). Краевая задача для статического магнитного потока $\varphi(x)$, $x \in [0, L]$, в таком ДК в случае линейной (in-line) геометрии записывается в виде

$$-\varphi_{xx} + \sigma(\varphi_x - h_e) + \sin \varphi = 0, \quad (0.1a)$$

$$\varphi_x(0) = h_e - \varkappa_l L \gamma, \quad \varphi_x(L) = h_e + \varkappa_r L \gamma. \quad (0.1b)$$

Нижним индексом здесь и в дальнейшем обозначено дифференцирование по независимой переменной x . Через σ , $0 \leq \sigma \ll 1$, обозначен коэффициент, характеризующий экспоненциальное изменение ширины [2], h_e — внешнее магнитное поле в плоскости барьерного слоя, а \varkappa_l и \varkappa_r — доли внешнего тока γ через левый (l) и правый (r) концы, причем $\varkappa_l + \varkappa_r = 1$. В общем случае вывод уравнения (0.1a) приведен, например, в работе [3].

Рассмотрим семейство преобразований пространственной координаты

$$x = u(\xi) = \frac{1}{\sigma} \ln(1 + a\xi), \quad (0.2)$$

зависящее от действительного параметра $a > 0$. Здесь новая переменная $\xi \in [0, l]$, связь между параметрами l и L дается обратным преобразованием $l = (e^{\sigma L} - 1)/a$. С новой независимой переменной ξ краевая задача (0.1) принимает самосопряженный вид

$$-\varphi_{\xi\xi} + j_C(\xi) \sin \varphi + g(\xi) = 0, \quad (0.3a)$$

$$\varphi_\xi(0) = \sqrt{j_m} [h_e - \varkappa_l L \gamma],$$

$$\varphi_\xi(l) = \frac{\sqrt{j_m}}{1 + \sigma l} [h_e + \varkappa_r L \gamma]. \quad (0.3b)$$

Здесь функция $j_C(\xi) \equiv u_\xi^2(\xi) = j_m (1 + a\xi)^{-2}$, а параметр $j_m = (a/\sigma)^2$. С формальной точки зрения уравнение описывает распределения магнитного потока в одномерном ДК с переменной амплитудой $j_C(\xi)$ джозефсоновского тока при наличии дополнительного распределенного тока $g(\xi) = -j_m \sigma h_e / (1 + a\xi)^{-2}$. Физически переменную амплитуду можно отождествить с переменной толщиной барьерного слоя вдоль контакта. При этом максимальному значению тока j_m при $\xi = 0$ отвечает минимальная толщина барьерного слоя. Соответственно, на правой границе $\xi = l$ ток минимален, а толщина барьера максимальна. В зависимости от значения тока j_m , т.е. соотношения между параметром преобразования a и параметром σ , распределенную вдоль ДК неоднородность можно интерпретировать либо как резистивную, либо как шунтовую, либо как их комбинацию. Точнее, при $0 < j_m \leq 1$ ($a \leq \sigma$) неоднородность является резистором. В случае $j_m \geq e^{2\sigma L}$ график амплитуды лежит выше горизонтальной прямой $j_C = 1$, что соответствует распределенной шунтовой неоднородности. В промежуточном случае $1 < j_m < e^{2\sigma L}$ неоднородность следует рассматривать как комбинацию обоих видов распределенных неоднородностей — шунтовой, с максимальной амплитудой джозефсоновского тока на левом конце контакта, и резистивной, с минимальной амплитудой джозефсоновского тока на правом конце. При этом амплитуда тока Джозефсона $j_C(\xi_1) = 1$ в единственной точке $\xi_1 = (a - \sigma)/(a\sigma)$. Хорошо известно, что резистивная неоднородность притягивает флюксоны к

правому концу, что наблюдается экспериментально [2] и подтверждается при численном моделировании [2, 7, 8]. Шунтовая неоднородность, в свою очередь, выталкивает флюксоны с левого конца контакта направо.

