

P4-2010-119

В. К. Игнатович*, Ф. В. Игнатович¹

ОПТИКА АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

¹Lumetrics Inc., Rochester, N. Y., USA

*E-mail: v.ignatovi@gmail.com

Игнатович В. К., Игнатович Ф. В.
Оптика анизотропных сред

P4-2010-119

Рассматриваются электромагнитные волны в анизотропных средах, их отражение и преломление на границах раздела. Показано, что внутри анизотропной среды могут распространяться только две моды плоских электромагнитных волн. При отражении от границы раздела с изотропной средой происходит двойное лучерасщепление, а при достаточно малых углах скольжения падающей волны на границе раздела возникает поверхностная волна.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики им. И. М. Франка ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2010

Ignatovich V. K., Ignatovich F. V.
Optics of Anisotropic Media

P4-2010-119

Electromagnetic waves in anisotropic media, their reflection and refraction at interfaces are considered. It is shown that only two linearly polarized modes of plain waves can propagate inside anisotropic media. Reflection from interface with isotropic media is accompanied by double ray splitting, and at sufficiently small grazing angles a surface wave is created on the interface.

The investigation has been performed at the Frank Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2010

ВВЕДЕНИЕ

Волны в анизотропных средах, т. е. в двоякопреломляющих веществах, казалось бы, хорошо изучены. Известно, что в этих веществах распространяются обыкновенный и необыкновенный лучи, которые характеризуются различными скоростями и, соответственно, различными коэффициентами преломления. Это обстоятельство с успехом используется на практике. В оптических устройствах часто встречаются полуволновые и четвертьволновые пластинки, которые позволяют поворачивать линейную поляризацию света или преобразовывать линейную поляризацию в круговую.

Однако теория электромагнитных волн в анизотропных средах довольно сложна и, по-видимому, не менялась со времен Френеля. В ней используются дополнительные понятия, такие как волновая и лучевая поверхность, нормали и бинормали, эллипсоид коэффициента преломления и др. [1–5]. В данной работе мы покажем, что без них можно обойтись. Электромагнитные волны в анизотропных средах представляют собой обычные плоские волны с линейной поляризацией, вектор поляризации которых находится элементарно и может иметь как поперечную, так и продольную компоненту в зависимости от угла между направлением распространения волны и направлениями векторов, характеризующих анизотропию.

Наш подход будет аналогичен тому, который используется в [6] для описания упругих волн в анизотропных средах, и он основан на удобном представлении тензора диэлектрической проницаемости ϵ , справедливость которого доказана в [1].

В первом разделе мы рассмотрим волны в одноосных и двуосных средах, во втором разделе рассмотрим отражение волн от границы раздела между анизотропной и изотропной средами и отметим особенности, которые здесь возникают. Мы увидим, что отражение волн изнутри анизотропных сред в общем случае происходит незеркально и сопровождается расщеплением волн и преобразованием поляризации, а в некоторых случаях при условиях полного внутреннего отражения возникает и поверхностная электромагнитная волна. Эффект расщепления может быть продемонстрирован простым экспериментом с двоякопреломляющим конусом.

В третьем разделе будет рассмотрена общая задача об отражении и пропускании света плоскопараллельными слоями одноосных анизотропных сред.

Некоторые приводимые здесь формулы выглядят громоздко, однако читатель не должен беспокоиться, поскольку идеи их вывода абсолютно прозрачны, а вычисления в случае громоздкости аналитических формул всегда лучше производить численно.

1. ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Волновое уравнение для электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ получается из уравнений Максвелла. В однородной анизотропной среде оно имеет вид

$$-\left[\nabla \times \left[\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)\right]\right] = \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — симметричный тензор диэлектрической проницаемости и простоты ради мы приняли $\mu = 1$. Решение этого уравнения можно представить в виде плоской волны:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\mathcal{E}} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \quad (2)$$

где $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ — вектор поляризации, который необязательно нормировать к единице.

После подстановки (2) в (1) получаем линейное уравнение для $\boldsymbol{\mathcal{E}}$:

$$k^2 \boldsymbol{\mathcal{E}} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\boldsymbol{\mathcal{E}}) = k_0^2 \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\mathcal{E}}, \quad (3)$$

где $k_0 = \omega/c$. Заметим, что левая часть ортогональна вектору \mathbf{k} , поэтому умножение обеих частей уравнения на \mathbf{k} приводит к

$$\mathbf{k}(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\mathcal{E}}) = 0, \quad (4)$$

что, конечно, является следствием уравнения Максвелла $\nabla(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\mathcal{E}}) = 0$.

Задача состоит в том, чтобы с помощью уравнения (3) найти вектор поляризации $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и величину волнового вектора $k = |\mathbf{k}|$. Для решения этой задачи нужно знать конкретный вид тензора диэлектрической проницаемости $\boldsymbol{\varepsilon}$. Если воспользоваться симметричным тензором общего вида с компонентами ε_{ij} , то уравнение (3) представится в виде линейной однородной системы из трех уравнений

$$F_{ij}(\mathbf{k}, \boldsymbol{\varepsilon}, \omega) \mathcal{E}_j = 0 \quad (5)$$

для трех компонент поляризации \mathcal{E}_j с некоторыми известными коэффициентами F_{ij} . Эта система разрешима при условии равенства нулю детерминанта из коэффициентов, которое приводит к уравнению 6-го порядка относительно компонент волнового вектора \mathbf{k}_i . Анализ этого уравнения и представляет основную трудность в оптике анизотропных сред. Мы, как говорится, пойдем другим путем.

1.1. Одноосная среда. Одноосная анизотропная среда характеризуется заданным единичным вектором анизотропии \mathbf{a} и параметром анизотропии, который мы будем обозначать ϵ' . При этом тензор ε может быть представлен в виде [1]

$$\varepsilon_{ij} = \epsilon_0 \delta_{ij} + \epsilon' a_i a_j, \quad (6)$$

где ϵ_0 — изотропная часть тензора ε . Следовательно, выражение $\varepsilon \mathcal{E}$ может быть записано как

$$\varepsilon \mathcal{E} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \epsilon' \mathbf{a}(\mathbf{a} \mathcal{E}), \quad (7)$$

а подстановка (7) в (3) и (4) соответственно приводит эти уравнения к виду

$$(k^2 - k_0^2 \epsilon_0) \mathcal{E} - k^2 \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa} \mathcal{E}) - k_0^2 \epsilon_0 \eta \mathbf{a}(\mathbf{a} \mathcal{E}) = 0, \quad (8)$$

$$(\boldsymbol{\kappa} \mathcal{E}) + \eta(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a})(\mathbf{a} \mathcal{E}) = 0, \quad (9)$$

где введены обозначения $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$ и $\eta = \epsilon'/\epsilon_0$.

