

P4-2011-129

В. В. Пупышев*

ПРОТОН-ВОДОРОДНАЯ РЕАКЦИЯ
В ЭФФЕКТИВНО-ДВУХЧАСТИЧНОЙ МОДЕЛИ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

*E-mail: pupyshev@theor.jinr.ru

Пупышев В. В.

P4-2011-129

Протон-водородная реакция в эффективно-двухчастичной модели

В предлагаемой модели полное взаимодействие протона, налетающего на атом водорода, и протона, являющегося ядром этого атома, считается суммой короткодействующего ядерного потенциала Риды и дальнедействующего потенциала Томаса–Ферми, порожденного кулоновским взаимодействием электрона с ядром атома водорода. Найдена явная низкоэнергетическая асимптотика сечения протон-водородной реакции с образованием дейтрона, и показано, что это сечение возрастает обратно пропорционально энергии столкновения протона с атомом водорода в ее нулевом пределе.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 2011

Pupyshev V. V.

P4-2011-129

Proton-Hydrogen Reaction in Effective Two-Body Model

In the suggested model the total interaction of proton and hydrogen atom is assumed to be the sum of the short-range nuclear Reid potential and the long-range Thomas–Fermi potential caused by the Coulomb interactions of electron with hydrogen nucleus. As is shown, in this model the cross-section of the proton-hydrogen reaction with generation of the deuteron increases as inverse power of the collision energy in its zero limit.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 2011

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа является естественным продолжением нашего предыдущего исследования упругого рассеяния протона атомом водорода [1]. Здесь сохранены все обозначения, введенные в препринте [1], и используются определения, принятые в известных монографиях [2–12].

Как известно, атом водорода Н является связанным состоянием двух разноименно заряженных частиц: электрона e^- и протона-ядра. Обозначим этот протон символом p' , а протон, налетающий на атом водорода, — символом p . Задача столкновения протона с атомом водорода относится к классу задач, наиболее сложному для качественного и численного анализа. В современной квантовой теории рассеяния для систем нескольких частиц [2] исследование этого класса задач незавершено. В частности, неизвестны координатные асимптотики волновой функции системы трех заряженных частиц в особых областях конфигурационного пространства, определяемых направлением рассеяния пары частиц вперед. Неизвестны и явные асимптотики волновой функции рассеяния частицы на связанном состоянии двух частиц в пределе нулевой энергии столкновения. Еще менее изученной является задача рассеяния заряженной частицы на связанном комплексе трех и более заряженных частиц. Например, столкновение протона с тяжелым атомом.

Из-за перечисленных трудностей в настоящее время не ослабевает интерес к эффективно-двухчастичным моделям столкновения заряженной частицы с нейтральным атомом. Одна из таких моделей предложена в нашей предыдущей работе [1], посвященной упругому рассеянию протона атомом водорода. Эта же модель используется в настоящей работе для описания и анализа неупругого столкновения протона с атомом водорода, в результате которого происходит протон-водородная реакция с образованием дейтрона.

Постановка решаемой задачи такова: в рамках эффективно-двухчастичной задачи исследовать упругое и неупругое S -волновое столкновение падающего протона p на протоне p' , являющимся ядром атома водорода, а затем вывести явную низкоэнергетическую асимптотику сечения такого столкновения.

В разд. 1 после формулировки предлагаемой модели дается ее квантово-механический анализ, в результате которого предсказываются основные ожидаемые результаты. В разд. 2 перечисляются и обсуждаются с физической

точки зрения ключевые для наших исследований уравнения и соотношения. Третий раздел посвящен выводу и исследованию S -волновой функции p Н-рассеяния и сечения p Н-реакции в пределе нулевой энергии столкновения протона с атомом водорода; в четвертом сначала излагается новый метод построения низкоэнергетических представлений S -волновой функции рассеяния потенциалом, имеющим далекодействующую асимптотику поляризационного типа, а затем этот метод применяется для построения и анализа поведения сечения p Н-реакции при низких энергиях столкновения протона с атомом водорода. В разд. 5 представлены методы и результаты вычислений. В заключении суммируются основные результаты.

1. МОДЕЛЬ И ЕЕ ОЖИДАЕМЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Начнем с описания основных обозначений. Пусть \hbar — постоянная Планка, e и m_e — отрицательный заряд и масса электрона; $|e|$ и m_p — заряд и масса протона; a_B и R — боровские радиусы электрона и системы $\{p, p\}$ двух протонов. Для оценок и вычислений использовались следующие значения:

$$\begin{aligned} m_e &= 0,5110034 \text{ МэВ}, & m_p &= 1836,15152 m_e \approx 938,2796696 \text{ МэВ}, \\ \frac{\hbar^2}{m_p} &\approx 41,49996 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^2, & e^2 &= 1,4399758 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}, \\ a_B \equiv \frac{\hbar^2}{m_e e^2} &= 52917,706 \text{ Фм}, & R \equiv \frac{\hbar^2}{m_p e^2} &= a_B \frac{m_e}{m_p} \approx 28,81990 \text{ Фм}. \end{aligned}$$

Всюду далее символами r , k и $E = (\hbar k)^2/m_p$ обозначены расстояние между протонами, волновое число и энергия столкновения протонов в их системе центра масс.

Опишем известную и довольно реалистическую модель низкоэнергетического столкновения двух протонов в вакууме [3]. В этой модели взаимодействие между протонами в их 1S_0 -состоянии считается суперпозицией $V \equiv V^c + V^s$ отталкивающего кулоновского потенциала $V^c(r) \equiv e^2/r$ и ядерного короткодействующего потенциала $V^s(r)$ Риды с мягким кором [13]:

$$\begin{aligned} V^s(r) &= [g(x)/x] \{V_1 + g^3(x)[V_4 + V_7 g^3(x)]\}, \\ g(x) &\equiv \exp(-x), \quad x \equiv r/r_\pi; \\ V_1 &= -10,463 \text{ МэВ}, \quad V_4 = -1650,6 \text{ МэВ}, \\ V_7 &= 6484,2 \text{ МэВ}, \quad r_\pi \equiv (10/7) \text{ Фм}. \end{aligned} \tag{1}$$

С ростом аргумента r потенциал Риды монотонно убывает на интервале $(0, r_2^s)$, в точке $r \leq r_1^s \approx 0,6402 \text{ Фм}$ обращается в нуль, в точке $r = r_2^s \approx 0,8449 \text{ Фм}$ достигает своего минимального значения $V^s(r_2^s) = V_{\min}^s \approx -97,2308 \text{ МэВ}$,

а затем монотонно возрастает, сходясь к нулю в пределе $r/r_\pi \rightarrow \infty$. Обсуждаемый потенциал имеет асимптотики

$$\begin{aligned} V^s(r) &\sim V_0^s/r, \quad V_0^s \approx 6890 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}, \quad r/r_\pi \rightarrow 0; \\ V^s(r) &\sim V_\infty^s \exp(-r/r_\pi)/r, \quad V_\infty^s \approx -14,9 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}, \quad r/r_\pi \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (2)$$

в области $r \leq r_1 \approx 0,64 \text{ Фм}$ является отталкивающим ($V^s > 0$), а в области $r > r_1$ — притягивающим ($V^s < 0$) потенциалом.

В результате неупругого столкновения двух протонов в вакууме за счет слабого распада одного из протонов на нейтрон n , позитрон e^+ и электронное нейтрино ν_e и последующего захвата нейтрона (β^+ -захват) другим протоном в связанное состояние — ядро дейтрона d^+ — происходит подбарьерная ядерная реакция $p + p \rightarrow d^+ + e^+ + \nu_e$. Сечение такой pp -реакции принято представлять в виде [4]

$$\begin{aligned} \sigma_{pp}(E) &= \frac{\exp(-2\pi\eta)}{E} S_{pp}(E), \quad S_{pp}(E) = \tau \Lambda_{pp}^2(E), \\ \tau &\approx 4,855 \cdot 10^{-22} \text{ кэВ} \cdot \text{Фм}^2. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом представлении $\eta \equiv 1/(2kR)$ — параметр Зоммерфельда, а аналитическая функция $\Lambda_{pp}(E)$ энергии называется ядерно-кулоновским матричным элементом.

В импульсном приближении [4] по гамильтониану β^+ -захвата [5] этот элемент представляется в виде интеграла перекрытия 3S_1 -компоненты $u_d(r)$ радиальной волновой функции дейтрона и S -волновой радиальной функции pp -рассеяния $u_{pp}(r; k)$:

$$\Lambda_{pp}(E) = [8\pi r_d^3 k^2 C_0^2(\eta)]^{-1/2} \int_0^\infty u_{pp}(r; k) u_d(r) dr, \quad (4)$$

где r_d — радиус дейтрона, а $C_0^2(\eta)$ — кулоновский барьерный множитель:

$$C_0^2(\eta) \equiv [2\pi\eta / (\exp(2\pi\eta) - 1)].$$

Компонента $u_d(r)$ функции дейтрона, вычисленная по алгоритму, описанному в работе [13] для 3S_1 - 3D_1 -потенциала Риды с мягким кором, изображена на рис. 1 сплошной кривой. Функция $u_d(r)$ равна нулю в точке $r = 0$, имеет локальный максимум в точке $r_1^d \approx 2,65 \text{ Фм}$ и экспоненциально быстро убывает при увеличении отношения ее аргумента к константе $r_d = 4,314621509 \text{ Фм}$, которую принято называть радиусом дейтрона:

$$u_d(r) \sim 0,87758 \text{ Фм}^{-1/2} \exp(-r/r_d), \quad r/r_d \rightarrow \infty. \quad (5)$$

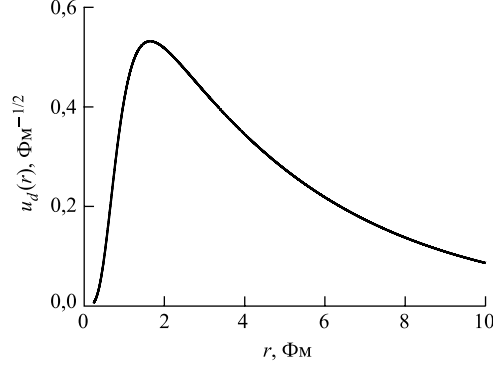


Рис. 1. Сплошная кривая — радиальная 3S_1 -компонента $u_d(r)$ волновой функции дейтрона

Функция $u_{pp}(r; k)$ определяется как решение радиального уравнения Шредингера

$$\left[\frac{\hbar^2}{m_p} \partial_r^2 + V(r) - E \right] u_{pp}(r; k) = 0, \quad r > 0,$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u_{pp}(r; k) &= O(\rho), \quad \rho \equiv kr \rightarrow 0; \\ u_{pp}(r; k) &\sim \sin(\rho - \eta \ln 2\rho + \delta(k)), \quad \rho \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\delta(k)$ — фаза рассеяния, порожденная потенциалом $V = V^c + V^s$.