В качестве примера на рис. 1 демонстрируются графики амплитуды $j_C(\xi)$ для ДК, эквивалентных EJJ-контакту длиной $L = 10$ и $\sigma = 0,07$. Кривая 1 построена для $a = \sigma = 0,07$ и тем самым соответствует контакту с распре-

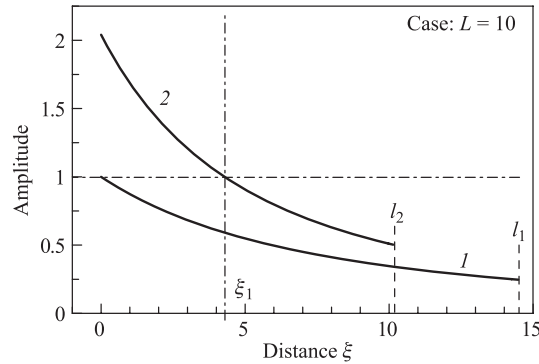


Рис. 1. Распределение амплитуды джозефсоновского тока для двух контактов, эквивалентных EJJ. Кривая 1 с параметром преобразования $a = 0,07$ соответствует RJJ, кривая 2 с параметром преобразования $a = 0,1$ соответствует комбинации SJJ и RJJ

деленной резистивной неоднородностью при $\xi > 0$; при этом длина контакта $l_1 \approx 14,48$. Кривая 2 ($a = 0,1$) соответствует эквивалентному контакту, в барьерном слое которого расположены как шунтовая (при $\xi \in [0, \xi_1)$, $\xi_1 \approx 4,29$), так и резистивная ($\xi \in (\xi_1, l]$) распределенные неоднородности. Такой контакт имеет длину $l_2 \approx 11,83$.

Рассмотрим возможность замены неоднородности, распределенной по всей длине контакта, неоднородностями, локализованными в окрестностях концов ДК. В частном случае $j_m = 1$ такая задача рассматривалась в работе [15], где было показано, что наличие точечной или прямоугольной резистивной неоднородности на правом конце прямоугольного ДК качественно не меняет критические кривые вида «ток–магнитное поле» по сравнению со случаем EJJ-модели. Покажем, что аналогичные выводы можно сделать и для SJJ-контакта с одной неоднородностью на левом конце. Простейшая модель микрон неоднородности в виде узкой прямоугольной ямы/выступа в барьерном слое характеризуется тремя параметрами: шириной $\Delta < L$, центром $\zeta \in [\Delta/2, L - \Delta/2]$ и долей тока Джозефсона κ через неоднородность. Наличие неоднородности приводит к локальному изменению тока Джозефсона, что описывается следующим выражением для амплитуды:

$$j_C(x) = \begin{cases} 1 + \kappa, & x \in \Delta, \\ 1, & x \notin \Delta. \end{cases}$$

Неоднородность является шунтовой при значениях $\kappa > 0$. Выбор $\kappa = 0$ означает, что толщина барьерного слоя контакта постоянна, а амплитуда $j_C(x) = 1$ при $x \in [0, L]$ (однородный контакт). При $\kappa \in [-1, 0)$ неоднородность является микрорезистором [17]. Соответствующая краевая задача для статического магнитного потока $\varphi(x)$ в случае in-line-геометрии записывается в виде

$$-\varphi_{xx} + j_C(x) \sin \varphi = 0, \quad (0.4a)$$

$$\varphi_x(0) = h_e - \varkappa_l L\gamma, \quad \varphi_x(l) = h_e + \varkappa_r L\gamma. \quad (0.4b)$$

При численном моделировании зависимости критического тока от магнитного поля переходы из сверхпроводящего в резистивный режим математически интерпретируются как бифуркации магнитного потока в контакте при изменении параметров [17]. В рамках линейной теории устойчивости каждому решению $\varphi(x)$ краевой задачи (0.4) ставится в соответствие регулярная задача Штурма–Лиувилля (ЗШТЛ)

$$-\psi_{xx} + q(x) \psi = \lambda \psi, \quad (0.5a)$$

$$\psi_x(0) = 0, \quad \psi_x(l) = 0, \quad (0.5b)$$

$$\int_0^L \psi^2(x) dx - 1 = 0, \quad (0.5c)$$

с потенциалом $q(x) = j_C(x) \cos \varphi(x)$, зависящим от конкретного решения. Минимальное собственное значение (СЗ) ЗШТЛ позволяет судить об устойчивости или неустойчивости распределения $\varphi(x)$ (см. подробности в работах [12–18]). Отметим, что задача (0.5) имеет дискретный, невырожденный, ограниченный снизу спектр $\{\lambda_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, $\lambda_0 \geq -1$.

