ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

4-2006-130

На правах рукописи
УДК 530.145

МОТОВИЛОВ
Александр Константинович

ТЕОРИЯ РЕЗОНАНСОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ

Специальность: 01.04.02 — теоретическая физика

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Дубна 2006

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова Объединенного института ядерных исследований.

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор — Л. Д. Блохинцев

доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник — Б. В. Данилин

доктор физико-математических наук,
профессор — А. А. Шкаликов

Ведущая организация:

Научно-исследовательский институт физики им. В. А. Фока
Санкт-Петербургского государственного университета

Защита диссертации состоится на заседании специализированного совета Д 720.001.01 в Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований "______"_____________2006 г. по адресу: г. Дубна Московской области, ОИЯИ, ЛТФ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке
Объединенного института ядерных исследований.

Автореферат разослан "______"______________2006 г.

Ученый секретарь совета,
доктор физико-математических наук — С. В. Голоскоков

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Резонансы многоканальных систем играют определяющую роль во многих задачах ядерной, атомной и молекулярной физики. В более широком смысле резонансы представляют собой одно из самых интересных и интригующих явлений, наблюдаемых в процессах рассеяния, причем последние могут относиться не только к квантовой физике, но также к оптике, акустике, механике упругих сред и т.д.

Хорошо известно, что наличие у квантовой системы некоторого резонанса связано с возможностью возникновения и последующего распада так называемого метастабильного или квазистационарного состояния. При этом мнимая часть энергии резонанса, называемая его полушириной, определяет экспоненциальную компоненту в функциональной зависимости вероятности распада такого состояния от времени.

Основные проблемы, относящиеся к определению резонанса, наиболее отчетливо описаны Дж. Хаулэндом (1974) и Б. Саймоном (1978): в противоположность обычному спектру, резонансы не являются унитарным инвариантом квантово-механического гамильтониана, и, следовательно, невозможно дать удовлетворительное определение резонанса в терминах отдельно взятого оператора, действующего в абстрактном гильбертовом пространстве. Рассмотрение резонансов всегда подразумевает явное или неявное выделение некоторых внешних структур, скажем, «свободного» или «невозмущенного» гамильтонианов, по отношению к которым и проявляются резонансы. Еще одной проблемой, связанной с резонансами является тот факт, что отвечающие им (обобщенные) собственные функции, так называемые гамовские векторы, не допускают никакой удовлетворительной интерпретации в терминах исходного гильбертова пространства. В лучшем случае такие «векторы» могут рассматриваться лишь как функционалы над некоторым плотным линейным подмножеством гильбертова пространства задачи.

Общепринятая интерпретация резонансов в квантовой механике как комплексных полюсов матрицы рассеяния, аналитически продолженной на нефизические листы комплексной плоскости энергии, восходит к известной работе Г. Гамова (1928), посвященной описанию α-распада тяжелых ядер. Естественно, что такая интерпретация опирается на аппарат того или иного варианта теории рассеяния, в рамках которой происходит сравнение наблюдаемой динамики квантовой системы с некоторой ее «свободной» динамикой. Спектр резонансов проявляется на фоне последней и, вообще говоря, зависит от ее выбора. В этом смысле резонансы столь же относительны как относительна сама матрица рассеяния.

Несмотря на значительный прогресс, достигнутый в описании нестабильных состояний, теория резонансов в системах с многими каналами рассеяния все еще далека от завершения. Одной из нерешенных фундаментальных проблем является строение матрицы рассеяния и резольвенты (а также T-матрицы и других тесно связанных с ней объектов) на нефизических листах энергии в многоканальных задачах и, в частности, в задачах трех и большего числа частиц. Поскольку и матрица рассеяния, и функция Грина являются аналитическими функциями, их значения на нефизических листах должны однозначно определяться непосредственно через значения на физическом листе. Центральным здесь является вопрос о том, какие именно ключевые объекты, входящие в матрицу рассеяния и функцию Грина на физическом листе или из них образованные, задают местоположение резонансов на том или ином нефизическом листе. При наличии ответа на этот вопрос задача поиска резонансов могла бы решаться напрямую, без проведения продолжений через непрерывный спектр, и исключительно в терминах физического листа.

Еще более фундаментальной является проблема операторного смысла резонансов и гамовских собственных векторов. Здесь мы имеем в виду вопрос о том, обычным спектром какого оператора являются резонансы той или иной задачи рассеяния и в каком именно гильбертовом пространстве может действовать этот заведомо несамосопряженный оператор, по сути долженствующий играть роль эффективного гамильтониана для резонансных состояний. В частности, требуется, чтобы его собственные векторы, отвечающие резонансам, представляли собой если не полные гамовские векторы, то хотя бы их определяющие компоненты. Имея на руках эффективный гамильтониан, можно было бы уже относительно легко обсуждать проблемы полноты и даже базисности резонансных состояний и/или их компонент, опираясь на хорошо известные факты из теории линейных операторов.

Единственный вполне успешный пример операторной интерпретации резонансов предоставляет теория рассеяния Лакса-Филлипса. А именно, в подходе Лакса-Филлипса полюса двухчастичной матрицы рассеяния на нефизическом листе ассоциируются с дискретным спектром генератора полугруппы, возникающей в результате окаймления эволюционной группы задачи проекторами на так называемое трансляционно–инвариантное подпространство. На этом основании возникает возможность доказательства полноты и базисности резонансных состояний, по крайней мере, в трансляционно-инвариантном подпространстве. Схема Лакса–Филлипса имеет, однако, достаточно жесткие ограничения на область ее применимости. В частности, в случае уравнения Шредингера размерность конфигурационного пространства должна быть нечетной, что означает, что задача N тел уже при $N = 3$ не может рассматриваться в рамках этого подхода. Кроме того, подход Лакса-Филлипса неприменим к многоканальным гамильтонианам при наличии у них хотя бы двух различных порогов непрерывного спектра. В полной мере схему Лакса–Филлипса удается реализовать лишь в случаях, когда риманова поверхность матрицы рассеяния содержит не более двух листов комплексной плоскости энергии. Поэтому очень важным представляется поиск альтернативных вариантов операторной интерпретации резонансов, к которым можно было бы обращаться в случае систем с многими каналами рассеяния.

Наконец, актуальным является создание новых методов численных расчетов резонансов, дополняющих существующие методы или снимающих их ограничения, такие, например, как секториальность разрешенной области поиска резонансов в методе комплексного скейлинга и обусловленная этим принципиальная невозможность вычисления энергий виртуальных состояний в случае потенциалов юкавского или гауссовского типов.

Целью диссертации является развитие теории резонансов в многоканальных системах по следующим направлениям:

- операторная интерпретация резонансов в многоканальных системах произвольной природы;
- исследование областей голоморфности и описание строения T-матриц, матриц рассеяния и функций Грина на нефизических листах римановой поверхности энергии в многоканальной задаче рассеяния с бинарными каналами и в задаче трех частиц;
- редукция задачи поиска полюсов матриц рассеяния на нефизических листах к решению уравнений, записывающихся исключительно в терминах значений T- или S-матриц на физическом листе;
- разработка методов численного расчета трехчастичных резонансов на основании дифференциальных уравнений Фаддеева.

Научная новизна и практическая ценность диссертации

Первый круг результатов диссертации относится к задаче трех частиц с быстро убывающими парными взаимодействиями, а также к задаче рассеяния для матричного оператора Шредингера с бинарными каналами. Главный аналитический результат для названных задач — явные представления для значений T–матрицы на нефизических листах римановой поверхности энергии. Основным достоинством этих представлений является то, что они позволяют описать строение T-матрицы на том или ином нефизическом листе в терминах ее же значений, но взятых на физическом листе, а затем найти аналогичные явные представления для аналитического продолжения матрицы рассеяния и резольвенты. Все эти представления являются новыми и получены впервые. Представления для T-матрицы являются новыми уже для одноканального случая, то есть для задачи двух частиц.

На основании анализа полученных явных представлений в диссертации установлено, что в роли ключевых объектов, рассматриваемых только на физическом листе энергии, но определяющих все нетривиальные сингулярности T-матриц, матриц рассеяния и функций Грина на нефизических листах, выступают операторно-значные функции, имеющие смысл усеченных матриц рассеяния. Установлено, в частности, что резонансами на том или ином нефизическом листе оказываются те значения энергии, при которых соответствующая усеченная матрица рассеяния имеет собственное число, равное нулю. При этом роль компонент собственного вектора усеченной матрицы рассеяния, отвечающего нулевому собственному числу при резонансном значении энергии, играют амплитуды развала резонансного состояния. Нормировка такого собственного вектора на единицу фиксирует вероятности распада резонансного состояния по различным каналам и направлениям.

