Р4-2008-48

В. К. Игнатович

О НЕЙТРОННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛНАХ

Направлено в журнал «Кристаллография»

Игнатович В. К. P4-2008-48

О нейтронных поверхностных волнах

Недавно в литературе обсуждался вопрос о существовании поверхностных нейтронных волн [1, 2]. В настоящей статье показано, что такие волны не существуют, и проанализировано отличие волновой механики нейтрона от волновой физики электромагнитных и акустических процессов, где поверхностные волны существуют.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики им. И. М. Франка ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2008

Ignatovich V. K. P4-2008-48

On Neutron Surface Waves

Recently the question of existence of neutron surface waves was discussed [1, 2]. In the given paper it is shown that such waves do not exist. The analysis of neutron wave mechanics, electromagnetic and acoustical wave physics reveals why in the last two cases the surface waves are not forbidden.

The investigation has been performed at the Frank Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2008

ВВЕДЕНИЕ

Исследование волновых процессов в электромагнетизме и акустике указывает на возможность существования поверхностных волн. Квантовая механика тоже волновая теория, и потому априори в ней можно предположить возможность существования поверхностных волн частиц, например, поверхностных нейтронных волн [1, 2]. В настоящей работе показывается, что в противоположность электромагнетизму и акустике в нейтронной физике поверхностных волн нет. Исследуются причины такого отличия. Главная причина состоит в том, что в нейтронной физике имеется единое волновое уравнение для неоднородной среды, и граничные условия на поверхностях раздела областей с различными свойствами вытекают из самого волнового уравнения. В электромагнетизме и акустике нет единого волнового уравнения для неоднородной среды, а имеются волновые уравнения только в однородных средах, и граничные условия на границах раздела следуют не из самих волновых уравнений, а из других физических требований. В электромагнетизме требуется выполнение уравнений Максвелла, а в акустике — непрерывность тензора напряжений.

В следующем разделе показывается, почему уравнение Шредингера для скалярных частиц запрещает существование поверхностных волн. Далее рассматривается электромагнетизм и изучаются условия, при которых возможно возникновение поверхностных волн. В разд. 3 рассматриваются акустические волны и граничные условия на поверхностях раздела неоднородных сред. Исследуются условия для возникновения поверхностных рэлеевских волн.

Поскольку и электромагнитные, и акустические волны являются векторными, а поверхностные возбуждения возникают только при определенной поляризации, то для исследования возможности существования поверхностных нейтронных волн необходимо рассмотреть уравнение Шредингера с учетом спиновых свойств нейтрона. Этому посвящен разд. 4.

В работах [1, 2] поверхностными волнами называются не волны на границе раздела двух различных сред, а волны, распространяющиеся в некотором слое с комплексным потенциалом, расположенным на поверхности полностью отражающей среды. Такие волны не являются в строгом смысле поверхностными. Их правильнее назвать каналируемыми волнами, и в разд. 5 рассматриваются условия распространения таких волн. При этом показывается, что решения, найденные в [1, 2], являются нефизическими.

1. ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ СКАЛЯРНЫХ ЧАСТИЦ

В квантовой механике скалярные нерелятивистские (релятивизм здесь несуществен) частицы с заданной энергией E_0 описываются волновой функцией $\psi(\mathbf{r})$, которая удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера. Это уравнение мы будем записывать в виде

$$\left[\Delta + k_0^2 - u(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) = 0, \tag{1}$$

где $k_0^2 = 2mE_0/\hbar^2$ — квадрат волнового вектора, а $u(\mathbf{r})$ — приведенный потенциал, который связан с потенциальной энергией $U(\mathbf{r})$ взаимодействия нейтрона с веществом соотношением $u(\mathbf{r}) = 2mU(\mathbf{r})/\hbar^2$.

Рассмотрим распространение нейтрона в двух средах, разделенных поверхностью $z = 0$. Пусть потенциал $u(\mathbf{r})$ имеет вид $u(\mathbf{r}) \equiv u(z) = u_1\Theta(z < 0) + u_2\Theta(z \geqslant 0)$, где $\Theta(z)$ — ступенчатая волновая функция, равная единице, когда неравенство в ее аргументе выполнено, и равная нулю, когда нет. В этом случае $\psi(\mathbf{r})$ может быть представлено в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp{(i\mathbf{k}_{||}\mathbf{r}_{||})}\varphi(z), \tag{2}$$

где $\varphi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\left[d^2/dz^2 + k_z^2 - u(z)\right]\varphi(z) = 0, \tag{3}$$

в котором $k_z^2 = k_0^2 - k_{||}^2$ характеризует энергию движения нейтрона вдоль оси z.

