

P2-2006-158

С. М.-К. Бакмаев, О. О. Воскресенская

ПЕРЕХОДНЫЕ  $|nlm\rangle \rightarrow |\vec{p}\rangle$  ФОРМФАКТОРЫ  
ВОДОРОДОПОДОБНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ АТОМОВ

Направленно в журнал «Вестник Томского государственного  
университета»

Бакмаев С. М.-К., Воскресенская О. О.  
Переходные  $|nlm\rangle \rightarrow |\vec{p}\rangle$  формфакторы  
водородоподобных элементарных атомов

P2-2006-158

Предложен новый подход к расчету переходных формфакторов водородоподобных элементарных атомов (EA). Получены явные аналитические выражения для формфакторов перехода из произвольных состояний дискретного спектра EA в состояния непрерывного спектра. Показано, что эти формфакторы выражаются в виде суперпозиции конечного числа слагаемых с простой аналитической структурой и могут быть рассчитаны численно с произвольной степенью точности. Как пример приложений представленных формфакторов рассчитан спектр продуктов ионизации димезоатомов  $A_{2\pi}$ .

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2006

Bakmaev S. M.-K., Voskresenskaya O. O.  
Transition  $|nlm\rangle \rightarrow |\vec{p}\rangle$  Form Factors of Hydrogen-like  
Elementary Atoms

P2-2006-158

A new approach for calculation of transition form factors of hydrogen-like elementary atoms (EA) is proposed. The explicit expressions for bound-continuous transition form factors of EA are derived. It is shown that these form factors can be represented in the form of finite sum of terms with simple analytical structure and may be numerically evaluated with arbitrary degree of accuracy. As an application of the presented form factors, the calculation of the spectra of products from  $A_{2\pi}$  ionization is considered.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2006

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема вычисления формфакторов перехода из связанных в несвязанные состояния водородоподобных атомов [1] имеет долгую историю [2–10].

В настоящее время эта проблема приобрела большое значение для интерпретации данных эксперимента DIRAC (ЦЕРН), целью которого является наблюдение водородоподобных  $EA^*$ , состоящих из  $\pi^\pm$ - и/или  $\pi^\mp/K^\mp$ -мезонов\*\* и измерение их времени жизни с высокой степенью точности [12–14].

Главным образом [2–7] в литературе рассматривались формфакторы перехода между состояниями дискретного спектра, характеризуемые определенными значениями главного ( $n$ ), орбитального ( $l$ ) и магнитного ( $m$ ) квантовых чисел, что соответствует выбору волновых функций  $\psi_{f(i)}(\vec{r})$  в виде

$$\psi_{f(i)}(\vec{r}) = \psi_{nlm}(\vec{r}) = Y_{lm}(\theta\phi)R_{nl}(r), \quad (1)$$

где  $Y_{lm}(\theta\phi)$  — сферические гармоники;  $R_{nl}(r)$  — радиальные волновые функции;  $|f\rangle$  — конечное,  $|i\rangle$  — начальное состояния атома.

Формфакторы таких переходов всегда представимы в виде полиномов от переменной

$$u = \frac{\alpha^2 \mu^2 (n_i, n_k)}{\alpha^2 \mu^2 (n_i, n_k) + q^2}, \quad (2)$$

где

$$\mu(n_i, n_k) = \frac{\mu(n_i + n_k)}{n_i n_k},$$
$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

(здесь  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры;  $m_{1,2}$  — массы элементарных частиц, составляющих  $EA$ ), что позволяет производить их численный расчет практически с неограниченной точностью.

---

\*Связанные водородоподобные состояния двух противоположно заряженных элементарных частиц получили в литературе название *элементарных атомов* [11]. Примерами таких атомов могут являться  $A_{2e}$ ,  $A_{e\mu}$ ,  $A_{2\mu}$ ,  $A_{e\pi}$ ,  $A_{\mu\pi}$ .

\*\*В частном случае, когда  $EA$  образуются двумя мезонами, их именуют *димезоатомами*. Мы перечислим здесь лишь димезоатомы  $A_{2\pi}$ ,  $A_{\pi K}$ ,  $A_{KK}$ , имеющие непосредственное отношение к нашему рассмотрению.