Сформулированное утверждение по поводу ключевой роли усеченных матриц рассеяния, играемой ими при определении местоположения резонансов, является главным новым результатом диссертации, имеющим непосредственные практические приложения. Во-первых, из этого утверждения следует возможность при поиске резонансов оставаться исключительно на физическом листе. Во-вторых, оно означает, что для расчета резонансов можно использовать любой метод, позволяющий вычислять при комплексных энергиях на физическом листе амплитуды процессов, необходимые для построения соответствующих усеченных матриц рассеяния.

В диссертации впервые предложено использовать для этой цели дифференциальные уравнения Фаддеева. Новый подход к вычислению трехчастичных резонансов и виртуальных уровней на основании уравнений Фаддеева был детально разработан и практически реализован для нескольких конкретных трехчастичных систем.

Второй круг результатов, включенных в диссертацию, имеет более абстрактный и, соответственно, более универсальный характер. Эти результаты относятся уже к многоканальным задачам произвольной природы. Отправной точкой является предположение о том, что гильбертово пространство задачи тем или иным способом разложено в ортогональную сумму двух подпространств и относительно этого разложения изучаемый гамильтониан H имеет вид операторной 2×2-матрицы. С точки зрения теории резонансов наиболее интересной здесь является фешбаховская ситуация, когда спектр одной из диагональной блок-компонент самосопряженной операторной матрицы H частично или полностью вложен в непрерывный спектр другой диагональной блок-компоненты.

Главным новым результатом для указанной спектральной ситуации является операторная интерпретация резонансов. А именно, установлено существование семейства несамосопряженных операторов, спектр каждого из которых — наряду с частью вещественного спектра гамильтониана H — включает также и резонансы, порождаемые этим гамильтонианом на фоне заданного разбиения гильбертова пространства задачи на два ортогональных подпространства. С аналитической точки зрения каждый из упомянутых несамосопряженных операторов представляет собой некоторый операторный корень одной из трансфер-функций (комплементов Шура), ассоциированных с рассматриваемым 2×2-матричным представлением гамильтониана H. Именно эти операторные корни и играют роль эффективных гамильтонианов для фешбаховского резонансного спектра.

Наряду с результатами по операторной интерпретации резонансов диссертация содержит ряд новых фундаментальных результатов, относящихся к общей задаче внедиагональных возмущений спектральных подпространств абстрактного самосопряженного оператора. Среди этих результатов — новые точные оценки на операторный угол поворота спектрального подпространства, отвечающего изолированной части спектра. В частности, дано значительное обобщение апостериорной $\operatorname{tg}\Theta$-теорема Дэвиса-Кахана, а также найдена оценка, имеющая смысл новой, уже априорной $\operatorname{tg}\Theta$-теоремы.

Кроме того, диссертация содержит ряд новых результатов, касающихся условий разрешимости операторного уравнения Риккати и оценок для нормы его решений.

На защиту выдвигаются следующие результаты:

1. В многоканальной задаче с бинарными каналами и в задаче трех частиц построены явные представления для T-матриц, матриц рассеяния и ядер резольвент на нефизических листах энергии, которые не только раскрывают строение этих объектов, но и указывают на практические способы вычисления резонансов.

2. Доказано, что резонансами на том или ином нефизическом листе являются те значения энергии, при которых ассоциированная с этим листом усеченная матрица рассеяния, рассматриваемая на физическом листе,

имеет собственное число нуль. Установлено, что компоненты собственного вектора усеченной матрицы рассеяния, отвечающего нулевому собственному числу при резонансном значении энергии, имеют смысл амплитуд развала соответствующего нестабильного состояния.

3. Предложен новый подход к вычислению трехчастичных резонансов и виртуальных уровней на основании дифференциальных уравнений Фаддеева. Этот подход успешно применен к ряду конкретных трехчастичных систем.

4. Впервые найдена операторная интерпретация резонансов для широкого класса многоканальных систем.

5. Получен ряд новых оценок на операторный угол поворота спектрального подпространства самосопряженного оператора под действием внедиагональных возмущений. Доказана расширенная версия апостериорной $\operatorname{tg}\Theta$-теоремы Дэвиса-Кахана и найдена оптимальная оценка на операторный угол, имеющая смысл новой, уже априорной $\operatorname{tg}\Theta$-теоремы. Доказаны новые теоремы о существовании ограниченных решений операторного уравнения Риккати и найдены оценки для их норм.

Апробация работы

Результаты, включенные в диссертацию, докладывались на семинарах в ЛТФ и ЛИТ ОИЯИ, в Московском и Санкт-Петербургском гос. университетах, в университетах Бонна, Бохума и Регенсбурга (Германия), в Институте Макса Планка по динамике и самоорганизации (Геттинген, Германия) и Рейнской высшей технической школе (Аахен, Германия), в Варшавском университете (Польша), в университетах Миссури-Колумбия и Миссури-Ролла (США), в Стокгольмском университете и Стокгольмской королевской высшей технической школе (Швеция), в Институте атомных и молекулярных наук Академии Синика (Тайбэй, Тайвань), Институте ядерных исследований Чешской АН (Ржеж, Чехия) и Университете Южной Африки (Претория, ЮАР), а также представлялись на различных международных конференциях и совещаниях, среди которых: XIII Warsaw Symposium on Elementary Particle Physics (Kazimierz, Poland, 1990), International Workshop "Mathematical Aspects of the Scattering Theory and Applications" (St. Petersburg, USSR, 1991), III International Congress on Industrial and Applied Mathematics (Hamburg, Germany, 1995), International Workshop on Operator Theory and Applications (Regensburg, Germany, 1995), IX International Conference on Computational Modeling and Computing in Physics (Dubna, Russia, 1996), XV International Conference on

Few-Body Problems in Physics (Groningen, the Netherlands, 1997), Mark Krein International Conference on Operator Theory and Applications (Odessa, Ukraine, 1997), International Conference "Differential Equations and Related Topics" (Moscow, Russia, 1998), XVI European Conference on Few-Body Problems in Physics (Autrans, France, 1998), International Conference "Mathematical Results in Quantum Mechanics (QMath7)" (Prague, Czech Republic, 1998), International Workshop on Schrödinger operators (Bonn, Germany, 1998), Workshop on Nuclear Reactions in Stars and in the Laboratory (Trento, Italy, 1999), The 1999 UAB-GIT International Conference on Differential Equations and Mathematical Physics (Birmingham, Alabama, USA, 1999), XVI IUPAP International Conference on Few-Body Problems in Physics (Taipei, Taiwan, 2000), The 2002 UAB International Conference on Differential Equations and Mathematical Physics (Birmingham, Alabama, USA, 2002), Workshop on Computational Physics dedicated to the memory of Stanislav Merkuriev (St. Petersburg, Russia, 2003), International Conference "Differential Equations and Related Topics" dedicated to I. G. Petrovskii (Moscow, Russia, 2004), XIX European Conference on Few-Body Problems in Physics (Groningen, The Netherlands, 2004), IV Workshop on the Dynamics and Structure of Critically Stable Quantum Few-Body Systems (Dresden, Germany, 2005), The 8th Workshop on Numerical Ranges and Numerical Radii (Bremen, Germany, 2006).

Публикации

В диссертации представлены результаты, опубликованные в 38 работах, список которых приводится в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав и трех приложений. Общий объем диссертации — 253 страницы. Она содержит 12 таблиц, 21 рисунок и список литературы из 214 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **Введении** дается краткий обзор истории и современного состояния теории резонансов, очерчивается круг вопросов, рассматриваемых в диссертации, и указываются ее цели. Кроме того, здесь дается изложение основных результатов и формулируются положения диссертации, выносимые на защиту. Заключительная часть Введения содержит сжатое описание структуры работы.

Глава 1 посвящена описанию строения T-матрицы, матриц рассеяния и резольвенты на нефизических листах римановой поверхности энергии в многоканальной задаче рассеяния с бинарными каналами.

Раздел 1.1 является введением к этой главе. В частности, в нем описывается структура главы и дается схематичное изложение ее результатов в целом.