Чтобы найти и вектор поляризации \mathcal{E} , и величину вектора $k = |\mathbf{k}|$ при заданном k_0^2 и направлении распространения волны $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{k}/k$, выберем базис и представим \mathcal{E} в этом базисе.

Будем считать, что вектор $\boldsymbol{\kappa}$ непараллелен вектору \mathbf{a} . Тогда \mathcal{E} можно разложить по базису, составленному из векторов \mathbf{a} , $\boldsymbol{\kappa}$ и $\mathbf{e}_1 = [\mathbf{a} \times \boldsymbol{\kappa}]$. Заметим, что этот базис неортонормирован, но это не является препятствием для представления вектора \mathcal{E} в виде

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{a} + \beta \boldsymbol{\kappa} + \gamma \mathbf{e}_1, \quad (10)$$

где α, β, γ — координаты вектора \mathcal{E} в выбранном базисе.

Покажем, что координаты α и β связаны между собой. Подставим (10) в (9), в результате получим

$$\beta + (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a}) \alpha + \eta(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a})[\alpha + \beta(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a})] = 0, \quad (11)$$

откуда следует

$$\beta = -\frac{(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a})(1 + \eta)}{1 + \eta(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a})^2} \alpha. \quad (12)$$

Подстановка этого соотношения в (10) показывает, что фактически вектор \mathcal{E} имеет только две перпендикулярные составляющие:

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{e}_2 + \gamma \mathbf{e}_1. \quad (13)$$

Одна, пропорциональная $\mathbf{e}_1 = [\mathbf{a} \boldsymbol{\kappa}]$, перпендикулярна плоскости векторов \mathbf{a} , $\boldsymbol{\kappa}$, а другая, пропорциональная вектору

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{a} - \boldsymbol{\kappa} \frac{(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a})(1 + \eta)}{1 + \eta(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a})^2}, \quad (14)$$

лежит в плоскости векторов \mathbf{a} , $\boldsymbol{\kappa}$.

Умножим уравнение (8) на \mathbf{e}_1 . В результате получим

$$(k^2 - k_0^2 \epsilon_0) \gamma \mathbf{e}_1^2 = 0. \quad (15)$$

При $\gamma \neq 0$ это уравнение удовлетворяется только при

$$k^2 = k_0^2 \epsilon_0. \quad (16)$$

Умножим уравнение (8) на \mathbf{a} и подставим в него $(\boldsymbol{\kappa} \mathcal{E})$ из (9). В результате получим

$$(k^2 - k_0^2 \epsilon(\theta)) \alpha (\mathbf{a} \mathcal{E})^2 = 0, \quad (17)$$

где

$$\epsilon(\theta) = \epsilon_0 \frac{1 + \eta}{1 + \eta (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a})^2} = \epsilon_0 \frac{1 + \eta}{1 + \eta \cos^2 \theta} \quad (18)$$

и θ — угол между векторами $\boldsymbol{\kappa}$ и \mathbf{a} . Если $\alpha (\mathbf{a} \mathcal{E})^2 \neq 0$, то уравнение удовлетворяется только при

$$k^2 = k_0^2 \epsilon(\theta). \quad (19)$$

Чтобы определить, когда $(\mathbf{a} \mathcal{E})^2 \neq 0$, умножим (14) на \mathbf{a} . В результате получим $(\mathbf{a} \mathcal{E})^2 = 1 - (\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a})^2$. Отсюда следует, что $(\mathbf{a} \mathcal{E})^2 \neq 0$, когда вектор $\boldsymbol{\kappa}$ не параллелен \mathbf{a} . В случае $(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a})^2 = 1$ имеем $\epsilon(\theta) = \epsilon_0$, волна распространяется как в изотропной среде и может иметь вектор поляризации в любом направлении, перпендикулярном $\boldsymbol{\kappa}$.

Итак, мы получили, что в одноосной анизотропной среде в общем случае в направлении $\boldsymbol{\kappa}$ могут распространяться плоские волны только с линейной поляризацией, направленной либо вдоль вектора $\mathbf{e}_1 = [\boldsymbol{\kappa} \mathbf{a}]$, либо вдоль вектора \mathbf{e}_2 (14). Поскольку длины волновых векторов для этих двух поляризаций различны, волны с эллиптической поляризацией внутри анизотропной среды при отсутствии поглощения не существуют.

Общепринято называть волны с поляризацией вдоль \mathbf{e}_1 обыкновенными, а волны с поляризацией вдоль \mathbf{e}_2 необыкновенными. Нам представляется, что такая терминология неудачна, так как она ничего не говорит о свойствах этих волн. Более правильно называть волны с $\mathcal{E} \propto \mathbf{e}_1$ поперечными, а волны с $\mathcal{E} \propto \mathbf{e}_2$ смешанными, поскольку в последнем случае поляризация имеет продольную компоненту, т. е. компоненту вдоль волнового вектора \mathbf{k} .

1.2. Двухосная анизотропная среда. Двухосная анизотропная среда характеризуется двумя единичными векторами анизотропии, скажем \mathbf{a} и \mathbf{b} , и двумя параметрами анизотропии, которые мы обозначим $\epsilon'_{a,b}$. Поэтому тензор диэлектрической проницаемости равен

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_0 \delta_{ij} + \epsilon_a a_i a_j + \epsilon_b b_i b_j, \quad (20)$$

и выражения (7)–(9) приводятся к виду

$$\varepsilon \mathcal{E} = \epsilon_0 \mathcal{E} + \epsilon_a \mathbf{a}(\mathbf{a}\mathcal{E}) + \epsilon_b \mathbf{b}(\mathbf{b}\mathcal{E}), \quad (21)$$

$$(k^2 - k_0^2 \epsilon_0) \mathcal{E} - k^2 \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{\kappa}\mathcal{E}) - k_0^2 \epsilon_0 \eta_a \mathbf{a}(\mathbf{a}\mathcal{E}) - k_0^2 \epsilon_0 \eta_b \mathbf{b}(\mathbf{b}\mathcal{E}) = 0, \quad (22)$$

$$(\boldsymbol{\kappa}\mathcal{E}) + \eta_a (\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a})(\mathbf{a}\mathcal{E}) + \eta_b (\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b})(\mathbf{b}\mathcal{E}) = 0. \quad (23)$$

В последних двух выражениях введены обозначения $\eta_{a,b} = \epsilon'_{a,b}/\epsilon_0$.