Из уравнения (3) сразу следует, каким граничным условиям должна удовлетворять функция $\varphi(z)$ на границе раздела. Поскольку $u(z)$, а значит и вторая производная функции $\varphi(z)$ имеют на границе раздела только конечный скачок, то и сама функция $\varphi(z)$, и ее производная должны быть в точке $z = 0$ непрерывными.

В поверхностной волне, в случае, когда потенциалы $u_{1,2}$ действительны, функция $\varphi(z)$ должна иметь вид

$$\varphi(z) = \varphi(0)\left[\Theta(z \leqslant 0)\exp{(\kappa_1 z)} + \Theta(z \geqslant 0)\exp{(-\kappa_2 z)}\right]. \tag{4}$$

Такая функция непрерывна на границе раздела, но ее производная имеет разрыв, поэтому она не является решением уравнения (3), а значит и не существует.

Если в средах по обе стороны от границы раздела возможно рассеяние или поглощение нейтрона, то потенциалы $u_{1,2}$ содержат мнимые части и поверхностную волну можно представлять себе в виде функции

$$\varphi(z) = \varphi(0)\left[\Theta(z \leqslant 0)\exp{(\kappa_1 z - ik_1 z)} + \Theta(z \geqslant 0)\exp{(-\kappa_2 z + ik_2 z)}\right], \tag{5}$$

в которой волновые векторы $k_{1,2}$ описывают поток, уходящий в обе стороны от границы. Этот поток экспоненциально затухает при удалении от поверхности раздела, что легко объясняется потерями. В этом случае компонента волнового вектора $\mathbf{k}_{||}$ движения вдоль границы раздела в (2) тоже должна содержать положительную мнимую часть, которая описывает ослабление потока вдоль поверхности вследствие оттока частиц в перпендикулярном направлении.

Однако производная функции (5) разрывна в точке $z = 0$, следовательно, волна (5) не является решением уравнения (3), а значит не существует.

Итак, мы показали, что в квантовой механике скалярных частиц поверхностных волн нет. Посмотрим теперь, почему они возможны в других теориях, и сначала обратимся к электромагнетизму.

2. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

В основе электромагнитной теории лежат уравнения Максвелла, которые в отсутствие зарядов и токов имеют вид

$$[\nabla\mathbf{E}] = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\nabla\mathbf{B}) = 0, \tag{6}$$

$$[\nabla\mathbf{H}] = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad (\nabla\mathbf{D}) = 0, \tag{7}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{8}$$

Из этих уравнений можно получить волновые уравнения для полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ только в однородных средах — средах, в которых диэлектрическая ε и магнитная μ проницаемости постоянны. Действительно, тогда, взяв ротор от первого уравнения (6), приведем его к виду

$$[\nabla[\nabla\mathbf{E}]] = -\frac{1}{c}\frac{\partial[\nabla\mathbf{B}]}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial[\nabla\mathrm{H}]}{\partial t}, \tag{9}$$

а подставив в него первое уравнение из (7) и воспользовавшись вторым из (7), $(\nabla\mathbf{D}) = \varepsilon(\nabla\mathrm{E}) = 0$, получим волновое уравнение для электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r},t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0, \tag{10}$$

которое в стационарном случае

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r})\exp(-i\omega\, t) \tag{11}$$

приводится к виду

$$\Delta\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\mu\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0. \tag{12}$$

К такому же виду приводится и уравнение для поля $\mathbf{H}$.

Уравнение для каждой компоненты вектора $\mathbf{E}$ аналогично (1) с $k_0^2 = \omega^2/c^2$ и $u = (\varepsilon\mu - 1)k_0^2$. Если бы это уравнение можно было бы принять для неоднородных сред, в которых $\varepsilon\mu$ зависит от координат, например, скачкообразно, то на границе раздела мы должны были бы потребовать непрерывность любой компоненты поля и ее производной. Тогда мы вступили бы в противоречие с уравнениями Максвелла, из которых следует непрерывность компонент полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, параллельных границе раздела, и непрерывность компонент полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$, перпендикулярных ей.