В **Разделе 1.2** вводятся основные обозначения и определяется матричный оператор Шредингера в импульсном представлении с m ($1 \le m < \infty$) бинарными каналами. Все пороги λ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, этих каналов считаются различными. Здесь же описывается два типы рассматриваемых взаимодействий. В координатном представлении первому типу взаимодействий соответствуют финитные потенциалы. Второму типу отвечают потенциалы, убывающие в координатном представлении не медленнее чем экспоненциально. В обоих случаях ядра потенциальных операторов в импульсном представлении должны быть голоморфны по каждой импульсной переменной либо во всем комплексном пространстве (для первого типа потенциалов), либо в некоторой комплексной цилиндрической окрестности соответствующего вещественного пространства (для второго типа). Кроме того, накладываются определенные условия на убывание ядер потенциалов по вещественным компонентам импульсных переменных. Для первого типа потенциальных операторов накладываются дополнительные ограничения на рост их ядер вдоль мнимых компонент импульсов. Большая часть Раздела 1.2 связана с исследованием уравнения Липпмана–Швингера для T-матрицы. Весь анализ этого уравнения проводится в импульсном представлении, что позволяет пользоваться формулами для аналитического продолжения интегралов типа Коши. Устанавливается, что для обоих рассматриваемых типов потенциалов матричный интегральный оператор уравнения Липпмана-Швингера, погруженного в подходящее банахово пространство, допускает аналитическое продолжение на нефизические листы комплексной плоскости энергии как операторно-значная функция, значениями которой являются компактные операторы. Одновременно описывается полная риманова поверхность задачи и выясняются области голоморфности компонент оператора Липпмана-Швингера на каждом ее листе.

Как в многоканальной задаче рассеяния с бинарными каналами, так и в задаче трех частиц листы римановой поверхности энергии обозначаются через Π_l, где l — мультииндекс, образованный из индексов порогов непрерывного спектра. Индекс порога указывает, в частности, на количество его обходов, которые необходимо совершить для того, чтобы попасть из точки на физическом листе в ту же точку на листе Π_l. По определению индекс порога, являющегося корневой точкой ветвления, может принимать только два значения — 0 или 1. Если же порог является логарифмической точкой ветвления, как это имеет место в случае порога развала на три частицы, то его индекс может быть произвольным целым числом. В этом случае индекс порога указывает не только на количество обходов вокруг него, но также и на их направление. Физическому листу соответствуют нулевые значения всех компонент мультииндекса. Поэтому в наших построениях физический лист всегда обозначается через Π_0.

В **Разделе 1.3** проводится прямое решение уравнения Липпмана-Швингера для T-матрицы, продолженного на нефизические листы энергии z. Уже на промежуточных этапах процедуры решения уравнения для $T(z)\big|_{\Pi_l}$ проявляется важная роль оператора, получаемого из полной матрицы рассеяния $S(z)$ на физическом листе по следующей формуле:

$$S_l(z) = \widehat{I} + \widetilde{L}\big(S(z) - \widehat{I}\,\big)L, \quad z \in \Pi_0, \tag{1}$$

где $\widehat{I}$ — тождественный оператор, а L и $\widetilde{L}$ — диагональные числовые матрицы, диагональные элементы которых задаются непосредственно в терминах компонент мультииндекса l рассматриваемого нефизического листа Π_l. При этом главная диагональ L попросту совпадает с мультииндексом l. Главная диагональ $\widetilde{L}$ получается из главной диагонали L в результате замены единицей всех ее ненулевых элементов, отличающихся от единицы. Тем самым переход от матрицы $(S - \widehat{I}\,)$ к матрице $\widetilde{L}(S - \widehat{I}\,)L$ означает замену нулевым оператором всех элементов тех строк и столбцов $(S - \widehat{I}\,)$, номера которых отвечают нулевым значениям соответствующих компонент мультииндекса l.

Операторно-значная функция $S_l(z)$, $z \in \Pi_0$, определяемая равенством (1) называется усеченной матрицей рассеяния, отвечающей нефизическому листу Π_l.

В конечном счете решение уравнения Липпмана-Швингера для $T(z)\big|_{\Pi_l}$ приводит к формуле

$$T(z)\big|_{\Pi_l} = \left(T(z) - T(z)\mathrm{J}^{\dagger} L A(z) S_l(z)^{-1} \mathrm{J}(z) T(z) \right)\Big|_{\Pi_0}, \tag{2}$$

дающей явное представление для значений матрицы $T(z)$ на нефизическом листе Π_l через ее же значения и значения усеченной матрицы рассеяния $S_l(z)$ на физическом листе Π_0. Присутствующие в (2) диагональные операторные матрицы $\mathrm{J}(z)$ и $\mathrm{J}^{\dagger}(z)$ осуществляют сужение ядер $T(z)$ на различные энергетические поверхности (первоначально определяемые при вещественных $z \geq \lambda$ формулами типа $|\boldsymbol{k}|^2 = z - \lambda$, где $\boldsymbol{k}$ и λ — импульсная переменная и порог одного из каналов), соответственно по их первому и последнему импульсным аргументам. Через $A(z)$ обозначается некоторая целая матричнозначная функция на Π_0, значениями которой являются скалярные диагональные матрицы.

В многоканальной задаче с m бинарными каналами усеченная матрица рассеяния $S_l(z)$ представляет собой операторную $m \times m$-матрицу вида

$$S_l(z) = \widehat{I} + \widetilde{L}J(z)T(z)\mathrm{J}^\dagger(z)LA(z), \tag{3}$$

т.е. она определяется непосредственно в терминах ядер матрицы $T(z)$, взятых на энергетических поверхностях по обеим импульсным переменным.

Явное представление (2) является центральным результатом Главы 1. В качестве простейшей иллюстрации этого результата приведем соответствующую формулу для одноканального, т.е. двухчастичного случая, полагая, что частицы перемещаются в трехмерном пространстве и движение центра масс отделено. В этом случае имеется только один нефизический лист Π_1. Представление (2) для значений двухчастичной T-матрицы $t(z)$ на листе Π_1 имеет вид

$$t(z)\big|_{\Pi_1} = \left(t(z) + \pi\mathrm{i}\sqrt{z}\; t(z)j^\dagger(z)\, s(z)^{-1}\, j(z)t(z) \right)\Big|_{\Pi_0}. \tag{4}$$

Все операторы, присутствующие в правой части (4), включая матрицу рассеяния $s(z)$, берутся при том же положении энергии z, что и в левой части, но на физическом листе. Квадратный корень $\sqrt{z}$ соответствует арифметической ветви функции $z^{1/2}$. Через $j(z)$ обозначается оператор сужения на энергетическую поверхность, определяемую первоначально при неотрицательных z формулой $|\boldsymbol{k}|^2 = z$. Это означает, что произведение $j(z)t(z)$ в качестве ядра имеет полумассовую T-матрицу $t(\sqrt{z}\widehat{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k}', z)$, $\widehat{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{k}' \in \mathbb{R}^3$, $z \in \Pi_0$, причем на энергетической поверхности находится ее первый аргумент–импульс $\sqrt{z}\widehat{\boldsymbol{k}}$ с единичным угловым вектором $\widehat{\boldsymbol{k}}$, $|\widehat{\boldsymbol{k}}| = 1$. Наоборот, у ядра произведения $t(z)j^\dagger(z)$ на этой энергетической поверхности находится его второй аргумент-импульс. Аналогом, а точнее, частным случаем формулы (3), здесь является выражение для двухчастичной матрицы рассеяния

$$s(z) = \widehat{I} - \pi\mathrm{i}\sqrt{z}\; j(z)t(z)\, j^\dagger(z),$$

означающее в терминах ее ядра, что

$$s(\widehat{\boldsymbol{k}}, \widehat{\boldsymbol{k}}', z) = \delta(\widehat{\boldsymbol{k}}, \widehat{\boldsymbol{k}}') - \pi\mathrm{i}\sqrt{z}\; t(\sqrt{z}\widehat{\boldsymbol{k}}, \sqrt{z}\widehat{\boldsymbol{k}}', z),$$

где $\delta(\widehat{\boldsymbol{k}}, \widehat{\boldsymbol{k}}')$ — дельта-функция на единичной сфере S^2.

В **Разделе 1.4** описывается аналитическое продолжение многоканальной матрицы рассеяния или, точнее, аналитическое продолжение двух ее возможных вариантов. Для продолженных матриц рассеяния находятся их явные выражения на нефизических листах, в которых снова участвуют только T-матрица и усеченная S-матрица, взятые на физическом листе.

В **Разделе 1.5** аналогичные явные представления строятся для аналитического продолжения многоканальной резольвенты на различные нефизические листы. Как в этом разделе, так и в Разделе 1.4, отправной точкой для построений являются явные представления для T-матрицы (2).