В дальнейшем мы для простоты положим, что $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, введем ортонормированный базис $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} = [\mathbf{a} \times \mathbf{b}]$ и в этом базисе запишем

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c} \quad (24)$$

с координатами α, β, γ , которые, как следует из условия (23), не могут быть полностью независимыми. Подстановка (24) в (23) показывает, что

$$\alpha(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a}) + \beta(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b}) + \gamma(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{c}) + \eta_a (\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a})\alpha + \eta_b (\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b})\beta = 0, \quad (25)$$

поэтому

$$\gamma(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{c}) = -\alpha(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a})(1 + \eta_a) - \beta(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b})(1 + \eta_b). \quad (26)$$

Из (24) также следует, что

$$(\mathcal{E}\mathbf{a}) = \alpha, \quad (\mathcal{E}\mathbf{b}) = \beta. \quad (27)$$

Подставим (27) и $(\boldsymbol{\kappa}\mathcal{E})$ из (23) в (22) и умножим (22) последовательно на \mathbf{a} и \mathbf{b} . В результате получим однородную линейную систему из двух уравнений:

$$\begin{aligned} (k^2[1 + \eta_a(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a})^2] - k_0^2 \epsilon_0(1 + \eta_a))\alpha + \eta_b k^2(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a})(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b})\beta &= 0, \\ (k^2[1 + \eta_b(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b})^2] - k_0^2 \epsilon_0(1 + \eta_b))\beta + \eta_a k^2(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a})(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b})\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Решение этой системы существует при равенстве нулю детерминанта матрицы коэффициентов, что приводит к уравнению

$$(k^2 - \epsilon_a(\theta_a)k_0^2)(k^2 - \epsilon_b(\theta_b)k_0^2) = \frac{\eta_a \eta_b k^2 (\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a})^2 (\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b})^2}{[1 + \eta_a(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a})^2][1 + \eta_b(\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b})^2]}, \quad (29)$$

где

$$\epsilon_{a,b}(\theta_{a,b}) = \frac{\epsilon_0(1 + \eta_{a,b})}{1 + \eta_{a,b} \cos^2 \theta_{a,b}}, \quad \cos \theta_a = (\boldsymbol{\kappa}\mathbf{a}), \quad \cos \theta_b = (\boldsymbol{\kappa}\mathbf{b}). \quad (30)$$

Из решения (29) находятся два значения длины волнового вектора $k_{1,2}$, и для них определяются α, β , а после подстановки в (26) также и γ . Таким образом, мы нашли два типа плоских волн с волновыми векторами $\mathbf{k}_{1,2} = k_{1,2}\boldsymbol{\kappa}$ и линейными поляризациями $\mathcal{E}_{1,2}$.

Мы не будем продолжать эту тему потому, что, хотя дальнейшее элементарно, получающиеся аналитические выражения довольно сложны и численные расчеты оказываются предпочтительнее. Отметим только два предельных случая, когда вектор $\boldsymbol{\kappa}$ равен одному из базисных векторов.

Пусть $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{a}$, тогда из (26) следует $\alpha = 0$. Из (28) при этом следует, что плоские волны с поляризацией вдоль \mathbf{b} ($\beta \neq 0$) распространяются с $k = k_0 \sqrt{\epsilon_0(1 + \eta_b)}$. С другой стороны, из (22) следует, что плоские волны с поляризацией вдоль \mathbf{c} ($\gamma \neq 0$) распространяются с $k = k_0 \sqrt{\epsilon_0}$.

Если же $\boldsymbol{\kappa} = \mathbf{c}$, то из (26) следует, что $\gamma = 0$, а из (28) следует, что плоские волны с поляризацией вдоль \mathbf{a} ($\alpha \neq 0$) распространяются с $k = k_0 \sqrt{\epsilon_0(1 + \eta_a)}$, а плоские волны с поляризацией вдоль \mathbf{b} ($\beta \neq 0$) распространяются с $k = k_0 \sqrt{\epsilon_0(1 + \eta_b)}$. Следовательно, в этом случае обе волны необыкновенны и распространяются с разными коэффициентами преломления.

Выше речь шла только об электрическом поле, тогда как каждая электромагнитная волна содержит и магнитную составляющую

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{H} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t), \quad (31)$$

которая вследствие уравнений Максвелла связана с электрическим полем соотношением

$$[\nabla \times \mathbf{E}] = -\frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{H}. \quad (32)$$

Поэтому

$$\mathcal{H} = \frac{kc}{\mu\omega} [\boldsymbol{\kappa} \times \mathcal{E}] \quad (33)$$

и вектор \mathcal{H} однозначно определяется вектором \mathcal{E} , и полное электромагнитное поле может быть представлено волновой функцией

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi_j \exp(i\mathbf{k}_j \mathbf{r} - i\omega t), \quad (34)$$

где $\psi_j = \mathcal{E}_j + \mathcal{H}_j$, а j обозначает моду 1 или 2.

Теперь, когда мы знаем все характеристики плоских электромагнитных волн в анизотропных средах, мы можем легко рассчитать их отражение и преломление от других, изотропных и анизотропных сред, к чему мы и приступим в следующих разделах, но для простоты мы в дальнейшем ограничимся только одноосными анизотропными средами.

2. ОТРАЖЕНИЕ ОТ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА С ИЗОТРОПНОЙ СРЕДОЙ

Представим бесконечное пространство разделенным на две части плоскостью $z = 0$ так, что часть $z < 0$ содержит анизотропную среду, а часть $z > 0$ представляет собой вакуум с $\epsilon_0 = 1$, $\eta = 0$. Волновые уравнения в двух

полупространствах различны, а переход волн из одного в другое регулируется граничными условиями, вытекающими из уравнений Максвелла на границе раздела.

Найдем отражение и преломление двух мод, падающих на границу раздела из анизотропной среды $z < 0$.

2.1. Незеркальность отражения и расщепление отраженных волн. Прежде всего заметим, что отражение смешанной моды в общем случае незеркально. Действительно, поскольку при отражении направление волнового вектора \mathbf{k} меняется, то меняется и его угол по отношению к фиксированному вектору анизотропии \mathbf{a} . Поэтому в соответствии с (19) меняется и длина k вектора \mathbf{k} . Поскольку компонента k_{\parallel} , параллельная границе раздела, не может меняться, то изменение длины k означает изменение величины компоненты k_{\perp} , перпендикулярной к границе раздела, а это и означает незеркальность отражения.