Для интерпретации данных эксперимента DIRAC требуются также выражения для переходных формфакторов вида

$$S_{fi}(\vec{q}) = S_{\vec{p},nlm}(\vec{q}) \int \psi_{\vec{p}}^*(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} \psi_{nlm}(\vec{r}) d^3r, \quad (3)$$

в которых волновые функции конечного состояния  $\psi_f$  должны быть представлены как [15]

$$\begin{aligned} \psi_f(\vec{r}) = \psi_{\vec{p}}^{(-)}(\vec{r}) &= c^{(-)} \exp(i\vec{p}\vec{r}) \cdot \Phi(-i\xi, 1, -i(pr + \vec{p}\vec{r})), \quad (4) \\ c^{(-)} &= (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \Gamma(1 + i\xi), \\ \xi &= \frac{\mu\alpha}{p}. \end{aligned}$$

Вычисление этих формфакторов, в отличие от похожих на них формфакторов переходов между состояниями дискретного спектра, не удается свести к конечному числу алгебраических операций. За несколькими редкими исключениями, когда эти формфакторы сводятся к известным специальным случаям, вычисление подобных формфакторов содержит операцию однократного интегрирования, что усложняет задачу получения их численных значений.

Традиционно [10] указанная задача решалась путем разложения волновой функции конечного состояния в ряд по сферическим гармоникам

$$\psi_{\vec{p}}^{(-)}(\vec{r}) = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} i^{l_1} Y_{l_1 m_1}^* \left(\frac{\vec{p}}{p}\right) \psi_{pl_1 m_1}(\vec{r}), \quad (5)$$

$$\psi_{pl_1 m_1}(\vec{r}) = Y_{l_1 m_1}^* \left(\frac{\vec{r}}{r}\right) R_{pl_1}(r) \quad (6)$$

с последующим расчетом переходных формфакторов вида

$$S_{pl_1 m_1, nlm}(\vec{q}) = \int \psi_{pl_1 m_1}^*(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} \psi_{nlm}(\vec{r}) d^3r, \quad (7)$$

так что

$$S_{\vec{p},nlm} = \sum_{l_1=0}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{l_1} i^{l_1} Y_{l_1 m_1}^* \left(\frac{\vec{p}}{p}\right) S_{pl_1 m_1, nlm}(\vec{q}). \quad (8)$$

Ясно, что в этом подходе может быть учтено лишь конечное число членов ряда (8). Возникающая при этом задача аппроксимации бесконечного ряда  $(\sum_{l=0}^{\infty})$  конечной суммой  $(\sum_{l=0}^{l_{max}})$ , как и оценка вклада бесконечного остатка ряда  $(\sum_{l_{max}+1}^{\infty})$ , являются непростыми задачами.

В настоящей работе эти трудности обойдены путем получения точных аналитических выражений для формфакторов переходов  $|nlm\rangle \rightarrow |\vec{p}\rangle$  в терминах полиномов Гегенбауэра, что сводит задачу расчета этих формфакторов к конечному числу алгебраических операций.

В разд. 1 мы реализуем нашу программу для простейшего случая, когда орбитальный момент исходного связанного состояния равен нулю ( $nS$ -состояния). Обобщение рассмотрения на случай произвольного связанного состояния водородоподобного атома дано в разд. 2. И, наконец, в разд. 3 мы проводим расчет спектра  $\pi^+\pi^-$  пар, возникающих в результате ионизации атомов  $A_{2\pi}^{nS}$  в кулоновском поле атомов мишени, для иллюстрации возможных приложений представленных в работе формфакторов.

## 1. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФОРМФАКТОРОВ ПЕРЕХОДОВ $|n00\rangle \rightarrow |\vec{p}\rangle$

Начнем с рассмотрения формфакторов  $|n00\rangle \rightarrow |\vec{p}\rangle$  переходов. Волновые функции начального состояния в выражении (3) в этом случае имеют вид

$$\psi_i = \psi_{n00}(\vec{r}) = \left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\omega r} \Phi(-n+1; 2; 2\omega r). \quad (9)$$

Представим их через полиномы Лагерра  $L_k^\lambda$ :

$$\psi_{n00}(\vec{r}) = \left(\frac{\omega^3}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{n} \cdot e^{-\omega r} L_{n-1}^1(2\omega r). \quad (10)$$

$$\omega = \frac{\mu\alpha}{n}.$$

Здесь  $\Phi$  — вырожденная гипергеометрическая функция,  $L_{n-1}^1$  — полиномы Лагерра.