Исчерпывающий анализ энергетической зависимости матричного элемента (4) Риды (1) дан в обзоре [14]. В области энергий $E < 20$ кэВ квадрат этого элемента аппроксимируется линейной функцией энергии:

$$\begin{aligned} \Lambda_{pp}^2(E) &= \Lambda_{pp}^2(0)(1 + \lambda E) + O(E^2), \\ \Lambda_{pp}^2(0) &= 7,0 \pm 0,18, \quad \lambda = 2,2 \text{ МэВ}^{-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Ошибки в определении ее коэффициентов $\Lambda_{pp}^2(0)$ и λ порождаются неопределенностями ($\approx 0,025$) ядерного нуклон-нуклонного потенциала и вкладом ($\approx 0,02$) обменных мезонных токов. В случае ядерного потенциала Риды (1) наиболее точные значения коэффициентов разложения (6) вычислены авторами обзора [14] и равны

$$\Lambda_{pp}^2(0) = 6,96072905, \quad \lambda = 2,42552113 \text{ МэВ}^{-1}.$$

Подробное описание используемой далее эффективно-двухчастичной модели столкновения протона с атомом водорода дано в нашей предыдущей

работе [1]. Поэтому ниже перечисляются лишь основные определения и приводятся только необходимые формулы.

Масса m_H атома водорода полагается равной массе протона m_p . Столкновение протона с атомом водорода исследуется в их системе центра масс. В этой системе по определению r , k и E — расстояние между налетающим протоном p и протоном-ядром атома водорода p' , волновое число и энергия относительного движения этих протонов.

Для анализа такого столкновения необходимо сначала учесть эффект экранировки электроном атома водорода его ядра — протона p' . Наиболее простой способ приближенного учета включения этого эффекта — замена кулоновского отталкивания V^c в полном взаимодействии $V = V^c + V^\ell$ между протонами экранированным модельным взаимодействием $V^\ell(r)$ Томаса–Ферми.

Напомним, что в теории потенциального рассеяния [2, 6], в отличие от теории электричества [7], потенциальную энергию принято называть потенциалом.

В модели Томаса–Ферми [8] электрический потенциал $\varphi(r)$ атома на заданном расстоянии r от его ядра, имеющего заряд $Z|e|$, равен произведению электрического потенциала ядра $Z|e|/r$ и экранирующей функции $f(x)$ безразмерного аргумента x :

$$\varphi(r) = \frac{Z|e|}{r} f(x), \quad x = r/d, \quad d \equiv \left(\frac{9\pi^2}{128Z} \right)^{1/3} a_B.$$

Экранирующая функция, порожденная взаимным кулоновским воздействием всех Z электронов атома на его ядро, является решением нелинейной краевой задачи

$$\begin{aligned} \partial_x^2 f(x) &= f(x) \sqrt{f(x)/x}, \quad x > 0; \\ f(x) &= 1, \quad x = 0; \quad f(x) \sim 144/x^3, \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Такое решение монотонно убывает на всей полуоси $x > 0$. Наглядное представление о его зависимости от аргумента x дает рис. 2.

Для атома водорода $Z = 1$. Следовательно, в модели Томаса–Ферми электрическая потенциальная энергия $V^\ell(r)$ системы $\{p, H\}$ определяется формулами

$$V^\ell(r) = |e|\varphi(r) = \frac{e^2}{r} f(x), \quad x = r/d, \quad d \approx 46850,2346977 \text{ Фм}. \quad (7)$$

Далее, как принято в теории потенциального рассеяния [2, 6], функция $V^\ell(r)$ называется потенциалом Томаса–Ферми.

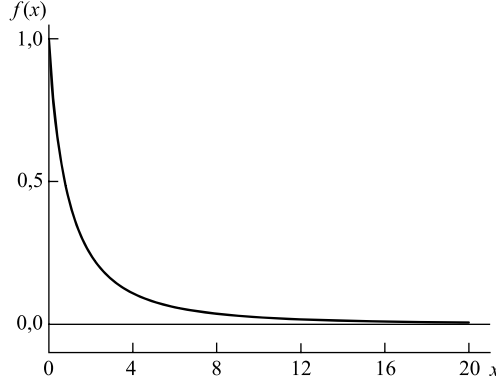


Рис. 2. Сплошная кривая — экранирующая функция Томаса–Ферми $f(x)$, прямая линия — функция $f_{\text{as}}(x) \equiv 0$

Потенциал Томаса–Ферми имеет следующие асимптотики:

$$\begin{aligned} V^\ell(r) &\sim e^2/r, \quad e^2 \approx 1,4399758 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}, \quad x = r/d \rightarrow 0; \\ V^\ell(r) &\sim \beta r^{-4}, \quad \beta \equiv 144 e^2 d^3 \approx 2,1323232 \cdot 10^{16} \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^4, \quad r/d \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Следовательно, в пределе малых расстояний этот потенциал становится кулоновским отталкиванием $V^c(r) = e^2/r$, а в пределе больших расстояний — отталкивающим потенциалом поляризационного типа $V^p(r) = \beta r^{-4}$ с довольно большой константой β .

Так как протоны p и p' — тождественные частицы, то далее считается, что эти протоны взаимодействуют посредством суммы $V(r) \equiv V^\ell(r) + V^s(r)$ отталкивающего и дальнегодействующего потенциала Томаса–Ферми и ядерного короткодействующего потенциала Риды.

Опишем зависимость функции $V(r)$ от расстояния r . Соотношения (2) и (8) порождают следующие асимптотики функции $V(r)$:

$$\begin{aligned} V(r) &\sim V_0/r, \quad V_0 = V_0^s + e^2 \approx 6891,42 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}, \quad r/r_\pi \rightarrow 0; \\ V(r) &\sim \beta/r^4, \quad \beta \equiv 144 e^2 d^3 \approx 2,132323 \cdot 10^{16} \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}^4, \quad r/d \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9)$$

Эта функция имеет два нуля в точках $r = r_1 \approx 0,6418 \text{ Фм}$ и $r = r_3 \approx 3,4847 \text{ Фм}$ и два экстремума: минимум в точке $r = r_2 \approx 0,8457 \text{ Фм}$ и локальный максимум в точке $r = r_4 \approx 5,6306 \text{ Фм}$. Минимальное и максимальное значения таковы: $V(r_2) = V_{\text{min}} \approx -95,5527 \text{ МэВ}$, а $V(r_4) = V_{\text{max}} \approx 204,0784 \text{ кэВ}$. Функция $V(r)$ меньше нуля на интервале (r_1, r_3) и больше нуля на интервале $(0, r_1)$ и на полуоси $r > r_4$. С ростом аргумента r обсуждаемая функция монотонно убывает на полуинтервале $(0, r_2]$, затем монотонно

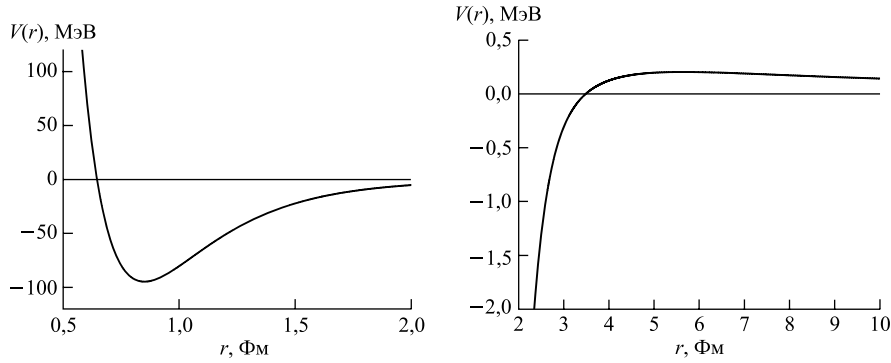


Рис. 3. Сплошная кривая — сумма V потенциалов Риды (1) и Томаса–Ферми (7); прямая линия — функция $V_{\text{as}}(r) \equiv 0$

возрастает на полуинтервале $(r_2, r_4]$ и монотонно убывает на полуоси $r > r_4$, медленно сходясь к нулю в пределе $r/d \rightarrow \infty$.

Следовательно, потенциал $V(r)$ имеет сингулярность кулоновского типа в начальной точке $r = 0$, на интервале (r_1, r_3) является притягивающим потенциалом ($V < 0$), а всюду вне этого интервала — отталкивающим ($V > 0$). Зависимость потенциала $V(r)$ от расстояния r поясняет рис. 3.

В области малых расстояний $r < 2$ Фм потенциал V аппроксимируется потенциалом Риды, а в области больших расстояний $r > 5$ Фм — потенциалом Томаса–Ферми. Главная особенность потенциала $V(r)$ заключается в том, что он имеет отталкивающую дальнедействующую асимптотику: $V(r) \sim V^p(r) = \beta r^{-4}$, $r/d \rightarrow \infty$, с огромной в масштабах ядерной и атомной физики константой β .

Обсудим два квантово-механических следствия предложенной модели: представление сечения $\sigma(E)$ неупругого столкновения протонов p и p' и его ожидаемое значение в пределе $E \rightarrow 0$.

Выведем формулу для сечения σ . Некулоновским пределом назовем предел бесконечно большого борновского радиуса R системы $\{p, p'\}$. Как упоминалось выше, сечение pp -реакции (3) в вакууме вычисляется как матричный элемент от гамильтониана слабого распада между функциями конечного и начального состояния. Такой гамильтониан никоим образом не зависит ни от вида взаимодействия между протонами, ни от волновой функции начального состояния, которой в нашем случае является волновая функция u рассеяния суперпозицией $V^\ell + V^s$ потенциала Томаса–Ферми и ядерного потенциала Риды. Поэтому искомое сечение $\sigma(E)$ должно вычисляться как некулоновский предел ($R \rightarrow \infty$) сечения (3), а при вычислении такого предела от матричного элемента (4) нужно сначала заменить в нем функцию u_{pp} рассеяния двух протонов p и p в вакууме функцией u рассеяния протонов p

и p' . Выполнив такую замену и перейдя в формулах (3) и (4) к некулоновскому пределу, получим искомое представление сечения протон-водородной реакции $\sigma(E)$ и ядерно-экранированного матричного элемента $\Lambda(E)$:

$$\sigma(E) = \frac{\tau}{E} \Lambda^2(E), \quad \Lambda(E) \equiv \frac{1}{[8\pi r_d^3 k^2]^{1/2}} \int_0^\infty u(r; k) u_d(r) dr. \quad (10)$$

Далее символами $V = V^\ell + V^s$, V^ℓ , V^s и V^p обозначаются ранее определенные потенциалы, умноженные на величину m_p/\hbar^2 . Все переопределенные таким образом потенциалы имеют размерность $\Phi\text{М}^{-2}$. Например, потенциал $V^\ell(r)$ определяется как

$$V^\ell(r) = \frac{1}{Rr} f(x), \quad x = r/d, \quad (11)$$

а вместо формул (9) используются представления

$$\begin{aligned} V(r) &\sim \frac{v_0}{r}, \quad v_0 \equiv \frac{m_p}{\hbar^2} V_0 \approx 166,058473 \Phi\text{М}^{-2}, \quad r/r_\pi \rightarrow 0; \\ V(r) &\sim V^p(r) = \frac{\alpha}{r^4}, \\ \alpha &\equiv \frac{m_p}{\hbar^2} \beta = \frac{144d^3}{R} \approx 5,138132 \cdot 10^{14} \Phi\text{М}^2, \quad r/d \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (12)$$