Оценим величину изменения k_{\perp} для смешанной моды, падающей с волновым вектором \mathbf{k}_{2r} , где индекс « r » означает распространение моды 2 направо по направлению к границе раздела. При заданном угле θ между \mathbf{k}_{2r} и \mathbf{a} нормальная компонента падающей волны равна

$$k_{2r\perp} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_0^2 (1 + \eta)}{1 + \eta \cos^2 \theta} - k_{\parallel}^2} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_0^2 (1 + \eta)}{1 + \eta(\kappa \mathbf{a})^2} - k_{\parallel}^2}. \quad (35)$$

Однако величина $k_{2r\perp}$ входит неявным образом в правую часть через скалярное произведение $(\kappa \mathbf{a})$, поэтому, чтобы найти явную зависимость $k_{2r\perp}$ от \mathbf{a} , необходимо решить уравнение

$$k_{\parallel}^2 + x^2 + \eta(k_{\parallel}(\mathbf{l}\mathbf{a}) + x(\mathbf{n}\mathbf{a}))^2 = k_0^2 \epsilon_0 (1 + \eta), \quad (36)$$

где x обозначает $k_{2r\perp}$, \mathbf{n} — единичный вектор нормали, направленный в сторону вакуума, а \mathbf{l} — единичный вектор вдоль \mathbf{k}_{\parallel} , который вместе с \mathbf{n} определяет плоскость падения. Решение уравнения равно

$$x = \frac{-\eta k_{\parallel}(\mathbf{n}\mathbf{a})(\mathbf{l}\mathbf{a}) + \sqrt{\epsilon_0 k_0^2 (1 + \eta)(1 + \eta(\mathbf{n}\mathbf{a})^2) - k_{\parallel}^2(1 + \eta(\mathbf{l}\mathbf{a})^2 + \eta(\mathbf{n}\mathbf{a})^2)}}{1 + \eta(\mathbf{n}\mathbf{a})^2}, \quad (37)$$

где знак перед корнем выбран так, чтобы при $\eta = 0$ получалось правильное выражение $\sqrt{\epsilon_0 k_0^2 - k_{\parallel}^2}$, соответствующее изотропному случаю.

Для представления всех векторов у поверхности удобно ввести ортонормированный базис $\mathbf{n}, \mathbf{l}, \mathbf{t} = [\mathbf{n}\mathbf{l}]$. Тогда вектор \mathbf{a} представляется в виде $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{l} + \gamma \mathbf{t}$. Компонента $k_{2r\perp}$, как это следует из (37), зависит только от части этого вектора $\mathbf{a}' = \alpha \mathbf{n} + \beta \mathbf{l}$, лежащей в плоскости падения. Поэтому

если обозначить $\alpha = |\mathbf{a}'| \cos(\theta_a)$, $\beta = |\mathbf{a}'| \sin(\theta_a)$, где $|\mathbf{a}'|$ — проекция \mathbf{a} на плоскость падения, и ввести новый параметр $\eta' = \eta |\mathbf{a}'|^2 \leq \eta$, то выражение (37) приведет к более простому виду

$$k_{2r\perp} = \frac{-\eta' k_{\parallel} \sin(2\theta_a) + 2\sqrt{\epsilon_0 k_0^2 (1 + \eta) [1 + \eta' \cos^2(\theta_a)] - k_{\parallel}^2 (1 + \eta')}}{2[1 + \eta' \cos^2(\theta_a)]}. \quad (38)$$

Для отраженной смешанной моды (моды 2, распространяющейся налево от границы раздела) уравнение, аналогичное (36), имеет вид

$$k_{\parallel}^2 + x^2 + \eta(k_{\parallel}(\mathbf{t}\mathbf{a}) - x(\mathbf{n}\mathbf{a}))^2 = k_0^2 \epsilon_0 (1 + \eta), \quad (39)$$

где $x = k_{2l\perp}$, и его решение равно

$$k_{2l\perp} = \frac{\eta' k_{\parallel} \sin(2\theta_a) + 2\sqrt{\epsilon_0 k_0^2 (1 + \eta) [1 + \eta' \cos^2(\theta_a)] - k_{\parallel}^2 (1 + \eta')}}{2[1 + \eta' \cos^2(\theta_a)]}. \quad (40)$$

Отсюда следует, что разность нормальных компонент волновых векторов отраженной и падающей волн смешанной моды $k_{2l\perp} - k_{2r\perp}$ равна

$$k_{2l\perp} - k_{2r\perp} = \frac{\eta' k_{\parallel} \sin(2\theta_a)}{1 + \eta' \cos^2(\theta_a)}. \quad (41)$$

Удобно представить эту разность в безразмерных переменных:

$$\Delta_{22} \equiv \frac{k_{2l\perp} - k_{2r\perp}}{k_0 \sqrt{\epsilon_0}} = \frac{\eta' q \sin(2\theta_a)}{2[1 + \eta' \cos^2(\theta_a)]}, \quad (42)$$

где $q = k_{\parallel} / k_0 \sqrt{\epsilon_0}$. Отсюда видно, что угол отражения в зависимости от ориентации вектора \mathbf{a} может быть как больше, $\theta_a > 0$, так и меньше, $\theta_a < 0$, зеркального.

В случае поперечной падающей моды длина волнового вектора $k = |\mathbf{k}|$, согласно (16), не зависит от ориентации вектора \mathbf{a} , потому при отражении не меняется и отражение происходит зеркально.

Отражение каждой моды в общем случае сопровождается рождением другой моды, поскольку иначе невозможно удовлетворить граничным условиям. Поэтому отраженный луч оказывается расщепленным. Найдем, чему равна нормальная компонента волнового вектора рожденной волны. В случае, когда падающая волна имеет моду 2, рожденная поперечная волна (мода 1, идущая налево от границы раздела) распространяется с волновым вектором, нормальная компонента которого равна $k_{1l\perp} = \sqrt{\epsilon_0 k_0^2 - k_{\parallel}^2}$. Поэтому

согласно (38) различие компонент двух отраженных волн $\Delta_{12} = (k_{1l\perp} - k_{2l\perp})/k_0\sqrt{\epsilon_0}$ равно

$$\Delta_{12} = \sqrt{1 - q^2} - \frac{\eta'q \sin(2\theta_a) + 2\sqrt{(1 + \eta)[1 + \eta' \cos^2(\theta_a)] - q^2(1 + \eta')}}{2[1 + \eta' \cos^2(\theta_a)]}. \quad (43)$$

В противоположном случае, когда падающая волна поперечна, отраженная мода 2 будет иметь нормальную компоненту волнового вектора, равную $k_{2l\perp}$ (40). Поэтому разность $\Delta_{21} = (k_{2l\perp} - k_{1l\perp})/k_0\sqrt{\epsilon_0}$ равна

$$\Delta_{21} = \frac{\eta'q \sin(2\theta_a) + 2\sqrt{(1 + \eta)[1 + \eta' \cos^2(\theta_a)] - q^2(1 + \eta')}}{2[1 + \eta' \cos^2(\theta_a)]} - \sqrt{1 - q^2}. \quad (44)$$

Изменения нормальных компонент, представленные выражениями (42)–(44), в зависимости от угла θ_a при некоторых значениях η и q , когда вектор \mathbf{a} целиком лежит в плоскости падения, показаны на рис. 1. Из рисунка следует, что при падении смешанной моды угол скольжения поперечной волны всегда меньше угла скольжения отраженной смешанной моды, а в случае падающей поперечной волны угол скольжения порождаемой смешанной моды всегда больше зеркального угла отраженной поперечной волны.