Раздел 1.6 открывается утверждением о том, что резонансами на нефизическом листе Π_l являются нули усеченных матриц рассеяния $S_l(z)$, т.е. те точки $z \in \Pi_0$, где операторная матрица $S_l(z)$ обладает собственным числом, равным нулю. Это утверждение делается на том основании, что на нефизических листах нетривиальные (т.е. отличающиеся от таковых на Π_0) сингулярности матриц рассеяния, T-матрицы и резольвенты определяются особенностями соответствующих обратных усеченных матриц рассеяния $S_l(z)^{-1}$. Остаток Раздела 1.6 посвящен разъяснению физического смысла собственных векторов усеченных матриц рассеяния, отвечающих нулевому собственному числу при резонансных значениях энергии z. Здесь устанавливается, что компоненты всякого такого собственного вектора имеют смысл амплитуд развала соответствующего резонансного состояния по открытым для этого развала каналам. В частности, в простейшем — двухчастичном — случае энергия z является резонансом на листе Π_1, если существует функция $\mathscr{A}(\widehat{\boldsymbol{k}})$, заданная на сфере S^2 и не равная тождественно нулю, такая, что для той же самой энергии z на физическом листе выполняется равенство $s(z)\mathscr{A} = 0$. Функция $\mathscr{A}(\widehat{\boldsymbol{k}})$ представляет собой амплитуду развала соответствующего резонансного состояния по различным направлениям $\widehat{\boldsymbol{k}}$. В этом случае можно построить гамовское решение $\psi_{\rm res}(\boldsymbol{x})$ уравнения Шредингера в координатном представлении, содержащее в своей асимптотике при больших значениях относительной координаты частиц $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ лишь уходящую сферическую волну с амплитудой $\mathscr{A}(-\widehat{\boldsymbol{x}})$,

$$\psi_{\rm res}(\boldsymbol{x}) \underset{\boldsymbol{x}\to\infty}{\sim} \mathscr{A}(-\widehat{\boldsymbol{x}}) \frac{\exp\left(\mathrm{i}z^{1/2}\big|_{\Pi_1}|\boldsymbol{x}|\right)}{|\boldsymbol{x}|}$$
$$= \mathscr{A}(-\widehat{\boldsymbol{x}}) \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\sqrt{z}|\boldsymbol{x}|}}{|\boldsymbol{x}|}, \qquad \widehat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|.$$

В **Главе 2** рассматривается задача возмущений спектральных подпространств линейного самосопряженного оператора, а также тесно связанное с этой задачей операторное уравнение Риккати. Материал, представленный в данной главе, предваряет те результаты, которые будут относиться уже непосредственно к операторной интерпретации резонансов, порождаемых 2×2-матричными гамильтонианами.

Раздел 2.1 является вводным. В его первой части описывается постановка задачи о возмущении спектральных подпространств. Здесь, в частности, принимается, что A – самосопряженный оператор в гильбертовом $\mathfrak{H}$, а

V — его ограниченное самосопряженное возмущение. Принимается также, что σ_0 – изолированная часть спектра A, а $\mathfrak{H}_0$ — отвечающее ей спектральное подпространство. Через σ_1 обозначается остальной спектр A и через $\mathfrak{H}_1$ — спектральное подпространство A, ассоциированное с σ_1. После обсуждения общей задачи возмущений спектральных подпространств отмечается, что вращение спектрального подпространства $\mathfrak{H}_0$ или $\mathfrak{H}_1$ под действием возмущения V определяется внедиагональной частью этого возмущения относительно разбиения гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ в виде

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_0 \oplus \mathfrak{H}_1. \tag{5}$$

Диагональная часть V может лишь изменить спектр, но она никак не воздействует на положение инвариантных подпространств $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}$. Поэтому ядром теории возмущений инвариантных и, в том числе, спектральных подпространств является анализ внедиагональных возмущений, т.е. тех возмущений V, которые по отношению к разбиению (5) имеют вид

$$V = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Все дальнейшее рассмотрение относится к внедиагональным V. Части оператора A в спектральных подпространствах $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_1$ обозначаются соответственно через A_0 и A_1. Так что возмущенный оператор $H = A + V$ приобретает 2×2-матричный вид

$$H = \begin{pmatrix} A_0 & B \\ B^* & A_1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Одной из уже точно установленных фундаментальных констант для задачи внедиагональных возмущений является константа $c = \sqrt{3}/2$ в условии

$$\|V\| < \frac{\sqrt{3}}{2} d, \tag{8}$$

гарантирующем незакрывание лакун между изолированными частями σ_0 и σ_1 спектра оператора A, отделенными друг от друга расстоянием $d > 0$. Константа $c = \sqrt{3}/2$ относится к самому общему случаю задачи внедиагональных возмущений, когда не делается никаких предположений относительно взаимного расположения спектральных компонент σ_0 и σ_1.

Значение другой фундаментальной константы для общего случая этой задачи, а именно, значение константы c в условии $\|V\| < cd$, гарантирующем, что операторный угол Θ поворота спектрального подпространства $\mathfrak{H}_0$ под действием внедиагонального возмущения V остается меньшим $\pi/2$, все еще неизвестно. Известно лишь, что эта константа подчиняется условию

$$c_\pi \le c \le \sqrt{3}/2,$$

где

$$c_\pi = \frac{3\pi - \sqrt{\pi^2+32}}{\pi^2-4} = 0.503288\ldots.$$

Кроме того, в Разделе 2.1 разъясняется глубокая связь задачи внедиагональных возмущений инвариантных подпространств с операторным уравнением Риккати вида

$$XA_0 - A_1X + XBX = B^*, \tag{9}$$

а также с задачей факторизации операторных пучков типа

$$M_0(z) = A_0 - z + B(z-A_1)^{-1}B^*. \tag{10}$$

Отмечается, что существование ограниченного решения X для операторного уравнения Риккати (9) равносильно утверждению о том, что операторный угол Θ поворота спектрального подпространства $\mathfrak{H}_0$ под действием внедиагонального возмущения подчиняется оценке $\|\Theta\| < \pi/2$. Более того, в этом случае имеет место равенство

$$\operatorname{tg}\|\Theta\| = \|X\|. \tag{11}$$

Известно, что условие (8) незакрывания лакун между спектральными множествами σ_0 и σ_1 можно значительно ослабить в случае их специального взаимного положения. Достаточно хорошо изучен случай, когда эти множества субординированы, скажем, $\sup\sigma_0 < \inf\sigma_1$. Именно этот случай описывает знаменитая $\operatorname{tg}2\Theta$-теорема Дэвиса-Кахана, утверждающая, что каким бы большим ни было (ограниченное) внедиагональное возмущение V, интервал $(\sup\sigma_0, \inf\sigma_1)$ всегда остается в резольвентном множестве оператора $H = A+V$, а операторный угол поворота спектрального подпространства $\mathfrak{H}_0$ не превышает величины $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\|V\|}{d}\right)$, т.е. Θ при любых $\|V\|$ остается меньшим $\pi/4$.

В диссертации детально изучается другой случай специального взаимного положения спектральных компонент σ_0 и σ_1, а именно случай, когда

$$\sigma_0 \text{ целиком лежит в конечной лакуне } \sigma_1. \tag{12}$$

Одним из основных новых результатов Главы 2 является утверждение о том, что для спектральной ситуации (12) роль фундаментальной константы c в условии $\|V\| < cd$ незакрывания лакун между σ_0 и σ_1 играет число $\sqrt{2}$. Более того, условие

$$\|V\| < \sqrt{2}d \tag{13}$$

обеспечивает выполнение оценки $\Theta < \pi/2$ для операторного угла поворота спектрального подпространства $\mathfrak{H}_0$ под действием внедиагонального возмущения V.

В **Разделе 2.2** формулируется более общее утверждение — Теорема 2.2.1 (i), по отношению к которому результат о фундаментальной роли константы $\sqrt{2}$ для внедиагональной задачи возмущений в ситуации (12) является простым следствием. Основным утверждением Теоремы 2.2.1 (i) является существование ограниченного решения уравнения Риккати (9) при более слабом нежели (13), но более детальном условии

$$\|V\| < \sqrt{dD}, \tag{14}$$

где D, $D \geq 2d$, — длина той конечной лакуны в спектральном множестве σ_1, которая целиком содержит множество σ_0.

В Разделе 2.2 формулируется еще одно важное утверждение (Теорема 2.2.2), из которого следует точная оценка на операторный угол поворота спектрального подпространства $\mathfrak{H}_0$ под действием внедиагональных V. А именно, если выполнены условия (12) и (13), то

$$\operatorname{tg}\|\Theta\| \leq \frac{\|B\|}{\delta},$$

где δ ($\delta > 0$) — расстояние между возмущенным спектром A_0 и невозмущенным спектром A_1. Этот результат — новая апостериорная тангенс-теорема, представляющая собой значительное обобщение фундаментальной оценки на операторный угол поворота спектрального подпространства, известной как $\operatorname{tg}\Theta$-теорема Дэвиса-Кахана.

Кроме того, в Разделе 2.2 формулируется утверждение о том, что при условии (14) операторно-значная функции (10), обычно называемая трансфер-функцией или комплементом Шура, допускает факторизацию вида

$$M_0(z) = W(z)(Z - z), \tag{15}$$

где W — операторно-значная функция, голоморфная и ограниченно-обратимая на резольвентном множестве оператора A_1, а Z — ограниченный оператор со спектром в той лакуне множества σ_1, которая содержит спектральную компоненту σ_0. Приводится также явное интегральное представление для решения X уравнения Риккати (9) в терминах факторизатора Z.