Так как решения краевой задачи (0.4) зависят гладким образом от параметров h_e и γ , то собственные значения и собственные функции (0.5) также зависят от этих параметров. Пусть $\lambda_0(h_e, \gamma)$ — минимальное собственное значение, соответствующее некоторому распределению $\varphi(x)$. Точка с координатами h_e и γ на плоскости (h_e, γ) называется [17] точкой бифуркации $\varphi(x)$, если выполнено условие

$$\lambda_0(h_e, \gamma) = 0. \quad (0.6)$$

Геометрическое место точек бифуркаций конкретного вихря представляет собой бифуркационную кривую этого вихря. Критическая кривая контакта «в целом» строится как огибающая бифуркационных кривых, соответствующих различным решениям краевой задачи (0.4). Иными словами, критическая кривая состоит из кусков бифуркационных кривых, соответствующих

различным распределениям с наибольшим при заданном поле h_e критическим током γ . Для численного моделирования зависимости (0.6) используется метод, предложенный в работах [18]: система (0.4), (0.5) при заданном λ и поле h_e (или токе γ) решается как нелинейная задача на собственные значения со спектральным параметром γ (соответственно, h_e). Этот метод отыскания точек бифуркации (а также его обобщения) применялся в [12] для решения широкого класса проблем нелинейной физики.

Сравним результаты численных экспериментов по построению критических кривых для модели ДК в in-line-геометрии с экспоненциально меняющейся шириной и моделей прямоугольных ДК с неоднородностями на концах при $L = 7$, $\Delta = 0,7$, $\varkappa_l = 1$ и $\varkappa_r = 0$. Отметим, что наша цель заключается «только» в доказательстве качественного соответствия критических кривых в трех моделях. На рис. 2 показано распределение внутреннего магнитного поля $\varphi_x(x)$ для однофлюксонного вихря Φ^1 вдоль контакта при $h_e = 1,4$

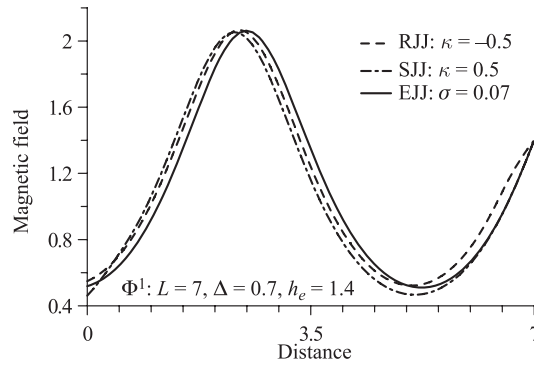


Рис. 2. Распределение внутреннего магнитного поля $\varphi_x(x)$ вдоль контакта для основного флюксона Φ^1 при $h_e = 1,4$ для трех in-line-моделей ДК (EJJ, RJJ и SJJ) при $\lambda_0 = 10^{-4}$

для трех in-line-моделей ДК — (EJJ, RJJ и SJJ) при $\lambda_0 = 10^{-4}$, т.е. перед разрушением флюксона внешним током γ . Соответствующие распределения джозефсоновского тока $j_C(x) \sin \varphi(x)$ в ДК представлены на рис. 3.

