

P11-2008-51

Е. В. Беспалько<sup>1</sup>, С. А. Михеев<sup>1</sup>, И. В. Пузынин,  
А. М. Резников<sup>1</sup>, В. П. Цветков<sup>1</sup>

О БИФУРКАЦИЯХ В ОДНОЙ АСТРОФИЗИЧЕСКОЙ  
МОДЕЛИ ВРАЩАЮЩИХСЯ НАМАГНИЧЕННЫХ  
ПОЛИТРОП С МАЛЫМ ИНДЕКСОМ

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

---

<sup>1</sup>Тверской государственный университет, Тверь, Россия

## О бифуркациях в одной астрофизической модели вращающихся намагниченных политроп с малым индексом

Для быстровращающейся гравитирующей намагниченной политропы с малым индексом  $n$  в линейном приближении по  $n$  найдено решение уравнения гидростатического равновесия. Доказано существование точек бифуркации таких конфигураций в интервале значений индекса  $0 \leq n \leq 0,1161$ , в которых отщепляются решения, асимметричные относительно оси вращения. Найдена аналитическая зависимость параметра асимметрии  $X$  от значений параметров скорости вращения  $\varepsilon$ , индекса  $n$ , величины магнитных напряжений  $\eta_m$ . Рассмотрен вопрос о сдвиге точек бифуркации, вызванном магнитными напряжениями. Исследована зависимость ускорения свободного падения на экваторе конфигурации  $g_{eq}$  от параметров  $\varepsilon$  и  $n$ . Впервые показано, что серия вращающихся политроп, имеющих точки бифуркации, обрывается при  $n_k = 0,1161$ , намного раньше известных из литературы значений  $n_k = 0,83$  и  $n_k = 0,808$ . Показано, что этот эффект объясняется существенно нелинейной зависимостью  $g_{eq}$  от  $n$  и связан с быстрым ростом экваториального радиуса  $r_{eq}$  при увеличении индекса политропы  $n$ .

Работа выполнена в Лаборатории информационных технологий ОИЯИ.

## Bifurcations in One Astrophysical Model of Rotating Magnetized Polytropics with a Small Index

A solution of the equation of hydrostatical equilibrium was obtained for rapidly rotating gravitating magnetized polytropic with a small index  $n$  in linear approach by  $n$ . An existence of bifurcation points of this configuration in the interval  $0 \leq n \leq 0.1161$  was proved, in which solutions asymmetric about the axis of rotation branch off. The analytic dependence of a parameter of asymmetry  $X$  on parameter values of velocity of rotation  $\varepsilon$ , index  $n$ , values of magnetic tension  $\eta_m$  was found. The problem of shift of bifurcation points induced by magnetic tension was considered. The dependence of acceleration of gravity at equator of configuration  $g_{eq}$  on parameters  $\varepsilon$  and  $n$  was investigated. For the first time it was proved that a series of rotating polytropes having bifurcation points breaks at  $n_k = 0.1161$ , much earlier than the values specified in [6, 7]:  $n_k = 0.83$  and  $n_k = 0.808$ . It was shown that this effect was due to the essentially nonlinear dependence of  $g_{eq}$  on  $n$  and connected with the rapidly growing equatorial radius  $r_{eq}$  according to the increase of the polytropic index  $n$ .

The investigation has been performed at the Laboratory of Information Technologies, JINR.

## ВВЕДЕНИЕ

Наиболее изучены аналитические решения уравнений, описывающих ньютоновские конфигурации однородной несжимаемой вращающейся гравитирующей жидкости [1–3]. Точные аналитические решения имеются только для эллипсоидальных фигур равновесия. При исследовании вращающихся гравитирующих конфигураций одним из основных является вопрос об ответвлении асимметричных относительно оси вращения решений уравнений, описывающих эти конфигурации. Порядок асимметрии распределения вещества относительно оси вращения определяется параметром  $X$ . В качестве этого параметра обычно выбирается или  $X = \frac{1}{2}(\tilde{\rho}_{200} - \tilde{\rho}_{020})$  или  $X = \frac{1}{2}(p_{200} - p_{020})$ . Величины  $\tilde{\rho}_{abc}$  представляют собой коэффициенты разложения относительной плотности конфигурации  $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$  ( $\rho$  — плотность,  $\rho_0$  — значение плотности в центре конфигурации) по степеням координат  $x_1 = \frac{x}{a_1}$ ,  $x_2 = \frac{y}{a_1}$ ,  $x_3 = \frac{z}{a_3}$  ( $a_1, a_3$  — полуоси сфероида, аппроксимирующего поверхность конфигурации), а величины  $p_{abc}$  — соответственно коэффициенты разложения относительного давления  $p = \frac{P}{P_0}$  ( $P$  — давление,  $P_0$  — давление в центре конфигурации). Конкретный выбор  $X$  зависит от свойств конфигурации, а именно, насколько близка она к несжимаемой или существенна ее сжимаемость. Для несжимаемой однородной гравитирующей жидкости параметр асимметрии  $X$  выражается через коэффициенты  $p_{abc}$ , а для сжимаемого случая — через коэффициенты  $\tilde{\rho}_{abc}$ .

Для несжимаемых конфигураций при значениях параметра  $\varepsilon = \frac{\omega^2}{4\pi G \rho_0}$  ( $\omega$  — угловая скорость вращения,  $G$  — гравитационная постоянная), меньших 0,09356, однородные несжимаемые гравитирующие конфигурации имеют форму сфероида Маклорена  $X = 0$ , а при достижении этого значения уже возможны трехосные эллипсоиды Якоби  $X \neq 0$ .

Случай несжимаемых однородных конфигураций в природе не может быть реализован, поэтому большой интерес представляет исследование более реалистических конфигураций с уравнениями состояния вещества со слабой сжимаемостью. В настоящее время этот вопрос практически не исследован из-за большой сложности математических вычислений. Новые возможности демонстрирует решение данной задачи с использованием символьно-численных компьютерных методов [4, 5].