В **Разделе 2.3** дается сводка результатов по инвариантным граф-подпространствам, а также по тесно связанной с ними задаче блочной диагонализации операторных 2×2-матриц. Главным результатом раздела является Теорема 2.3.5, в которой из факторизационной формулы (15) при весьма общих предположениях относительно компонент операторной матрицы (7) выводятся следствия о существовании решения X уравнения Риккати (9), о представлении спектрального подпространства матрицы (7), ассоциированного со спектром Z, в виде графика X и, наконец, о представлении самого факторизатора Z в виде

$$Z = A_0 + BX.$$

Кроме того, устанавливается, что множитель $W(z)$ в (15) имеет вид

$$W(z) = I - B(A_1 - z)^{-1}X. \tag{16}$$

Раздел 2.4 содержит полное доказательство Теоремы 2.2.1 (i).

В **Разделе 2.5** дается полное доказательство апостерионой $\operatorname{tg}\Theta$-теоремы (Теоремы 2.2.2).

В **Разделе 2.6** даются априорные оценки для нормы решения X уравнения Риккати (9), существование которого было доказано при условиях (12) и (14). Поскольку спектральное подпространство оператора $H = A + V$, являющееся результатом поворота $\mathfrak{H}_0$, представляет собой график оператора X, оценки для $\|X\|$ означают, в силу (11), также и оценки для $\|\Theta\|$ и, наоборот, из оценок для $\|\Theta\|$ следуют соответствующие оценки для $\|X\|$. Грубая априорная оценка для $\|X\|$ и $\|\Theta\|$, справедливая при любых V, подчиняющихся (14) делается на основании апостериорной $\operatorname{tg}\Theta$-теоремы путем определения нижней границы для расстояния δ между исходным спектральным множеством σ_1 и конечным спектральным множеством, возникающим из спектральной компоненты σ_0. Еще одна априорная оценка, содержащаяся в Теореме 2.2.1 (ii) и означающая, что при $\|V\| < \sqrt{d(D-d)}$ оператор X является строгим сжатием, а $\|\Theta\| < \pi/4$, делается с помощью $\operatorname{tg}2\Theta$-теоремы Дэвиса-Кахана.

Доказательство гораздо более тонкой априорной оценки для $\|X\|$ и $\|\Theta\|$ при $\|V\| < \sqrt{d(D-d)}$, содержащейся в Замечании 2.6.4, требует весьма значительного места. Непосредственно в диссертации доказательство этой оценки не приводится и читатель отсылается к первоисточнику (статье [37]).

Важным следствием оценки, упомянутой в Замечании 2.6.4, является точная оценка для Θ,

$$\operatorname{tg}\|\Theta\| \le \frac{\|V\|}{d}, \tag{17}$$

справедливая при условии (12) для любых внедиагональных V, удовлетворяющих неравенству $\|V\| \le d$.

Неравенство (17) представляет собой новую фундаментальную оценку в теории возмущений спектральных подпространств, имеющую смысл априорной $\operatorname{tg}\Theta$-теоремы.

Раздел 2.6 заканчивается указанием на гипотезу о том, что точная оценка (17) справедлива и при $d < \|V\| < \sqrt{2}d$. Основанием для этого предположения является наличие априорной $\operatorname{tg}\theta$-теоремы для собственных векторов (Теоремы 2.6.5) при всех значениях $\|V\| \in [0, \sqrt{2}d)$.

Глава 3 посвящена операторной интерпретации резонансов, порождаемых гамильтонианами произвольной природы. Отправной точкой здесь является предположение о том, что гильбертово подпространство задачи $\mathfrak{H}$ тем или иным способом разложено в ортогональную сумму (5) двух подпространств $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}_1$. Предполагается также, что относительно этого разложения исследуемый гамильтониан имеет вид операторной 2×2 матрицы (7) с самосопряженными A_0, A_1 и ограниченным B. В отличие от Главы 2, где спектры диагональных компонент A_0 и A_1 не пересекаются, в данной главе рассматривается ситуация, когда спектр A_0 частично или полностью вложен в непрерывный спектр A_1. Именно такую спектральную ситуацию мы называем фешбаховской.

Раздел 3.1 содержит постановку задачи, изложение основных идей ее анализа, а также сводку главных результатов. Кроме того, даются литературные указания и описывается структура главы.

В качестве невозмущенного гамильтониана рассматривается главная диагональ $A = \operatorname{diag}(A_0, A_1)$ матрицы H.

В **Разделе 3.2** вводятся основные обозначения и формулируются рабочие гипотезы. Центральной среди них является предположение о том, что операторно-значная функция

$$K_B(\mu) = B\,\mathsf{E}_1\big((-\infty,\mu)\big)B^*, \quad \mu \in \mathbb{R},$$

представляющая собой результат окаймления операторами B и B^* спектральной меры $\mathsf{E}_1\big((-\infty,\mu)\big)$ оператора A_1 для интервала $(-\infty,\mu)$, допускает аналитическое продолжение на некоторые области $D_k \subset \mathbb{C}$, $k = 1,2,\ldots,m$, $1 \le m < \infty$. Области D_k при различных k считаются попарно непересекающимися. Ввиду самосопряженности A_1 каждая из них автоматически оказывается симметричной относительно вещественной оси.

Еще одним важным предположением является гипотеза о том, что пересечение спектра A_0 с непрерывным спектром A_1 целиком попадает в объединение упомянутых m областей, а компоненты спектров A_0 и A_1, лежащие вне $\cup_{k=1}^m D_k$, не пересекаются друг с другом.

Предположение, сделанное по поводу аналитической продолжимости функции $K_B(\mu)$, позволяет ввести в рассмотрение 2^m вариантов аналитического продолжения трансфер-функции (10), отвечающих тому или иному способу перехода через непрерывный спектр оператора A_1, лежащий в областях D_k. Возникающие таким образом операторно-значные функции $M_0^{(l)}(z)$ нумеруются мультииндексом $l = (l_1, l_2, \ldots, l_m)$, где каждая отдельная компонента l_k

может принимать только значения -1 или $+1$, в соответствии с направлением перехода (сверху вниз или снизу вверх) через непрерывный спектр A_1, совершаемого в области D_k. Следует отметить, что непосредственно в диссертации для функций $M_0^{(l)}(z)$ используются более детальные обозначения, куда входят еще и контуры, ограничивающие области продолжения.

По отношению к исходной трансфер-функции M_0 значения функций $M_0^{(l)}$, взятые на соответствующих нижних и/или верхних половинах областей D_k, отвечают уже нефизическим листам. В зависимости от конкретной задачи, часть этих листов или даже все нефизические листы могут оказаться отождествимыми. В общем случае происходит выход на 2^m различных нефизических листов.

Каждой из операторно-значных функций $M_0^{(l)}(z)$ скалярной комплексной переменной z сопоставляется одноименная функция $M_0^{(l)}(Z)$ операторной переменной Z. Функция $M_0^{(l)}(Z)$ обладает, в частности, тем свойством, что если ψ является собственным вектором оператора-аргумента Z, отвечающим собственному числу z, т.е. $Z\psi = z\psi$, то автоматически выполнено

$$M_0^{(l)}(Z)\psi = M_0^{(l)}(z)\psi.$$

В **Разделе 3.3** рассматривается конкретный пример, напрямую связанный с многоканальными операторами Шредингера, где реализуются все предположения и рабочие гипотезы, введенные в Разделе 3.2.

Раздел 3.4 посвящен детальному исследованию нелинейных операторных уравнений

$$M_0^{(l)}(Z) = 0. \tag{18}$$

Здесь, в частности, формулируются условия на операторы B, обеспечивающие одновременную разрешимость всех 2^m уравнений (18). Наряду с доказательством разрешимости (18) дается также и критерий единственности решения $Z^{(l)}$ для каждого из уравнений (18). Критерий единственности формулируется в спектральных терминах.

В **Разделе 3.5** устанавливается, что каждый из операторных корней $Z^{(l)}$ является факторизатором соответствующей функции $M_0^{(l)}(z)$. А именно, имеют место факторизационные формулы, аналогичные (15):

$$M_0^{(l)}(z) = W^{(l)}(z)(Z^{(l)} - z),$$

где $W^{(l)}(z)$ — ограниченная и ограниченно-обратимая функция, голоморфная в некоторой достаточно широкой и явно описанной окрестности $\mathcal{O}(A_0)$ спектра оператора A_0 (Теорема 3.5.1), целиком содержащей спектр $Z^{(l)}$. Приводится явное интегральное представление для $W^{(l)}(z)$ в терминах корня $Z^{(l)}$, являющееся обобщением представления (16) на фешбаховский случай. Доказывается, что спектр $M_0^{(l)}$ в $\mathscr{O}(A_0)$ в точности совпадает со спектром ее корня $Z^{(l)}$. Более того, подобное утверждение относится и к каждому отдельному типу спектра. В частности, резонансы — комплексные полюсы $[M_0^{(l)}(z)]^{-1}$ — в $\mathscr{O}(A_0)$ представляют собой точки обычного дискретного спектра $Z^{(l)}$. В числе прочего устанавливается, что операторы $Z^{(l)*}$ и $Z^{(-l)}$ связаны преобразованием подобия.