Используем рекуррентные соотношения [16]

$$L_k^{\lambda+1}(x) = \frac{1}{x} [(k+\lambda+1)L_{k-1}^\lambda(x) - (k+1)L_k^\lambda(x)] \quad (11)$$

и представление полиномов Лагерра с помощью производящей функции

$$L_k^\lambda(x) = \Delta_z^{(k)} \left[ (1-z)^{-(\lambda+1)} \exp\left(\frac{xz}{z-1}\right) \right], \quad (12)$$

где оператор  $\Delta_z^{(k)}$  определен следующим соотношением:

$$\Delta_z^{(k)}(f(z)) = \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k}{dz^k} f(z) \right) \Big|_{z=0}. \quad (13)$$

Тогда

$$\psi_i(r) = \frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi} \cdot r} \left[ \Delta_z^{(n-1)} - \Delta_z^{(n)} \right] \left[ (1-z)^{-1} \exp(-\omega(z)r) \right], \quad (14)$$

$$\omega(z) = \omega \cdot (1+z)(1-z)^{-1} \quad (15)$$

и

$$S_{\vec{p}, noo}(\vec{q}) = \frac{\omega^{\frac{1}{2}} c^{(-)}}{2\sqrt{\pi}} \left[ \Delta_z^{(n-1)} - \Delta_z^{(n)} \right] \left[ \frac{J(\vec{q}, \vec{p}, z)}{(1-z)} \right], \quad (16)$$

$$J(\vec{q}, \vec{p}, z) = \int \frac{d^3 r}{r} \Phi(i\xi, 1, i(pr + \vec{p}\vec{r})) \exp[i(\vec{q} - \vec{p})\vec{r} - \omega(z) \cdot r]. \quad (17)$$

Последний интеграл легко вычисляется с использованием интегрального представления для гипергеометрических функций (см., например, [17]). Результат имеет вид

$$J(\vec{q}, \vec{p}, z) = 4\pi[\omega^2(z) + \vec{\Delta}^2]^{-1+i\xi} [(\omega(z) - ip)^2 + q^2]^{-i\xi}, \quad (18)$$

где

$$\vec{\Delta} = \vec{q} - \vec{p}.$$

С учетом определения (15) и очевидного соотношения

$$\Delta_z^{(n)}(zf(z)) = \Delta_z^{(n-1)}f(z) \quad (19)$$

выражение (16) может быть переписано в виде

$$S_{\vec{p}, noo}(\vec{q}) = -4\sqrt{\pi} c^{(-)} \omega^{\frac{1}{2}} \left( \Delta_z^{(n)} - 2\Delta_z^{(n-1)} + \Delta_z^{(n-2)} \right) \times \left[ D_1^{-1+i\xi} D_2^{-i\xi} \right], \quad (20)$$

$$D_1 = (1+z^2)(\omega^2 + \vec{\Delta}^2) - 2z(\vec{\Delta}^2 - \omega^2), \quad (21)$$

$$D_2 = (\omega - ip)^2 + q^2 - 2z(q^2 - p^2 - \omega^2) + z^2[(\omega + ip)^2 + q^2].$$

Используя определение полиномов Гегенбауэра [16]

$$(1 - 2xz + z)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(\lambda)}(x) \cdot z^k, \quad (22)$$

легко получить

$$D_1^{-1+i\xi} = (\Delta^2 + \omega^2)^{-1+i\xi} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(1-i\xi)}(u) \cdot z^k, \quad (23)$$

$$u = \frac{\Delta^2 - \omega^2}{\Delta^2 + \omega^2};$$

$$D_2^{-i\xi} = [(\omega - ip)^2 + q^2]^{-i\xi} \sum_{k=0}^{\infty} C_k^{(i\xi)}(v) \cdot z^k \cdot w^k, \quad (24)$$

$$v = \frac{q^2 - p^2 - \omega^2}{\sqrt{[(\omega - ip)^2 + q^2][(\omega + ip)^2 + q^2]}},$$

$$w = \sqrt{\frac{(\omega + ip)^2 + q^2}{(\omega - ip)^2 + q^2}}.$$

Наконец, с помощью соотношений

$$\Delta_z^{(n)}[f_1(z)f_2(z)] = \sum_{k=0}^n \left[ \Delta_z^{(n-k)} f_1(z) \right] \left[ \Delta_z^{(k)} f_2(z) \right], \quad (25)$$

$$C_n^{(\lambda)}(x) - C_{n-1}^{(\lambda)}(x) = \frac{\Gamma(\lambda - \frac{1}{2})\Gamma(n-1+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda-1)\Gamma(n+\lambda-\frac{1}{2})} \cdot P^{(\lambda-\frac{3}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x), \quad (26)$$