Для простоты будем предполагать, что уравнение состояния вещества имеет вид политропы:

$$P = K\rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (1)$$

где  $K$  — размерная константа,  $n$  — индекс политропы.

В случае слабой сжимаемости мы имеем  $n \ll 1$ , так как при  $n = 0$   $\rho = \left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{n}{1+n}} = \rho_0$ . Поскольку показатель степени  $\frac{1+n}{n}$  в (1) изменяется от бесконечности ( $n = 0$ ) до большого, но конечного значения  $\sim \frac{1}{n}$  ( $n \neq 0$ ,  $n \ll 1$ ), то зависимость  $P$  от  $\rho$  в этом интервале значений  $n$  существенно нелинейная и можно ожидать сильной зависимости параметров быстровращающейся гравитирующей конфигурации от индекса политропы  $n$  для его малых значений.

Наиболее значительными исследованиями точек бифуркации  $X \neq 0$  вращающихся ньютоновских политроп являются работы Джинса и Джеймса [6,7]. В них проведены оценки максимального значения индекса политропы  $n_k$ ,  $n < n_k$ , выше которого точек бифуркации нет. Джинс приводит оценку  $n_k = 0,83$ , а Джеймс —  $n_k = 0,808$ . Физическая причина этого явления — истечение вещества с экватора конфигурации, возникающего при той быстроте вращения  $\varepsilon$  (сплюснутости) конфигурации, которая необходима для достижения точки бифуркации. Ускорение свободного падения на экваторе  $g_{\text{eq}}$  при  $n = n_k$  равно нулю. При большем значении  $\varepsilon$  имеем  $g_{\text{eq}} < 0$ , в этом случае с экватора конфигурации возникает истечение вещества и стационарная конфигурация невозможна.

Одна из целей нашей работы — показать, что существует значение  $n = n_k$ , значительно меньшее 0,808, в котором  $g_{\text{eq}} = 0$ .

## 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В основу развиваемой нами математической модели вращающихся намагниченных политроп положим уравнение [4,5]

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{\mathbf{r}'} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' - K_0 \int_{p(\mathbf{r})}^1 \frac{dp}{\tilde{\rho}(p)} - \varepsilon \frac{\mathbf{r}_1^2}{a_1^2} = \Pi_{(m)}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где  $\Pi_{(m)}$  — вклад магнитных натяжений;  $x_1 = \frac{x}{a_1}$ ,  $x_2 = \frac{y}{a_1}$ ,  $x_3 = \frac{z}{a_3}$ ;  $a_1$ ,  $a_3$  — полуоси сфероиды, аппроксимирующей поверхность конфигурации;  $\tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$ ,  $\rho$  — плотность конфигурации,  $\rho_0$  — плотность в центре конфигурации;  $p = \frac{P}{P_0}$  — отношение давления к центральному значению давления;  $\tilde{\rho}(p) = p^{-1}(\tilde{\rho})$  — функция, обратная к функции  $p = p(\tilde{\rho})$ ;  $K_0 = \frac{P_0}{2\pi G \rho_0^2 a_1^2}$ ;  $\mathbf{r}_\perp = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2$ ;  $D$  — область  $R^3$ , в которой  $\tilde{\rho} \geq 0$ .

Параметр  $K_0$  является важной характеристикой конфигурации и по порядку величины равен отношению давления к плотности гравитационной энергии в ее центре.

Для политропы имеем  $p = \tilde{\rho}^{1+\frac{1}{n}}$ . Отсюда следует уравнение конфигурации

$$\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \tilde{\rho}(\mathbf{r}') \left( \frac{1}{\mathbf{r}'} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + K_0(1+n) \left( \tilde{\rho}^{\frac{1}{n}}(\mathbf{r}) - 1 \right) - \varepsilon \frac{\mathbf{r}_\perp^2}{a_1^2} = \Pi_{(m)}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Сделаем замену  $\Theta(\mathbf{r}) = \tilde{\rho}^{\frac{1}{n}}(\mathbf{r})$ ,  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}) = \Theta^n(\mathbf{r})$ . Граница конфигурации  $\delta D$  определяется теперь уравнением  $\Theta(\mathbf{r}) = 0$ .

При малых  $n$  аппроксимируем  $\tilde{\rho}$  в пространстве квадратично-интегрируемых функций выражением

$$\tilde{\rho} = \Theta^n \approx 1 + n \left( (\Theta - 1) - \frac{65}{36}(\Theta - 1)^2 \right), \quad (4)$$

учитывая только линейные по  $n$  члены. Точность аппроксимации в  $L_2$  при  $n = 0,1$  составляет  $3,31 \cdot 10^{-2}$ .

Решим уравнение (3) при  $n = 0$ . Нас будут интересовать в данном случае эллипсоидальные конфигурации. В этом случае

$$\Theta(n=0, \mathbf{r}) = \Theta_0(\mathbf{r}) = 1 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - X(x_1^2 - x_2^2), \quad (5)$$

$\delta D_0$  имеет вид эллипсоида  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + X(x_1^2 - x_2^2) = 1$ . Для эллипсоида Маклорена  $X = 0$ , а для эллипсоида Якоби  $X \neq 0$ .

Если  $n \neq 0$ , то найти решение уравнения (3) становится существенно сложнее. Поэтому мы будем искать это решение для малых значений  $n$  в линейном по  $n$  приближении, отбрасывая члены порядка  $n^2$  и выше. Данный подход вполне применим для значений  $n$ , меньших или порядка 0,1, так как отбрасываемые члены имеют порядок не более  $10^{-2}$ .

В линейном по  $n$  приближении  $\Theta(\mathbf{r})$  запишем в виде

$$\Theta(\mathbf{r}) = \Theta_0(\mathbf{r}) + n \sum_{i+j+k=4}^{i+j+k=6} Z_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k. \quad (6)$$

Выражение (6) представляет многочлен шестой степени по координатам  $x_1, x_2, x_3$ .