То, что в неоднородных средах нельзя получить единого волнового уравнения, легко понять на примере двух полубесконечных сред с разными ε и μ, имеющими границу раздела при $z = 0$. В этом случае второе уравнение из (6) имеет вид

$$(\nabla\mathbf{B}) \equiv \mu(\nabla\mathbf{H}) + \delta(z)(\mu_2 - \mu_1)(\mathbf{n}\mathbf{H}) = 0, \tag{13}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, направленный вдоль оси z, а второе уравнение из (7) имеет вид

$$(\nabla\mathbf{D}) \equiv \varepsilon(\nabla\mathbf{E}) + \delta(z)(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\mathbf{n}\mathbf{E}) = 0. \tag{14}$$

Поэтому та последовательность операций, которая привела нас к уравнению (10), теперь приведет к неоднородному уравнению. Отсюда следует, что волновые уравнения по разные стороны от границы раздела двух разных однородных полупространств различны, и для сшивки их решений используются граничные условия, которые определяются не самими уравнениями, а привносятся уравнениями Максвелла.

Есть, правда, случай, когда из уравнений Максвелла можно получить единое волновое уравнение для всего неоднородного пространства. Это случай, когда $\mu = 1$ или постоянно по обе стороны от границы раздела и когда вектор электрического поля в падающей волне перпендикулярен плоскости падения, т. е. параллелен границе раздела — так называемая TE-волна. Например, если плоскость падения совпадает с плоскостью (x, z), то вектор $\mathbf{E}$ имеет единственную компоненту E_y. В этом случае второе слагаемое в (13) отсутствует в силу непрерывности μ, второе слагаемое в (14) отсутствует в силу перпендикулярности поля $\mathbf{E}$ к нормали, и все шаги, которые от максвелловских уравнений привели к волновому уравнению (12) в одном из полупространств, теперь приводят к единому волновому уравнению во всем пространстве. Поэтому граничные условия следуют из волнового уравнения и совпадают с условиями непрерывности поля E_y и его нормальной производной. Но отсюда следует, что, как и в случае скалярных частиц, поверхностных волн с электрическим полем, параллельным границе раздела, в природе нет.

Падающую волну с произвольным направлением поляризации можно представлять в виде суперпозиции TE- и TM-волн. В TM-волне перпендикулярным плоскости падения является вектор $\mathbf{H}$, и для нее нельзя записать единого волнового уравнения во всем пространстве, поскольку второе слагаемое в (14) не равно нулю. Тем не менее для TM-поля можно записать единую совокупность падающей, отраженной и преломленной волн

$$\mathbf{\Psi} = \mathrm{e}^{i\mathbf{k}_{||}\mathbf{r}}\left[\Theta(z\leqslant 0)\left\{\left(\mathbf{H}-\frac{[\mathbf{kH}]}{k_0\varepsilon_1}\right)\mathrm{e}^{ik_z z}+r\left(\mathbf{H}-\frac{[\mathbf{k}_r\mathbf{H}]}{k_0\varepsilon_1}\right)\mathrm{e}^{-ik_z z}\right\}+\right.$$
$$\left.+\,\Theta(z\geqslant 0)t\left(\mathbf{H}-\frac{[\mathbf{k}'\mathbf{H}]}{k_0\varepsilon_2}\right)\mathrm{e}^{ik'_z z}\right], \quad (15)$$

в которой $\mathbf{k}=\mathbf{k}_{||}+\mathbf{n}k_z$, $\mathbf{k}_r=\mathbf{k}_{||}-\mathbf{n}k_z$, $\mathbf{k}'=\mathbf{k}_{||}+\mathbf{n}k'_z$, $k_z=\sqrt{\varepsilon_1 k_0^2-k_{||}^2}$, $k'_z=\sqrt{\varepsilon_2 k_0^2-k_{||}^2}$, а r и t — амплитуды отражения и преломления соответственно. Для сшивания функции на границе раздела требуются граничные условия. Эти условия следуют из требования непрерывности компонент $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, параллельных плоскости раздела. Условие непрерывности $\mathbf{H}$ в TM-волне элементарно и приводит к уравнению $1+r=t$, а условие непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля следует из выражения для $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E}=-\frac{c}{\omega\varepsilon}[\mathbf{kH}]=-\frac{c}{\omega\varepsilon}\left([\mathbf{k}_{||}\mathbf{H}]+k_z[\mathbf{nH}]\right), \quad (16)$$