где  $P^{(\lambda-\frac{3}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x)$  — полиномы Якоби, окончательно получаем

$$S_{\vec{p}, noo}(\vec{q}) = -2\sqrt{\pi}c^{(-)}\omega^{\frac{1}{2}}(\omega^2 + \Delta^2)^{-1+i\xi} [(\omega - ip)^2 + q^2]^{-i\xi} \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - i\xi)}{\Gamma(1 - 2i\xi)} \sum_{k=0}^n w^k C_k^{(i\xi)}(v) \left[ \frac{\Gamma(n-k+1-2i\xi)}{\Gamma(n-k+\frac{1}{2}-i\xi)} \times \right.$$

$$\left. \times P_{n-k}^{(-\frac{1}{2}-i\xi, \frac{1}{2}-i\xi)}(u) - \frac{\Gamma(n-k-2i\xi)}{\Gamma(n-k-\frac{1}{2}-i\xi)} P_{n-k-1}^{(-\frac{1}{2}-i\xi, \frac{1}{2}-i\xi)}(u) \right]. \quad (27)$$

Таким образом, формфакторы  $|nS\rangle \rightarrow |\vec{p}\rangle$  переходов выражаются в терминах классических полиномов и легко могут быть рассчитаны численно с произвольной точностью [18].

## 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ФОРМФАКТОРОВ ПЕРЕХОДОВ $|nlm\rangle \rightarrow |\vec{p}\rangle$

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая:

$$\bar{\psi}_i(\vec{r}) = \psi_{nlm}(\vec{r}) = Y_{lm} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) R_{nl}(r), \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
R_{nl}(r) &= \frac{2\omega^{3/2}}{\Gamma(2l+2)} \left[ \frac{\Gamma(n+l+1)}{n\Gamma(n-l)} \right]^{1/2} (2\omega r)^l \times \\
&\quad \times \Phi(-n+l+1, 2l+2; 2\omega r) e^{-\omega r} = \\
&= 2\omega^{3/2} \left[ \frac{\Gamma(n-l)}{n\Gamma(n+l+1)} \right]^{1/2} (2\omega r)^l \cdot L_{n-l-1}^{2l+1}(2\omega r) e^{-\omega r}, \\
R_{nl} &= \frac{\omega^{1/2}}{r} \left[ \frac{\Gamma(n-l)}{n\Gamma(n+l+1)} \right]^{1/2} (2\omega r)^l \times \\
&\quad \times \left[ (n+l)\Delta_z^{(n-l-2)} - (n-l)\Delta_z^{(n-l-1)} \right] \times \\
&\quad \times \left[ (1-z)^{-(l+1)} \exp(-\omega(z)r) \right]. \quad (29)
\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что в этом случае задача по существу сводится к расчету величин

$$I_{lm}^j = \Delta_z^{(j)} \left[ (1-z)^{-(2l+1)} J_{lm}(\vec{q}, \vec{p}, z) \right], \quad (30)$$

$$\begin{aligned}
J_{lm}(\vec{q}, \vec{p}, z) &= \int \frac{d^3r}{r} Y_{lm} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) \Phi(i\xi, 1; i(pr + \vec{p}\vec{r})) \times \\
&\quad \times \exp[i(\vec{q} - \vec{p})\vec{r} - \omega(z)r] (2\omega r)^l \exp[-\omega(z)r], \quad (31) \\
j &= n-l-2, n-l-1.
\end{aligned}$$

Используя интегральное представление для гипергеометрической функции

$$\begin{aligned}
\Phi(i\xi, 1; i(pr + \vec{p}\vec{r})) &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_C (-t)^{(i\xi-1)} (1-t)^{-i\xi} \times \\
&\quad \times \exp[it(pr + \vec{p}\vec{r})] dt, \quad (32)
\end{aligned}$$

формулу разложения плоской волны по сферическим гармоникам

$$\exp(i\vec{r}\vec{r}) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l i^l Y_{lm} \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) Y_{lm}^* \left( \frac{\vec{r}}{r} \right) j_l(\tau r), \quad (33)$$

где  $j_l$  — сферические функции Бесселя

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad (34)$$



значение интеграла

$$\int_0^{\infty} r^{l+\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\tau r) e^{-\bar{\omega} \cdot r} dr = \frac{(2\tau)^{l+\frac{1}{2}} \Gamma(l+1)}{\sqrt{\pi}(\tau^2 + \bar{\omega}^2)^{l+1}}, \quad (35)$$