Область интегрирования  $D$  в (3) тогда имеет вид

$$\Theta_0(\mathbf{r}) + n \sum_{i+j+k=4}^{i+j+k=6} Z_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k \geq 0. \quad (7)$$

Подставляя (4)–(7) в (3) получаем уравнение вращающейся намагниченной политропы для малых значений ее индекса в линейном по  $n$  приближении:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \left( \frac{1}{\mathbf{r}'} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + \frac{n}{2\pi a_1^2} \int_D \left( (\Theta_0 - 1) - \frac{65}{36} (\Theta_0 - 1)^2 \right) \times \\ & \times \left( \frac{1}{\mathbf{r}'} - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dV' + K_0(1+n)(\Theta - 1) - \varepsilon \frac{\mathbf{r}_1^2}{a_1^2} = \Pi_{(m)}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (8)$$

Если перейти к пределу  $n \rightarrow 0$ , то получим уравнение гидростатического равновесия вращающейся однородной ньютоновской намагниченной конфигурации.

Коэффициенты  $Z_{ijk}$ , определяющие структуру конфигурации, разобьем на симметричные  $Z_{(ij)k}$  и антисимметричные  $Z_{[ij]k}$  части относительно оси вращения и будем искать их в виде разложения по степеням параметра асимметрии  $X$ :

$$Z_{ijk} = \frac{\left(\frac{i+j}{2}\right)!}{\left(\frac{i}{2}\right)! \left(\frac{j}{2}\right)!} Z_{i+j,k} + Z_{[ij]k} X. \quad (9)$$

Здесь и далее  $i, j, k$  являются четными и при  $X = 0$  конфигурация представляет собой фигуру вращения.

Значение напряженности магнитных полей пульсаров было оценено из наблюдений за рентгеновскими пульсарами в двойных системах. Имеет место оценка  $B_0 \approx (1,2 - 5) \cdot 10^{12}$  Гс [8]. Величина магнитных натяжений определяется безразмерным параметром  $\eta_m = \frac{k B_0^2 \sin^2 \alpha}{16\pi^2 G \rho_0^2 a_1^2}$  ( $k$  — показатель скорости убывания магнитного поля при удалении от магнитной оси,  $\alpha$  — угол наклона магнитной оси к оси вращения). В этом случае  $|\Pi_m| \sim \eta_m \sim 10^{-12} - 10^{-9}$  при  $\rho_0 = 4 \cdot 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>. Поэтому  $\Pi_m$  имеет смысл учитывать только при нахождении асимметричных коэффициентов  $Z_{[ij]k}$ .

Аналитическое выражение  $\Pi_{(m)}$  выберем в виде

$$\Pi_{(m)} = \eta_m (x_1^2 - x_2^2). \quad (10)$$

Используя разработанный в [4] метод решения уравнения (8) в виде разложения по степеням малого параметра  $X$  на основе комплекса символьно-численных программ, мы получаем кубическое уравнение для параметра асимметрии  $X$ :

$$A(e, n)X + B(e, n)X^3 = \eta_m, \quad (11)$$

где  $e = \frac{a_3}{a_1}$  — параметр сплюснутости поверхности конфигурации вдоль оси вращения.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Рассчитанные в приближении  $X = 0$  функции  $K_0(e)$  и  $\varepsilon(e)$  при  $0 \leq n \leq 0,12$  представим в следующем виде:  $K_0(e) = K_{00}(e) - nK_{01}(e)$ ,  $\varepsilon(e) = \varepsilon_0(e) - n\varepsilon_1(e)$ . Графики функций  $K_{00}(e)$ ,  $K_{01}(e)$  приводятся на рис. 1, а  $\varepsilon_0(e)$  и  $\varepsilon_1(e)$  на рис. 2.

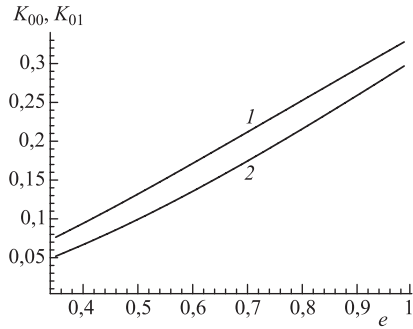


Рис. 1. Зависимость функций  $K_{00}$  (кривая 1) и  $K_{01}$  (кривая 2) от параметра  $e$

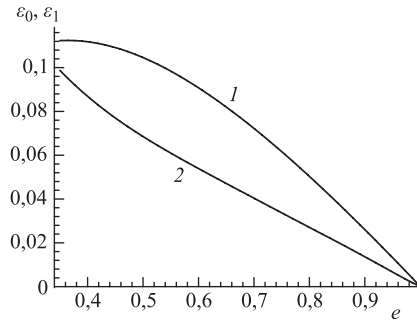


Рис. 2. Зависимость функций  $\varepsilon_0$  (кривая 1) и  $\varepsilon_1$  (кривая 2) от параметра  $e$

Можно отметить близкую к линейной зависимость  $K_0$  от  $e$ , причем с ростом  $n$  линии графиков опускаются, а угол наклона убывает. Совсем иная зависимость  $\varepsilon$  от  $e$ . С уменьшением  $e$  величина  $\varepsilon$  растет, достигает максимума, а затем убывает. Причем точка максимума смещается в сторону больших значений  $e$ , одновременно опускаясь с ростом  $n$ . Такой характер зависимости  $\varepsilon(e)$  качественно помогает понять характер графика  $\varepsilon_k(e_k(n), n)$  в дальнейшем.