Благодаря этим представлениям, потенциал $V(r)$ удовлетворяет ключевым для следующего раздела неравенствам

$$0 < V(r) \leq \alpha/r^4, \quad r > r_3 \approx 3,4847 \Phi\text{М}. \quad (13)$$

Радиальная волновая функция $u(r; k)$ упругого рассеяния протона p на протоне p' считается регулярным решением уравнения Шредингера

$$[\partial_r^2 + V(r) - k^2] u(r; k) = 0, \quad r > 0, \quad (14)$$

с физическими граничными условиями

$$u(r; k) = O(\rho), \quad \rho \equiv kr \rightarrow 0; \quad u(r; k) \sim \sin[\rho + \delta(k)], \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (15)$$

Так как потенциал $V = V^\ell + V^s$ в области больших расстояний является отталкивающим и, более того, сильным дальнедействующим барьером, то следует ожидать, что при низких энергиях радиальная волновая функция $u(r; k)$ будет быстро убывать при $r \rightarrow 0$ в той области небольших расстояний ($r < 10 \Phi\text{М}$), в которой локализована волновая функция дейтрона u_d , график которой представлен на рис. 1. Поэтому при низких энергиях малым будет и матричный элемент $\Lambda(E)$.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Предлагаемый метод построения низкоэнергетических разложений регулярного решения $u(r; k)$ задачи рассеяния (14), (15) и сечения протон-водородной реакции (10) основан на линейной версии метода фазовых функций в квантовой механике [6, 14, 15].

В этой физически прозрачной версии сначала определяется безразмерный аргумент $\rho \equiv kr$ и вводятся две неизвестные амплитудные функции $c(r; k)$ и $s(r; k)$, подчиненные тождеству

$$(\sin \rho) \partial_r c(r; k) + (\cos \rho) \partial_r s(r; k) \equiv 0, \quad r \geq 0. \quad (16)$$

Далее искомое решение u задачи рассеяния (14), (15) представляется в виде произведения нормировочного множителя $N(k)$ и функции $U(r; k)$:

$$u(r; k) = N(k) U(r; k), \quad U(r; k) \equiv c(r; k) \sin \rho + s(r; k) \cos \rho. \quad (17)$$

Затем в уравнении Шредингера (14) волновая функция $u(r; k)$ заменяется таким произведением и используется тождество (16), благодаря которому производные этой функции определяются формулами

$$\begin{aligned} \partial_r u(r; k) &= k N(k) [c(r; k) \cos \rho - s(r; k) \sin \rho], \\ \partial_r^2 u(r; k) &= k N(k) [\partial_r c(r; k) \cos \rho - \partial_r s(r; k) \sin \rho] - \\ &\quad - k^2 u(r; k) = [V(r) - k^2] u(r; k). \end{aligned} \quad (18)$$

В итоге для искомых амплитудных функций выводится система двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial_r c(r; k) = k^{-1} V(r) U(r; k) \cos \rho, \quad \partial_r s(r; k) = -k^{-1} V(r) U(r; k) \sin \rho. \quad (19)$$

Стоит отметить, что кратко описанная выше редукция дифференциального уравнения второго порядка (14) к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка (19) известна в теории дифференциальных уравнений [9] как метод вариации постоянных коэффициентов. В нашем случае такими коэффициентами являются функции $c(r; k)$ и $s(r; k)$, удовлетворяющие тождеству (16).

Чтобы искомая волновая функция $u(r; k)$ имела физические асимптотики (15), амплитудные функции подчиняются в начальной точке $r = 0$ граничным условиям

$$c(r; k) = 1, \quad s(r; k) = 0, \quad r = 0, \quad (20)$$

а фаза рассеяния $\delta(k)$ и нормировочный множитель $N(k)$ определяются как предельные при $r \rightarrow \infty$ значения $\delta(\infty; k)$ и $N(\infty; k)$ соответствующих функций

$$\delta(r; k) \equiv \arctg \left[\frac{s(r; k)}{c(r; k)} \right], \quad N(r; k) \equiv [c^2(r; k) + s^2(r; k)]^{-1/2}. \quad (21)$$

При таком определении длина рассеяния a и функция эффективного радиуса $K(E)$ вычисляются по формулам

$$a \equiv \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \delta(k)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{s(r; k)}{k c(r; k)} \right], \quad (22)$$

$$K(E) \equiv k \operatorname{ctg} \delta(k) = \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k c(r; k)}{s(r; k)} \right].$$

Функции (21) имеют прозрачный физический смысл. Чтобы его выяснить, в системе уравнений (19) для амплитудных функций положим потенциал $V(r)$ тождественно равным нулю при всех r , больших некоторого значения r_b , т. е. «обрежем» потенциал $V(r)$ в точке $r = r_b$. Тогда амплитудные функции при всех $r > r_b$, в том числе и при $r = \infty$, будут постоянными и равными их значениям в точке $r = r_b$, и поэтому значения функций (21) в этой точке окажутся равными фазе и нормировочному множителю в рассмотренном случае «обрезанного» потенциала. Точку r_b можно выбрать произвольным образом. Следовательно, значения обсуждаемых функций (21) в любой фиксированной точке r имеют смысл тангенса фазы и нормировочного множителя для потенциала V , «обрезанного» в этой точке.

Как показано в работе [1], благодаря большой константе α дальнедействующей асимптотики (12) потенциала V , при низких энергиях модуль $|\delta(k)|$ порождаемой им фазы рассеяния $\delta(k)$ принимает большие по сравнению с числом π значения. Эта фаза определяется через функцию $\delta(r; k)$ с точностью до слагаемого, кратного числу π , которое является периодом функции $\operatorname{tg}(x)$. Поэтому необходимо дополнить приведенную выше линейную версию метода фазовых функций правилом вычисления фазы рассеяния в случае, когда ее модуль превышает число π . Напомним, что периодическая функция $\operatorname{tg}(x)$ не имеет конечного предела при $x \rightarrow \pi/2 \pm \pi n$, $n = 0, 1, \dots$. По определению (21) функции $\operatorname{tg} \delta(r; k)$ эти точки являются нулями амплитудной функции $c(r; k)$, поэтому фаза рассеяния $\delta(r_b; k)$ потенциалом V , «обрезанным» в точке $r = r_b$, определяется формулой

$$\delta(r; k) = \operatorname{arctg} \left(\frac{s(r; k)}{c(r; k)} \right) + \pi n_b,$$

где n_b — число всех нулей функции $c(r; k)$ на отрезке $[0, r_b]$. Положив $r_b = \infty$, получим формулу для вычисления фазы рассеяния $\delta(k)$ «не обрезанным» потенциалом V :

$$\delta(k) = \operatorname{arctg} \left[\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{s(r; k)}{c(r; k)} \right] + \pi n_c, \quad (23)$$

где n_c — число всех нулей амплитудной функции $c(r; k)$ на полуоси $r > 0$.

3. ПРЕДЕЛ НУЛЕВОЙ ЭНЕРГИИ

Исследуем предел нулевой энергии ($kd \rightarrow 0$). Предположим, что функции $c(r, k)$ и $s(r; k)/k$ сходятся в этом пределе к однозначно определенным и всюду ограниченным функциям $c_0(r)$ и $s_0(r)$. Используя известные асимптотики $\sin \rho \sim \rho$ и $\cos \rho \sim 1$ в пределе $\rho \equiv kr \rightarrow 0$ и полагая по определению

$$u_0(r) \equiv \lim_{k \rightarrow 0} [u(r; k)/k],$$

переходим во всех соотношениях (14), (16)–(21) к пределу $kd \rightarrow 0$. В результате получим:

уравнение Шредингера для предельной волновой функции $u_0(r)$

$$[\partial_r^2 + V(r)] u_0(r) = 0, \quad r > 0; \quad (24)$$

формулы для вычисления функции $u_0(r)$

$$u_0(r) = N_0 U_0(r), \quad U_0(r) \equiv r c_0(r) + s_0(r), \quad N_0 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{c_0(r)}; \quad (25)$$

представления для ее производных

$$\partial_r u_0(r) = N_0 c_0(r), \quad \partial_r^2 u_0(r) = N_0 \partial_r c_0(r) \quad (26)$$

и систему двух уравнений

$$\partial_r c_0(r) = V(r) U_0(r), \quad \partial_r s_0(r) = -r V(r) U_0(r), \quad r > 0, \quad (27)$$

с простыми граничными условиями в начальной точке $r = 0$:

$$c_0(r) = 1, \quad s_0(r) = 0, \quad r = 0. \quad (28)$$

Чтобы убедиться в справедливости высказанного ранее предположения, докажем, что полученная краевая задача (27), (28) имеет единственное и всюду ограниченное решение.

По определению функция $V(r)$, содержащаяся в исследуемой системе (27), имеет полюс первого порядка только в точке $r = 0$, а произведение $rV(r)$ можно представить в малой окрестности $[0, r_0]$ рядом Тейлора с центром в этой же точке. Согласно теории дифференциальных уравнений [9] точка $r = 0$ является регулярной особой точкой системы (27) и поэтому подчиненные этой системе функции $c_0(r)$ и $s_0(r)$ на отрезке $[0, r_0]$ однозначно представляются равномерно сходящимися рядами по целым степеням их аргумента. Следовательно, значения $c_0(r_0)$ и $s_0(r_0)$ этих функций конечные.

Используем эти значения как граничные условия $c_0(r) = c_0(r_0)$ и $s_0(r) = s_0(r_0)$ для системы уравнений (27) на отрезке $[r_0, b]$, где b — любое, но конечное значение аргумента r , при котором выполняются неравенства (13).

На любом таком конечном отрезке функция V непрерывна, следовательно, правые части системы (27) подчиняются условию Липшица, которое является достаточным условием известной теоремы Пикара [9]. По этой теореме исследуемая краевая задача на всем отрезке $[r_0, b]$ имеет единственное и непрерывное решение. Следовательно, в точке $r = b$ функции $c_0(r)$ и $s_0(r)$ принимают конечные значения $c_0(b)$ и $s_0(b)$.

Осталось доказать, что система уравнений (27) имеет единственное и ограниченное решение на всей полуоси $r > b$, в том числе и в ее бесконечной точке $r = \infty$. Приступим к доказательству. Предположим, что значения $c_0(b)$ и $s_0(b)$ известны и являются граничными условиями для исследуемой системы (27) в точке $r = b$. Сведем эту систему к системе, наиболее удобной для применения метода последовательных приближений и принципа сжимающихся отображений [10]. Напомним, что потенциал $V(r)$ подчиняется неравенствам (13). Поэтому на всей полуоси $r > b$ существует ограниченная и дифференцируемая функция

$$B(r; b) \equiv \exp \left[\int_b^r tV(t) dt \right]. \quad (29)$$

Следовательно, в системе (27) искомые функции $c_0(r)$ и $s_0(r)$ можно представить в виде

$$c_0(r) = y_1(r) B(r; b), \quad s_0(r) = y_2(r)/B(r; b). \quad (30)$$

Тогда для новых неизвестных функций $y_1(r)$ и $y_2(r)$ получится система уравнений

$$\partial_r y_1(r) = V(r) B^{-2}(r; b) y_2(r), \quad \partial_r y_2(r) = -r^2 V(r) B^2(r; b) y_1(r), \quad r > b,$$

с граничными условиями $y_1(r) = c_0(b)$ и $y_2(r) = s_0(b)$ в начальной точке $r = b$.