и полагая в (33), (35)

$$\vec{\tau} = \vec{q} - \vec{p}(1-t), \quad \bar{\omega} = \omega(z) - ip \cdot t, \quad (36)$$

путем несложных вычислений получаем

$$J_{lm}(\vec{q}, \vec{p}, z) = -\frac{\Gamma(l+1)}{2\pi i} \oint_C dt (-t)^{(i\xi-1)} (1-t)^{-i\xi} \times \\ \times \frac{4\pi(4i\omega)^l Y_{lm}\left(\frac{\vec{\tau}}{\tau}\right) \tau^l}{(\tau^2 + \bar{\omega}^2)^{l+1}}. \quad (37)$$

Учитывая далее правила разложения гармонических полиномов [19]

$$Y_{lm}\left(\frac{\vec{\tau}}{\tau}\right) \tau^l = \sum_{l_1=0}^l q^{l_1} (-p)^{l-l_1} \left[ \frac{4\pi\Gamma(2l+2)}{\Gamma(2l_1+2)\Gamma(2l-2l_1+2)} \right]^{1/2} \times \\ \times (1-t)^{l-l_1} \left[ Y_{l_1}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) \otimes Y_{l-l_1}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) \right]_{lm}, \quad (38)$$

$$\left[ Y_{l_1}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) \otimes Y_{l-l_1}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) \right]_{lm} = \\ = \sum_{m_1+m_2=m} C_{l_1 m_1 (l-l_1) m_2}^{lm} \cdot Y_{l_1 m_1}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) \cdot Y_{(l-l_1) m_2}\left(\frac{\vec{p}}{p}\right) \quad (39)$$

и легко проверяемые соотношения

$$\tau^2 + \bar{\omega}^2 = a(1-t) + c \cdot t, \\ a = \omega^2(z) + \vec{\Delta}^2, \quad c = (\omega(z) - ip)^2 + q^2, \quad (40)$$

а также

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{t^{(i\xi-1)}(1-t)^{-i\xi+l-l_1}}{[a(1-t)+ct]^{l+1}} = \\
& = a^{-(l+1)} \frac{\Gamma(1-i\xi+l-l_1)}{\Gamma(1-i\xi)} F(i\xi, l+1; l-l_1+1; 1-c/a) = \\
& = a^{i\xi-l-1} c^{-i\xi} \frac{\Gamma(1-i\xi+l-l_1)}{\Gamma(1-i\xi)} F(i\xi, -l_1; l-l_1+1; 1-a/c) = \\
& = a^{i\xi-l-1} c^{-i\xi} \frac{\Gamma(l-l_1+1)\Gamma(l+1-i\xi)}{\Gamma(l+1)\Gamma(1-i\xi)} F(i\xi, -l_1; i\xi-l; a/c) = \\
& = \sum_{s=0}^{l_1} (-1)^{l-s} \frac{\Gamma(i\xi+s)\Gamma(l_1+1)}{\Gamma(l_1-s+1)\Gamma(i\xi-l+s)\Gamma(s+1)\Gamma(l+1)} a^{i\xi+s-l-1} c^{-s-i\xi} = \\
& = (1-z)^{2l+2} \sum_{s=0}^{l_1} (-1)^{l-s} \frac{\Gamma(i\xi+s)\Gamma(l_1+1)}{\Gamma(l_1-s+1)\Gamma(i\xi-l+s)\Gamma(s+1)\Gamma(l+1)} \times \\
& \quad \times D_1^{i\xi+s-l-1} D_2^{-s-i\xi}, \quad (41)
\end{aligned}$$

по существу приводим задачу к рассмотренной в предыдущем разделе.

Поэтому, опуская технические детали, приведем окончательный ответ:

$$\begin{aligned}
S_{\vec{p}, nlm}(\vec{q}) &= 4\pi \cdot 2^{2l} i^l \omega^{l+1/2} \left[ \frac{\Gamma(n-l)}{n\Gamma(n+l+1)} \right]^{1/2} = \\
&= \sum_{s=0}^l G_{lms}(\vec{p}, \vec{q}) H_{nls}(\vec{p}, \vec{q}) \cdot (\omega^2 + \Delta^2)^{i\xi+s-l-1} [(\omega-ip)^2 + q^2]^{-s-i\xi}; \quad (42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{lms}(\vec{p}, \vec{q}) &= (-1)^{l-s} \frac{\Gamma(i\xi+s)}{\Gamma(i\xi-l+s)\Gamma(s+1)} \times \\
&\times \sum_{l_1=s}^l \left[ \frac{4\pi\Gamma(2l+2)}{\Gamma(2l_1+2)\Gamma(2l-2l_1+2)} \right]^{1/2} \frac{\Gamma(l_1+1)}{\Gamma(l_1-s+1)} q^{l_1} (-p)^{l-l_1} \times \\
&\quad \times \left[ Y_{l_1} \left( \frac{\vec{q}}{q} \right) \otimes Y_{l-l_1} \left( \frac{\vec{p}}{p} \right) \right]_{lm}; \quad (43)
\end{aligned}$$