В области значений  $0,35 \leq e \leq 1$ ,  $0 \leq n \leq 0,12$  функции  $K_{00}(e)$ ,  $K_{01}(e)$  могут быть аппроксимированы многочленами

$$\begin{aligned} K_{00}(e) &= -0,01486 + 0,1385e + 0,4524e^2 - 0,3281e^3 + 0,08547e^4, \\ K_{01}(e) &= -0,01724 + 0,09738e + 0,3190e^2 - 0,09499e^3 - 0,001115e^4 \end{aligned} \quad (12)$$

с точностью  $\sim 10^{-5}$  в  $C$ -метрике. Функции  $\varepsilon_0(e)$  и  $\varepsilon_1(e)$  с точностью  $\sim 10^{-4}$  в  $C$ -метрике были аппроксимированы многочленами

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(e) &= 0,02649 + 0,5423e - 1,0547e^2 + 0,6443e^3 - 0,1583e^4, \\ \varepsilon_1(e) &= 0,2769 - 0,8872e + 1,4692e^2 - 1,2548e^3 + 0,3959e^4. \end{aligned} \quad (13)$$

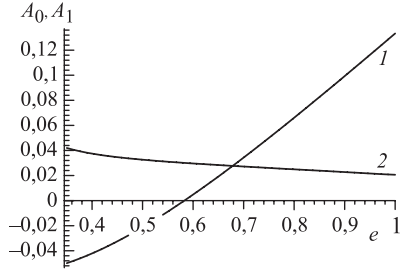


Рис. 3. Зависимость функций  $A_0$  (кривая 1) и  $A_1$  (кривая 2) от параметра  $e$

Аналогично представим  $A(e, n)$  в виде  $A(e, n) = A_0(e) + 10nA_1(e)$ . Графики функций  $A_0(e)$  и  $A_1(e)$  приводятся на рис. 3.

Семейство кривых  $A(e, n = \text{const})$ ,  $0 \leq n \leq 0,12$  пересекает ось абсцисс в интервале значений  $0,3861 \leq e \leq 0,5827$  и определяет множество критических точек  $e_k(n)$ , в которых  $A(e_k(n), n) = 0$ . Заметим, что  $A_1 > 0$  и поэтому с ростом  $n$  значения  $e_k(n)$  уменьшаются, т. е. плюснутость конфигурации в  $e_k$  увеличивается. Этот эффект, как будет показано в дальнейшем, приводит к существованию предельного значения  $n_k$ , выше которого стабильных вращающихся политроп с малым индексом, для которых  $A(e, n) = 0$ , не существует.

В области значений  $0,35 \leq e \leq 1$ ,  $0 \leq n \leq 0,12$  функции  $A_0(e)$ ,  $A_1(e)$  могут быть аппроксимированы с точностью  $\sim 10^{-4}$  в  $C$ -метрике многочленами

$$\begin{aligned} A_0(e) &= -0,02531 - 0,3431e + 0,9888e^2 - 0,6587e^3 + 0,1716e^4, \\ A_1(e) &= 0,1274 - 0,4743e + 0,8991e^2 - 0,7878e^3 + 0,2563e^4. \end{aligned} \quad (14)$$

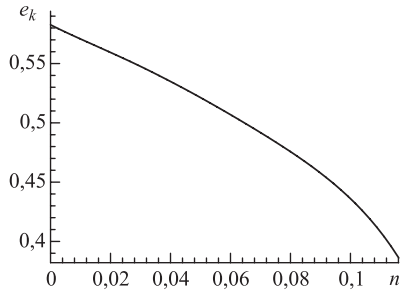


Рис. 4. Зависимость функции  $e_k$  от индекса политропы  $n$

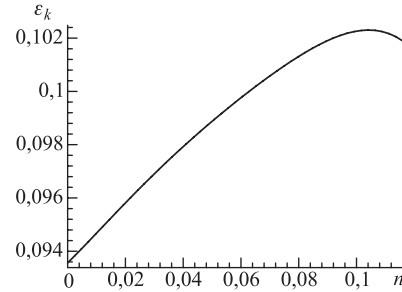


Рис. 5. Зависимость функции  $\varepsilon_k$  от индекса политропы  $n$

Графики функций  $e_k(n)$  и  $\varepsilon_k(n)$  приведены на рис. 4 и 5.

Из графика на рис. 4 следует быстрый рост плюснутости политропы в критических точках, соответственно убывание  $e_k$  от 0,5827 до 0,3861, при изменении  $n$  в достаточно узком интервале  $0 \leq n \leq 0,12$ . В том же диапазоне значений  $n$  параметр быстроты вращения в критических точках  $\varepsilon_k$  сначала быстро растет до значения 0,1023 в точке максимума  $n = 0,1042$ , а затем начинает убывать.



Функции  $K_{00}(e)$ ,  $K_{01}(e)$ ,  $\varepsilon_0(e)$ ,  $\varepsilon_1(e)$ ,  $A_0(e)$  и  $A_1(e)$  были аппроксимированы найденными выше многочленами в системе символьной математики MAPLE по методу наименьших квадратов (с использованием функции *LeastSquares*), а погрешность аппроксимации оценивалась как максимум модуля уклонения полученных численных значений этих величин от значений аппроксимирующих их многочленов (12)–(14), т. е. в  $C$ -метрике.

### 3. КРИТЕРИЙ ДЛЯ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК И ТОЧЕК БИФУРКАЦИИ

Одним из условий существования равновесных конфигураций является положительность радиальной компоненты ускорения свободного падения на экваторе  $g_{\text{eq}} > 0$ , введенное Джинсом [6]. В плоскости экватора имеем

$$g(r, x_3 = 0) = \frac{\partial \Phi(r, x_3 = 0)}{\partial r} - 2\varepsilon r, \quad (15)$$

где  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ ,  $\Phi = -\frac{1}{2\pi a_1^2} \int_D \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$  — гравитационный потенциал.