Запишем полученную краевую задачу в виде системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} y_1(r) &= y_1(b) + \int_b^r V(t) B^{-2}(t; b) y_2(t) dt, \\ y_2(r) &= y_2(b) - \int_b^r t^2 V(t) B^2(t; b) y_1(t) dt. \end{aligned} \quad (31)$$

Перейдем к более удобному операторному представлению и попутно получим вспомогательные мажорантные оценки, которые нам потребуются позже.

Пусть $\mathcal{C}^0[b, \infty)$ — пространство непрерывных и ограниченных на всей полуоси $r > b$ функций $g(t)$ с метрикой [10]

$$\rho(g_1, g_2) \equiv \max_{t \in [b, \infty)} |g_1(t) - g_2(t)|, \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0[b, \infty).$$

В этом полном метрическом пространстве определим два линейных интегральных оператора T_1 и T_2 следующим образом:

для любой функции g положим

$$\begin{aligned} g_1(r) &\equiv T_1 g(t) \equiv \int_b^r V(t) B^{-2}(t; b) g(t) dt, \\ g_2(r) &\equiv T_2 g(t) \equiv \int_b^r t^2 V(t) B^2(t; b) g(t) dt. \end{aligned} \quad (32)$$

При таком определении образы $T_1 g(t)$ и $T_2 g(t)$ функции $g(t)$, тождественно равной единице, представляются интегралами

$$T_1(r; b) \equiv \int_b^r V(t) B^{-2}(t; b) dt, \quad T_2(r; b) \equiv \int_b^r t^2 V(t) B^2(t; b) dt, \quad (33)$$

а образы $T_{12} g(t) \equiv T_1 T_2 g(t)$ и $T_{21} g(t) \equiv T_2 T_1 g(t)$ той же функции являются двукратными интегралами

$$\begin{aligned} T_{12}(r; b) &\equiv \int_b^r V(t) B^{-2}(t; b) dt \int_b^t z^2 V(z) B^2(z; b) dz, \\ T_{21}(r; b) &\equiv \int_b^r t^2 V(t) B^2(t; b) dt \int_b^t V(z) B^{-2}(z; b) dz. \end{aligned} \quad (34)$$

Оценим интегралы (33). В первом интеграле $V(t) > 0$, поэтому функция $B^{-2}(t; b)$ согласно определению (29) меньше единицы. Во втором интеграле функция $B^2(t; b)$ ограничена сверху функцией $B^2(r; b)$. Используя эти оценки и неравенство $V(t) \leq \alpha/t^4$, показываем, что обе непрерывные функции $T_1(r; b)$ и $T_2(r; b)$ ограничены сверху при всех $r \geq b$:

$$\begin{aligned} T_1(r; b) &< \int_b^r \frac{\alpha}{t^4} dt = \frac{\alpha}{3b^3} \left(1 - \frac{b}{r}\right) \leq \frac{\alpha}{3b^3}, \\ T_2(r; b) &< \exp(\alpha/b^2) \int_b^r \frac{\alpha}{t^2} \exp(-\alpha/r^2) dt < \exp(\alpha/b^2) \frac{\alpha}{b} \left(1 - \frac{b}{r}\right). \end{aligned} \quad (35)$$

Следовательно, эти функции принадлежат метрическому пространству $C^0[b, \infty)$.

Оценим интегралы (34). Так как в интеграле $T_{12}(r; b)$ и в показателе экспоненты (29) функция $V(r)$ положительная и ограничена сверху функцией α/r^4 , то $B^{-2}(t; b)B^2(z; b) \leq 1$ при любом $z \leq t$. Поэтому верны следующие оценки:

$$T_{12}(r; b) < \int_b^r \frac{\alpha}{t^4} dt \int_b^t z^2 \frac{\alpha}{z^4} dz = \gamma_{12} \left[1 - 4\frac{b^3}{r^3} + 3\frac{b^4}{r^4} \right], \quad \gamma_{12} \equiv \frac{\alpha^2}{12b^4}. \quad (36)$$

Для оценки интеграла $T_{21}(r; b)$ сначала заметим, что вследствие определения функции $B(r; b)$ имеет место равенство

$$B^2(t; b)B^{-2}(z; b) = B^2(t; z) = \exp \left[2 \int_z^t x V(x) dx \right],$$

которое, благодаря неравенству $V(x) \leq \alpha/x^4$, дает факторизованную оценку

$$B^2(t; b)B^{-2}(z; b) < \exp(\alpha/t^2) \exp(-\alpha/z^2).$$

Используя эту оценку и неравенство $V(x) \leq \alpha/x^4$, получаем соотношение

$$T_{21}(r; b) < \frac{\alpha}{2b} \int_b^r t^{-2} \exp[\alpha(1/b^2 - 1/t^2)] dt - \frac{\alpha}{2b^2} \left(1 - \frac{b}{r} \right).$$

Это соотношение и неравенства $1/t^2 \leq 1/(t^3b)^{1/2}$ порождают довольно грубые, но зато выраженные в терминах элементарных функций оценки

$$T_{21}(r; b) < \frac{\alpha}{2b^2} + \frac{\alpha}{2br} \left(1 - \sqrt{\frac{b}{r}} \right) \leq \gamma_{21} \equiv \frac{\alpha}{b^2}. \quad (37)$$

Итак, функции $T_1(r; b)$, $T_2(r; b)$, $T_{12}(r; b)$ и $T_{21}(r; b)$ непрерывны и ограничены на всем бесконечном полуинтервале $r \geq b$ и поэтому принадлежат пространству $C^0[b, \infty)$. Следовательно, операторы T_1 и T_2 , определенные формулами (32), отображают это пространство само в себя. Этот факт позволяет записать систему (31) в операторном представлении в виде системы

$$y_1(r) = y_1(b) + T_1 y_2(t), \quad y_2(r) = y_2(b) - T_2 y_1(t). \quad (38)$$

Для краткости записи введем две функции f_1 и f_2 :

$$f_1(r) \equiv y_1(b) + y_2(b)T_1(r; b), \quad f_2(r) \equiv y_2(b) - y_1(b)T_2(r; b) \quad (39)$$

и в пространстве $C^0[b, \infty)$ определим два оператора

$$\begin{aligned} A_1g(t) &\equiv f_1(r) - T_1T_2g(t), & A_2g(t) &\equiv f_2(r) - T_2T_1g(t), \\ & & \forall g(t) &\in C^0[b, \infty). \end{aligned} \quad (40)$$

В силу оценок (35) функции f_1 и f_2 непрерывны и ограничены:

$$\begin{aligned} \rho(f_1, 0) &\leq |y_1(b)| + |y_2(b)| \frac{\alpha}{3b^3} < \infty, \\ \rho(f_2, 0) &\leq |y_2(b)| + |y_1(b)| \frac{\alpha}{b} < \infty, \quad r \geq b. \end{aligned} \quad (41)$$

Благодаря этим неравенствам, оценкам (36), (37) и определениям (40), образы $A_1g(t)$ и $A_2g(t)$ любой функции пространства $C^0[b, \infty)$ подчиняются соотношениям

$$\begin{aligned} \rho(A_1g(t), 0) &< \rho(f_1, 0) + \rho(g, 0) \frac{\alpha^2}{12b^4} < \infty, \\ \rho(A_2g(t), 0) &< \rho(f_2, 0) + \rho(g, 0) \frac{\alpha}{b^2} < \infty \end{aligned}$$

и поэтому принадлежат этому же пространству. Следовательно, можно проитерировать систему (38) и в результате получить систему двух уравнений

$$y_1(r) = A_1y_1(r), \quad y_2(r) = A_2y_2(r). \quad (42)$$

Эта система является наиболее удобной для дальнейших исследований, потому что оба ее уравнения имеют одинаковый вид и связаны друг с другом только постоянными и по предположению известными константами $y_1(b)$ и $y_2(b)$, содержащимися лишь в функциях (39). Поэтому первое уравнение можно исследовать независимо от второго одним и тем же методом.

Исследуем первое уравнение. Выберем значение параметра b настолько большим, чтобы константа γ_{12} в оценке (36) оказалась меньше единицы. Для этого положим

$$b = b_1, \quad b_1 > (12)^{-1/4} \sqrt{\alpha} \approx 1,21789 \cdot 10^7 \text{ Фм.}$$

При таком условии расстояние между образами A_1g_1 и A_1g_2 любых функций g_1 и g_2 пространства $C^0[b, \infty)$ равно расстоянию между образами $T_1T_2g_1$ и $T_1T_2g_2$, но меньше расстояния между этими же функциями:

$$\rho(A_1g_1, A_1g_2) = \rho(T_1T_2g_1, T_1T_2g_2) < \gamma_{12} \rho(g_1, g_2), \quad \gamma_{12} < 1.$$

Следовательно, в этом пространстве операторы A_1 и T_1T_2 являются сжимающими отображениями [10]. Поэтому первое уравнение системы (42) имеет

на полуинтервале $r \geq b_1$ единственное непрерывное и всюду ограниченное решение $y_1(r)$, которое можно вычислить методом последовательных приближений [10]. Для этого удобно определить начальный элемент $y_1^{(0)}$ итерационной последовательности $\{y_1^{(m)}(r)\}_{m=0}^{\infty}$ как $y_1^{(0)}(r) \equiv f_1(r)$, а каждый ее последующий элемент $y_1^{(m+1)}(r)$ полагать равным образу $A_1 y_1^{(m)}$ предыдущего элемента $y_1^{(m)}$:

$$\begin{aligned} y_1^{(0)}(r) &\equiv f_1(r), \\ y_1^{(m+1)}(r) &= A_1 y_1^{(m)}(r) = f_1(r) + \sum_{k=1}^{m+1} (-T_1 T_2)^k f_1(r), \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Используя оценку (36) и первое неравенство (41), оцениваем скорость сходимости $\rho(y_1, y_1^{(m)})$ этой последовательности к ее предельному элементу $y_1^{(\infty)}(r)$, т. е. к решению $y_1(r)$:

$$\begin{aligned} \rho(y_1, y_1^{(m)}) &= \rho(y_1^{(\infty)}, y_1^{(m)}) \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \rho((-T_1 T_2)^k f_1, 0) < \\ &< \gamma_{12}^{m+1} \rho(f_1, 0) < \left(\frac{\alpha^2}{12b_1^4} \right)^{m+1} \left[|y_1(b)| + |y_2(b)| \frac{\alpha^2}{3b_1^3} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Анализ второго уравнения системы (42) выполним по той же схеме, что и представленное выше исследование ее первого уравнения.