где во втором равенстве волновой вектор представлен в виде $\mathbf{k}=\mathbf{k}_{||}+\mathbf{n}k_z$. Из (16) следует, что параллельная плоскости раздела компонента вектора $\mathbf{E}$ пропорциональна $[\mathbf{nH}]$, и ее непрерывность приводит ко второму уравнению на границе

$$\frac{1}{\varepsilon_1}k_z(1-r)=\frac{1}{\varepsilon_2}k'_z t. \quad (17)$$

Поверхностная волна в электромагнетизме возможна благодаря именно этому граничному условию. Поверхностная волна не содержит падающей, и условие непрерывности, соответствующее (17), при экспоненциальном затухании в обе стороны от границы раздела, $k_{z1,2}=i\kappa_{1,2}$, имеет вид $\kappa_1/\varepsilon_1=-\kappa_2/\varepsilon_2$, откуда следует, что поверхностная волна может существовать при условии

$$\frac{\sqrt{k_{||}^2-\varepsilon_1 k_0^2}}{\sqrt{k_{||}^2-\varepsilon_2 k_0^2}}=-\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad (18)$$

которое в принципе может быть выполнено, если диэлектрические проницаемости по обе стороны от границы раздела имеют разные знаки. Условие (18) записано для случая непоглощающих и неактивных сред (поверхностные волны Фано [3]), но оно может быть обобщено для поглощающих и активных сред, когда поле **E** приобретает продольную компоненту и диэлектрическая проницаемость становится комплексной (поверхностные волны Ценека [3]).

Мы не ставим себе целью исследовать поверхностные электромагнитные волны. Нам важно только показать, в чем различие уравнения Шредингера и волновых уравнений в электромагнетизме, вследствие которого в квантовой механике скалярных частиц поверхностных волн нет, а в электромагнетизме есть. Для читателей, интересующихся поверхностными электромагнитными волнами, будут полезны работы [3–11], а также ссылки, приведенные в [1].

3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ РЭЛЕЕВСКИЕ ВОЛНЫ В АКУСТИКЕ

В акустике, как и в электродинамике, нет единого волнового уравнения для неоднородной среды. Чтобы показать это, напомним основные моменты теории упругости [12], необходимые для вывода волнового уравнения. Для получения волновых уравнений нужно исходить из выражения для свободной энергии F деформированной среды. Будем среду считать однородной и изотропной. Тогда

$$F = \frac{\lambda}{2}u_{ll}^2 + \mu u_{lj}^2, \tag{19}$$

где λ и μ — параметры Ламэ, $u_{ij} = (\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)/2$ — тензор деформации, а u_j — компоненты вектора смещения $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ элемента среды в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t.

Зависимость от времени вектора смещения определяется уравнениями Ньютона

$$\rho\ddot{u}_i = \nabla_j\sigma_{ij}, \tag{20}$$

которые содержат плотность среды ρ и тензор напряжений σ_{ij}, определяемый с помощью производной от свободной энергии при постоянной температуре T:

$$\sigma_{ij} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ij}}\right)_T = \lambda\delta_{ij}u_{ll} + 2\mu u_{ij}. \tag{21}$$

Подставив (21) в (20), получим волновое уравнение, которое для периодических процессов $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)$ приводится к виду

$$\rho\omega^2\mathbf{u}(r) + \mu\Delta\mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\mathbf{u}(\mathbf{r})) = 0. \tag{22}$$

Если пространство состоит из двух однородных полупространств с различающимися коэффициентами Ламэ и с плоской границей раздела при $z = 0$, то производная в (20) справа после подстановки (21) будет содержать функцию $\delta(z)$, которая делает волновое уравнение неоднородным.

Поскольку волновые уравнения по обеим сторонам границы раздела различаются, то граничные условия для сшивки решений необходимо определять из дополнительных физических требований. Такими требованиями являются непрерывность вектора смещения $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ и вектора напряжений $\mathbf{\Sigma}$ с компонентами $\Sigma_i = \sigma_{ij} n_j$, где n_j — компоненты вектора нормали $\mathbf{n}$ к границе раздела. Подставив сюда (21), получим вектор напряжений в векторной форме

$$\mathbf{\Sigma}(\mathbf{u}) = \mu[(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{u} + \nabla(\mathbf{nu})] + \lambda\mathbf{n}(\nabla\mathbf{u}). \tag{23}$$

Таким образом, второе граничное условие имеет вид

$$\mu_1[(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{u} + \nabla(\mathbf{nu})] + \lambda_1\mathbf{n}(\nabla\mathbf{u}) = \mu_2[(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{u} + \nabla(\mathbf{nu})] + \lambda_2\mathbf{n}(\nabla\mathbf{u}). \tag{24}$$