$$H_{nls}(\vec{p}, \vec{q}) = (n+l)F_{n_1ls}(\vec{p}, \vec{q}) - (n-l)F_{n_2ls}(\vec{p}, \vec{q}); \quad (44)$$

$$n_1 = n-l-1, \quad n_2 = n-l-2;$$

$$F_{n_1(2)ls}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\Gamma(l-s+\frac{1}{2}-i\xi)}{\Gamma(2l-2s+1-2i\xi)} \sum_{k=0}^{n_1(2)} w^k C_k^{(i\xi+s)}(v) \times \\ \times \frac{\Gamma(n_1(2)-k+2l-2s+1-2i\xi)}{\Gamma(n_1(2)-k+l-s+\frac{1}{2}-i\xi)} P_{n_1(2)-k}^{(l-s-\frac{1}{2}-i\xi, l-s+\frac{1}{2}-i\xi)}(u). \quad (45)$$

Таким образом, формфакторы перехода из произвольных связанных состояний водородоподобных атомов в  $\vec{p}$ -состояния непрерывного спектра выражаются в виде суперпозиции конечного числа слагаемых с простой аналитической структурой и также могут быть рассчитаны численно с произвольной степенью точности [20].

### 3. СПЕКТР ПРОДУКТОВ ИОНИЗАЦИИ АТОМОВ $A_{2\pi}$

Для интерпретации данных эксперимента DIRAC [12–14], наряду со значениями полных сечений перехода между связанными состояниями атома пиония, необходимы также выражения для сечений переходов этих атомов из связанных состояний в состояния непрерывного спектра, характеризующиеся определенным значением относительного импульса  $\pi^+\pi^-$ -системы  $\vec{p}$  в несвязанном состоянии, и соответствующие распределения по величине и направлению указанного импульса. Последние используются для наблюдения атомов  $A_{2\pi}/A_{\pi K}$  и измерения их времени жизни.

В борновском приближении сечения переходов  $|nlm\rangle \rightarrow |\vec{p}\rangle$  выражаются через соответствующие переходные формфакторы  $S_{\vec{p},nlm}$  обычными соотношениями:

$$\sigma_{(nlm \rightarrow \vec{p})} = \int |U(\vec{q})|^2 \left[ S_{\vec{p},nlm} \left( \frac{\vec{q}}{2} \right) - S_{\vec{p},nlm} \left( -\frac{\vec{q}}{2} \right) \right]^2 d^2q. \quad (46)$$

Здесь  $U(\vec{q})$  – фурье-преобразование потенциальной энергии взаимодействия димезоатомов с атомами мишени.

Распределения по относительному импульсу могут быть рассчитаны в соответствии с формулами

$$\frac{d^3\sigma_{(nlm \rightarrow \vec{p})}}{d^3\vec{p}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2q \sigma_0(\vec{q}) [S_{\vec{p},nlm}(\vec{p}, \vec{q}_1) - S_{\vec{p},nlm}(\vec{p}, \vec{q}_2)], \quad (47)$$

$$\vec{q}_1 = \frac{\vec{q}m_1}{M}, \quad \vec{q}_2 = -\frac{\vec{q}m_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2, \quad (48)$$

$$\sigma_0(\vec{q}) = \left( \frac{2\alpha}{q^2} \right)^2 \left\{ [Z - F_{\text{el}}(\vec{q})]^2 + Z F_{\text{inel}}(\vec{q}) \right\}, \quad (49)$$