Сначала выберем достаточно большое значение b_2 параметра b , такое, чтобы константа γ_{21} в оценке (36) оказалась меньше единицы. Для этого положим

$$b = b_2 > \sqrt{\alpha} \approx 2,26674 \cdot 10^7 \text{ Фм.}$$

Далее, используя оценку (37), показываем, что операторы A_2 и $T_2 T_1$ являются сжимающими отображениями в области $r \geq b$. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho(A_2 g_1, A_2 g_2) &= \rho(T_2 T_1 g_1, T_2 T_1 g_2) < \gamma_{21} \rho(g_1, g_2), \quad \gamma_{12} < 1, \\ &\forall g_1, g_2 \in \mathcal{C}^0[b, \infty). \end{aligned}$$

Поэтому на всем полуинтервале $r \geq b$ существует единственное непрерывное и ограниченное решение $y_2(r)$.

Определим итерационную последовательность $\{y_2^{(m)}(r)\}_{m=0}^{\infty}$. Положим

$$\begin{aligned} y_2^{(0)}(r) &= f_2(r), \\ y_2^{(m+1)}(r) &= A_2 y_2^{(m)}(r) = f_2(r) + \sum_{k=1}^{m+1} (-T_2 T_1)^k f_2(r), \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (45)$$

С помощью оценки (37) и второго неравенства (41) оценим скорость сходимости $\rho(y_2, y_2^{(m)})$ этой последовательности к решению $y_2(r)$:

$$\begin{aligned} \rho(y_2, y_2^{(m)}) = \rho(y_2^{(\infty)}, y_2^{(m)}) &\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \rho((-T_2 T_1)^k f_2, 0) < \\ &< \gamma_{21}^{m+1} \rho(f_2, 0) < \left(\frac{\alpha}{b^2}\right)^{m+1} \left(|y_2(b)| + |y_1(b)| \frac{\alpha}{b}\right). \end{aligned} \quad (46)$$

Итак, система уравнений (42) однозначно разрешима на полуоси $r > b$ в метрическом пространстве $C^0[b, \infty)$. В силу связей (30) исходная система (27) имеет на этой же полуоси единственное непрерывное и всюду ограниченное решение, что и требовалось доказать.

Теперь стоит сформулировать несколько выводов, важных для численного интегрирования краевой задачи (27), (28).

Как было показано, обе итерационные последовательности (43) и (45) сходятся равномерно, если аргумент r превышает довольно большую в ядерном масштабе расстояний величину b порядка двухсот ангстремов:

$$r > b \equiv \max(b_1, b_2) = \sqrt{\alpha} \approx 227 \text{ \AA}.$$

Следовательно, именно в этой области функции $c_0(r)$ и $s_0(r)$ становятся близкими к своим предельным при $r \rightarrow \infty$ значениям. Поэтому для вычисления приближений $c_0(r_{\max})$ и $s_0(r_{\max})$ предельных значений этих функций следует численно интегрировать уравнения (27) на отрезке $[0, r_{\max}]$, длина которого довольно велика: $r_{\max} \gg b = \sqrt{\alpha}$. Чтобы избежать вычислительных трудностей, удобнее перейти в уравнениях (27) к безразмерной переменной $x = r/d$ и численно интегрировать полученную систему в области $x \leq x_{\max}$, верхняя граница которой является не столь большим числом $x_{\max} > b/d \approx 484$ по сравнению со значением r_{\max} .

Согласно оценкам (44) и (46) скорость сходимости последовательности (43) определяется квадратом малого параметра α/b^2 , а скорость сходимости последовательности (45) — первой степенью этого же параметра. Следовательно, в области больших значений аргумента r первая последовательность сходится гораздо быстрее второй. Поэтому при численном интегрировании системы (27) следует ожидать, что с ростом аргумента вычисляемая функция $c_0(r)$ будет сходиться к своему предельному значению $c_0(\infty)$ гораздо быстрее, чем вычисляемая функция $s_0(r)$ к ее предельному значению $s_0(\infty)$.

Как было доказано, краевая задача (27), (28) имеет на всей полуоси $r > 0$ единственное и всюду ограниченное решение. Поэтому длина рассеяния a , определенная первой из двух формул (22), ограничена и ее можно вычислить как

$$a = - \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{s_0(r)}{c_0(r)}. \quad (47)$$

По той же причине при любых значениях аргумента $r \geq 0$, в том числе и в бесконечно удаленной точке $r = \infty$, старшее слагаемое низкоэнергетической асимптотики радиальной волновой функции $u(r; k)$ равно произведению $k u_0(r)$, в котором функция $u_0(r)$ вычисляется по формулам (25). Используя эти формулы и представление (47), получаем асимптотику функции $u_0(r)$ в пределе больших значений ее аргумента:

$$u_0(r) = N_0 [rc_0(r) + s_0(r)] = \frac{c_0(r)}{c_0(\infty)} \left[r + \frac{s_0(r)}{c_0(r)} \right] \sim (r - a);$$

$$r/b \rightarrow \infty, \quad b = \sqrt{\alpha}.$$

Следовательно, функция u_0 в области больших расстояний становится линейной. В этой области функция дейтрона убывает по закону (5) настолько быстро, что произведение $u_0(r)u_d(r)$ является функцией, интегрируемой в области $0 \leq r \leq \infty$. Поэтому в интеграле (10) можно заменить функцию $u(r; k)$ ее асимптотикой $k u_0(r) = k N_0 U_0(r)$ и получить первый физически интересный результат настоящей работы — формулы для вычисления старшего члена низкоэнергетической асимптотики сечения протон-водородной реакции в случае экранировки Томаса–Ферми:

$$\sigma(E) \sim \tau \frac{\Lambda_0^2}{E}, \quad k\sqrt{\alpha} \rightarrow 0; \quad \Lambda_0 \equiv \frac{N_0}{[8\pi r_d^3]^{1/2}} \int_0^\infty U_0(r) u_d(r) dr. \quad (48)$$

Обобщим этот результат. Предположим, что вместо потенциала Томаса–Ферми (11) эффект экранировки ядра атома водорода учитывается некоторым потенциалом $V^\ell(r)$, убывающим в пределе больших расстояний r быстрее, чем потенциал поляризационного типа $V^p(r) \sim \alpha/r^4$. Тогда, как нетрудно проверить, все данные в настоящем разделе доказательства и их конечный результат — представление (48) — будут верны. Следовательно, сечение протон-водородной реакции при любой более слабой в указанном выше смысле экранировке будет обратно пропорционально энергии столкновения протона с атомом водорода в ее нулевом пределе. Этот вывод представляется физически наиболее интересным в частном случае широко используемой слабой экранировки Дебая [4], заключающейся в замене кулоновского отталкивания $V^c(r) = (1/Rr)$ короткодействующим потенциалом $V^D(r; r_D)$ с довольно большой по сравнению с радиусом дейтрона r_d константой r_D :

$$V^\ell(r) = V^D(r) \equiv \frac{1}{Rr} \exp(-r/r_D).$$

4. НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Наша очередная задача — определить в явном виде следующее, более быстро убывающее слагаемое низкоэнергетического разложения сечения $\sigma(E)$. Для решения этой задачи достаточно получить более подробную, чем представление $u(r; k) \approx kN(0)u_0(r)$, низкоэнергетическую асимптотику волновой функции $u(r; k) = N(k)U(r; k)$. Вывод такой асимптотики выполним в два этапа: сначала найдем равномерную по аргументу r низкоэнергетическую аппроксимацию ненормированной волновой функции $U(r; k)$ в области конечных значений этого аргумента, а затем выведем низкоэнергетическую асимптотику нормировочного множителя $N(k)$.

В пределе $kd \rightarrow 0$ параметр $1/k$ системы уравнений (19) бесконечно возрастает. Поэтому численное интегрирование этой системы с хорошей точностью становится сложной вычислительной задачей. Кроме того, даже если решения этой системы удастся вычислить, то, используя его и формулы (17) и (21), невозможно получить низкоэнергетические разложения волновой функции $u(r; k)$. Чтобы преодолеть эти трудности, предлагается построить для амплитудных функций $c(r; k)$ и $s(r; k)$ низкоэнергетические разложения в виде сумм, в которых аргумент r отделен от параметра k , а затем, используя такие представления и формулы (17) и (21), получить равномерную по аргументу r низкоэнергетическую асимптотику волновой функции $u(r; k)$.

Приступим к решению этой задачи. Сначала опишем строение решения $\{c, s\}$ системы уравнений (19) для амплитудных функций. Заметим, что в этой системе от параметра k зависят только амплитудные функции и функции $\sin \rho$ и $\cos \rho$. Последние представимы в виде рядов Тейлора с центром в точке $\rho = 0$. В таких рядах параметр k отделен от аргумента r , а зависимость каждого слагаемого от k описывается соответствующей целой степенью k^n :

$$\begin{aligned} \sin \rho = k \left[r - \frac{1}{6} k^2 r^3 + \frac{1}{120} k^3 r^4 - \frac{1}{5040} k^4 r^5 + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} r^{2n+1} k^{2n} + \dots \right], \\ \cos \rho = 1 - \frac{1}{2} k^2 r^2 + \frac{1}{24} k^4 r^4 - \frac{1}{720} k^6 r^6 + \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} (kr)^{2n} + \dots \end{aligned} \quad (49)$$

Докажем, что амплитудные функции $c(r; k)$ и $s(r; k)$ являются рядами такого же типа.

Функции $c(r; k)$ и $s(r; k)$ будем искать соответственно в виде следующих бесконечных рядов по четным и нечетным степеням параметра k :

$$c(r; k) = \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} c_n(r), \quad s(r; k) = k \sum_{n=0}^{\infty} k^{2n} s_n(r). \quad (50)$$

Для сокращения записи примем следующие обозначения:

$$A_n(r) \equiv r c_n(r) + s_n(r), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (51)$$

В определении (17) функции $U(r; k)$ заменим функции $\sin \rho$ и $\cos \rho$ их рядами (49), а функции c и s — их искомыми разложениями (50). В результате для функции $U(r; k)$ получим представление в виде бесконечного ряда по нечетным степеням параметра k :

$$U(r; k) = k [U_0(r) + k^2 U_1(r) + k^4 U_2(r) + \dots + k^{2n} U_n(r) + \dots]. \quad (52)$$

В этом ряду функции $U_n(r)$ с номером $n = 0, 1, 2$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} U_0(r) &= A_0(r), \quad U_1(r) = A_1(r) - \frac{r^2}{6} [A_0(r) + 2s_0(r)], \\ U_2(r) &= A_2(r) - \frac{r^2}{6} [A_1(r) + 2s_1(r)] + \frac{r^4}{120} [A_0(r) + 4s_0(r)]. \end{aligned} \quad (53)$$

Теперь в системе уравнений (19) и ее граничных условиях (20) заменим функции $\sin \rho$ и $\cos \rho$ их рядами (49), а функции $c(r; k)$ и $s(r; k)$ — рядами (50). Получившиеся выражения запишем в виде бесконечных полиномов по четным степеням параметра k . Благодаря линейной независимости системы $\{k^{2n}\}_{n=0}^{\infty}$ степенных функций k^{2n} , эти полиномы будут тождественно равными нулю тогда и только тогда, когда все их «коэффициенты», зависящие лишь от переменной r , равны нулю. Применив это правило, выводим рекуррентную по индексу n цепочку систем уравнений для функций c_n и s_n и показываем, что функция $c_0(r)$ в точке $r = 0$ равна единице, а все остальные функции $c_n(r)$ и $s_{n-1}(r)$, $n = 1, 2, \dots$, в этой же точке обращаются в нуль. Полученная таким образом рекуррентная цепочка краевых задач не содержит волновое число k и поэтому называется энергонезависимой. Поясним строение этой цепочки. Для этого выпишем, используя обозначения (51), ее три первых ($n = 0, 1, 2$) системы.