Покажем, что при таких граничных условиях на поверхности раздела могут возникать поверхностные волны

$$\mathbf{u}(r,t) = \mathbf{A}\exp\left(i\mathbf{k}_{||}\mathbf{r}_{||} - i\omega\, t\right)\left[\Theta(z \leqslant 0)\exp\left(\kappa_1 z\right) + \right.$$
$$\left. + \ \Theta(z \geqslant 0)\exp\left(-\kappa_2 z\right)\right], \tag{25}$$

где $\mathbf{A}$ — вектор поляризации, $\kappa_i = \sqrt{k_{||}^2 - k_{ti}^2}$, а $k_{ti} = \omega\sqrt{\rho_i/\mu_i}$, $i = 1{,}2$. Поляризация $\mathbf{A}$ этих волн является смешанной продольно-поперечной. Ее можно представить в виде $\mathbf{A} = \alpha\mathbf{n} + \beta\mathbf{k}_{||}$. Подставив (25) в (24) и умножив результирующее векторное уравнение сначала на $\mathbf{n}$, а потом на $\mathbf{k}_{||}$, получим однородную линейную систему двух уравнений для координат α и β вектора поляризации $\mathbf{A}$. Условие разрешимости этой системы уравнений определяет скорость рэлеевской волны.

Решение задачи известно, и мы не будем его приводить, поскольку нашей целью было только выяснить причину, по которой в акустике имеются поверхностные волны, а в квантовой механике скалярных частиц их нет.

4. ОТСУТСТВИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ СОСТОЯНИЙ У СПИНОРНЫХ ЧАСТИЦ

Поверхностные волны в электромагнетизме и акустике имеют определенную поляризацию. В связи с этим может возникнуть вопрос: не появятся ли поверхностные волны у частиц, если учесть их спин. В данном разделе будет показано, что этого не произойдет в силу граничных условий, которые требуют непрерывности волновой функции и ее производной на границе раздела и которые вытекают из уравнения Шредингера, записываемого единым образом во всем пространстве.

Покажем, что поверхностных состояний нет. Для этого допустим обратное. Пусть по обе стороны от границы раздела имеется магнитное поле: $\mathbf{B}_0$ снизу, в вакууме, и $\mathbf{B}_1$ сверху, в веществе. Под полем $\mathbf{B}$ здесь понимается величина $2m\mu[\mathbf{B}]/\hbar^2$, где μ — абсолютное значение магнитного момента нейтрона, а $[\mathbf{B}]$ — магнитная индукция в естественной размерности. Допустим, что на границе раздела имеется поверхностное состояние нейтрона с поляризацией, описываемое спинором $|\xi\rangle$. Волновая функция поверхностной волны записывается в виде [13]

$$|\psi(z)\rangle = \Big[\Theta(z>0)\exp(-\hat{\mathbf{k}}_0 z) + \Theta(z<0)\exp(\hat{\mathbf{k}}_1 z)\Big]|\xi\rangle\,, \qquad (26)$$

где $\hat{\mathbf{k}}_0 = \sqrt{\kappa^2 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}_0}$, $\hat{\mathbf{k}}_1 = \sqrt{\kappa^2 + u + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}_1}$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — вектор матриц Паули, u — оптический потенциал вещества,

$$\kappa^2 = k_{||}^2 - \frac{2m}{\hbar^2}E > \max(B_0, B_1 - u). \qquad (27)$$

Функция (26) на поверхности раздела непрерывна, а требование непрерывности производной приводит к уравнению

$$\Big[\hat{\mathbf{k}}_0 + \hat{\mathbf{k}}_1\Big]|\xi\rangle = 0. \qquad (28)$$

Поверхностная волна существует, если существует нетривиальное решение этого уравнения.