В **Разделе 3.6** доказывается, что все 2^m операторов $Z^{(l)}$ обладают одним и тем же набором изолированных вещественных собственных значений. Более того, и собственные векторы, отвечающие этим собственным значениям, являются общими сразу для всех $Z^{(l)}$. Как для резольвенты $(Z^{(l)} - z)^{-1}$, так и для обратной трансфер-функции $[M_0^{(l)}(z)]^{-1}$ каждое такое собственное значение порождает полюс первого порядка. Указывается способ выбора системы линейно-независимых собственных векторов операторов $Z^{(l)}$, являющейся базисом Рисса в замыкании линейной оболочки совокупности всех собственных векторов этих операторов, отвечающих изолированным вещественным значениям.

В **Разделе 3.7** подробно разбирается интересный для многих физических приложений случай, когда подпространство $\mathfrak{H}_0$ конечномерно. В этом случае операторные корни $Z^{(l)}$ оказываются обычными скалярными $n \times n$-матрицами некоторой конечной размерности n. Особое внимание уделяется выяснению соотношений между собственными проекторами и собственными нильпотентами операторов $Z^{(l)}$, отвечающими резонансам. Предлагается рецепт выбора базиса в $\mathfrak{H}_0$, содержащего наряду с собственными векторами $Z^{(l)}$ для вещественных собственных значений также и корневые (собственные и присоединенные) векторы, отвечающие резонансам.

В **Разделе 3.8** рассматривается случай, когда подпространство $\mathfrak{H}_0$ бесконечномерно, а оператор A_1 имеет компактную резольвенту. Формулируются условия на компоненты операторной матрицы (7), обеспечивающие полноту и базисность систем корневых векторов операторов $Z^{(l)}$, естественно включающих в себя также и резонансные векторы. Даются подробные доказательства достаточности сформулированных условий.

Операторы $Z^{(l)}$ играют важную классификационную роль по отношению к (как правило переполненной) системе корневых векторов аналитически продолженной трансфер-функции M_0. Для того, чтобы получить базис в $\mathfrak{H}_0$, составленный из векторов этой системы, следует попросту выделить в ней базисный набор корневых векторов какого-либо одного отдельно взятого оператора $Z^{(l)}$.

В **Разделе 3.9** рассматривается пример, представляющий собой обобщение одной из известных моделей Фридрихса. В этом примере A_0 – оператор конечного ранга, а A_1 — оператор умножения на независимую переменную. Пример используется как простейшая иллюстрация основных результатов, полученных в Главе 3.

Главной целью **Главы 4** является построение явных представлений для аналитического продолжения T-матрицы, матриц рассеяния и функции Грина на нефизические листы энергии в задаче трех частиц. В качестве основного инструмента для достижения этой цели выступают интегральные уравнения Фаддеева в импульсном пространстве. Парные потенциалы, использующиеся в этой главе, представляют собой одноканальный вариант потенциальных операторов, описанных в Разделе 1.2.

Раздел 4.1 содержит постановку задачи и описание структуры главы.

В **Разделе 4.2** даются некоторые определения общего характера и вводятся основные обозначения, используемые на протяжении всей Главы 4. В частности, в этом разделе дается определение компонент Фаддеева $M_{\alpha\beta}(z)$, $\alpha, \beta = 1,2,3$, трехчастичной T-матрицы. Каждый из двух используемых вариантов уравнений Фаддеева для этих компонент записывается в матричном виде как соответствующее замкнутое уравнение для блочно-операторной 3×3 -матрицы $M(z)$, образованной из $M_{\alpha\beta}(z)$.

В **Разделе 4.3** дается описание аналитических свойств парных T-матриц, знание которых необходимо при продолжении уравнений Фаддеева на нефизические листы энергии. Здесь же проводится независимый от соответствующего материала Главы 1 вывод представления (4) для значений двухчастичной T-матрицы на листе Π_1.

Раздел 4.4 посвящен описанию свойств матрицы компонент Фаддеева $M(z)$ и трехчастичных матриц рассеяния на физическом листе. В числе прочего, выясняются границы тех областей на физическом листе, где полумассовые ядра компонент Фаддеева $M_{\alpha\beta}(z)$, а также амплитуды, входящие в матрицы рассеяния, могут рассматриваться как обычные или обобщенные голоморфные функции энергии z. Здесь же исследуются аналитические свойства ядер операторов, образованных из компонент матрицы $M(z)$ и используемых в дальнейшем при построении явных представлений для M на нефизических листах.

В **Разделе 4.5** дается детальное описание той части $\mathfrak{R}$ трехчастичной римановой поверхности энергии, с которой мы имеем дело при построении явных представлений для фаддеевской матрицы $M(z)$, а также при построении таких представлений для матриц рассеяния и функции Грина. В $\mathfrak{R}$ включаются все «двухчастичные» листы, доступ к которым с физического листа возможен в результате обхода только парных порогов, а также два соседних «трехчастичных» листа, переход на которые происходит в результате однократного пересечения непрерывного спектра выше порога развала системы на три частицы.

Используемые нами потенциалы таковы, что каждая двухчастичная подсистема может иметь лишь конечное число связанных состояний. Это означает, что $\mathfrak{R}$ состоит из 2^n+2 листов, где n — общее количество двухчастичных порогов.

В **Разделе 4.6** проводится аналитическое продолжение на нефизические листы поверхности $\mathfrak{R}$ свободных членов и ядер уравнений Фаддеева для матрицы M, а также их итераций. Надо сказать, что продолжение уравнений Фаддеева, осуществимое лишь в смысле обобщенных функций, является значительно более сложной задачей нежели продолжение многоканального уравнения Липпмана-Швингера, рассматриваемого в Главе 1. Тем не менее, с помощью соответствующих представлений для парных T-матриц (4), результат продолжения ядер, свободных членов и их итераций записывается в явных терминах, относящихся только к физическому листу.

В **Разделе 4.7** проводится прямое решение продолженных уравнений Фаддеева для матрицы M на каждом нефизическом листе Π_l поверхности $\mathfrak{R}$ в соответствующей области голоморфности ядер этих уравнений, их свободных членов и итераций. Такое решение оказывается возможным лишь для тех точек z из этой области, где существует оператор $S_l(z)^{-1}$, обратный к соответствующей усеченной матрице рассеяния $S_l(z)$. Последняя связана с полной трехчастичной матрицей рассеяния $S(z)$ той же формулой (1), что и в случае задачи, рассматривающейся в Главе 1. Результат решения продолженных уравнений Фаддеева — явные представления для матрицы $M(z)\big|_{\Pi_l}$ в терминах операторов, образованных из ее компонент на физическом листе. Эти представления имеют вид

$$M\big|_{\Pi_l} = \left(M - Q_l^\dagger \mathrm{J}^\dagger L A\, S_l^{-1}\, \mathrm{J} Q_l\right)\Big|_{\Pi_0}, \tag{19}$$

где $A(z)$ — некоторая целая функция на Π_0, значениям которой являются скалярные диагональные матрицы. Операторы $Q_l(z)$ и $Q_l^\dagger(z)$ явно выражаются через значения матрицы $M(z)$ на физическом листе Π_0. Диагональные операторные матрицы $\mathrm{J}(z)$ и $\mathrm{J}^\dagger(z)$ осуществляют сужение ядер операторов $Q_l(z)$ и $Q_l^\dagger(z)$ на различные энергетические (массовые) поверхности соответственно по их первому и последнему импульсным аргументам, так что произведениям $Q_l^\dagger \mathrm{J}^\dagger$ и $\mathrm{J} Q_l$ соответствуют ядра операторов $Q_l^\dagger(z)$ и $Q_l(z)$ в их полумассовых вариантах. Смысл обозначения L ровно тот же, что и в формулах (1) и (2): L — это диагональная числовая матрицы, главная диагональ которой в точности совпадает с мультииндексом l рассматриваемого листа Π_l поверхности $\mathfrak{R}$.