Функции c_0 и s_0 подчиняются уже исследованной однородной системе уравнений (27) с граничными условиями (28). Совокупность $\{c_1, s_1\}$ функций c_1 и s_1 является решением неоднородной системы уравнений

$$\begin{aligned} \partial_r c_1(r) &= V(r) \left\{ A_1(r) - \frac{r^2}{3} [2A_0(r) + s_0(r)] \right\}, \\ \partial_r s_1(r) &= -r V(r) \left\{ A_1(r) - \frac{r^2}{3} [A_0(r) + s_0(r)] \right\}. \end{aligned} \quad (54)$$

Эта система содержит решение $\{c_0, s_0\}$ предыдущей системы (27). Функции c_2 и s_2 удовлетворяют неоднородной системе уравнений

$$\begin{aligned}\partial_r c_2(r) &= V(r) \left\{ A_2(r) - \frac{r^2}{3} [2A_1(r) + s_1(r)] + \frac{r^4}{15} [2A_0(r) + 3s_0(r)] \right\}, \\ \partial_r s_2(r) &= -rV(r) \left\{ A_2(r) - \frac{r^2}{3} [A_1(r) + s_1(r)] + \frac{2r^4}{45} [A_0(r) + 2s_0(r)] \right\}.\end{aligned}\quad (55)$$

Ее правая часть содержит решения $\{c_0, s_0\}$ и $\{c_1, s_1\}$ обеих предыдущих систем: системы (27) и системы (54).

Найдем старшие слагаемые асимптотик функций $c_n(r)$ и $s_n(r)$, $n = 0, 1, 2$, в пределе малых ($r/r_\pi \rightarrow 0$) и больших ($r/d \rightarrow \infty$) значений аргумента r . Для этого применим известный в теории дифференциальных уравнений [9] способ, основанный на характеристических уравнениях.

Сначала исследуем случай $r/r_\pi \rightarrow 0$, когда согласно первой из двух формул (12) функция $V(r)$ имеет асимптотику $V(r) \rightarrow v_0/r$. В системах (27), (54) и (55) положим $V(r) = v_0/r$, а все искомые функции заменим их значениями в точке $r = 0$. В итоге получим характеристические уравнения

$$\begin{aligned}\partial_r c_0(r) &= v_0, & \partial_r s_0(r) &= -v_0 r; \\ \partial_r c_1(r) &= -\frac{2}{3} v_0 r, & \partial_r s_1(r) &= -\frac{1}{3} v_0 r^3; \\ \partial_r c_2(r) &= \frac{2}{15} r^4, & \partial_r s_2(r) &= -\frac{2}{45} v_0 r^5\end{aligned}$$

с граничными условиями $c_0(r) = 1$, $s_0(r) = 0$ и $c_n(r), s_n(r) = 0$, $n = 1, 2$, в точке $r = 0$. Используя решения полученных краевых задач, доказываем, что в пределе $r/r_\pi \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned}c_0(r) &\sim 1 + v_0 r, & s_0(r) &\sim -\frac{v_0}{2} r^2; \\ c_1(r) &\sim -\frac{2v_0}{9} r^3, & s_1(r) &\sim \frac{v_0}{12} r^4; \\ c_2(r) &\sim \frac{2v_0}{75} r^5, & s_2(r) &\sim -\frac{v_0}{135} r^6.\end{aligned}\quad (56)$$

Теперь исследуем случай $r/d \rightarrow \infty$, когда согласно второй из двух формул (9) функция $V(r)$ имеет асимптотику $V(r) \sim \alpha/r^4$. В правых частях систем (27), (54) и (55) положим $V(r) = \alpha/r^4$ и оставим только наиболее быстро растущие в исследуемом пределе слагаемые. В таких слагаемых функции $c_0(r)$ и $s_0(r)$ заменим их конечными значениями $c_0(\infty)$ и $s_0(\infty)$

в точке $r = \infty$. Введя обозначение $p \equiv \alpha c_0(\infty)$, записываем полученные характеристические уравнения в области $r \gg d$ в виде

$$\partial_r c_1(r) = -\frac{2p}{3r}, \quad \partial_r s_1(r) = -\frac{p}{3}; \quad \partial_r c_2(r) = \frac{2p}{15} r, \quad \partial_r s_2(r) = -\frac{2p}{45} r^2.$$

Используя решения этих уравнений, доказываем, что в пределе $r/d \rightarrow \infty$ функция $c_0(r)$ сходится к константе $c_0(\infty)$ быстрее, чем функция $s_0(r)$ приближается к константе $s_0(\infty)$, а функции $c_n(r)$ и $s_n(r)$ с индексом $n = 1, 2$ неограниченно возрастают:

$$\begin{aligned} c_0(r) &= c_0(\infty) - \frac{p}{2r^2} + O\left(\frac{\alpha}{r^3} s_0(\infty)\right), \\ s_0(r) &= s_0(\infty) + \frac{p}{r} + O\left(\frac{\alpha}{r^2} s_0(\infty)\right); \\ c_1(r) &\sim -\frac{2p}{3} \ln(r/d), \quad s_1(r) \sim \frac{p}{3} r; \quad c_2(r) \sim \frac{p}{15} r^2, \quad s_2(r) \sim -\frac{2p}{135} r^3. \end{aligned} \quad (57)$$

Численное интегрирование систем (54) и (55) существенно затрудняется быстрым ростом искомым функций при увеличении их аргумента r . Чтобы преодолеть эту трудность, предлагается ввести новые неизвестные функции $C_n(r)$ и $S_n(r)$, равные функциям $c_n(r)$ и $s_n(r)$, $n = 1, 2$, деленным на функции аргумента r , содержащиеся в соответствующих асимптотиках (57):

$$\begin{aligned} C_1(r; k) &\equiv c_1(r; k) / \ln(r/d), \quad S_1(r; k) \equiv s_1(r; k) / r; \\ C_2(r; k) &\equiv c_2(r; k) / r^2, \quad S_2(r; k) \equiv s_2(r; k) / r^3. \end{aligned} \quad (58)$$

Подставим функции c_n и s_n , выраженные из равенств (58) через функции C_n и S_n , в соответствующие системы (54), (55) и граничные условия (56). Упростив полученные уравнения, для функций C_1 и S_1 получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \partial_r C_1(r) &= -\frac{1}{r \ln(r/d)} C_1(r) + \frac{r}{\ln(r/d)} V(r) \left\{ C_1 \ln(r/d) + S_1(r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r}{3} [A_0(r) + s_0(r)] \right\}, \\ \partial_r S_1(r) &= -\frac{1}{r} S_1(r) + rV(r) \left\{ C_1(r) \ln(r/d) + S_1(r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r}{3} [2A_0(r) + s_0(r)] \right\} \end{aligned} \quad (59)$$

и асимптотические граничные условия

$$C_1(r) \sim -\frac{2}{9} \frac{v_0 r^3}{\ln(r/d)}, \quad S_1(r) \sim \frac{v_0}{12} r^3, \quad r/r_\pi \rightarrow 0; \quad (60)$$

а для функций C_2 и S_2 выведем систему уравнений

$$\begin{aligned}\partial_r C_2(r) &= -\frac{2}{r} C_2(r) + rV(r) \left\{ C_2(r) + S_2(r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} [2C_1(r) \ln r + 3S_1(r)] + \frac{1}{15} r [2A_0(r) + 3s_0(r)] \right\}, \\ \partial_r S_2(r) &= -\frac{3}{r} S_2(r) + rV(r) \left\{ C_2(r) + S_2(r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} [C_1(r) \ln r + 2S_1(r)] + \frac{2}{45} r [A_0(r) + 2s_0(r)] \right\}\end{aligned}\quad (61)$$

с асимптотическими граничными условиями

$$C_2(r) \sim \frac{2v_0}{75} r^3, \quad S_2(r) \sim -\frac{v_0}{135} r^3, \quad r/r_\pi \rightarrow 0. \quad (62)$$

Обсуждаемые функции $C_n(r)$ и $S_n(r)$, $n = 1, 2$, в пределе $r/r_\pi \rightarrow 0$ согласно соотношениям (60) и (62) обращаются в нуль, а в пределе $r/d \rightarrow \infty$, как следует из определений (58), становятся постоянными, пропорциональными величине $p = \alpha c_0(\infty)$:

$$C_1(r) \sim -\frac{2p}{3}, \quad S_1(r) \sim \frac{p}{3}; \quad C_2(r) \sim \frac{p}{15}, \quad S_2(r) \sim -\frac{2p}{135}; \quad r/d \rightarrow \infty.$$

Применив методы, подробно изложенные в предыдущем разделе, не сложно доказать, что, благодаря соотношениям (12) и (13), обе краевые задачи (59), (60) и (61), (62) однозначно разрешимы в классе непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных на всей полуоси $r > 0$. Поэтому, благодаря связям (58), системы уравнений (54) и (55) с тривиальными граничными условиями в начальной точке $r = 0$ имеют единственные непрерывно дифференцируемые решения, ограниченные на любом конечном отрезке $0 \leq r \leq b < \infty$, но бесконечно возрастающие в пределе $r/b \rightarrow \infty$ по соответствующим правилам (57). Следовательно, функции (53) обладают теми же свойствами: эти функции ограничены на любом конечном отрезке, но вследствие упомянутых правил неограниченно возрастают при увеличении аргумента r :

$$U_n(r) \sim (-1)^n \frac{r^{2n+1}}{(2n+1)!} c_0(\infty), \quad r/d \rightarrow \infty. \quad (63)$$

По индукции можно показать, что и все остальные функции c_n , s_n и U_n с номером $n > 3$ ограничены на любом конечном отрезке, но бесконечно возрастают в пределе $r/d \rightarrow \infty$, а функция U_n с любым номером n имеет

асимптотику (63). Поэтому бесконечные ряды (50) и (52) можно аппроксимировать подсуммами их трех слагаемых только при условии $\rho \ll 1$, равносильном условию $r \ll 1/k$. Точность такой аппроксимации имеет тот же порядок, что и четвертое слагаемое соответствующего ряда. Запишем доказанные соотношения в виде асимптотических ($\rho \rightarrow 0$) равенств

$$\begin{aligned} c(r; k) &= c_0(r) + k^2 c_1(r) + k^4 c_2(r) + O(\rho^6), \\ s(r; k) &= k[s_0(r) + k^2 s_1(r) + k^4 s_2(r) + O(\rho^6)], \\ U(r; k) &= k[U_0(r) + k^2 U_1(r) + k^4 U_2(r) + O(\rho^6)]. \end{aligned} \quad (64)$$