$$F_{\text{el}}(\vec{q} = 0) = Z,$$

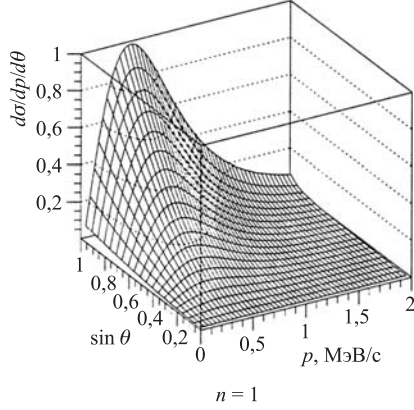


Рис. 1. Спектр пионов от ионизации атомов  $A_{2\pi}^{1S}$

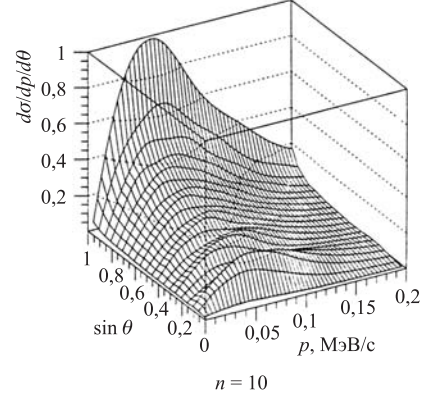


Рис. 2. Спектр пионов от ионизации атомов  $A_{2\pi}^{10S}$

где  $\sigma_{(nlm \rightarrow \vec{p})}$  — сечение перехода димезоатома из состояния  $|nlm\rangle$  в континуум;  $m_{1,2}$  — массы  $\pi^\pm$ - и  $\pi^\mp/K^\mp$ -мезонов;  $\alpha$  — постоянная тонкой структуры;  $F_{\text{el}}(\vec{q})$  и  $F_{\text{inel}}(\vec{q})$  — упругий и неупругий формфакторы атомов мишени соответственно;  $Z$  — атомный номер атомов мишени.

Результаты соответствующих расчетов иллюстрируются рис. 1, 2. На указанных рисунках приведены распределения по импульсу ( $p$ ) и углу ( $\theta$ ) между направлением движения димезоатомов и направлением относительного импульса пионных пар  $\pi^+\pi^-$

$$\frac{d\sigma_{(nlm \rightarrow \vec{p})}}{d\theta dp} = 2\pi \sin \theta p^2 \frac{d^3\sigma_{(nlm \rightarrow \vec{p})}}{d^3\vec{p}}, \quad (50)$$

возникающих при диссоциации атомов  $A_{2\pi}$  в исходных  $1S$ - и  $10S$ -состояниях (рис. 1, 2) в кулоновском поле атомов мишени [21].

Авторы благодарят А. В. Тарасова и Л. Г. Афанасьева за полезные обсуждения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. R.N. Faustov *Sov. J. Particles and Nuclei*, **3** (1972) 119; R. Coombes et al., *Phys. Rev. Lett.*, **37** (1976) 249; S.H. Aronson et al., *Phys. Rev. Lett.*, **48** (1982) 1078.; J. Kapusta and A. Mocsy, arXiv:nucl-th/9812013.
2. G. Wentzel, *Z. Physik*, **58** (1929) 349; E.H.S. Burhop, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **36** (1940) 43; B. Yavorsky, *Compt. Rend. Acad. Sci. U.R.S.S.*, **43** (1944) 151, *ibid.* **49** (1945) 250; M. Matsuzawa, *Phys. Rev.*, **A 9** (1947) 241.