Отметим качественное совпадение обеих указанных зависимостей. Существенные количественные отличия кривых имеют место преимущественно в окрестности концов, где амплитуда джозефсоновского тока в RJJ- и SJJ-моделях резко меняется. Найденные в численном эксперименте при $h_e = 1,4$ значения критических токов распределений $\gamma_{cr}(EJJ) \approx 0,126$, $\gamma_{cr}(RJJ) \approx 0,121$, $\gamma_{cr}(SJJ) \approx 0,134$ достаточно близки.

На рис. 4 демонстрируются бифуркационные кривые вида (0.6), соответствующие устойчивым однофлюксонным решениям Φ^1 краевых задач (0.1) и (0.4). Сплошная кривая соответствует Φ^1 -распределениям в EJJ-модели ДК

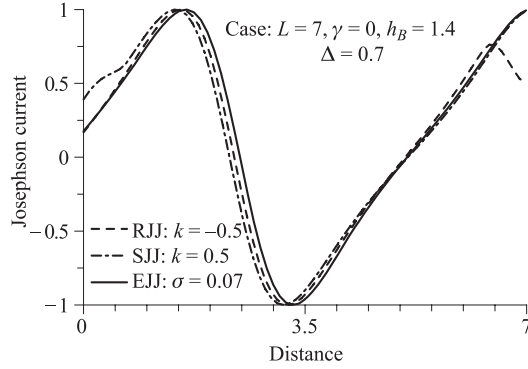


Рис. 3. Соответствующее рис. 1 распределение джозефсоновского тока $j_C(x) \sin \varphi(x)$

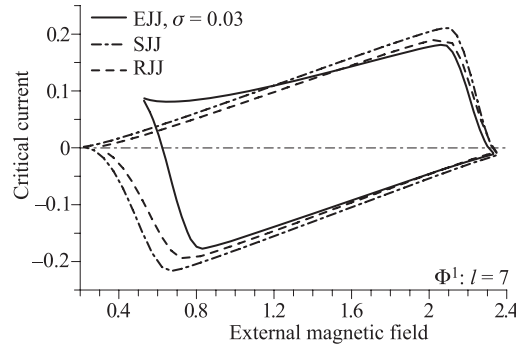


Рис. 4. Бифуркационные кривые однофлюксонного состояния Φ^1 . Сплошная кривая соответствует EJJ-модели ДК с коэффициентом формы $\sigma = 0,03$, пунктирная — SJJ-модели с прямоугольной шунтовой неоднородностью ($\Delta = 0,7$, $\kappa = 0,5$), а штрихпунктирная — RJJ-модели с прямоугольным микрорезистором ($\Delta = 0,7$, $\kappa = -0,5$)

с коэффициентом формы $\sigma = 0,03$, пунктирная — SJJ-модели с прямоугольной шунтовой неоднородностью слева ($\kappa = 0,5$, $\zeta = 0,35$), а штрихпунктирная — RJJ-модели с прямоугольным микрорезистором справа ($\kappa = -0,5$, $\zeta = 6,65$). Наблюдается качественное совпадение трех бифуркационных кривых. Каждая бифуркационная кривая ограждает некоторую замкнутую фигуру на плоскости (h_e, γ) , причем точки $h_e = h_{\min}$ и $h_e = h_{\max}$ представляют собой нижнее и верхнее критические магнитные поля для рассматриваемого вихря. Из-за наличия дополнительного «геометрического» тока $\sigma [\varphi_x(x) - h_e]$ в EJJ-модели, а также тока $\kappa \sin \varphi$ в моделях с неоднородностями, критические значения внешнего тока γ , соответствующие указанным значениям h_e , отличны от нуля. Это означает, что левее (правее) двух точек $\gamma_{\text{cr}}(\Phi^1) = 0$

флюксон Φ^1 имеет ток «рождения» γ_b и ток «уничтожения» γ_{cr} . Например, при $h_e = 0,6$ для ЕJJ-модели ($\sigma = 0,03$) имеем $\gamma_b \approx 0,026$ и $\gamma_{cr} \approx 0,082$, а при $h_e = 2,31$ соответственно $\gamma_b \approx -0,006$ и $\gamma_{cr} \approx -0,011$.

Аналогичный эффект наблюдается и для «высших» вихрей вида Φ^n при $n > 1$ во всех трех моделях.