На экваторе конфигурации  $r = r_{\text{eq}}$  получим  $\Theta(r_{\text{eq}}, x_3 = 0) = 0$ . Тогда

$$g_{\text{eq}} = g(r_{\text{eq}}, x_3 = 0) = \frac{\partial \Phi(r_{\text{eq}}, x_3 = 0)}{\partial r_{\text{eq}}} - 2\varepsilon r_{\text{eq}}. \quad (16)$$

Из уравнения гидростатического равновесия (3) следует более простое представление  $g_{\text{eq}}$ :

$$\begin{aligned} g_{\text{eq}} &= -K_0(e, n)(1+n) \frac{\partial \Theta(r_{\text{eq}}, x_3 = 0)}{\partial r_{\text{eq}}} = \\ &= 2K_0(e, n)(1+n)r_{\text{eq}}(1 + 2nZ_{40}(e, n)r_{\text{eq}}^2 + 3nZ_{60}(e, n)r_{\text{eq}}^4). \end{aligned} \quad (16a)$$

Формула (16a) указывает на существенно нелинейную зависимость  $g_{\text{eq}}$  от  $r_{\text{eq}}$ .

Из (16a) следует, что для равновесных конфигураций должно выполняться условие  $\delta \Theta(r_{\text{eq}}, x_3 = 0) / \delta r_{\text{eq}} = 0$ . Очевидно, что условие всегда будет выполняться, если уравнение  $\Theta(r_{\text{eq}}, x_3 = 0) = 0$  имеет вещественный корень  $r_{\text{eq}} > 0$ , поскольку  $\Theta(r < r_{\text{eq}}, x_3 = 0) > 0$ . Отсюда вытекает отрицательность производной функции  $\Theta$  по  $r$  в точке экватора, а следовательно, положительность  $g_{\text{eq}}$ .

Поэтому мы предлагаем наряду с условием  $g_{\text{eq}} > 0$  использовать также простое, не связанное с дифференцированием по  $r$  условие

$$\Theta(r_{\text{eq}} > 0, x_3 = 0) = 0. \quad (16b)$$

Из (16b) видно, что при  $nZ_{40} = nZ_{60} = 0$ , т. е. для строго эллипсоидальных конфигураций, всегда имеет место условие  $g_{\text{eq}} > 0$ . При  $n = 0$  это

условие выполняется. Для сжимаемых конфигураций  $n \neq 0$  всегда  $nZ_{40} < 0$ , так как гравитационный потенциал  $\Phi$  растет медленнее в этом случае с ростом  $r$ , чем при  $n = 0$ . Именно усложнение аналитической структуры конфигурации вблизи экватора по сравнению с эллипсоидальной является причиной, приводящей при достаточно больших значениях коэффициента  $|nZ_{40}|$  к нарушению условия существования равновесной конфигурации  $g_{\text{eq}} > 0$ . В связи с этим возникает сомнение в корректности использования Джеймсом [7] эллипсоида в качестве граничного условия политропной конфигурации, так как для эллипсоидов  $g_{\text{eq}} > 0$  для любых допустимых значений сплюснутости  $e$  и индекса политропы  $n$ .

Из вышеизложенного следует критерий для критических точек равновесных конфигураций:

$$A(e_k, n) = 0, \quad g_{\text{eq}}(e_k, n) > 0 \quad (\Theta(r_{\text{eq}} > 0, x_3 = 0) = 0). \quad (17)$$

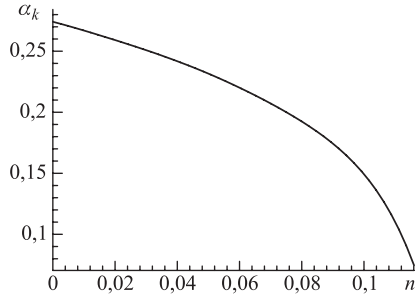


Рис. 6. Зависимость функции  $\alpha_k$  от индекса политропы  $n$

Остановимся подробнее на исследовании решений уравнения (11) вблизи критических точек  $e_k(n)$ . Вблизи критической точки разложим  $A(e, n)$  в ряд по степеням  $(e - e_k)$  с удержанием линейного члена:

$$A(e, n) = \alpha_k(n)(e - e_k(n)). \quad (18)$$

График зависимости  $\alpha_k$  от  $n$  приведен на рис. 6.

Кoeffициент  $B(e, n)$  при  $X^3$  в (11) нужно знать вблизи кривой  $A(e, n) = 0$ , которая определяет множество критических точек  $e_k(n)$ . Поэтому мы положим

$$B(e, n) = B(e_k(n), n) \approx B_k(e_k(n), n) = B_k(e_k(n=0), n=0) = B_{0k} = -0,01522. \quad (19)$$

Используя (18) и (19), формуле (11) можно придать вид

$$X(\alpha_k(e - e_k(n)) + B_{0k}X^2) = \eta_m. \quad (20)$$

Сделаем замену  $X = X_k \xi$ ,  $X_k = \left(\frac{\eta_m}{B_{0k}}\right)^{\frac{1}{3}}$ . Тогда (20) примет вид

$$\xi^2 - \frac{1}{\xi} = \lambda, \quad (21)$$

где  $\lambda = -\frac{\alpha_k(n)(e - e_k(n))}{B_{0k}^{\frac{1}{3}} \eta_m^{\frac{2}{3}}}$ .

Отметим, что  $\lambda = 0$  в критической точке  $e = e_k$  и уравнение (21) имеет один вещественный корень  $\xi = 1$ . Два других корня будут комплексными. Отсюда следует, что критическая точка не является точкой бифуркации. Она будет таковой только при  $\eta_m = 0$ , т.е. в отсутствие магнитных натяжений.

Чтобы наглядно представить ситуацию, построим график левой части уравнения (21)  $f(\xi) = \xi^2 - \frac{1}{\xi}$ , который приводится на рис. 7.