Представления (19) — центральный результат Главы 4, раскрывающий (причем уже на уровне фаддеевских компонент) строение трехчастичной T-матрицы на нефизических листах поверхности $\mathfrak{R}$. Структура этих представлений в существенном аналогична структуре представлений (2) для аналитического продолжения T-матрицы в многоканальной задаче рассеяния с бинарными каналами.

В **Разделах 4.8** и **4.9** представления (19) используются для получения аналогичных явных представлений соответственно для матриц рассеяния и для функции Грина.

На основании явных представлений, найденных в Разделах 4.7–4.9, в **Разделе 4.10** делается вывод, что трехчастичным резонансам на нефизическом листе Π_l поверхности $\mathfrak{R}$ соответствуют те точки z на физическом листе, для которых усеченная матрица рассеяния $S_l(z)$ имеет собственное число нуль и тем самым уравнение $S_l(z)\mathscr{A} = 0$ обладает некоторым нетривиальным решением $\mathscr{A}$. Отмечается, что компонентами собственного вектора $\mathscr{A}$ являются амплитуды развала соответствующего резонансного состояния по различным открытым каналам. Кроме того, указывается, что для практического вычисления усеченных матриц рассеяния в задаче трех тел можно использовать дифференциальные уравнения Фаддеева в конфигурационном пространстве.

Раздел заключается замечанием о том, что подход к исследованию строения T-матриц, матриц рассеяния и функции Грина на нефизических листах, предложенный в диссертации, может быть распространен также и на системы с произвольным числом частиц. Для достижения этой цели следует воспользоваться интегральными уравнениями Якубовского.

Глава 5 посвящена разработке практического способа вычисления резонансов и виртуальных уровней конкретных трехчастичных систем на основании дифференциальных уравнений Фаддеева. Одновременно обсуждаются методы и результаты расчетов связанных состояний и процессов рассеяния.

Раздел 5.1 является введением к Главе 5. Наряду с описанием структуры главы и литературными указаниями здесь дается краткое изложение результатов численных расчетов, проделанных для трехнуклонной системы *nnp*, системы трех бозонов с массами нуклона и системы трех атомов гелия ^{4}He. Отмечается, что на протяжении последних 10–15 лет атомная система ^{4}He$_3$ находится в центре внимания как экспериментаторов, так и теоретиков-вычислителей. С одной стороны, этот интерес вызван непрекращающимся бумом в исследованиях бозе-эйнштейновской конденсации в ультрахолодных газах, в том числе, и в газах ^{4}He. С другой стороны, повышенный интерес обусловливается еще и тем, что тример ^{4}He$_3$ является одним из наиболее реалистических кандидатов на экспериментальное обнаружение эффекта Ефимова.

В **Разделе 5.2** дается описание практической части разработанной нами дифференциальной формулировки задачи рассеяния $2 \to 2,3$ для системы трех частиц с твердым кором. С точки зрения вычислительных приложений, использование этой формулировки подразумевает решение обычных дифференциальных уравнений Фаддеева во всем пространстве $\mathbb{R}^6$. Эти уравнения, однако, дополняются краевыми условиями, требующими, чтобы сумма компонент Фаддеева волновой функции обращалась в нуль, когда расстояние между какими-либо двумя частицами оказывается равным сумме радиусов их кóров. При этом парные потенциалы внутри областей кора считаются нулевыми. Предлагаемый подход может рассматриваться как надежное основание для расчетов тех трехчастичных систем, парные взаимодействия в которых имеют очень сильную отталкивательную компоненту на малых расстояниях. К численным преимуществам нашего подхода относится фактическая замена аппроксимации суммы лапласиана и огромного потенциального члена внутри областей кора, характерной для традиционных методов, аппроксимацией лишь лапласиана. Это обстоятельство приводит к значительному уменьшению вычислительных ошибок.

Все наши численные результаты для системы трех атомов гелия ^{4}He получены именно путем решения дифференциальных уравнений Фаддеева с краевыми условиями, отвечающими замене гигантской отталкивательной компоненты в атом-атомном взаимодействии «потенциалом» твердого кора.

Для расчетов системы *nnp* и системы трех бозонов с массами нуклона использовались дифференциальные уравнения Фаддеева в их стандартной версии.

В **Разделе 5.3** формулируются парциальные дифференциальные уравнения Фаддеева для системы трех тождественных бозонов с твердым кором, получающиеся как результат разложения соответствующих уравнений в $\mathbb{R}^6$ по бисферическому базису. Описываются асимптотические краевые условия для парциальных уравнений, отвечающие процессам $2 \to 2,3$, и приводятся старшие члены координатной асимптотики парциальных компонент Фаддеева волновых функций для связанных состояний.

В **Разделе 5.4** парциальные дифференциальные уравнения Фаддеева и краевые задачи для них в случае обычных потенциалов без твердого кора описываются как частный случай уравнений и краевых задач из Раздела 5.3.

В **Разделе 5.5** описываются детали применяемого нами вычислительного алгоритма. Приводятся численные результаты по связанным состояниям и рассеянию в системе трех атомов ^{4}He, полученные в работах, представляемых в диссертации. Отмечается, что результаты по энергиям связи основного и возбужденного состояний тримера $^4\mathrm{He}_3$ находятся в хорошем согласии с результатами альтернативных расчетов. Кроме того, отмечается, что расчеты фаз упругого рассеяния атома ^{4}He на димере ^{4}He$_2$ при энергиях как выше, так и ниже порога развала системы на три частицы были выполнены впервые именно в наших работах. Эти результаты были подтверждены в единственном на данный момент альтернативном расчете фаз рассеяния, выполненном при энергиях ниже порога развала.

В случае, когда трехчастичная система близка к выполнению условий возникновения эффекта Ефимова, длина рассеяния частицы на связанном состоянии пары частиц оказывается очень чувствительной к выбору параметров сетки, в особенности к величине радиуса области, на границе которой производится аппроксимация асимптотических краевых условий. Поэтому заключительная часть раздела посвящена обсуждению вопросов, касающихся сходимости результатов по длине рассеяния атома ^{4}He на димере ^{4}He$_2$.

В **Разделе 5.6** производится «комплексификация» краевых задач для парциальных уравнений Фаддеева, отвечающих процессам $2 \to 2,3$ в трехбозонных системах типа ^{4}He$_3$, с целью использования этих уравнений для вычисления аналитического продолжения амплитуд $2 \to 2$ на физический лист энергии. Главным результатом раздела является выяснение границ той области $\Pi^{(S)}$ на физическом листе, куда продолжается парциальная матрица рассеяния $S_0(z)$, отвечающая упругим процессам $2 \to 2$, причем так, что возможно ее вычисление на основании парциальных уравнений Фаддеева. В случае финитных парных потенциалов область $\Pi^{(S)}$ описывается неравенством

$$\operatorname{Re} z > -\frac{4}{3}|\varepsilon_d| + \frac{3}{4|\varepsilon_d|}(\operatorname{Im} z)^2,$$

где ε_d — энергия (единственного) связанного состояния парной подсистемы.

В **Разделе 5.7** обсуждаются свойства парциальной матрицы рассеяния $S_0(z)$, отвечающей процессам $2 \to 2$. Устанавливается, что ее нули определяют положение резонансов на нефизическом листе, связанном с физическим листом переходом через непрерывный спектр на интервале $(\varepsilon_d, 0)$.

В **Разделе 5.8** продолжается численное исследование системы трех атомов ^{4}He. В первой части раздела вычисляется положение нулей парциальной матрицы рассеяния $S_0(z)$ для этой системы, отвечающей одному из реалистических атом-атомных потенциалов. Обсуждается отрицательный результат поиска резонансов в разрешенной области $\Pi^{(S)}$. Во второй части раздела проверятся, что при увеличении силы межатомных взаимодействий энергия возбужденного состояния тримера ^{4}He$_3$ покидает физический лист и превращается в виртуальный уровень. Именно такое нестандартное поведение энергии возбужденного состояния тримера при усилении межатомных взаимодействий указывает на ефимовскую природу этого состояния. Кроме того, здесь детально исследуется механизм превращения виртуальных уровней системы $^4He_3$ в новые ефимовские уровни при ослаблении парных взаимодействий.

В **Разделе 5.9** рассматривается система трех тождественных бозонов с массами нуклона. В качестве парных взаимодействий выбирается гауссовский потенциал с дополнительным отталкивательным членом, также имеющим гауссовскую форму. В s-состоянии этой системы обнаруживается резонанс, траектория которого при уменьшении отталкивательного члена потенциала прослеживается вплоть до ее выхода на вещественную ось и превращения резонанса в виртуальный уровень.