Для исследования этого уравнения воспользуемся известным правилом, согласно которому любая несингулярная функция $\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B})$ представляется в виде (см. [13], гл. 2) $\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}) = f^+ + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}f^-$, где $f^\pm = [f(B) \pm f(-B)]/2$, а $\mathbf{b}$ — единичный вектор, направленный вдоль $\mathbf{B}$. В соответствии с этим правилом

$$\hat{\mathbf{k}}_0 + \hat{\mathbf{k}}_1 = k_0^+ + k_1^+ + k_0^-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_0 + k_1^-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_1, \qquad (29)$$

откуда следует, что состояние $|\xi\rangle$ должно быть собственным спинором матрицы

$$\hat{\mathbf{A}} = k_0^-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_0 + k_1^-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{b}_1 \qquad (30)$$

с собственным значением $-(k_0^+ + k_1^+)$. Но собственные значения матрицы (30) равны

$$\pm|A| = \pm|k_0^-\mathbf{b}_0 + k_1^-\mathbf{b}_1| = \pm\sqrt{\left(k_0^-\right)^2 + \left(k_1^-\right)^2 + 2k_0^-k_1^-(\mathbf{b}_0\cdot\mathbf{b}_1)}, \qquad (31)$$

поэтому максимальное по модулю значение достигается только при параллельных полях и равно $k_0^- + k_1^-$. Поскольку $k_i^+ > k_i^-$, то условие (28) эквивалентно требованию

$$\sqrt{\kappa^2 + B_0} + \sqrt{\kappa^2 - B_0} + \sqrt{\kappa^2 + u + B_1} + \sqrt{\kappa^2 + u - B_1} =$$
$$= \sqrt{\kappa^2 + B_0} - \sqrt{\kappa^2 - B_0} + \sqrt{\kappa^2 + u + B_1} - \sqrt{\kappa^2 + u - B_1}$$

или

$$\sqrt{\kappa^2 - B_0} + \sqrt{\kappa^2 + u - B_1} = 0, \tag{32}$$

что возможно только при $\kappa^2 = B_0 = B_1 - u$. Но при выполнении этих условий для нейтрона, поляризованного против поля, среда оказывается однородной, и он может свободно распространяться вдоль поверхности раздела, как и в любом другом направлении. Поэтому нетривиальное решение уравнения (28) эквивалентно стиранию границы и понятие поверхностной волны при распространении вдоль границы теряет всякий смысл. Таким образом, и при учете спина нейтронные поверхностные волны не существуют.

5. КАНАЛИРУЕМЫЕ ВОЛНЫ

Отсутствие поверхностных нейтронных волн на границе раздела двух сред не означает, что нейтроны не могут распространяться вдоль границы отражающего вещества внутри слоя, напыленного на его поверхность. Представим себе, что пленка имеет отрицательный потенциал u_w, а отражающее вещество — положительный потенциал u_b, как показано на рис. 1. Внутри пленки возможно связанное состояние, отмеченное пунктиром между точками a и b. Высота уровня E, считая от дна ямы, определяется из уравнения [13]

$$r_a r_b \exp(2ikd) = 1, \tag{33}$$

где d — ширина ямы, а r_a и r_b — амплитуды отражения в точках a и b:

$$\begin{aligned} r_a &= \frac{k - i\kappa_a}{k + i\kappa_a} = \mathrm{e}^{-2i\varphi_a}, \\ r_b &= \frac{k - i\kappa_b}{k + i\kappa_b} = \mathrm{e}^{-2i\varphi_b}. \end{aligned} \tag{34}$$

В выражениях (34) введены обозначения $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$, $\kappa_a = \sqrt{u_w - k^2}$, $\kappa_b = \sqrt{u_w + u_b - k^2}$, $\varphi_a = \mathrm{arctg}\,(\kappa_a/k)$, $\varphi_b = \mathrm{arctg}\,(\kappa_b/k)$. С учетом этих обозначений уравнение (33) приводится к виду $\varphi_a + \varphi_b + kd = n\pi$, где n — целое число.

Волновая функция нейтрона, который распространяется с произвольным волновым вектором $\mathbf{k}_{||}$ вдоль поверхности отражающего вещества, находясь в связанном состоянии на уровне E, вне пленки в области $z \leqslant 0$, если ноль совпадает с краем a пленки, имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k}_{||}\mathbf{r}_{||} + \kappa_a z), \tag{35}$$

что очень похоже на волновую функцию поверхностного состояния, но не является им. Описанное состояние называется каналируемым. Внутри канала волновая функция, которая согласуется с (35), имеет вид

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Theta(0 \leqslant z \leqslant d) \exp\left(i\mathbf{k}_{||}\mathbf{r}_{||}\right) \frac{\exp\left(-ikz\right) + r_a \exp\left(ikz\right)}{1 + r_a}. \tag{36}$$