На рис. 2 показаны направления волновых векторов всех мод, возникающих при падении волны моды 2, $\vec{\mathcal{E}}_2$, когда вектор анизотропии \mathbf{a} имеет показанное на рисунке направление. Угол скольжения отраженной моды 2,

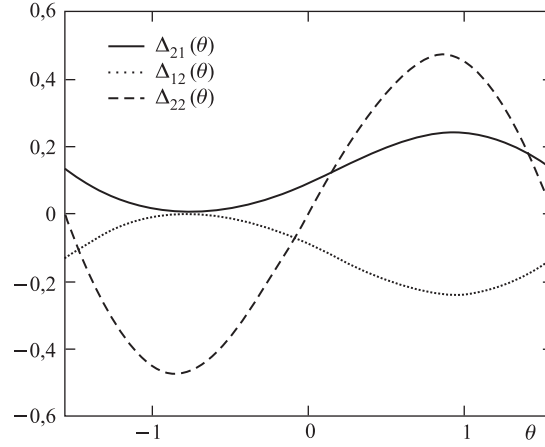


Рис. 1. Изменение разности Δ нормальных компонент волновых векторов падающей и отраженных волн в зависимости от угла $\theta = \theta_a$ вектора анизотропии по отношению к нормали \mathbf{n} . Кривые Δ_{ij} представляют собой безразмерные отношения $\Delta_{ij}(\theta)$ и рассчитаны для $\eta = \eta' = 0,4$ и $q = k_{\parallel}/k_0\sqrt{\epsilon_0} = 0,7$

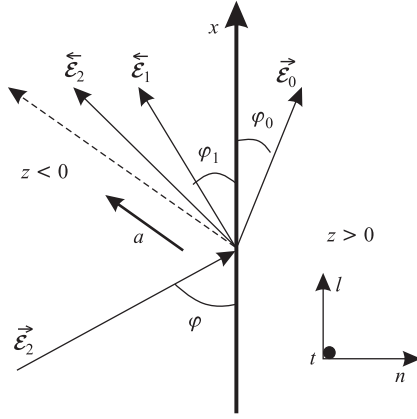


Рис. 2. Направления волновых векторов всех мод, возникающих при падении волны моды 2, $\vec{\mathcal{E}}_2$, когда вектор анизотропии \mathbf{a} имеет показанное здесь направление

$\overleftarrow{\mathcal{E}}_2$, меньше зеркального (зеркальное направление показано штриховой линией), а угол скольжения φ_1 образующейся волны моды 1, $\overleftarrow{\mathcal{E}}_1$, и того меньше.

Угол скольжения φ_0 преломленной волны $\vec{\mathcal{E}}_0$ меньше даже, чем φ_1 . Можно понять, что при некотором критическом значении $\varphi = \varphi_{c1}$ ($q^2 = 1/\epsilon_0$) угол φ_0 обращается в ноль. Это означает, что при $\varphi < \varphi_{c1}$ преломленная волна становится экспоненциально затухающей и вся энергия падающей волны отражается полностью в виде двух мод. Кроме первого критического угла можно ожидать и второй, φ_{c2} , при котором $\varphi_1 = 0$. При втором критическом угле, φ_{c2} , становится экспоненциально затухающей отраженная поперечная мода. Это возможно, когда q находится в интервале

$$1 < q^2 < \frac{(1 + \eta)(1 + \eta' \cos^2(\theta_a))}{1 + \eta'}. \quad (45)$$

Это означает, что при $\varphi < \varphi_{c2}$ мода $\overleftarrow{\mathcal{E}}_1$ также становится экспоненциально затухающей. В этом случае энергия падающей волны отражается полностью и незеркально в виде волны моды 2. При этом на поверхности раздела возникает поперечная поверхностная волна, состоящая из экспоненциально затухающих преломленной волны $\vec{\mathcal{E}}_0$ и волны моды 1, $\overleftarrow{\mathcal{E}}_1$. Стрелки над \mathcal{E} показывают направление распространения волн по отношению к границе раздела. Также показан базис, который будет использоваться в дальнейшем. Он состоит из единичного вектора нормали \mathbf{n} вдоль оси z , единичного вектора на границе раздела \mathbf{l} (ось x), который вместе с \mathbf{n} определяет плоскость падения, и вектора \mathbf{t} (ось y), который направлен к читателю и перпендикулярен плоскости падения.

На рис. 3 показано, как меняются нормальные компоненты волновых векторов при увеличении q , что эквивалентно уменьшению угла скольжения падающей волны φ при $\epsilon_0 = 1,6$ и $\eta = 0,8$. Первый критический угол соответствует $q \approx 0,8$, а второй критический угол — $q = 1$.

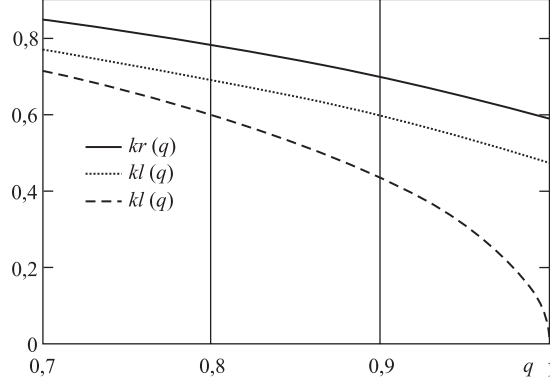


Рис. 3. Зависимость безразмерных нормальных компонент волновых векторов падающей и отраженных волн от $q = k \cos \varphi / k_0 \sqrt{\epsilon_0}$. Сплошная кривая соответствует падающей волне $kr(q) = k_{2r\perp} / k_0 \sqrt{\epsilon_0}$. Пунктирная кривая соответствует отраженной волне моды 2, распространяющейся налево $kl(q) = k_{2l\perp} / k_0 \sqrt{\epsilon_0}$. Штриховая кривая соответствует отраженной волне моды 1, распространяющейся налево $k1(q) = k_{1l\perp} / k_0 \sqrt{\epsilon_0}$. При $q > 1$ мода 1 перестает распространяться от поверхности раздела. Нормальная компонента ее волнового вектора $k1(q) = \sqrt{1 - q^2} = -i\sqrt{q^2 - 1}$ становится мнимой. При этом поперечная мода при $q^2 = 1/\epsilon_0$, совместно с преломленной экспоненциально затухающей волной, образует поверхностную волну

2.2. Амплитуды отражения и преломления на границе с вакуумом.