Из этого рисунка видно, что точкой бифуркации является точка

$\lambda_b(e_b(n), n) = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$  или  $e_b = e_k - \sqrt[3]{\frac{27}{4} \frac{B_{0k}^{\frac{1}{3}} \eta_m^{\frac{2}{3}}}{\alpha_k(n)}}$ , т.е. имеет место сдвиг точки бифуркации от критической точки. Величина сдвига по параметру  $e$  легко оценивается:

$$\Delta e = e_b - e_k = -\sqrt[3]{\frac{27}{4} \frac{B_{0k}^{\frac{1}{3}} \eta_m^{\frac{2}{3}}}{\alpha_k(n)}}. \quad (22)$$

Нам удалось найти аналитический вид вещественных корней уравнения (21).

При  $\lambda < 0$  ( $e > e_k$ ) будет один вещественный корень уравнения (21):

$$\xi_1 = 2\sqrt{-\frac{\lambda}{3}} \operatorname{sh} \left( \frac{1}{3} \ln \left( \sqrt{-\frac{27}{4\lambda^3}} + \sqrt{1 - \frac{27}{4\lambda^3}} \right) \right). \quad (23)$$

В случае  $0 < \lambda < \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$  ( $e < e_k$ ) тоже будет один вещественный корень уравнения (19):

$$\xi_1 = 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}} \operatorname{ch} \left( \frac{1}{3} \ln \left( \sqrt{\frac{27}{4\lambda^3}} + \sqrt{\frac{27}{4\lambda^3} - 1} \right) \right). \quad (24)$$

Если  $\lambda > \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$  ( $e < e_k$ ), то будут три вещественных корня уравнения (19):

$$\xi_{1,2,3} = 2\sqrt{\frac{\lambda}{3}} \cos(3d_{1,2,3}) \cos \left( \frac{1}{3} \arccos \sqrt{\frac{27}{4\lambda^3}} + d_{1,2,3} \right), \quad (25)$$

$$d_1 = 0, \quad d_2 = -\frac{\pi}{3}, \quad d_3 = \frac{\pi}{3}.$$

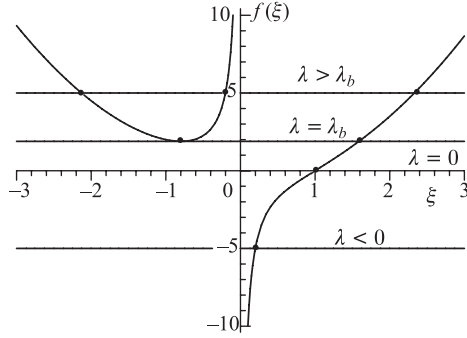


Рис. 7. График функции  $f(\xi)$ . Точками на графике отмечены корни уравнения (21)

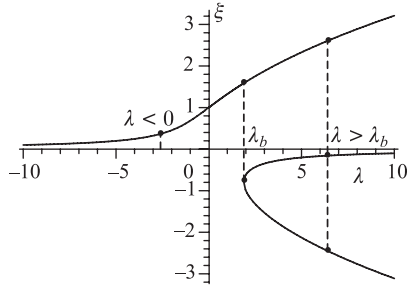


Рис. 8. Зависимость корней  $\xi$  уравнения (21) от параметра  $\lambda$

Из этого рисунка видно, что точка  $\lambda_b(e_b(n), n)$  действительно является точкой бифуркации, в которой ответвляются три вещественных решения. Приведем асимптотики корней при больших значениях  $\lambda$ ,  $|\lambda| \gg 1$ . Из (23), (25) имеем  $\xi_{1,2} \approx \pm\sqrt{\lambda}$  при  $\lambda \gg 1$ , а  $\xi_{1,3} \approx \frac{1}{\lambda}$  при  $|\lambda| \ll 1$ .

Рис. 8 также показывает, что ветви решения  $\xi_1$  и  $\xi_{2,3}$  не имеют точек пересечения при  $\eta_m \neq 0$ . Это означает возможность перехода с ветви  $\xi_1$  на ветви  $\xi_{2,3}$  только скачком.

Из (25) следует, что точкой бифуркации будет точка  $\lambda = \lambda_b(e_b(n), n) = \sqrt[3]{\frac{27}{4}}$ . Необходимо отметить принципиально разный характер поведения  $X$  при  $\eta_m = 0$  и  $\eta_m \neq 0$  исходя из проведенного нами исследования.

Зависимость корней  $\xi$  уравнения (21) от параметра  $\lambda$  представлена на рис. 8.

#### 4. КРИТИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ КОНФИГУРАЦИИ

Далее более подробно исследуем второе условие  $g_{\text{eq}}(e_k, n) > 0$  в (17), на которое существенное влияние оказывает характер поверхности  $\Theta(r, e, x_3, n) = 0$ ,  $r = r(e, x_3, n)$ . Результаты численных расчетов для различных значений параметра сплюснутости  $e$  и индекса политропы  $n$  приводятся на рис. 9–12 в виде сечений плоскостью  $x_2 = 0$  поверхности конфигураций.

На этих рисунках кривые 1 соответствуют  $n = 0$ , кривые 2 — для  $n = 0,1161$  (ниже показано, что это значение индекса политропы является критическим  $n = n_k$ , и изложен метод его вычисления). Рис. 9–12 наглядно демонстрируют быстрое раздувание конфигурации с ростом  $n$  в экваториальной плоскости и медленное вдоль оси вращения.

Из рис. 9–12 видно, что вблизи полюсов конфигурация при  $n = 0,1161$  близка к эллипсоидальной, а вблизи экватора сильно уклоняется от нее с уменьшением  $e$  и ростом быстроты вращения  $\varepsilon$ . Уклонение от эллипсоидальности вблизи экватора связано с наличием в уравнении поверхности членов  $nZ_{40}$  и  $nZ_{60}$ . На рис. 12 представлено сечение поверхности предельной по  $e = 0,3861$  конфигурации ( $n = 0,1161$ ). Для меньших значений  $e$  равновесных конфигураций уже не существует. При этом конфигурация вблизи экватора имеет клиновидный характер в отличие от эллипсоидального для больших значений  $e$ .