На рис. 5 сравниваются полученные численным путем критические зависимости «критический ток – магнитное поле» для рассмотренных выше ЕJJ- и SJJ-контактов. Критические кривые для этих двух моделей качественно совпадают.

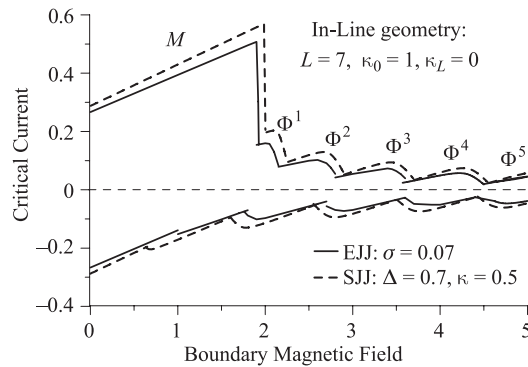


Рис. 5. Критическая зависимость «критический ток – магнитное поле». Сплошная кривая соответствует ЕJJ-модели ДК с $\sigma = 0,07$, пунктирная — SJJ-модели с прямоугольной шунтовой неоднородностью ($\Delta = 0,7, \kappa = 0,1$)

Численный эксперимент показывает (см. рис. 6), что в контактах с резистивной неоднородностью в окрестности центра $L/2$ за счет пиннинга на неоднородности устойчивыми становятся смешанные распределения магнитного потока $\varphi(x)$ в контакте, «составленные» из вихрей противоположной полярности. Конкретный пример распределения вида $\Phi^1\Phi^{-1}$ (флюксон слева, антифлюксон справа) демонстрируется при $h_e = 2,2, \zeta = 3,5$ и $\kappa = -1$ на рис. 7 (сплошная кривая). Там же для сравнения показаны чистые Φ^1 -распределение (пунктирная кривая) и Φ^2 -распределение (штрихпунктирная кривая).

В отличие от этого случая, в контактах с неоднородностью в окрестности концов даже при достаточно больших значениях h_e (численно проверялись решения вплоть до $h_e = 10$) нет устойчивых смешанных флюксон-антифлюксонных вихрей, дающих вклад в критическую кривую. Поэтому критические кривые контакта «в целом» составлены только из кусков бифуркационных кривых для мейснеровского (M) распределения и чистых

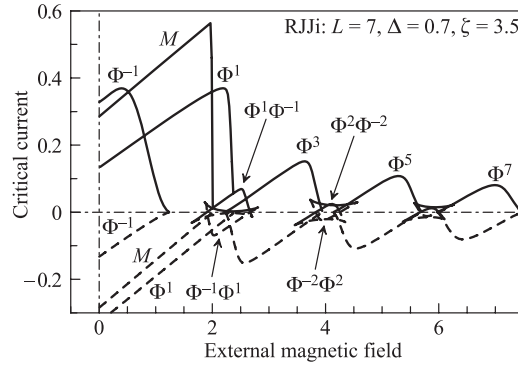


Рис. 6. Критическая зависимость «критический ток – магнитное поле» для ДК с резистивной неоднородностью в центре контакта

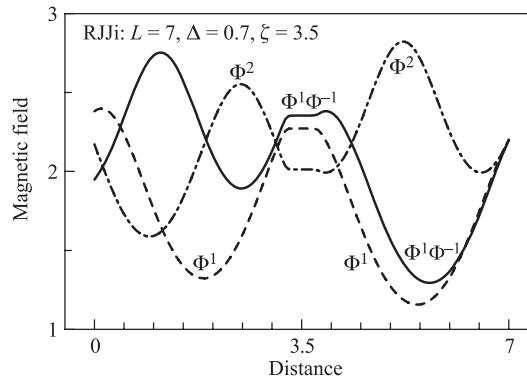


Рис. 7. Φ^1 -, Φ^2 - и $\Phi^1\Phi^{-1}$ -распределения в ДК с резистивной неоднородностью в центре контакта