Выражения (35) и (36) справедливы только тогда, когда потенциалы u_w и u_b действительны. Тогда нейтрон распространяется по каналу, т. е. внутри пленки, без затухания, и волновые векторы $\mathbf{k}_{||}$ внутри и вне пленки одинаковы. Если же какой-нибудь или оба потенциала имеют мнимую часть, то волновая функция внутри канала затухает вдоль направления распространения, т. е. $\mathbf{k}_{||}$ приобретает мнимую часть, которую можно представить в виде $i\kappa_{||}\mathbf{k}_{||}/k_{||}$. В этом случае необходимо ввести начальную точку в канале, где появляется нейтрон, иначе в направлении $\mathbf{r}_{||} \to -\infty$ волновая функция (36) экспоненциально расходится. В области $z \leqslant 0$ вне пленки ни $\mathbf{k}_{||}$, ни κ_a не могут иметь мнимых частей, иначе в вакууме происходили бы беспричинные исчезновения частиц. Поэтому при наличии мнимых частей у потенциалов внешняя функция не имеет вида (35), а должна находиться с помощью теоремы Кирхгофа (см., например, [13], разд. 1.8.2).

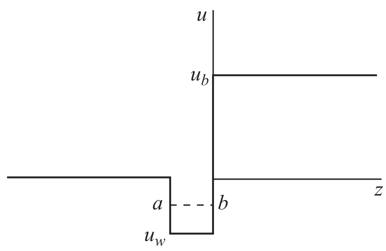

Рис. 1. Пленка с отрицательным потенциалом на поверхности отражающего вещества с положительным потенциалом. Внутри пленки возможно существование связанного состояния ab

6. НЕФИЗИЧНОСТЬ СОСТОЯНИЙ, ПРИВЕДЕННЫХ В [1, 2]

В работах [1, 2] рассмотрен потенциал, показанный на рис. 2. Он соответствует пленке шириной d с потенциальным барьером высотой u_f, напыленной на подложку с бесконечным отражающим потенциалом. В предположении, что u_f содержит мнимую часть, в [1, 2] получено решение уравнения Шредингера, имеющее вне пленки, в вакууме, вид

$$\Psi(x, z) \propto \exp\left([\kappa' + i\kappa'']z + i[k'_x + ik''_x]x\right), \tag{37}$$

который, по мнению авторов, отвечает поверхностной волне, распространяющейся вдоль оси x, лежащей в плоскости пленки. Параметры κ', κ'', k'_x и k''_x в (37) положительны.

По виду выражения (37) можно сразу сказать, что решение нефизично. Действительно, хотя функция (37) экспоненциально убывает как $\exp(\kappa' z)$ при удалении от системы в область $z \to -\infty$, она еще описывает и поток, пропорциональный κ'', идущий по направлению к поверхности $z = 0$. С учетом этого потока волновая функция не убывает при удалении от пленки, а экспоненциально возрастает при приближении к ней. Возникает следующая картина: при $z = -\infty$ нейтрона не было, а затем он стал рождаться в вакууме и при подходе к точке $z = 0$ превратился в целый нейтрон. Таким образом, решение (37) нарушает унитарность, а значит, является нефизическим.

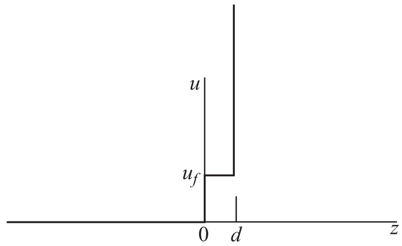

Рис. 2. Пленка на поверхности вещества с бесконечным потенциалом

При этом следует отметить, что функция (37) действительно является решением уравнения Шредингера. Получить его можно следующим образом. Будем решать обычную задачу отражения от потенциала, показанного на рис. 2. Волновая функция при $z < 0$ равна

$$\Psi(x, z) = \exp(ik_x x)\left[\exp(ik_z z) + R\exp(-ik_z z)\right], \tag{38}$$