Волновая функция электромагнитного поля во всем пространстве с учетом границы раздела представляется в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Theta(z < 0) \left(e^{i\vec{k}_j \mathbf{r}} \vec{\psi}_j + \sum_{j'=1,2} e^{i\vec{k}_{j'} \mathbf{r}} \vec{\psi}_{j'} \rho_{j'j} \right) + \Theta(z > 0) e^{i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} \left(\psi_e \vec{\tau}_{ej} + \psi_m \vec{\tau}_{mj} \right), \quad (46)$$

где $\psi = \mathcal{E} + \mathcal{H}$; стрелки указывают направление распространения волн; $\vec{\psi}_j$ обозначает падающую волну моды j ($j = 1, 2$); $\vec{\psi}_{j'}$ ($l = 1, 2$) обозначает отраженные волны моды j' ; $\vec{k}_j = (\mathbf{k}_{\parallel}, k_{j\perp})$, $\vec{k}_{j'} = (\mathbf{k}_{\parallel}, -k_{j'\perp})$, $\mathbf{k}_0 = (\mathbf{k}_{\parallel}, \sqrt{k_0^2 - k_{\parallel}^2})$; $\psi_{e,m}$, $\vec{\tau}_{e,mj}$ — поля и амплитуды пропускания ТЕ- и ТМ-мод, возникающих при падающей волне моды j . Чтобы найти амплитуды отражения $\vec{\rho}$ и пропускания $\vec{\tau}$ (стрелки указывают направление распространения падающей волны к границе раздела), необходимошить выражение (46) на границе раздела.

2.3. Уравнения, следующие из граничных условий. Каждую падающую плоскую волну с линейной поляризацией можно на границе раздела представить в виде суперпозиции ТЕ- и ТМ-мод. В ТЕ-моде электрическое поле перпендикулярно плоскости падения, $\mathcal{E} \propto \mathbf{t}$, поэтому вклад j -й моды в ТЕ-моду равен $(\mathcal{E}_j \mathbf{t})$. В ТМ-моде магнитное поле перпендикулярно плоскости падения, $\mathcal{H} \propto \mathbf{t}$, поэтому вклад j -й моды в ТМ-моду равен $(\mathcal{H}_j \mathbf{t})$. Для преломленных волн в ТЕ-моду мы принимаем $\vec{\mathcal{E}}_e = \mathbf{t}$, $\vec{\mathcal{H}}_e = [\boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{t}]$, а для преломленных волн в ТМ-моду мы принимаем $\vec{\mathcal{H}}_m = \mathbf{t}$, $\vec{\mathcal{E}}_m = -[\boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{t}]$.

2.3.1. Граничные условия для ТЕ-волн. Граничные условия для ТЕ-компонент в случае падающей j -моды записываются следующим образом.

1. Требование непрерывности электрического поля, параллельного границе раздела, приводит к уравнению

$$(\vec{\mathcal{E}}_j) + (\overleftarrow{\mathcal{E}}_1) \vec{\rho}_{1j} + (\overleftarrow{\mathcal{E}}_2) \vec{\rho}_{2j} = \vec{\tau}_{ej}. \quad (47)$$

2. Требование непрерывности магнитного поля, параллельного границе раздела, приводит к уравнению

$$(\vec{\mathcal{H}}_j) + (\overleftarrow{\mathcal{H}}_1) \vec{\rho}_{1j} + (\overleftarrow{\mathcal{H}}_2) \vec{\rho}_{2j} = (I[\boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{t}]) \vec{\tau}_{ej} \equiv -\kappa_{0\perp} \vec{\tau}_{e1}. \quad (48)$$

3. Требование непрерывности нормальной компоненты магнитной индукции на границе раздела при $\mu = 1$ приводит к уравнению

$$(\vec{\mathcal{H}}_j) + (\overleftarrow{\mathcal{H}}_1) \vec{\rho}_{1j} + (\overleftarrow{\mathcal{H}}_2) \vec{\rho}_{2j} = (n[\boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{t}]) \vec{\tau}_{ej} \equiv \kappa_{0\parallel} \tau_{ej}. \quad (49)$$

Уравнение (49) равносильно уравнению (47) и потому должно быть исключено.

2.3.2. Граничные условия для ТМ-волн. Граничные условия для ТМ-компонент в случае падающей j -моды записываются следующим образом.

1. Требование непрерывности магнитного поля, параллельного границе раздела, приводит к уравнению

$$(\vec{\mathcal{H}}_j) + (\overleftarrow{\mathcal{H}}_1) \vec{\rho}_{1j} + (\overleftarrow{\mathcal{H}}_2) \vec{\rho}_{2j} = \vec{\tau}_{mj}. \quad (50)$$

2. Требование непрерывности электрического поля, параллельного границе раздела, приводит к уравнению

$$(\vec{\mathcal{E}}_j) + (\overleftarrow{\mathcal{E}}_1) \vec{\rho}_{1j} + (\overleftarrow{\mathcal{E}}_2) \vec{\rho}_{2j} = -(I[\boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{t}]) \vec{\tau}_{mj} \equiv \kappa_{0\perp} \vec{\tau}_{mj}. \quad (51)$$

3. Требование непрерывности нормальной компоненты электрической индукции \mathbf{D} на границе раздела приводит к уравнению

$$(n\vec{\mathcal{E}}_j) + (n\overleftarrow{\mathcal{E}}_1) \vec{\rho}_{1j} + (n\overleftarrow{\mathcal{E}}_2) \vec{\rho}_{2j} = -(n[\boldsymbol{\kappa}_0 \times \mathbf{t}]) \vec{\tau}_{mj} \equiv \kappa_{0\parallel} \vec{\tau}_{mj}. \quad (52)$$

Уравнением (52) можно пренебречь, поскольку оно совпадает с (50).

Исключение $\vec{\tau}_{ej}$ из (47) и (48), а также исключение $\vec{\tau}_{mj}$ из (50) и (51) приводит к двум уравнениям для $\vec{\rho}_{1j}$ и $\vec{\rho}_{2j}$, которые удобно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} (\overleftarrow{\mathcal{H}}_1) + \kappa_{0\perp}(\overleftarrow{\mathcal{E}}_1) & (\overleftarrow{\mathcal{H}}_2) + \kappa_{0\perp}(\overleftarrow{\mathcal{E}}_2) \\ \kappa_{0\perp}(\overleftarrow{\mathcal{H}}_1) - (\overleftarrow{\mathcal{E}}_1) & \kappa_{0\perp}(\overleftarrow{\mathcal{H}}_2) - (\overleftarrow{\mathcal{E}}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}_{1j} \\ \vec{\rho}_{2j} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (\overrightarrow{\mathcal{H}}_1) + \kappa_{0\perp}(\overrightarrow{\mathcal{E}}_1) \\ \kappa_{0\perp}(\overrightarrow{\mathcal{H}}_1) - (\overrightarrow{\mathcal{E}}_1) \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Решение этого уравнения очень простое, если принять во внимание, что обратная для произвольной матрицы 2×2 записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Найдя $\vec{\rho}_{1j}$ и $\vec{\rho}_{2j}$, подставляем их в (47) и (50) и в результате получаем

$$\begin{pmatrix} \vec{\tau}_{ej} \\ \vec{\tau}_{mj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\mathcal{E}}_j \\ \overrightarrow{\mathcal{H}}_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overleftarrow{\mathcal{E}}_1 & \overleftarrow{\mathcal{E}}_2 \\ \overleftarrow{\mathcal{H}}_1 & \overleftarrow{\mathcal{H}}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\rho}_{1j} \\ \vec{\rho}_{2j} \end{pmatrix}. \quad (55)$$