Наконец, в заключительном **Разделе 5.10** проводится поиск резонансов и виртуальных уровней в трехнуклонной системе *nnp* при значениях полного орбитального момента $L = 0$ и $L = 1$. Резонансы и виртуальные уровни снова ищутся как нули на физическом листе соответствующих усеченных парциальных матриц рассеяния. В качестве нуклон-нуклонных взаимодействий используется потенциал Мальфлье-Тжона MT I-III. Особенно тщательно исследуется окрестность точек, рассматривавшихся в ряде экспериментальных работ как возможное местоположение резонансного состояния ядра ^3H. Однако нуль обнаруживается лишь у дублетного варианта парциальной матрицы рассеяния $S_0(z)$, причем только в случае $L = 0$ и только один. Этот нуль отвечает хорошо известному виртуальному состоянию системы *nnp* с полным спином $1/2$.

Приложения А и **В** содержат вспомогательные теоретико-операторные результаты, используемые в Главе 3.

В **Приложении С** дается описание реалистических межатомных потенциалов, используемых в Главе 5 при проведении численных расчетов системы трех атомов ^4He.

Результаты, включенные в диссертацию, опубликованы в следующих работах:

[1] S. Albeverio, K. A. Makarov, and A. K. Motovilov, *Graph subspaces and the spectral shift function*, Canadian Journal of Mathematics **55**:3 (2003), 449–503.

[2] V. Hardt, R. Mennicken, and A. K. Motovilov, *Factorization theorem for the transfer function associated with a* 2×2 *operator matrix having unbounded couplings*, J. Operator Theory **48**:1 (2002), 187–226.

[3] V. Hardt, R. Mennicken, and A. K. Motovilov, *Factorization theorem for the transfer function associated with an unbounded non-self-adjoint* 2×2 *operator matrix*, Operator Theory: Advances and Applications **142** (2003), 117–132.

[4] Е. А. Колганова, А. К. Мотовилов, *Использование дифференциальных уравнений Фаддеева для расчетов трехчастичных резонансов*, ЯФ **60**:2 (1997), 235–244.

[5] Е. А. Колганова, А. К. Мотовилов, *О механизме возникновения ефимовских состояний в тримере гелия* ^{4}*He*, ЯФ **62**:7 (1999), 1253–1267.

[6] E. A. Kolganova and A. K. Motovilov, *Scattering and resonances in the* ^{4}*He three-atomic system*, Comput. Phys. Comm. **126** (2000), 88—92.

[7] E. A. Kolganova and A. K. Motovilov, *Three-body resonances in framework of the Faddeev configuration space approach*, In: Proc. of the 9th Intern. Conf. on Computational Modelling and Computing in Physics (JINR, Dubna, 1997), pp. 177–180; arXiv: nucl-th/9702037.

[8] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and Y. K. Ho, *Complex scaling of the Faddeev equations*, J. Comput. Methods in Sciences and Engineering **2** No. 1s–2s (2002), 149—154.

[9] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and Y. K. Ho, *Complex scaling of the Faddeev operator*, Nucl. Phys. A **684** (1-4) (2001), 623—625.

[10] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and W. Sandhas, *Scattering length of the helium-atom–helium-dimer collision*, Phys. Rev. A **70** (2004), 052711(4).

[11] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and S. A. Sofianos, *Three-body configuration space calculations with hard-core potentials*, J. Phys. B **31** (1998), 1279–1302.

[12] E. A. Kolganova, A. K. Motovilov, and S. A. Sofianos, *Ultralow energy scattering of a He atom off a He dimer*, Phys. Rev. A **56** (1997), R1686–R1689.

[13] V. Kostrykin, K. A. Makarov, and A. K. Motovilov, *On the existence of solutions to the operator Riccati equation and the tan Θ theorem*, Integr. Eq. Oper. Th. **51** (2005), 121–140.

[14] R. Mennicken and A. K. Motovilov, *Operator interpretation of resonances arising in spectral problems for* 2×2 *matrix Hamiltonians*, Operator Theory: Advances and Applications **108** (1999), 316–322.

[15] R. Mennicken and A. K. Motovilov, *Operator interpretation of resonances arising in spectral problems for* 2×2 *operator matrices*, Math. Nachr. **201** (1999), 117–181.

[16] R. Mennicken and A. K. Motovilov, *Operator interpretation of resonances generated by some operator matrices*, Operator Theory: Advances and Applications **118** (2000), 288—302.

[17] Р. Менникен, А. К. Мотовилов, *Операторная интерпретация резонансов, порождаемых* (2×2)*-матричными гамильтонианами*, ТМФ **116**:2 (1998), 163–181.

[18] S. P. Merkuriev and A. K. Motovilov, *Faddeev equations for simple layer potential density*, Lett. Math. Phys. **7** (1983), 497–503.

[19] С. П. Меркурьев, А. К. Мотовилов, С. Л. Яковлев, *Задача нескольких тел в модели граничных условий и обобщенные потенциалы*, ТМФ **94**:3 (1993), 435–447.

[20] А. К. Мотовилов, *Аналитическое продолжение матрицы рассеяния в многоканальной задаче*, ТМФ **95**:3 (1993), 427–438.

[21] A. K. Motovilov, *Analytic continuation of the scattering matrix in multichannel problem and the Lax–Phillips approach*, ЯФ **56**:7 (1993), 61–65.

[22] А. К. Мотовилов, *Дифференциальные уравнения для компонент волновой функции в задаче трех твердых сфер*, Вестн. Ленингр. гос. ун-та (сер. физ. хим.) **№ 22** (1983), 76–79.

[23] A. K. Motovilov, *Explicit representations for the T-matrix on unphysical energy sheets and resonances in two- and three-body systems*, Few-Body Syst. **38** (2006), 115—120.

[24] А. К. Мотовилов, *Исключение энергии из взаимодействий, зависящих от нее резольвентным образом*, ТМФ **104**:2 (1995), 281–303.

[25] A. K. Motovilov, *Potentials appearing after the removal of an energy–dependence and scattering by them*, In: Proc. of the Intern. Workshop "Mathematical Aspects of the Scattering Theory and Applications" (St. Petersburg University, St. Petersburg, 1991), pp. 101–108.

[26] А. К. Мотовилов, *Переформулировка схемы Лакса–Филлипса в терминах стационарной теории рассеяния*, ТМФ **98**:2 (1994), 248–265.

[27] А. К. Мотовилов, *Представления для трехчастичной T-матрицы на нефизических листах. I*, ТМФ **107**:3 (1996), 450–477.

[28] А. К. Мотовилов, *Представления для трехчастичной T-матрицы на нефизических листах. II*, ТМФ **107**:3 (1996), 478–502.

[29] A. K. Motovilov, *Removal of the resolvent-like energy dependence from interactions and invariant subspaces of a total Hamiltonian*, J. Math. Phys. **36**:12 (1995), 6647–6664.

[30] A. K. Motovilov, *Removal of the resolvent–like dependence on the spectral parameter from interactions*, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik **76** Suppl. 2 (1996), 229–232.

[31] A. K. Motovilov, *Representations for the three–body T–matrix, scattering matrices and resolvent on unphysical energy sheets*, Math. Nachr. **187** (1997), 147–210.

[32] А. К. Мотовилов, *Строение T-матрицы и матрицы рассеяния на нефизических листах энергии в задаче трех квантовых части*, ЭЧАЯ **32**:7 (2001), 144–150.

[33] A. K. Motovilov, *The elimination of an energy from the energy–dependent potential*, in "Physics of Elementary Interactions", edited by Z. Ajduk, S. Pokorski, and A.K.Wròblewski (World Scientific, Singapore, 1990), pp. 494–499.

[34] A. K. Motovilov, *The removal of an energy dependence from the interaction in two–body systems*, J. Math. Phys. **32**:12 (1991), 3509–3518.

[35] A. K. Motovilov and E. A. Kolganova, *Structure of T- and S-matrices in unphysical sheets and resonances in three-body systems*, Few–Body Syst. Suppl. **10** (1999), 75–84.

[36] A. K. Motovilov, W. Sandhas, S. A. Sofianos, and E. A. Kolganova, *Binding energies and scattering observables in the $^4He_3$ atomic system*, Eur. Phys. J. D **13** (2001), 33–41.

[37] A. K. Motovilov and A. V. Selin, *Some sharp norm estimates in the subspace perturbation problem*, Integr. Eq. Oper. Th. (2006), DOI 10.1007/s00020-006-1437-1, published "Online First"; arXiv: math.SP/0409558.

[38] A. K. Motovilov, S. A. Sofianos, and E. A. Kolganova, *Bound states and scattering processes in the $^4He_3$ atomic system*, Chem. Phys. Lett. **275** (1997), 168–172.

Получено 18 сентября 2006 г.

Отпечатано методом прямого репродуцирования
с оригинала, предоставленного автором.

Подписано в печать 19.09.2006.
Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 1,75. Уч.-изд. л. 2,06. Тираж 100 экз. Заказ № 55470.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/