3. F. Mandl, *The Ionization by Electron Impact of Excited Hydrogen Atoms* (Atomic Energy Research Establishment, Harwell, England, 1952); P. Swan, *Phys. Soc.* (London), **A 68** (1955) 1157; R. McCarroll, *Phys. Soc.* (London), **A 70** (1957) 460; T.J.M. Boyd, *Phys. Soc.* (London), **A 72** (1958) 523.
4. D. McCrea and T.V.M. McKirgan, *Phys. Soc.* (London), **75** (1960) 235; G.C. McCoyd, S.N. Milford and J.J. Wahl, *Phys. Rev.*, **119** (1960) 149; L. Fisher, S.N. Milford and F.R. Pomilla, *Phys. Rev.*, **119** (1960) 153; S.N. Milford, J.J. Morrissey and J.H. Scanlon, *Phys. Rev.*, **120** (1960) 1715.
5. J.H. Scanlon and S.N. Milford, *Astron. J.*, **134** (1961) 724; G.C. McCoyd and S.N. Milford, *Phys. Rev.*, **130** (1963) 206; A.R. Holt, *J. Phys.*, **B 2** (1969) 1209; I.L. Beigman and A.M. Urnov, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, **14** (1974) 1009.
6. Dz. Belkič, *J. Phys.*, **B 14** (1981) 1907, *ibid.* **B 16** (1983) 1983.
7. L. Afanasyev and A. Tarasov, JINR E4-93-293, Dubna, 1993.
8. H.S.W. Massey, E.H.S. Burhop and H.G. Gilbody, *Electric and Ionic Impact Phenomena* (Oxford Univ. Press, 1929) v. I, 2nd., ch. 7 (see also references therein); H.S.W. Massey and C.B.O. Mohr, *Proc. R. Soc. London*, **A 140** (1931) 605.
9. H.S.W. Massey and C.B.O. Mohr, *Proc. R. Soc. London*, **A 152** (1933) 613; K. Omidvar, *Phys. Rev.*, **140** (1965) A25.
10. A.O. Barut and H. Kleinert, *Phys. Rev.*, **15** (1967) 1541; K. Omidvar, *Phys. Rev.*, **140** (1965) A38, *ibid.* **188** (1969) 140 (see also references therein); D. Trautmann, G. Baur and F. Rosel, *J. Phys.*, **B 16** (1983) 3005; A.O. Barut and R. Wilson, *Phys. Rev.*, **A 40** (1989) 1340.
11. L.L. Nemenov, *Yad. Fiz.*, **15** (1972) 1047, *ibid.* **16** (1972) 125, *ibid.* **41** (1985) 980; S. Mrówczyński, *Phys. Rev.*, **D 36** (1987) 1520; K.G. Denisenko and S. Mrówczyński, *Phys. Rev.*, **D 36** (1987) 1529.
12. B. Adeva et al., *Phys. Lett.* **B 619** (2005) 50; B. Adeva et al., *J. Phys.* **G 30** (2004) 1929; B. Adeva et al., *Lifetime measurement of  $\pi^+\pi^-$  atoms to test low energy QCD predictions* (Proposal to the SPSLC, CERN/SPSLC 95-1, SPSLC/P 284, Geneva, 1995).
13. Proc. Int. Workshop on Hadronic Atoms “*HadAtom05*”, Bern, February 15-16, 2005 [L. Afanasyev, A. Lanaro and J. Schacher, arXiv:hep-ph/0508193]; Proc. Int. Workshop on Hadronic Atoms “*HadAtom03*”, Trento, October 13-17, 2003 [J. Gasser, A. Rusetsky and J. Schacher, arXiv:hep-ph/0401204]; Proc. Int. Workshop on Hadronic Atoms “*HadAtom02*”, Geneva, October 14-15, 2002 [L. Afanasyev, G. Colangelo and J. Schacher, arXiv:hep-ph/0301266].
14. “*HadAtom99*”, Proc. Int. Workshop on Hadronic Atoms, Bern, October 14-15, 1999 [J. Gasser, A. Rusetsky and J. Schacher, arXiv:hep-ph/9911339]; “*Hadronic Atoms and Positronium in the Standard Model*”, Proc. Int. Workshop on Hadronic Atoms,

- Dubna, May 26-31, 1998, Eds. M.A. Ivanov, A.B. Arbuzov, E.A. Kuraev et al., (E2-98-254, Dubna, 1998).
15. L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory* (Pergamon Press, Oxford, 1977).
  16. I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products* (Nauka Publication, Moscow, 1971); *Handbook of Mathematical Functions*, Eds. M. Abramowitz and I.A. Stegun (National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series, 1964).
  17. A. Nordsieck, *Phys. Rev.*, **93** (1954) 785.
  18. O.Voskresenskaya, arXiv:hep-ph/0111216; S. Bakmaev and O. Voskresenskaya, *Part. Nucl. Lett.*, **3** (2006) No. 6(135) 33.
  19. D.A. Varshalovich, A.H. Moskalev and V.K. Khersonsky, *Quantum theory of angular momentum* (Nauka Publication, Moscow, 1975); A.R. Edmonds, *Angular momentum in quantum mechanics* (Princeton, 1957).
  20. O.Voskresenskaya, arXiv:hep-ph/0201037.
  21. L. Afanasyev, A. Tarasov and O. Voskresenskaya, in: Proc. Int. Workshop on Hadronic Atoms “*HadAtom01*”, Bern, October 11-12, 2001 [J. Gasser, A. Rusetsky and J. Schacher, arXiv:hep-ph/0112293]; S. Bakmaev and O. Voskresenskaya, arXiv:nucl-th/06100010.

Получено 21 ноября 2006 г.

Редактор *М. И. Зарубина*

Подписано в печать 20.03.2007.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 0,94. Уч.-изд. л. 1,10. Тираж 415 экз. Заказ № 55711

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)