2.3.3. Общий случай. Выше мы рассмотрели ситуацию, когда падающая волна имела вполне определенную моду с вектором поляризации \mathbf{e}_j . (Напомним, что вектор \mathbf{e}_j необязательно нормирован к единице.) В дальнейшем мы планируем найти отражение и пропускание плоскопараллельной анизотропной пластинки. Для этого потребуются знать отражение и преломление в общем случае присутствия обеих мод. Состояние поля, содержащего обе моды с амплитудами $x_{1,2}$, удобно представить двумерным вектором

$$|\vec{x}\rangle = \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{x}_2 \end{pmatrix}. \quad (56)$$

Отраженное и преломленное поля также можно представить двумерными векторами:

$$|\vec{\psi}\rangle = \begin{pmatrix} \overleftarrow{\psi}_1 \\ \overleftarrow{\psi}_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathcal{R}} |\vec{x}\rangle, \quad |\vec{\psi}_0\rangle = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\psi}_e \\ \overrightarrow{\psi}_m \end{pmatrix} = \overrightarrow{\mathcal{T}} |\vec{x}\rangle, \quad (57)$$

где $\overrightarrow{\mathcal{R}}$ и $\overrightarrow{\mathcal{T}}$ теперь квадратные 2×2 матрицы:

$$\overrightarrow{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\rho}_{11} & \overrightarrow{\rho}_{12} \\ \overrightarrow{\rho}_{21} & \overrightarrow{\rho}_{22} \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\tau}_{e1} & \overrightarrow{\tau}_{e2} \\ \overrightarrow{\tau}_{m1} & \overrightarrow{\tau}_{m2} \end{pmatrix}. \quad (58)$$

Здесь и ниже матрицы отмечены штрихом, если они описывают отражение и преломление внутри анизотропной среды, и матрицы не содержат штриха, если рассматривается отражение и преломление совокупности ТЕ- и ТМ-мод, падающей на границу раздела из вакуума.

3. АМПЛИТУДЫ ОТРАЖЕНИЯ И ПРОПУСКАНИЯ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ ТОЛЩИНЫ L

Представим себе, что у нас имеется бесконечно протяженная плоскопараллельная пластинка, занимающая область пространства $0 < z < L$. Если слева на пластинку падает поле в состоянии $|\psi_i\rangle$ вида (56), где верхняя компонента обозначает амплитуду ТЕ-, а нижняя — ТМ-моды, то поле вне пластины записывается в виде

$$|\Psi(z)\rangle = \Theta(z < 0)(\exp(ik_{0\perp}z)\hat{\mathbf{I}} + \exp(-ik_{0\perp}z)\hat{\mathbf{R}}(L))|\psi_i\rangle + \Theta(z < l)(\exp(ik_{0\perp}(z - L))\hat{\mathbf{T}}(L)|\psi_i\rangle, \quad (59)$$

где Θ — ступенчатые функции; $\hat{\mathbf{I}}$ — единичная матрица; а $\hat{\mathbf{R}}(L)$, $\hat{\mathbf{T}}(L)$ — матрицы амплитуд отражения и пропускания.

Чтобы найти $\hat{\mathbf{R}}(L)$ и $\hat{\mathbf{T}}(L)$, поступим следующим образом [7]. Представим, что на границу $z = L$ изнутри пластинки падает поле в состоянии $\vec{\hat{\mathbf{X}}}$. Тогда, зная матрицу $\vec{\hat{\mathbf{X}}}$, мы легко находим матрицу пропускания

$$\hat{\mathbf{T}}(L) = \vec{\hat{\mathbf{T}}}'(z = L)\vec{\hat{\mathbf{X}}}, \quad (60)$$

а также матрицу отражения

$$\hat{\mathbf{R}}(L) = \vec{\hat{\mathbf{R}}} + \vec{\hat{\mathbf{T}}}'(z = 0) \exp(i\vec{k}L) \vec{\hat{\mathbf{R}}}'(z = L)\vec{\hat{\mathbf{X}}}, \quad (61)$$

где первое слагаемое описывает отражение от границы раздела $z = 0$ со стороны вакуума, а второе описывает вклад волны $\vec{\hat{\mathbf{X}}}$, падающей на границу $z = L$. Эта волна отражается изнутри от границы $z = L$, распространяется налево до границы $z = 0$ и преломляется в вакуум, где и объединяется с волной, описываемой первым слагаемым в (61). Амплитуды $\vec{\hat{\mathbf{R}}}$, $\vec{\hat{\mathbf{T}}}'(z = 0)$ вычисляются так же, как амплитуды (58), которые здесь обозначены как $\vec{\hat{\mathbf{R}}}'(z = L)$,

$\hat{\mathcal{T}}'(z=L)$. Фазовый множитель $\exp(i\overleftarrow{\mathbf{k}}L)$ содержит в показателе диагональную матрицу

$$\overleftarrow{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} k_{1\perp} & 0 \\ 0 & k_{2\perp} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Для матрицы \hat{X} можно написать самосогласованное уравнение

$$\hat{X} = \exp(i\overrightarrow{\mathbf{k}}L)\overrightarrow{\hat{\mathcal{T}}} + \exp(i\overrightarrow{\mathbf{k}}L)\overleftarrow{\hat{\mathcal{R}}}(z=0)\exp(i\overleftarrow{\mathbf{k}}L)\overrightarrow{\hat{\mathcal{R}}}'(z=L)\hat{X}, \quad (63)$$

где $\overrightarrow{\mathbf{k}}$ отличается от $\overleftarrow{\mathbf{k}}$ (62) заменой $k_{2\perp}$ на $k_{2r\perp}$.

Мы не будем подробно описывать каждый шаг этой процедуры, приведем только результаты расчетов коэффициентов отражения и пропускания для падающей на пластинку под углом θ ТЕ-волны. На рис. 4 представлены коэффициенты отражения $R_{ee}(\phi) = |\langle u|\hat{\mathbf{R}}(\phi)|u\rangle|^2$ и $R_{me}(\phi) = |\langle d|\hat{\mathbf{R}}(\phi)|u\rangle|^2$, где

$$|u\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |d\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (64)$$

а на рис. 5 аналогично определенные коэффициенты пропускания $T_{ee}(\phi) = |\langle u|\hat{\mathbf{T}}(\phi)|u\rangle|^2$ и $T_{me}(\phi) = |\langle d|\hat{\mathbf{T}}(\phi)|u\rangle|^2$ в зависимости от угла ϕ поворота пластинки вокруг нормали, когда вектор анизотропии параллелен пластинке и угол $\phi = 0$ соответствует направлению \mathbf{a} вдоль \mathbf{k}_{\parallel} .