где R — амплитуда отражения от всей системы, а $k_x^2 + k_z^2 = k_0^2$ — полная энергия нейтрона. Амплитуда R рассчитывается элементарно (см., например, [13]), и для потенциала на рис. 2 она равна

$$R = \frac{r_0 - \exp(2ik_z' d)}{1 - r_0\exp(2ik_z' d)}, \tag{39}$$

где $r_0 = (k_z - k_z')/(k_z + k_z')$ — амплитуда отражения от границы раздела $z = 0$, а $k_z' = \sqrt{k_z^2 - u_f}$ — волновое число внутри пленки $0 < z < d$. Если принять, что потенциал u_f имеет комплексную величину, т. е. $u_f = u_f' - iu_f''$, то при некоторых значениях k_z амплитуда R обращается в нуль, и решение (38) не содержит отраженной волны. Численное решение уравнения $R = 0$ или $r_0 - \exp(2ikz'd) = 0$ при $u_f' > 0$ и некоторых значениях $u_f'' > 0$ приводит к значениям $k_z = \kappa'' - i\kappa'$ с $\kappa' > 0$ и $\kappa'' > 0$. Это значит, что математическое решение, приведенное в [1, 2], существует, но оно должно быть исключено как нефизическое.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в данной статье показано, что поверхностные нейтронные волны, т. е. волны, распространяющиеся вдоль границы раздела двух сред и экспоненциально затухающие по обе стороны от нее, не существуют, поскольку они не удовлетворяют граничным условиям, следующим из самого уравнения Шредингера. В электромагнетизме и акустике граничные условия следуют не из самих волновых уравнений, а из дополнительных требований, и это объясняет, почему в электромагнетизме и акустике поверхностные волны могут быть. В нейтронной физике возможны приповерхностные, т. е. каналируемые волны. Но они могут распространяться только либо в пленках с отрицательным потенциалом (рис. 1), либо в многослойных системах, рассмотренных, например, в работе [14]. Для пленок с положительным потенциалом на поверхности отражающих веществ (рис. 2) уравнение Шредингера тоже содержит решение, похожее на приповерхностные волны [1, 2], однако это решение нарушает унитарность и как нефизическое должно быть отброшено. Таким образом, результаты работ [1, 2] неверны.

Благодарности. Автор благодарен А. В. Стрелкову, обратившему его внимание на работы [1, 2], и В. Л. Аксенову за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бокун Р. Ч., Кистович Ю. В.* // Кристаллография. 2005. Т. 50, № 5. С. 928–934; Crystallography Reports. 2005. V. 50, No. 5, P. 862–868.

2. *Бокун Р. Ч.* // Изв. РАН. Сер. физ. 2006. Т. 70, № 7. С. 942–944.

3. *Дацко В. Н., Копылов А. А.* О поверхностных электромагнитных волнах // УФН. 2008. Т. 178. С. 109–110.

4. *Князев Б. А., Кузьмин А. В.* Поверхностные электромагнитные волны: от видимого диапазона до микроволн // Вестник НГУ. Сер. физ. 2007. Т. 2, вып. 1. С. 108–122.

5. *Ishimaru A. et al.* Sommerfeld and Zenneck Wave Propagation for a Finitely Conducting One-Dimensional Rough Surface // IEEE transactions on antennas and propagation. 2000. V. 48, No. 9. P. 1475–1484.

6. *Ishimaru A. et al.* Electromagnetic Waves Over Half-Space Metamaterials of Arbitrary Permittivity and Permeability // IEEE transactions on antennas and propagation. 2005. V. 53, No. 3. P. 915–921.

7. *Barvestani J. et al.* Backward surface electromagnetic waves in semi-infinite one-dimensional photonic crystals containing left-handed materials // Phys. Rev. A. 2008. V. 77. P. 013805-1-5.

8. *Ranfagni A., Mugnai D.* Possibility of superluminal behaviors for X-like and Zenneck waves // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. 6742–6745.

9. *Кукушкин А. В.* Об одном способе решения волнового уравнения и возникающих при этом новых возможностях в некоторых физических приложениях // УФН. 1993. Т. 163. С. 81–95.

10. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. М.: Радио и связь, 1988.

11. *Либенсон М. Н.* Поверхностные электромагнитные волны оптического диапазона // Соросовский образовательный журнал. 1996. Вып. 10. С. 92; Новосибирск, 2003.

12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория упругости. М.: Наука, 2003.

13. *Игнатович В. К.* Нейтронная оптика. М.: Физматлит, 2006.

14. *Ignatovich V. K., Radu F.* Theory of neutron channeling in resonant layer of Multilayer Systems // Phys. Rev. B. 2001. V. 64. P. 205408-I-V.

Получено 4 апреля 2008 г.

Редактор *Е. В. Сабаева*

Подписано в печать 27.06.2008.
Формат $60 \times 90/16$. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 0,81. Уч.-изд. л. 1,18. Тираж 350 экз. Заказ № 56213

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.
E-mail: publish@jinr.ru
www.jinr.ru/publish/