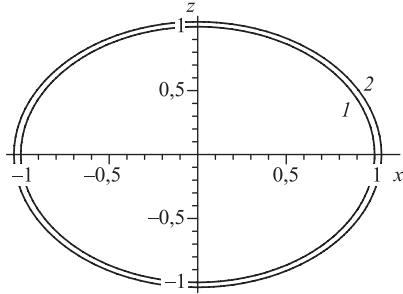


Рис. 9. Сечение вертикальной плоскостью поверхности найденных политропных конфигураций при  $e = 1$  для случаев  $n = 0$  (кривая 1) и  $n = 0,1161$  (кривая 2). На рисунке  $x = x_1$ ,  $z = \frac{1}{e}x_3$

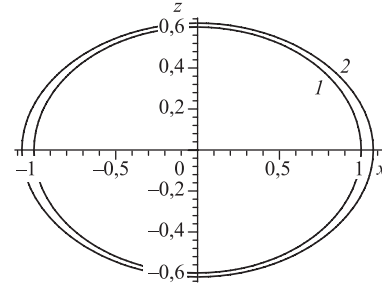


Рис. 10. Сечение вертикальной плоскостью поверхности найденных политропных конфигураций при  $e = 0,6$  для случаев  $n = 0$  (кривая 1) и  $n = 0,1161$  (кривая 2). На рисунке  $x = x_1$ ,  $z = \frac{1}{e}x_3$

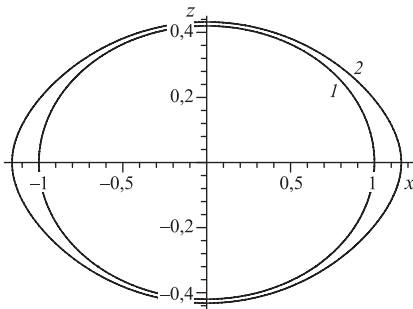


Рис. 11. Сечение вертикальной плоскостью поверхности найденных политропных конфигураций при  $e = 0,42$  для случаев  $n = 0$  (кривая 1) и  $n = 0,1161$  (кривая 2). На рисунке  $x = x_1$ ,  $z = \frac{1}{e}x_3$

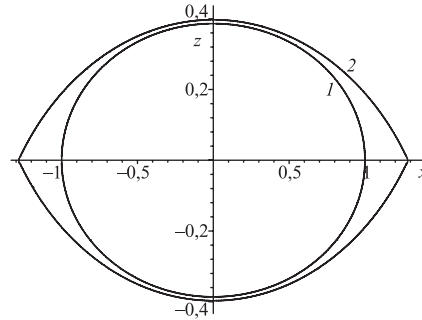


Рис. 12. Сечение вертикальной плоскостью поверхности найденных политропных конфигураций при  $e = 0,3861$  для случаев  $n = 0$  (кривая 1) и  $n = 0,1161$  (кривая 2). На рисунке  $x = x_1$ ,  $z = \frac{1}{e}x_3$

Зависимость экваториального радиуса  $r_{\text{eq}}(e_k(n), n)$  в критических точках от  $n$  приводится на рис. 13.

Как видно, вблизи значения  $n = 0,1161$  экваториальный радиус  $r_{\text{eq}}$  в критических точках быстро начинает увеличиваться, и это, в свою очередь, вызывает быстрое уменьшение  $g_{\text{eq}}$  в этих точках.

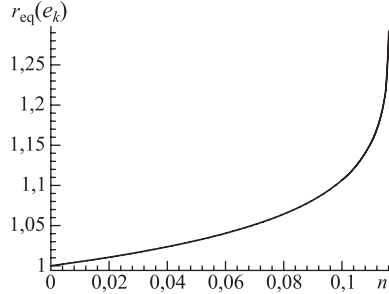


Рис. 13. Зависимость  $r_{\text{eq}}$  в критических точках  $e = e_k$  от параметра  $n$

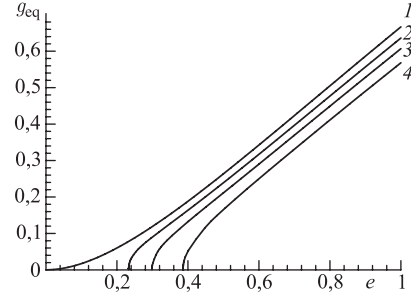


Рис. 14. Зависимость  $g_{\text{eq}}$  от параметра  $e$ . Кривые 1, 2, 3, 4 соответствуют значениям  $n = 0$ ,  $n = 0,04$ ,  $n = 0,075$ ,  $n = 0,1161$

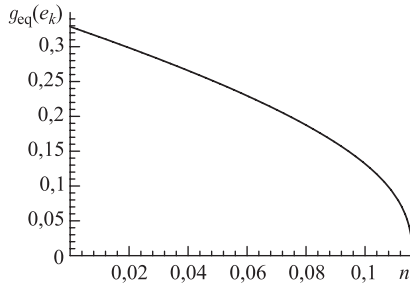


Рис. 15. Зависимость  $g_{\text{eq}}$  в критических точках  $e = e_k$  от параметра  $n$

Вначале изучим поведение  $g_{\text{eq}}(e, n)$  в интересующих нас интервалах значений  $0,3861 \leq e \leq 1$  и  $0 \leq n \leq 0,12$ . Числовые оценки  $g_{\text{eq}}(e, n)$  представим в виде семейства кривых  $g_{\text{eq}}(e, n = \text{const})$  на рис. 14.

Полученное семейство кривых  $g_{\text{eq}}(e, n)$  дает возможность найти значения  $g_{\text{eq}}(e_k(n), n)$  в критических точках. Эта зависимость должна иметь существенно нелинейный вид, так как  $n$  входит в  $g_{\text{eq}}$  не только непосредственно, но и через функцию  $e_k(n)$ , представленную на рис. 4.