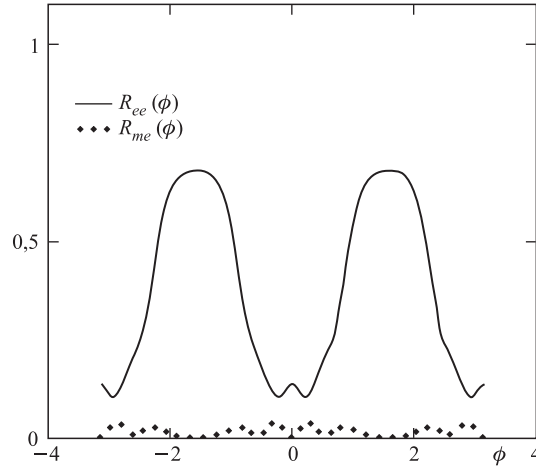


Рис. 4. Зависимость коэффициентов отражения $R_{ee}(\phi)$ и $R_{me}(\phi)$ анизотропной пластинки с $\epsilon_0 = 1,6$, $\eta = 0,8$ и безразмерной толщины $Lk_0 = 10$ от угла ϕ поворота пластинки вокруг нормали, когда вектор анизотропии \mathbf{a} параллелен границам пластинки и при $\phi = 0$ его направление совпадает с направлением \mathbf{k}_{\parallel} . Угол падения θ таков, что $\sin \theta = 0,9$

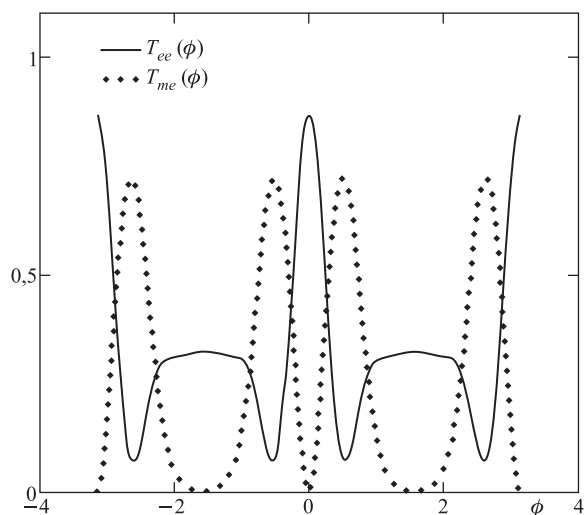


Рис. 5. Зависимость коэффициентов пропускания T_{ee} и T_{me} двупреломляющей пластинки от угла ϕ поворота пластинки вокруг нормали, когда вектор анизотропии \mathbf{a} параллелен границам пластинки и при $\phi = 0$ его направление совпадает с направлением $\mathbf{k}_{||}$. Угол падения θ таков, что $\sin \theta = 0,9$

4. ДЕМОНСТРАЦИЯ РАСЩЕПЛЕНИЯ ПРИ ОТРАЖЕНИИ С ПОМОЩЬЮ КОНУСА

Рассмотрим расщепление лучей, показанное на рис. 6. Падающий луч после преломления на боковой поверхности расщепляется внутри конуса на два луча двух мод 1 и 2. Каждая из этих мод после отражения от основания пирамиды тоже расщепляется на две компоненты. В результате лучи после выхода из конуса образуют на вертикальном экране четыре световых пятна, яркость и положение которых меняются при вращении конуса вокруг оси.

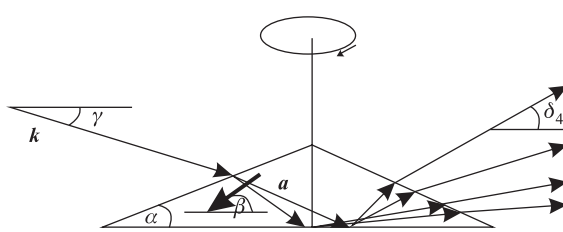


Рис. 6. Схема лабораторной демонстрации расщепления лучей в двоякопреломляющем конусе с последующим отражением от основания конуса. Вращение конуса относительно оси приводит к перемещению световых пятен на экране и к изменению их яркости

Прямые расчеты для конуса с углом при основании, равном 0,5, когда $\epsilon_0 = 1,6$, $\eta = 0,8$, вектор \mathbf{a} лежит в плоскости рис. 6, а величины углов α , β и γ определяются соотношениями $\sin \alpha = 0,5$, $\sin \beta = 0,3$ и $\sin \gamma = 0,5$. При этом тангенсы углов, выходящих из конуса лучей в порядке возрастания, равны $\tan \delta_1 = 0,2$, $\tan \delta_2 = 0,4$, $\tan \delta_3 = 0,6$ и $\tan \delta_4 = 0,7$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрено, как элементарным образом можно найти линейную поляризацию плоских волн в анизотропных средах, рассчитать отражение и преломление этих волн на границах раздела, а также отражение и пропускание плоскопараллельных анизотропных пластинок.

Было показано, что отражение и преломление на границе между анизотропной и изотропной средой сопровождаются расщеплением отраженной или преломленной волн. Отражение смешанной моды внутри анизотропной среды характеризуется двумя критическими углами. Первый критический угол φ_{c1} соответствует полному отражению с расщеплением отраженной волны. Второй критический угол φ_{c2} соответствует полному незеркальному отражению смешанной волны без расщепления, но с образованием поперечной поверхностной электромагнитной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров Ф. И. Оптика анизотропных сред. Минск: АН БССР, 1958.
2. Kužel P. Lecture 8: Light Propagation in Anisotropic Media.
<http://www.fzu.cz/kuzelp/Optics/Lectures.htm>;
<http://www.fzu.cz/kuzelp/Optics/Lecture8.pdf>
3. Kužel P. Electromagnetisme des milieux continus // Optique. Universite Paris-Nord, 2000/2001.
4. Ditchburn R. W. Light. N. Y.: Dover Publ. Inc., 1991.
5. Landau L. D., Lifshitz E. M., Pitaevskii L. P. Electrodynamics of Continuous Media. Second Edition. V. 8 (Course of Theoretical Physics). Ch. XI. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2004.
6. Ignatovich V. K., Loan T. N. Phan. Those Wonderful Elastic Waves // Am. J. Phys. 2009. V. 77. P. 1162.
7. Ignatovich V. K., Utsuro M. Handbook on Neutron Optics. Wiley-VCN Verlag GmbH, & Co. KGaA, 2009.

Получено 21 октября 2010 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 24.12.2010.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 1,25. Уч.-изд. л. 1,45. Тираж 350 экз. Заказ № 57209.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/