Теперь исследуем ядерно-экранированный матричный элемент $\Lambda(E)$, определенный как интеграл (10). Так как в пределе больших расстояний волновая функция дейтрона убывает по закону (5), а любая функция $U_n(r)$ имеет в этом пределе асимптотику (63), то при любом $n = 1, 2, \dots$ существует интеграл

$$\lambda_n = \frac{1}{[8\pi r_d^3]^{1/2}} \int_0^\infty U_n(r) u_d(r) dr. \quad (65)$$

Поэтому в исследуемом интеграле (10) можно заменить волновую функцию $u(r)$ произведением $N(k)U(r; k)$, в котором функция $U(r; k)$ представлена ее разложением (64). В результате получится неявная низкоэнергетическая асимптотика в виде произведения

$$\Lambda(E) = N(k)[\lambda_0 + k^2 \lambda_1 + k^4 \lambda_2 + O((kr_6)^6)], \quad kr_6 \rightarrow 0, \quad (66)$$

где величина r_6 имеет размерность расстояния и определена формулой

$$r_6 \equiv \left\{ \frac{c_0(\infty)}{7! [8\pi r_d^3]^{1/2}} \int_0^\infty r^7 u_d(r) dr \right\}^{1/6}.$$

Асимптотика (66) станет явной, если в ней заменить множитель $N(k)$ его явной асимптотикой в том же пределе $kd \rightarrow 0$. Так как функции $c_n(r)$ и $s_n(r)$ неограничены в пределе $r/d \rightarrow \infty$, то в определениях (21) нельзя использовать приближения (64), чтобы получить явные асимптотики фазы рассеяния $\delta(k)$ и множителя $N(k)$ при $kd \rightarrow 0$.

Для решения возникшей проблемы предложим специальный метод.

Начнем с того, что представим амплитудные функции $c(r; k)$ и $s(r; k)$ в виде сумм

$$c(r; k) = c_0(r) + C(r; k), \quad s(r; k) = k[s_0(r) + S(r; k)]. \quad (67)$$

Заменим амплитудные функции такими суммами в исходных уравнениях (27) и, используя тот факт, что слагаемые $c_0(r)$ и $s_0(r)$ удовлетворяют ранее исследованным уравнениям (27), получим для функций $C(r; k)$ и $S(r; k)$ следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \partial_r C(r; k) &= V(r) \left[(r; k) \frac{\sin \rho}{k} + S(r; k) \cos \rho \right] \cos \rho - \\ &\quad - V(r) \left[c_0(r) \frac{2\rho - \sin 2\rho}{2k} + s_0(r) (\sin \rho)^2 \right], \\ \partial_r S(r; k) &= -V(r) \left[C(r; k) \frac{\sin \rho}{k} + S(r; k) \cos \rho \right] \frac{\sin \rho}{k} + \\ &\quad + V(r) \left[c_0(r) \frac{\rho^2 - (\sin \rho)^2}{k^2} + s_0(r) \frac{2\rho - \sin 2\rho}{2k} \right]. \end{aligned} \quad (68)$$

В точке $r = 0$ функции $c(r; k)$, $c_0(r)$ и $s(r; k)$, $s_0(r)$ равны соответственно единице и нулю, поэтому в этой же точке обе искомые функции $C(r; k)$ и $S(r; k)$ должны быть равными нулю:

$$C(r; k) = 0, \quad S(r; k) = 0, \quad r = 0. \quad (69)$$

Анализ полученной краевой задачи (68), (69) довольно сложен, но принципиально ничем не отличается от представленного выше исследования задачи (27), (28) и, более того, представляется интересным скорее для планируемой отдельной сугубо математической работы, посвященной низкоэнергетическим асимптотикам волновых функций рассеяния дальнедействующим потенциалом. По этим причинам ниже поясняются лишь основные этапы вывода явных низкоэнергетических асимптотик функций $C(r; k)$ и $S(r; k)$ и приводятся окончательные результаты.

Сначала вместо интеграла (29) вводится интеграл

$$D(r; b, k) \equiv \frac{1}{2k} \int_b^r [V(t) \sin 2kt] dt. \quad (70)$$

Затем вместо представления (30) используется подстановка

$$C(r; k) = z_1(r; k) D(r; 0, k), \quad S(r; k) = z_2(r; k) / D(r; 0, k). \quad (71)$$

Такой подстановкой система уравнений (19) сводится к системе дифференциальных уравнений для искомых функций z_1 и z_2 . Полученная система записывается в виде системы двух интегральных уравнений для этих же функций. В результате первой итерации такая система сводится к наиболее удобной для дальнейших исследований системе двух незацепляющихся друг с другом интегральных уравнений с соответствующими правыми частями g_1 и g_2 :

$$g_i(r; b, k) = J_{i1}(r; b, k) + J_{i2}(r; b, k), \quad i = 1, 2, \quad b = 0,$$

где четыре интеграла J_{ij} содержат переменную $z \equiv kt$ и определены формулами

$$\begin{aligned}
J_{11}(r; b, k) &\equiv \int_b^r V(t) c_0(t) \frac{2z - \sin 2z}{2k} D^{-2}(t; 0, k) dt, \\
J_{12}(r; b, k) &\equiv \int_b^r V(t) s_0(t) (\sin z)^2 D^{-2}(t; 0, k) dt, \\
J_{21}(r; b, k) &\equiv \int_b^r V(t) c_0(t) \frac{z^2 - (\sin z)^2}{k^2} D^2(t; 0, k) dt, \\
J_{22}(r; b, k) &\equiv \int_b^r V(t) s_0(t) \frac{2z - \sin 2z}{2k} D^2(t; 0, k) dt.
\end{aligned} \tag{72}$$

Далее незацепляющиеся интегральные уравнения для функций z_1 и z_2 записываются в операторном представлении, а полученные уравнения исследуются методом последовательных приближений. В результате доказываются два следующих утверждения. При любом конечном значении аргумента r и параметра b функции z_1 и z_2 и интегралы (72) убывают в пределе $kd \rightarrow 0$ как $O((kd)^2)$. Старшие слагаемые низкоэнергетических асимптотических значений $z_1(r = \infty; k)$ и $z_2(r = \infty; k)$ этих функций в бесконечно удаленной точке $r = \infty$ определяются старшими слагаемыми низкоэнергетических асимптотических сумм $g_1(r; b, k)$ и $g_2(r; b, k)$ интегралов (72) с нижним пределом b , удовлетворяющим условиям $b > \sqrt{\alpha}$ и $kb \ll 1$, и верхним пределом $r = \infty$. Для вывода явных асимптотических таких интегралов по области больших значений их аргумента t функции $c_0(t)$ и $s_0(t)$ заменяются их конечными значениями $c_0(\infty)$ и $s_0(\infty)$, а функция $V(t)$ — ее асимптотикой α/t^4 . Полученные интегралы интегрируются по частям и выражаются в явном виде через известные функции — интегральный косинус $Si(bk)$ или интегральный синус $Si(bk)$. Эти функции аппроксимируются конечными суммами их разложений при малом значении аргумента bk . Далее такая аппроксимация используется для того, чтобы по формулам (70) и (71) определить низкоэнергетическую асимптотику функций C и S , а затем применить формулы (67) и в результате доказать, что при условиях $b > \sqrt{\alpha}$ и $kb \rightarrow 0$ предельные значения $c(\infty; k)$ и $s(\infty; k)$ амплитудных функций $c(r; k)$ и $s(r; k)$ имеют следующие явные низкоэнергетические асимптотики:

$$\begin{aligned}
c(\infty; k) &= (1/3) c_0(\infty) [3 + 2\alpha k^2 \ln(kb) + O((kb)^2)], \\
s(\infty; k) &= (1/3) c_0(\infty) k \{ \pi\alpha + a [2\alpha k^2 \ln(kb) - 3] + O((kb)^2) \}.
\end{aligned} \tag{73}$$

Теперь, используя определения (21) и представления (73), воспроизводим давно известную низкоэнергетическую асимптотику [16] функции эффективного радиуса

$$K(E) \equiv k \operatorname{ctg} \delta(k) = -\frac{1}{a} - \frac{\pi}{3} \frac{\alpha}{a^2} k - \frac{4}{3} \frac{\alpha}{a} k^2 \ln(kb) + O((kb)^2),$$

$$b > \sqrt{\alpha}, \quad kb \rightarrow 0, \quad (74)$$

и впервые получаем низкоэнергетическое представление нормировочного множителя $N(k)$ в случае потенциала $V(r)$ с дальнедействующей асимптотикой α/r^4 :

$$N(k) = N_0 \left[1 - \frac{2}{3} \alpha k^2 \ln(kb) + O((kb)^2) \right],$$

$$N_0 = \frac{1}{c_0(\infty)}; \quad b > \sqrt{\alpha}, \quad kb \rightarrow 0. \quad (75)$$

Заменив в формуле (66) нормировочный множитель $N(k)$ таким разложением, получим второй физически интересный результат нашей работы — явную низкоэнергетическую асимптотику ядерно-экранированного матричного элемента

$$\Lambda(E) = N_0 \left[1 - \frac{2}{3} \alpha k^2 \ln(kb) + O((kb)^2) \right] \times$$

$$\times [\lambda_0 + k^2 \lambda_1 + k^4 \lambda_2 + O((kr_6)^2)], \quad kd \rightarrow 0. \quad (76)$$

Используя эту асимптотику и определения (10), (65), выводим явное низкоэнергетическое представление сечения протон-водородной реакции в нашей эффективно-двухчастичной модели:

$$\sigma(E) = \tau \frac{N_0^2}{E} \left[1 - \frac{4}{3} \alpha k^2 \ln(kb) + O((kb)^2) \right] \times$$

$$\times [\lambda_0^2 + 2k^2 \lambda_0 \lambda_1 + k^4 (\lambda_1^2 + 2\lambda_0 \lambda_2) + O((kr_6)^2)], \quad kd \rightarrow 0. \quad (77)$$

Сравним полученное ядерно-экранированное сечение (77) с ядерно-кулоновским сечением (3). Если энергия E уменьшается, то ядерно-кулоновское сечение быстро сходится к нулю, а его коэффициент $S(E)$ аппроксимируется линейной функцией энергии (6). Эффект экранировки ядра атома водорода его электроном проявляется в том, что ядерно-экранированное сечение растет в пределе нулевой энергии E , а его множитель $\Lambda^2(E)$ является неаналитической функцией энергии.

5. МЕТОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Экранирующая функция f и волновая функция дейтрона u_d вычислялись по алгоритмам, предложенным в работах [1] и [13].

Поясним существенные детали выполненного численного анализа и приведем его основные результаты.