Результаты вычисления  $g_{\text{eq}}(e_k(n), n)$  представлены на рис. 15.

Из графика  $g_{\text{eq}}(e_k, n)$  видно существование точки  $n = n_k$ , в которой  $g_{\text{eq}}(e_k, n_k) = 0$ . Для точного вычисления  $n_k$  согласно (16) и (17) надо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} A(e_k, n_k) &= 0, \\ 1 - r_{\text{eq}}^2 - n_k Z_{4,0}(e_k, n_k) r_{\text{eq}}^4 - n_k Z_{6,0}(e_k, n_k) r_{\text{eq}}^6 &= 0, \\ 1 + 2n_k Z_{4,0}(e_k, n_k) r_{\text{eq}}^2 + 3n_k Z_{6,0}(e_k, n_k) r_{\text{eq}}^4 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

С использованием составленного в системе MAPLE комплекса символьно-численных программ система уравнений (26) была решена методом последовательных приближений по параметрам  $e$  и  $n$  в области значений  $0 \leq n \leq 0,12$ ,  $1 \geq e \geq 0,35$  с точностью  $\sim 10^{-5}$  по невязке.

В результате получено значение  $n_k = 0,1161$ . Этому значению  $n_k$  соответствуют кривые 2 на рис. 9–12 и кривая 4 на рис. 14, приведенные выше.

Отсюда следует, что для политроп первая критическая точка  $n_k = 0,1161$ , выше которой асимметричных решений при  $\eta_m = 0$  нет, достигается задолго до значений  $n_k = 0,83$  и  $0,808$ , указанных в работах Джинса и Джеймса [6, 7]. Как уже отмечалось в [5], при  $0,5791 \leq n \leq 0,8012$  условие (17) снова выполняется и возникает вторая критическая точка  $n_k = 0,8012$  (у Джеймса  $0,808$ ).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе впервые в ньютоновском приближении получено уравнение, описывающее вращающиеся намагниченные политропы с малыми значениями индекса  $n \ll 1$  в линейном по  $n$  приближении, которое в пределе  $n = 0$  совпадает с хорошо изученным уравнением гидростатического равновесия однородной несжимаемой вращающейся гравитирующей намагниченной жидкости.

С использованием разработанного и реализованного в системе символьной математики MAPLE комплекса символьно-численных программ полученное уравнение было решено в области значений  $0 \leq n \leq 0,1161$  методом разложения по малому параметру асимметрии  $X$ . В результате было получено кубическое уравнение для  $X$ , коэффициенты которого являются функциями индекса политропы и параметра быстроты вращения (или параметра сплюснутости  $e$ ). Параметры построенной математической модели ньютоновской вращающейся намагниченной политропы также найдены в виде аналитических функций от  $n$  и  $\varepsilon$  (или  $e$ ). Получено множество критических точек  $e_k(n)$  ( $\varepsilon_k(n)$ ).

Исследовано решение кубического уравнения для параметра асимметрии. Показано, что имеет место сдвиг точек бифуркации  $e_b(n)$  от критических точек  $e_k(n)$  на величину  $\Delta e(n)$ , т. е.  $e_b(n) = e_k(n) - \Delta e(n)$ .

Получены аналитические представления уравнений поверхностей вращающихся политроп  $\Theta(r, e, x_3, n) = 0$ ,  $r = r(e, x_3, n)$  для  $n \ll 1$  без учета асимметричных членов, которые представлены в графическом виде для различных значений  $n$  и  $e$ .

Проведенное нами исследование вопроса о критических точках вращающихся политроп с малым индексом показывает существование  $n_k = 0,1161 \ll 1$ . Ранее считалось очевидным, что  $g_{\text{eq}}(e_k(n), n) > 0$  до значений  $n_k = 0,808$ . В связи с этим обстоятельством очень важна задача поиска реалистических уравнений состояния, близких к политропе с  $n \leq 0,1161$ . Это должны быть предельно жесткие уравнения состояния, близкие к несжимаемому случаю.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 06-01-00228а.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Аппель П. Э.* Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости / Пер. с фр. Л.: Глав. ред. общетехн. лит-ры, 1936. С. 376.
2. *Чандрасекар С.* Эллипсоидальные фигуры равновесия. М.: Мир, 1982;  
*Chandrasekhar S.* Ellipsoidal Figures of Equilibrium. New Haven: Yale Univ. Press, 1969.
3. *Тассуль Ж.Л.* Теория вращающихся звезд. М.: Мир, 1982. 472 с.;  
*Tassoul J. L.* Theory of rotating stars. Princeton: Princeton University Press, 1978.
4. *Беспалько Е. В. и др.* Гравитирующая быстровращающаяся сверхплотная конфигурация с реалистическими уравнениями состояния // *Мат. моделирование.* 2006. Т. 118, № 3. С. 103–119.
5. *Михеев С. А., Цветков В. П.* Точки бифуркации вращающихся намагниченных ньютоновских политроп с показателем, близким к единице. Препринт ОИЯИ Р11-2007-114. Дубна, 2007; Письма в ЭЧАЯ (в печати).
6. *Jeans J. H.* Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics. Cambridge: At the Univ. Press, 1919.
7. *James R. A.* The structure and stability of rotating gas masses // *Astrophys. J.* 1964. V. 140. P. 552.
8. *Седракян Д. М., Шахабасян К. М.* Сверхтекучесть и магнитное поле пульсара // *УФН.* 1991. Т. 161, № 7. С. 4.

Получено 8 апреля 2008 г.



Редактор *Е. В. Сабеева*

Подписано в печать 19.08.2008.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,06. Уч.-изд. л. 1,25. Тираж 310 экз. Заказ № 56277.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований  
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: [publish@jinr.ru](mailto:publish@jinr.ru)

[www.jinr.ru/publish/](http://www.jinr.ru/publish/)