n -флюксонных вихрей Φ^n , $n = 1, 2, \dots$. Максимумы критических кривых убывают монотонно с возрастанием поля h_e (в контактах с внутренней неоднородностью максимумы критических кривых убывают немонотонным образом из-за стабилизирующего влияния неоднородности на смешанные флюксон-антифлюксонные пары вихрей [12]). По-видимому, отсутствие устойчивых смешанных распределений в ЕJJ объясняет улучшенный спектр излучения таких ДК в сравнении с прямоугольными ДК [2]. Результаты настоящей работы показывают, что модели прямоугольных контактов с неоднородностями в окрестности концов обладают аналогичным свойством.

В заключение отметим, что результаты численных экспериментов демонстрируют возможность замены распределенной вдоль контакта неоднородно-

сти локальной неоднородностью резистивного или шунтового вида, что с технологической точки зрения может иметь определенные преимущества. Критические кривые контактов с неоднородностями на конце не содержат кусков бифуркационных кривых смешанных флюксон-антифлюксонных вихрей магнитного потока, что позволяет ожидать сужение ширины линии излучения осциллятора на движущихся флюксонах для таких ДК, аналогичное тому, которое имеет место в ЕJJ.

Авторы выражают благодарность проф. И. В. Пузынину и Н. М. Плакиде за стимулирующие дискуссии и поддержку работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Benabdallah A., Caputo J. G., Scott A. C.* // Phys. Rev. B. 1996. V. 54. P. 16139.
2. *Carapella G., Martucciello N., Costabile G.* // Phys. Rev. B. 2002. V. 66. P. 134531.
3. *Goldobin E., Sterck A., Koelle D.* E-print: cond-mat/0008237.
4. *Sakai S., Samuelsen M. R., Olsen O. H.* // Phys. Rev. B. 1987. V. 36. P. 217.
5. *Pagano S. et al.* Nonlinear Superconducting Devices and High Tc Materials / Ed. R. D. Parmentier, N. F. Pedersen. Singapore: World Scientific, 1995.
6. *Benabdallah A., Caputo J. G., Scott A. C.* // J. Appl. Phys. 2000. V. 88. P. 3527.
7. *Семерджиева Е. Г., Бояджиев Т. Л., Шукринов Ю. М.* // ФНТ. 2004. Т. 30. С. 610.
8. *Shukrinov Yu. M., Semerdjieva E. G., Boyadjiev T. L.* // J. Low Temp. Phys. 2005. V. 139. P. 299.
9. *Koshelets V. P. et al.* // Physica C. 2001. V. 372–376. P. 316.
10. *Nagatsuma T. et al.* // J. Appl. Phys. 1985. V. 58. P. 4412.
11. *Koshelets V. P. et al.* // Phys. Rev. B. 1997. V. 56. P. 5572.
12. *Бояджиев Т. Л.* Дисс... д-ра физ.-мат. наук. Дубна: ОИЯИ, 2002.
13. *Malomed B. A., Ustinov A. V.* // J. Appl. Phys. 1990. V. 67. P. 3791.
14. *Larsen B. H., Mygind J., Ustinov A. V.* // Phys. Lett. A. 1994. V. 193. P. 359.
15. *Семерджиева Е. Г., Бояджиев Т. Л., Шукринов Ю. М.* // ФНТ. 2005. Т. 31. С. 1110.
16. *Licharev K. K.* Dynamics of Josephson Junctions and Circuits. New York: Gordon and Breach, 1986.
17. *Гальперн Ю. С., Филиппов А. Т.* // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. С. 1527.

18. *Бояджиев Т. Л., Павлов Д. В., Пузынин И. В.* Сообщение ОИЯИ Р11-88-409. Дубна, 1988;
Boyardjiev T. L., Pavlov D. V., Puzynin I. V. // Proc. of the int. conf. on num. math. and appl. Sofia, 1988.

Получено 19 мая 2006 г.

Редактор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 29.06.2006.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,75. Уч.-изд. л. 0,92. Тираж 305 экз. Заказ № 55389.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/