Напомним, что согласно представлениям (12) потенциал $V(r)$ имеет полюс первого порядка в точке $r = 0$ и медленно убывает при $r/d \rightarrow \infty$. Заметим, что система уравнений (27) подстановкой

$$\begin{aligned}\tilde{c}_0(x) &= c_0(r), \quad \tilde{V}(x) = d^2 V(r), \quad \tilde{s}_0(x) = s_0(r)/d; \\ \tilde{U}_0 &\equiv x \tilde{c}_0 + \tilde{s}_0; \quad x = r/d,\end{aligned}$$

сводится к системе уравнений в безразмерной переменной x :

$$\partial_x \tilde{c}_0(x) = \tilde{V}(x) \tilde{U}_0(x), \quad \partial_x \tilde{s}_0(x) = -x \tilde{V}(x) \tilde{U}_0(x), \quad x > 0. \quad (78)$$

Чтобы избежать арифметических операций с очень маленькими или большими числами и учесть все особенности потенциала V и в области малых, и в области больших расстояний, вычисления функций c_0 и s_0 выполнялись по следующей схеме.

Сначала граничные условия для функций $c_0(r)$ и $s_0(r)$ сдвигались из полюса $r = 0$ функции $V(r)$ в точку $r = r_0 = 10^{-7}$ Фм. Значения $c_0(r_0)$ и $s_0(r_0)$ в этой точке определялись первой итерацией системы (27):

$$c_0(r_0) = 1 + \int_0^{r_0} V(t) dt, \quad s_0(r_0) = - \int_0^{r_0} t^2 V(t) dt. \quad (79)$$

Далее на отрезке $[r_0, r_{\max}]$, где $r_{\max} = 100$ Фм, строилась равномерная сетка

$$\Delta_r : r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_{n-1} < r_n = r_{\max}, \quad h_r \equiv (r_{\max} - r_0)/n, \quad n = 10^4. \quad (80)$$

Затем, чтобы учесть с хорошей точностью строение слагаемого V^s функции V в области малых расстояний ($r \leq r_{\max} = 100$ Фм), система уравнений (19) с найденными граничными условиями (79) численно интегрировалась методом Рунге–Кутты пятого порядка [11] на сетке Δ_r .

Вычисленные значения амплитудных функций и их первых производных запоминались и использовались для вычисления приближенных значений $S_{5,3}(r)$ и $\partial_r S_{5,3}(r)$, $\partial_r^2 S_{5,3}(r)$ волновой функции (25) и ее производных (26) в узлах сетки Δ_r . Эти приближенные значения считались коэффициентами сплайна $S_{5,3}(r)$ пятого порядка и дефекта, равного трем [12]. Такой интерполяционный сплайн близок к вычисленному приближению функции u с точностью $O(h_r^5) = O(10^{-10})$ в любой точке отрезка $[r_0, r_{\max}]$.

Далее, чтобы с хорошей точностью учесть далекодействующую асимптотику функции V , система (78) численно интегрировалась тем же методом Рунге–Кутты пятого порядка, но уже на равномерной сетке

$$\Delta_x : x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = x_{\max}, \quad h_x \equiv (x_{\max} - x_0)/n,$$

заданной на конечном отрезке $[x_0, x_{\max}]$, где $x_0 \equiv r_{\max}/d$, а $x_{\max} = 10^4$. Вычисленные ранее значения $c_0(r_{\max})$ и $s_0(r_{\max})$ использовались как граничные условия $\tilde{c}_0(x_0) = c_0(r_{\max})$ и $\tilde{s}_0(x_0) = s_0(r_{\max})/d$ в точке $x = x_0$.

В итоге численных экспериментов было установлено, что выбор

$$r_0 = 10^{-7} \text{ ФМ}, \quad r_{\max} = 100 \text{ ФМ}, \quad x_0 = r_{\max}/d \approx 0,0021345, \\ x_{\max} = 10^4, \quad n = 10^4$$

позволяет достичь шестизначной точности вычисления функций $c_0(r)$ и $s_0(r)$ на отрезке $0 \leq r \leq d \cdot 10^4$: шесть значащих цифр этих функций не изменяются ни при уменьшении указанного значения r_0 , ни при увеличении указанных значений r_{\max} , x_{\max} и n .

Этот факт имеет важное следствие: предельные значения $c_0(\infty)$ и $s_0(\infty)$ функций $c(r)$ и $s(r)$ с шестизначной точностью аппроксимируются соответствующими вычисленными значениями $\tilde{c}(x_{\max})$ и $\tilde{s}(x_{\max})$, поэтому для вычисления нормировочного множителя N_0 с шестизначной точностью достаточно в его определении (25) положить $c_0(\infty) = \tilde{c}(x_{\max})$.

Достигнутая точность вычисления радиальной волновой функции $u_0(r)$ определялась следующим способом. В качестве относительной невязки уравнения Шредингера (24) использовалась функция $D(r; u_0)$, определенная формулой

$$D(r; u_0) \equiv \frac{|\partial_r^2 u_0(r)|}{|V(r) u_0(r)| + \varepsilon}, \quad \varepsilon = 10^{-14}.$$

В этой формуле функция $u_0(r)$ заменялась ее интерполяционным приближением $S_{5,3}$. Полученная невязка $D(r; S_{5,3})$ вычислялась на трех разных сетках, содержащих 10^5 узлов, не совпадавших с узлами сетки (80), но принадлежащих отрезку $[r_0, r_{\max}]$. Оказалось, что на этом отрезке невязка $D(r; S_{5,3})$ не превышает величины порядка $O(10^{-6})$. Следовательно, функцию $u_0(r)$ удалось вычислить по крайней мере с точностью до шести значащих цифр.

Вычисленные значения ядерно-экранированных длины рассеяния и полного сечения упругого рассеяния при нулевой энергии довольно большие:

$$a \approx 2,19345 \cdot 10^7 \text{ ФМ}, \quad \sigma_{\text{tot}}(0) \equiv 4\pi a^2 \approx 6,04059 \cdot 10^{15} \text{ ФМ}^2.$$

Достигнутая точность вычисления функции $u_0(r)$ оказалась вполне достаточной для аппроксимации методом Гаусса с шестизначной точностью

матричного элемента (48) интегралом с той же подынтегральной функцией, но с конечным верхним пределом, равным 100 Фм. Вычисленное значение коэффициента $\Lambda_0^2 \approx 4 \cdot 10^{-131}$ настолько мало, что рост сечения протон-водородной реакции становится заметным в области сверхнизких энергий $E < \tau \Lambda_0^2 \approx 2 \cdot 10^{-152}$ кэВ.

Как отмечалось в разд. 1, малое значение квадрата $\Lambda_0^2 = \Lambda^2(0)$ ядерно-экранированного матричного элемента в пределе нулевой энергии является следствием большой величины константы $\beta = 144e^2d^3$ действующей асимптотики (8) потенциала Томаса–Ферми (7). Этот вывод подтверждают и результаты наших дополнительных вычислений, выполненных по следующей схеме.

Сначала в сумме $V(r) = V^\ell(r) + V^s(r)$ потенциал Томаса–Ферми (11) заменялся потенциалом

$$V^\ell(r; Z) \equiv \frac{1}{Rr} f(Z^{1/3}r/d), \quad d = \left(\frac{9\pi^2}{128} \right)^{1/3} a_B,$$

имеющим асимптотику

$$V^\ell(r; Z) \sim \frac{\alpha(Z)}{r^4}, \quad \alpha(Z) = 144 \frac{d^3}{RZ}, \quad r/d \rightarrow \infty.$$

В ней константа $\alpha(Z)$ убывает с ростом Z и поэтому эффект экранировки усиливается.

Затем при каждом наперед заданном значении Z вычислялся коэффициент $\Lambda_0^2(Z)$. Основной вывод выполненных вычислений такой: коэффициент $\Lambda_0^2(Z)$ возрастает с увеличением числа Z . Например, возрастающей последовательности $Z = 1, 10^2, 10^4, 10^8, 10^{12}$ соответствует следующая растущая последовательность:

$$\Lambda_0^2(Z) \approx 4 \cdot 10^{-131}, \quad 1 \cdot 10^{-58}, \quad 1 \cdot 10^{-25}, \quad 2 \cdot 10^{-4}, \quad 0,24.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Просуммируем основные результаты настоящей работы.

В разд. 1–4 развита линейная версия метода фазовых функций в квантовой механике. Предложено определение (23) фазы рассеяния, абсолютная величина которой превышает число π . Создан асимптотический метод исследования координатных и низкоэнергетических асимптотик регулярного решения S -волновой задачи рассеяния Шредингера (14), (15) в случае потенциала, имеющего сильную действующую асимптотику поляризационного типа (9). Метод основан на интегральном и операторном представлениях (31) и (38) дифференциальных уравнений (27), представлениях амплитудных функций в виде рядов (50), рекуррентных цепочках энергонезависимых краевых задач (27), (28) и (59)–(62), на представлениях (67) и уравнениях (68).

Этим методом воспроизведена давно известная низкоэнергетическая асимптотика функции эффективного радиуса (74) и впервые в рамках использованной эффективно-двухчастичной модели выведены явные низкоэнергетические представления нормировочного множителя (75) радиальной волновой функции рассеяния протона атомом водорода, ядерно-экранированного матричного элемента (76) и сечения протон-водородной реакции (48), (77). Показано, что вследствие экранировки ядра атома водорода его электроном такое сечение неограниченно возрастает в пределе нулевой энергии столкновения протона с атомом водорода по довольно простому закону: оно пропорционально обратной энергии их столкновения. Для вычисления коэффициента пропорциональности в разд. 5 предложен и реализован простой и надежный алгоритм, позволяющий контролировать точность расчета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пупышев В. В. Рассеяние протона атомом водорода в эффективно-двухчастичной модели. Препринт ОИЯИ Р4-2011-123. Дубна, 2011.
2. Меркурьев С. П., Фаддеев Л. Д. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
3. Браун Дж. Е., Джексон А. Д. Нуклон-нуклонные взаимодействия. Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1979.
4. Reeves H. Stellar Structure. Chicago–London: University of Chicago Press, 1965.
5. Соловьев В. Г. Теория атомного ядра. Ядерные модели. М.: Энергоиздат, 1981.
6. Кадоджеро Ф. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. Пер. с англ. М.: Мир, 1972.
7. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976.
8. Ферми Э. Научные труды / Под общ. ред. Б. Понтекорво. М.: Наука, 1971. Т. 1.
9. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Пер. с франц. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. Т. 1.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
11. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. М.: Наука, 1977. Т. 2.
12. Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
13. Reid R. V. Jr. // Ann. Phys. 1968. V. 50. P. 411.
14. Пупышев В. В., Соловцова О. П. // ЭЧАЯ. 1996. Т. 27. С. 859.
15. Пупышев В. В. // ЭЧАЯ. 1997. Т. 28. С. 1457.
16. O'Malley T. F. // Phys. Rev. 1963. V. 130. P. 1020.

Получено 20 декабря 2011 г.

Редактор *А. И. Петровская*

Подписано в печать 03.02.2012.

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 2,12. Уч.-изд. л. 2,67. Тираж 310 экз. Заказ № 57573.

Издательский отдел Объединенного института ядерных исследований
141980, г. Дубна, Московская обл., ул. Жолио-Кюри, 6.

E-mail: publish@jinr.ru

www.jinr.ru/publish/